МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

КИНЕМАТИКА

Методические указания по решению задач
по курсу: Теоретическая механика

Москва 2000

Составитель Н.М.Трухан

УДК 531

Кинематика. Методические указания по решению задач по курсу: Теоретическая механика. / МФТИ М., 1991. 32 с.

I. СПОСОБЫ ОПИСАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

1. Координатный способ задания движения точки

Любые три независимые величины q_1, q_2, q_3, однозначно определяющие положение точки в трехмерном пространстве, могут рассматриваться как координаты этой точки. При этом радиус-вектор точки является функцией этих координат, т.е. $\bar{r} = \bar{r}(q_1, q_2, q_3)$. При изменении одной из координат и фиксированных остальных конец радиуса-вектора $\bar{r}$ вычерчивает линию, которую называют координатной линией. Координатные линии, вообще говоря, кривые, и поэтому координаты называют криволинейными. Единичные орты $\bar{e}_i$, направленные по касательным к координатным линиям в точке М пространства в сторону возрастания соответствующих координат, определяют в каждой точке пространства систему координат, причем

$$\bar{e}_i = \frac{1}{\left|\dfrac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}\right|} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}.$$

Вектор скорости

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^{3} H_i \dot{q}_i \bar{e}_i \,, \qquad (1.1)$$

где

$$H_i = \left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}\,. \qquad (1.2)$$

Равенство (1.1) представляет собой разложение (а не ортогональное проецирование !) вектора скорости по осям криволинейной системы координат. Ортогональные проекции $V_{q_i\perp}$ вектора скорости на оси q_i равны

$$V_{q_i\perp} = \overline{V}\overline{e}_i = \frac{1}{H_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{V^2}{2}\right). \qquad (1.3)$$

Коэффициенты H_i называются коэффициентами Ламе и находятся из соотношения

$$dS_i = H_i dq_i,$$

где dS_i – дифференциал дуги i-й координатной линии при изменении i-й координаты и фиксированных остальных.
В самом деле, в прямоугольной системе координат

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \qquad (1.5)$$

но

$$dx = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x}{\partial q_i}dq_i, dy = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial y}{\partial q_i}dq_i, dz = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial z}{\partial q_i}dq_i..$$

Подставляя значения *dx, dy, dz* в (1.5), получим

$$dS^2 = \sum_{i=1}^{3} H_i^{\,2} dq_i^{\,2} + \sum_{i,k=1}^{3} H_{ik} dq_i dq_k, \qquad (1.6)$$

где

$$H_{ik} = \frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{\partial x}{\partial q_k} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\frac{\partial y}{\partial q_k} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\frac{\partial z}{\partial q_k}.$$

Предполагая, что изменяется лишь одна координата, а две другие фиксированы, получим (1.4), т.е. коэффициенты Ламе получаются как множители дифференциалов координат в выражениях для дифференциалов дуг соответствующих координатных линий. Если система криволинейных координат ортогональна, т.е. если при $i \neq k$

$$\bar{e}_i\bar{e}_k = \frac{1}{H_i H_k}\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{\partial x}{\partial q_k} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\frac{\partial y}{\partial q_k} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\frac{\partial z}{\partial q_k}\right) = 0, \quad (1.7)$$

то $H_{ik} = 0$ и $dS^2 = \sum_{i=1}^{3} H_i^{\,2} dq_i^{\,2}$.

Поэтому в случае ортогональной системы координат для модуля вектора скорости получаем

$$V = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} H_i^{\,2} \dot{q}_i^{\,2}}. \quad (1.8)$$

Ортогональные проекции вектора ускорения $\overline{W}$ точки на оси произвольной криволинейной системы координат имеют вид

$$W_{q_i} = \overline{W}\bar{e}_i = \frac{1}{H_i}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{V^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{V^2}{2}\right)\right]. \quad (1.9)$$

Как видно из формулы (1.9), проекции ускорения на координатные оси q_i получаются дифференцированием выражения для квадрата скорости. При этом следует иметь в виду, что q_i и $\dot{q}_i$ независимы, что отражает факт независимости событий: находиться в какой-либо точке пространства и иметь в этой точке какую-либо скорость. Кроме того, изучается не движение по некоторой заданной траектории, а способ описания любых движений. Иначе говоря, рассматривается вся совокупность допустимых движений и выбор точки пространства задает только ее положение, никак не ограничивая направление и величину вектора скорости.

Задача 1.1. Найти скорость движущейся точки и проекции ее ускорения на касательные к координатным линиям цилиндрической системы координат r, φ, z (рис. 1).

Решение. Так как система координат ортогональна, то

$$V^2 = \sum_{i=1}^{3} H_i^{\,2} \dot{q}_i .$$

Найдем коэффициенты Ламе, рассматривая элементы дуг вдоль соответствующих координатных линий.

$dS_r = dr$, откуда $H_r = 1$,

$dS_\varphi = rd\varphi$, откуда $H_\varphi = r$,

$dS_z = dz$, откуда $H_z = 1$.

Следовательно,

$$V^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 .$$

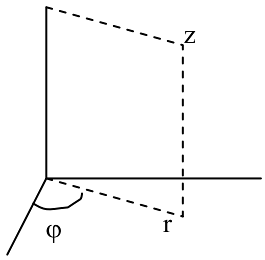

Рис. 1

Выполняя операции дифференцирования в соответствии с формулой (1.9), получаем

$$W_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 , \qquad W_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi},$$

$$W_z = \ddot{z}.$$

При движении точки в плоскости z = const первые две компоненты ускорения задают радиальную W_r и трансверсальную W_φ компоненты ускорения в полярной системе координат.

2. Описание движения точки с помощью осей естественного трехгранника

В каждой точке траектории можно построить три взаимно перпендикулярные оси, непосредственно связанные с траекторией. Если начало их помещено в движущуюся точку и направлено по касательной, нормали и бинормали траектории ($\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$ – единичные орты этой системы), то эти оси называются естественными осями. Вектор скорости $\bar{V}$ направлен по касательной к траектории $\bar{V} = V\bar{\tau}$. Вектор $\bar{W}$ всегда лежит в соприкасающейся плоскости траектории, и поэтому проекция его на бинормаль равна нулю $W_b = 0.$ Проекции вектора ускорения $\overline{W}$ на касательную и главную нормаль к траектории равны соответственно

$$W_\tau = \frac{dV}{dt},\ W_n = \frac{V^2}{\rho}, \tag{1.10}$$

где ρ – радиус кривизны траектории в данной точке.

Задача 1.2. Найти касательное W_τ и нормальное W_n ускорения точки, а также радиус кривизны ρ ее траектории, если движение точки выражается уравнениями

$$x = \alpha t,\ \ y = \beta t - \frac{gt^2}{2} \qquad \begin{pmatrix} \alpha = \text{const} \\ \beta = \text{const} \end{pmatrix}.$$

Решение. Для определения касательного и нормального ускорения найдем сначала скорость $\overline{V} = \dot{x}\overline{i} + \dot{y}\overline{j}.$

Так как $\dot{x} = \alpha,\ \dot{y} = \beta - gt$, то $V^2 = \alpha^2 + (\beta - gt)^2.$

Откуда $W_\tau = -\dfrac{g(\beta - gt)}{\sqrt{\alpha^2 + (\beta - gt)^2}}.$

Так как радиус кривизны траектории неизвестен, найдем нормальное ускорение W_n из равенства $W^2 = W_\tau^{\ 2} + W_n^{\ 2}.$

Для этого нужно сначала найти $\overline{W} = \ddot{x}\overline{i} + \ddot{y}\overline{j}.$ Так как $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = -g$, то $W = -g.$ Поэтому

$$W_n^{\ 2} = W^2 - W_\tau^{\ 2} = \frac{g^2\alpha^2}{\alpha^2 + (\beta - gt)^2}.$$

Теперь нетрудно определить

$$\rho^2 = \frac{V^6}{\alpha^2 g^2}, \ \ \rho = \frac{1}{\alpha g}\left[\alpha^2 + (\beta - gt)^2\right]^{\frac{3}{2}}.$$

II. КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

При произвольном движении твердого тела скорости и ускорения его точек могут быть найдены по формулам:

$$\overline{V}_i = \overline{V}_0 + \overline{\omega} \times \overline{\rho}_i, \qquad (2.1)$$

$$\overline{W}_i = \overline{W}_0 + \overline{\varepsilon} \times \overline{\rho}_i + \overline{\omega} \times \overline{\omega} \times \overline{\rho}_i, \qquad (2.2)$$

где $\overline{V}_0$ и $\overline{W}_0$ – скорость и ускорение выбранного полюса О, $\overline{\omega}$ и $\overline{\varepsilon}$ - угловые скорость и ускорение тела, ρ_i – радиус-вектор, проведенный из полюса О в рассматриваемую точку (рис. 2).

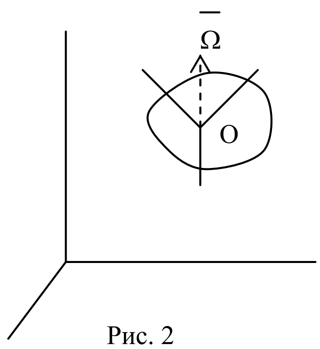

Рис. 2

Компоненты ускорения $\overline{W}^{вр} = \overline{\varepsilon} \times \rho_i$ и $\overline{W}^{ос} = \overline{\omega} \times \overline{\omega} \times \overline{\rho}_i$ соответственно называются вращательным и осестремительным ускорениями соответственно.

Угловая скорость тела не зависит от выбора полюса. Проекции скоростей точек тела на прямую, их соединяющую, равны. (Последнее утверждение несправедливо для ускорений).

Рассмотрим частные случаи движения тела.

1. <u>Плоскопараллельное движение твердого тела</u>

Плоскопараллельным движением тела называется такое движение, при котором всякое сечение тела плоскостью П, параллельной некоторой неподвижной плоскости $П_0$, остается в плоскости П. Поэтому такое движение сводится к движению плоской фигуры в ее плоскости. Из формулы (2.1) вытекает, что при $\overline{\omega} \neq 0$ (движение тела не является мгновенно поступательным) существует точка фигуры P, скорость которой $\overline{V}_P = 0.$ Эта точка называется мгновенным центром скоростей. Если в качестве полюса взять точку P, то из (2.1) получаем $\overline{V}_A = \overline{\omega} \times \overline{\rho}_A$, т.е. вектор скорости перпендикулярен прямой, соединяющей точку A с мгновенным центром скоростей P. Для определения положения мгновенного центра скоростей фигуры достаточно знать направления скоростей каких-либо двух точек этой фигуры. Мгновенный центр скоростей находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных их этих точек к направлениям их векторов скоростей. Если скорости выбранных точек параллельны, то перпендикуляры к их скоростям либо параллельны, либо совпадают. В первом случае движение фигуры мгновенно поступательное, во втором – мгновенный центр находится в точке пересечения общего перпендикуляра к скоростям с прямой, проходящей через концы векторов скоростей этих точек.

Так как при плоском движении $\overline{\omega} \perp \overline{\rho}$, то формула (2.2) для ускорения точек фигуры принимает вид

$$\overline{W}_i = \overline{W}_O + \overline{\varepsilon} \times \overline{\rho}_i - \omega^2 \overline{\rho}_i. \qquad (2.3)$$

В этом случае вращательная и осестремительная компоненты ускорения ортогональны.

<u>Задача 2.1</u>. Кривошип OA в изображенном на (рис. 3) механизме вращается вокруг оси O неподвижной шестерни 1 с угловым ускорением ε, имея в данный момент угловую скорость ω. Кривошип несет на себе

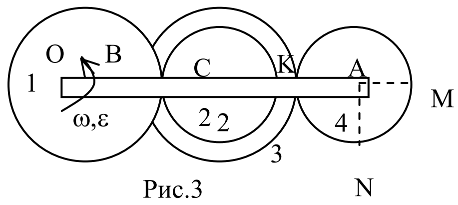

Рис.3

ось двойной шестерни 2-3, оканчиваясь в центре шестерни 4. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точек M и N шестерни 4 в момент, когда точки O, A и M лежат на одной прямой, а $OA \perp AN$. Радиусы шестерен $r_1 = r_3 = 2r, r_2 = r_4 = r.$

<u>Решение</u>. Скорость точек тела может быть найдена по формуле (2.1). Возьмем за полюс точку A. Она принадлежит как шестерне 4, так и кривошипу, поэтому скорость ее легко может быть найдена: $V_A = 6\omega r.$ Чтобы определить угловую скорость шестерни 4 ω_4, найдем положение мгновенного центра скоростей этой шестерни. Для этого достаточно знать скорости двух точек шестерни 4. Скорость точки A найдена. Определим, кроме того, скорость точки K касания шестерен 3 и 4. Точка B касания шестерен 1 и 2 является мгновенным центром скоростей для шестерни 2-3. Скорость центра C шестерни 2-3, с одной стороны, равна $V_C = 3\omega r$, так как точка C лежит на кривошипе, а с другой стороны, $V_C = \omega_2 r$, где ω_2 – абсолютная угловая скорость шестерни 2-3. Откуда $\omega_2 = 3\omega$ (направление ω_2 совпадает с направлением угловой скорости кривошипа), следовательно, $V_k = \left|\overline{\omega}_2 \times \overline{BK}\right| = 9\omega r$. Так как проскальзывание в системе отсутствует, то скорости точек касания между шестернями 2-3 и 4 равны между собой. Таким образом, мы знаем скорости точек A и K шестерни 4. Находим положение мгновенного центра скоростей P на пересечении общего перпендикуляра к скоростям точек A и K с прямой, проходящей через концы векторов $\overline{V}_A$ и $\overline{V}_K$ (рис. 4). При этом

$$\frac{V_K}{KP} = \frac{V_A}{KP - KA}.$$

Откуда $KP = 3r.$ Теперь нетрудно найти $\omega_4 :\ \omega_4 = V_K / KP = 3\omega$ (направление ω_4 противоположно направлению вектора угловой скорости кривошипа). Зная положение мгновенного центра скоростей, находим скорости точек М и N : $V_M = \omega_4 PM = 3\omega r$ (направление $\overline{V}_M$ совпадает с $\overline{V}_A$),

$V_N = 3\sqrt{5}\omega r\ (\overline{V}_N \perp PN)$ или по формуле (2.1):

$$V_M = \left|\overline{V}_A - \overline{\omega}_4 \times \overline{AM}\right| = 3\omega r,\ \ \overline{V}_N = \overline{V}_4 + \overline{\omega}_4 \times \overline{AM}$$

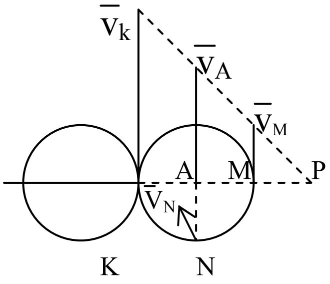

Рис. 4

и так как $\overline{V}_A \perp \left(\overline{\omega}_4 \times \overline{AN}\right)$, то

$$V_N = \sqrt{36\omega^2 r^2 + 9\omega^2 r^2} = \\ = 3\sqrt{5}\omega r.$$

Для определения ускорения точек M и N используем формулу (2.2), взяв в качестве полюса точку A. Ускорение точки A имеет касательную и нормальную составляющие:

$$W_{A\tau} = 6\varepsilon r,\quad W_{An} = 6\omega^2 r.$$

При плоском движении фигуры угловая скорость меняется только по величине, т.е. $\overline{\varepsilon} = \dfrac{d\overline{\omega}}{dt} = \dfrac{d\omega}{dt}\overline{\omega}_0$, где $\overline{\omega}_0$ – единичный орт, задающий направление вектора $\overline{\omega}$. Поэтому так как во все время движения соотношение между угловыми скоростями шестерни 4 и кривошипа сохраняется $\left(\omega_4(t) = 3\omega(t)\right)$, то такое же соотношение справедливо и для угловых ускорений: $\varepsilon_4 = 3\varepsilon.$ Следовательно,

$$W_M^{\,вр} = W_N^{\,вр} = 3\varepsilon r,\ W_M^{\,ос} = W_N^{\,ос} = 9\omega^2 r\,.$$

Проецируя компоненты ускорения точек M и N на два ортогональных направления (см. рис. 5), получаем

$$W_M = \sqrt{\left(W_{A\tau} - W_M^{\,вр}\right)^2 + \left(W_{An} + W_M^{\,oc}\right)^2} =$$
$$= 3r\sqrt{\varepsilon^2 + 25\omega^4},$$

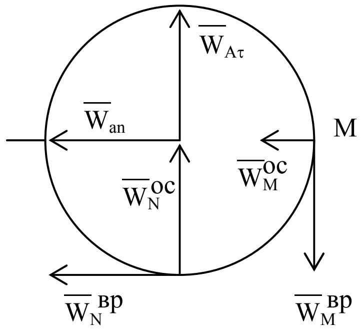

Рис. 5

$$W_N = \sqrt{\left(W_{A\tau} - W_N^{\,вр}\right)^2 + \left(W_{An} + W_N^{\,oc}\right)^2} =$$
$$= 3r\sqrt{5\varepsilon^2 + 13\omega^4 + 16\omega^2\varepsilon}.$$

2. Движение тела, имеющего одну неподвижную точку

Если твердое тело имеет одну неподвижную точку, то для каждого момента времени существует мгновенная ось вращения, проходящая через неподвижную точку O. Выбирая в качестве полюса эту точку, для скорости и ускорения произвольной точки тела в соответствии с (2.1) и (2.2) будем иметь

$$\overline{V}_M = \overline{\omega} \times \overline{OM}, \qquad (2.5)$$

$$\overline{W}_M = \overline{\varepsilon} \times \overline{OM} + \overline{\omega} \times \overline{\omega} \times \overline{OM} = \overline{W}_M^{\ вр} + \overline{W}_M^{\ oc}. \quad (2.6)$$

Вращательное ускорение перпендикулярно к плоскости, содержащей $\overline{\varepsilon}$ и ОМ. Осестремительное ускорение направлено перпендикулярно к вектору $\overline{\omega}_{вр}$ от точки М к оси вращения. Обратим внимание, что вектора $\overline{W}_M^{\ вр}$ и $\overline{W}_M^{\ oc}$ в общем случае не ортогональны (ср. с плоским движением).

Задача 2.2. Диск радиуса r катится без скольжения по горизонтальной плоскости, сохраняя свою плоскость вертикальной. Центр С диска описывает окружность радиуса R, причем величина скорости точки С меняется со временем по закону: $V = at.$ Найти абсолютную угловую скорость и абсолютное угловое ускорение диска. Найти ускорение точки М, положение которой на ободе диска определяется углом φ, показанным на (рис. 6).

Решение. Уравнение мгновенной оси $\overline{\omega} \times \overline{r} = 0$, т.е. скорости точек, лежащих на мгновенной оси, равны нулю. Во все время движения точка О остается неподвижной, точка А касания диска с плоскостью имеет в рассматриваемый момент скорость, равную нулю. Значит, мгновенная ось вращения все время проходит через точку О и в рассматриваемый момент совпадает с прямой ОА. Скорость точки С может быть представлена в виде

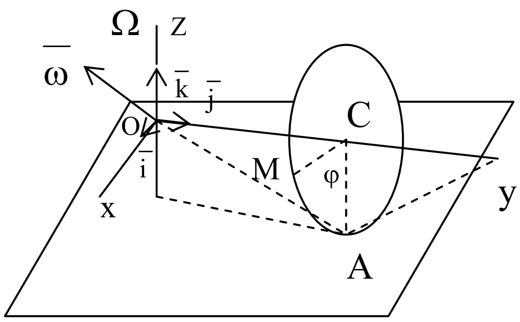

Рис. 6

$\overline{V_C} = \overline{\Omega} \times \overline{OC} = \overline{\omega} \times \overline{PC}$, где вектор $\overline{PC}$ задает расстояние точки C от мгновенной оси. Так как скорость точки C задана, то величина угловой скорости ω равна

$$\omega = \frac{V_C}{PC} = \frac{V}{Rr}\sqrt{R^2 + r^2} = \frac{at}{Rr}\sqrt{R^2 + r^2}.$$

Во время движения вектор $\overline{\omega}$ совпадает с мгновенной осью и описывает коническую поверхность вокруг оси OZ, вращаясь с угловой скоростью $\Omega = \dfrac{V_C}{OC} = \dfrac{at}{R}$.

Найдем вектор углового ускорения $\overline{\varepsilon}$. Пусть $\overline{\omega} = \omega \overline{\omega}_O$, где $\overline{\omega}_O$ – единичный орт вектора $\overline{\omega}$. Тогда

$$\overline{\varepsilon} = \frac{d\overline{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\overline{\omega}_O + \overline{\Omega} \times \overline{\omega}, \text{ (т.к. } \frac{d\overline{\omega}_O}{dt} = \overline{\Omega} \times \overline{\omega}_O\text{)}.$$

Первое слагаемое в этом выражении задает изменение вектора угловой скорости по величине, а второй – изменение $\overline{\omega}$ по направлению. Если, например, $\left|\overline{\omega}\right| = \text{const}$, то $\overline{\varepsilon} = \overline{\Omega} \times \overline{\omega}$, и движение называется регулярной прецессией, а вектор $\overline{\varepsilon}$ направлен по касательной к окружности, которую описывает конец вектора $\overline{\omega}$.

В нашем случае составляющая $\varepsilon_1 = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{a\sqrt{R^2 + r^2}}{(Rr)}$ направлена по мгновенной оси, а составляющая $\varepsilon_2 = \left|\overline{\Omega} \times \overline{\omega}\right| = \dfrac{at^2}{Rr}$ и направлена перпендикулярно плоскости AOC.

Вращательное и осестремительное ускорения точки M найдем по формуле (2.6). В проекциях на три ортогональных направления (см. рис. 6) это дает

$$\overline{W}^{вр} = \overline{\varepsilon} \times \overline{OM} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{a^2t^2}{(Rr)} & -\dfrac{a}{r} & \dfrac{a}{R} \\ r\sin\varphi & R & -r\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i}\,a(\cos\varphi - 1) + \bar{j}\frac{a}{R}\left(at^2\cos\varphi + r\sin\varphi\right) +$$

$$+ \bar{k}\frac{a}{r}\left(at^2 + r\sin\varphi\right),$$

$$\overline{W}^{oc} = \overline{\omega} \times \overline{\omega} \times \overline{OM} =$$

$$= \left(-\frac{at}{r}\bar{j} + \frac{at}{R}\bar{k}\right)\left(-\frac{atR}{r} - \frac{atr}{R}\cos\varphi\right) -$$

$$-\left(\bar{i}r\sin\varphi + \bar{j}R - \bar{k}r\cos\varphi\right)\left(\frac{a^2t^2}{r^2} + \frac{a^2t^2}{R^2}\right) =$$

$$= \frac{a^2t^2}{rR^2}\left[\bar{i}\left(R^2 + r^2\right)\sin\varphi - \bar{j}2rR\sin^2\frac{\varphi}{2} - \bar{k}2R^2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right].$$

Если, например, точка М совпадает с точкой А, то $\varphi = 0$ и поэтому

$$\overline{W}_A^{вр} = \bar{j}\frac{a^2t^2}{R} + \bar{k}\frac{a^2t^2}{r},\ \overline{W}_A^{oc} = 0,$$

($\overline{W}_A^{oc}$ равно нулю, так как точка А лежит на мгновенной оси). Вектор $\overline{W}_A^{вр}$ лежит в плоскости АОС и ортогонален прямой ОА.

III. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

Если точка М движется относительно некоторой среды, которая в свою очередь тоже движется относительно среды, принятой за неподвижную, то такое движение называется сложным движением точки. Свяжем с подвижной средой систему отсчета $O\xi_1\xi_2\xi_3$, а с неподвижной средой – систему отсчета $O_1x_1x_2x_3$. Движение точки М относительно подвижной среды называют относительным, движение подвижной среды относительно неподвижной – переносным, а движение точки М относительно неподвижной среды называется абсолютным.

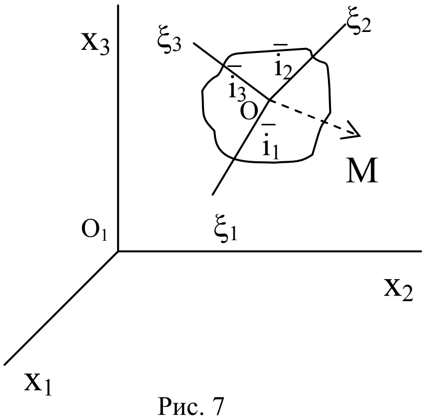

Рис. 7

По теореме о сложении скоростей

$$\overline{V}_a = \overline{V}_e + \overline{V}_r, \tag{3.1}$$

где $\overline{V}_a$ – абсолютная скорость, $\overline{V}_r$ – относительная скорость, $\overline{V}_e$ – переносная скорость.

Положение точки М относительно подвижной среды задается вектором $\overline{OM} : \overline{OM} = \sum_{j=1}^{3} \xi_j \bar{l}_j$, поэтому относительно этой среды скорость точки М определяется соотношением

$$\overline{V}_r = \sum_{j=1}^{3} \dot{\xi}_j \overline{l}_j . \qquad (3.3)$$

Переносная скорость точки М – это скорость той точки подвижной среды, с которой в данный момент совпадает точка М, т.е.

$$\overline{V}_e = \overline{V}_O + \overline{\omega}_e \times \overline{OM}, \qquad (3.3)$$

где $\overline{\omega}_e$ – угловая скорость подвижной среды. При этом следует иметь в виду, что определяя относительную скорость, мы мысленно останавливаем переносное движение и, наоборот, при отыскании переносной скорости фиксируем положение точки в подвижной среде.

Абсолютное ускорение $\overline{W}_a$ получается по теореме Кориолиса:

$$\overline{W}_a = \overline{W}_r + \overline{W}_e + \overline{W}_k , \qquad (3.4)$$

где относительное ускорение точки М равно

$$\overline{W}_r = \sum_{j=1}^{3} \ddot{\xi}_j \overline{l}_j , \qquad (3.5)$$

переносное ускорение – ускорение точки подвижной среды, с которой совпадает в рассматриваемый момент точка М – выражается соотношением

$$\overline{W}_e = \overline{W}_O + \overline{\varepsilon}_e \times \overline{OM} + \overline{\omega}_e \times \overline{\omega}_e \times \overline{OM} , \qquad (3.6)$$

что совпадает с выражением для ускорения точки в формуле (2.2), задающей ускорение точки твердой среды при произвольном движении.

Ускорение $\overline{W}_k$ называется ускорением Кориолиса и равно

$$\overline{W}_k = 2\overline{\omega}_e \times \overline{V}_r . \qquad (3.7)$$

В формулах (3.6) и (3.7) $\overline{\omega}_e$ и $\overline{\varepsilon}_e$ – угловые скорость и ускорение подвижной среды.

<u>Задача 3.1</u>. Точка М равномерно движется по меридиану шара радиуса R со скоростью V. Шар вращается вокруг вертикального диаметра с постоянным угловым ускорением ε. Найти абсолютные скорость и ускорение точки М в зависимости от угла широты φ, если в начальный момент шар покоился, а точка М находилась на экваторе.

<u>Решение.</u> Движение точки М по меридиану шара – относительное движение. Вращение шара – переносное движение. Тогда относительная скорость $V_r = V$. Если начало подвижной системы взять в точке О, тогда $V_O = 0,\ \omega_e = \varepsilon t$ и OM=R $V_e = \varepsilon t R\cos\varphi$. Так как вектор $\overline{V}_r$ направлен в данный момент по касательной к меридиану (траектории относительного движения), а вектор $\overline{V}_e$ по касательной к параллели (траектории переносного движения), то они ортогональны и поэтому

$$V_a = \sqrt{V^2{}_r + V^2{}_e} = \sqrt{V^2 + \varepsilon^2 t^2 R^2 \cos^2\varphi}.$$

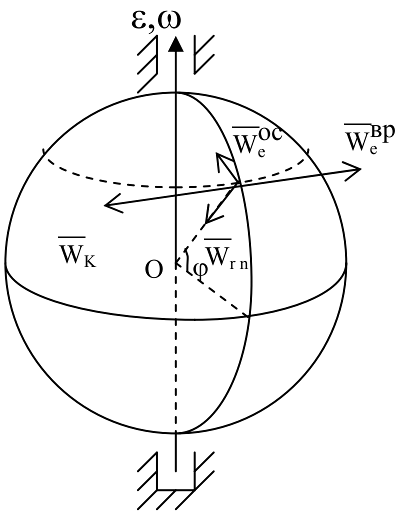

Рис. 8

Ускорение точки М находим по формуле (3.4). Ускорение относительного движения зададим в проекциях на оси естественного трехгранника. При этом $W_{r\tau} = 0$, так как относительное движение равномерное, а $W_{rn} = V_r^2 / \rho_r = V^2 / R$ (здесь ρ_r – радиус кривизны траектории точки М в относительном движении). Переносное ускорение находим с помощью формулы (3.6). В силу выбора подвижной системы координат $\overline{W}_O = 0$,

$$W_e^{вр} = \left|\overline{\varepsilon}_e \times \overline{OM}\right| = \varepsilon R \cos\varphi,$$

$$W_e^{oc} = \left|\overline{\omega}_e \times \overline{\omega}_e \times \overline{OM}\right| = \varepsilon^2 t^2 R \cos\varphi.$$

Кориолисово ускорение $W_k = 2\varepsilon t v \sin\varphi.$

Компоненты ускорения представлены на рис.8. Проецируя компоненты ускорения на три ортогональные направления, находим величину абсолютного ускорения точки М:

$$W_a = \sqrt{\left(W_e^{oc} + W_{rn}\cos\varphi\right)^2 + \left(W_{rn}\sin\varphi\right)^2 + \left(W_e^{вр} - W_k\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\varepsilon^2 t^2 R\cos\varphi + \frac{v^2}{R}\cos\varphi\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}\sin^2\varphi + \atop + \left(\varepsilon R\cos\varphi + 2\varepsilon t v \sin\varphi\right)^2}.$$

IV. СЛОЖЕНИЕ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Если твердое тело движется относительно некоторой подвижной среды и вместе с ней движется относительно другой, принятой за неподвижную, то иногда оказывается удобным при определении скоростей и ускорений точек тела пользоваться формулами сложного движения точки (3.3) и (3.4).

При этом угловые скорость и ускорение удовлетворяют соотношениям:

$$\overline{\omega}_a = \overline{\omega}_e + \overline{\omega}_r, \tag{4.1}$$

$$\overline{\varepsilon}_a = \overline{\varepsilon}_e + \overline{\varepsilon}_r + \overline{\omega}_e \times \overline{\omega}_r. \tag{4.2}$$

При решении задач для определения угловых скоростей в плоских механизмах часто применяют метод Виллиса.

Для этого вводят систему отсчета, неизменно связанную с кривошипом (рис. 9). В этой системе отсчета кривошип неподвижен, а абсолютные угловые скорости всех колес изменятся на величину Ω угловой скорости кривошипа (относительные угловые скорости $\overline{\omega}_{ir} = \overline{\omega}_i - \overline{\Omega}$).

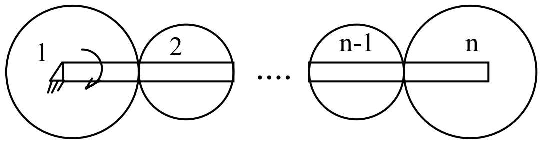

Рис. 9

После этого, рассматривая каждую пару колес, находящихся в зацеплении, можно записать соотношения для скоростей точек соприкосновения, как если бы колеса вращались вокруг неподвижных осей:

$$\omega_{ir} r_i = \pm \omega_{(i+1)r} r_{i+1}$$

или

$$(\omega_i - \Omega) r_i = \pm (\omega_{i+1} - \Omega) r_{i+1},$$

где знак “+” ставится в случае внутреннего, а знак “–“ в случае внешнего зацепления между колесами.

<u>Задача 4.1</u>. Решить задачу 2.1, используя формулы кинематики сложного движения точки.

<u>Решение</u>. Движение точек N и M шестерни 4 можно представить как сложное. Подвижную систему отсчета можно выбрать различными способами. Рассмотрим два из них:

1. Система координат вращается с угловой скоростью кривошипа, начало ее помещено в точку O.

2. Система координат движется поступательно, имея начало в точке A.

Исходя из формул (3.1) и (3.4) проследим, как изменяются при этих выборах подвижной системы отсчета составляющие скорости и ускорения точек M и N.

1. В переносном движении точка M (N) будет двигаться по окружности радиуса $OM = 7r \ \left(ON = \sqrt{37}r\right)$ с центром в неподвижной точке O, причем

$\omega_e = \omega, \varepsilon_e = \varepsilon.$ Значит,

$$\bar{v}_{eM} = \bar{v}_O + \bar{\omega}_e \times \overline{OM} = \bar{\omega}_e \times \overline{OM},$$

$$v_{eM} = 7\omega r, \ \left(v_{eN} = \sqrt{37}\omega r\right),$$

$$\overline{W}_{eM} = \overline{W}_O + \bar{\varepsilon}_e \times \overline{OM} + \bar{\omega}_e \times \bar{\omega}_e \times \overline{OM} = \overline{W}_{eM}{}^{вр} + \overline{W}_{eM}{}^{ос},$$

$$W_{eM}{}^{вр} = 7\varepsilon r, \ \ W_{eM}{}^{ос} = 7\omega^2 r,$$

$$W_{eN}{}^{вр} = \sqrt{37}\varepsilon r, \ W_{eN}{}^{ос} = \sqrt{37}\omega^2 r.$$

Относительное движение точки M (N) – движение ее вместе с шестерней 4, которая вращается относительно выбранной подвижной системы с угловым ускорением ε_{4r} и имеет в данный момент угловую скорость ω_{4r}. Для определения ω_{4r} воспользуемся методом Виллиса. Обозначим абсолютные угловые скорости шестерен $\omega_1 = 0, \ \omega_2 = \omega_3, \ \omega_4$. (Это их абсолютные значения). Перейдем в систему координат, жестко связанную с кривошипом. По отношению к этой системе угловые скорости шестерен будут соответственно:

$$\omega_{1r} = \omega, \ \ \omega_{2r} = \omega_2 - \omega,$$

$$\omega_{3r} = \omega_3 - \omega, \ \ \omega_{4r} = \omega_4 - \omega.$$

Так как проскальзывание в системе отсутствует, то можно приравнивать между собой относительные линейные скорости точек касания. Учтем теперь, что при внешнем зацеплении шестерни вращаются в противоположных направлениях. Получим

$$(-\omega)r_1 = -(\omega_2 - \omega)r_2 = -\omega_{2r} r_2 ,$$

$$(\omega_3 - \omega)r_3 = \omega_{3r} r_3 = -(\omega_4 - \omega)r_4 = -\omega_{4r} r_4 ,$$

откуда $\omega_{4r} = -4\omega.$ Здесь знак “–“ показывает, что угловая скорость ω_{4r} противоположна угловой скорости кривошипа. Так как в рассматриваемом случае система совершает плоскопараллельное движение и $\omega_e \| \omega_r$, то формула (4.2) принимает вид $\bar{\varepsilon}_a = \bar{\varepsilon}_e + \bar{\varepsilon}_r$. Таким образом, зная $\bar{\varepsilon}_a$ и $\bar{\varepsilon}_e$, находим: $\varepsilon_{4r} = -4\varepsilon$.

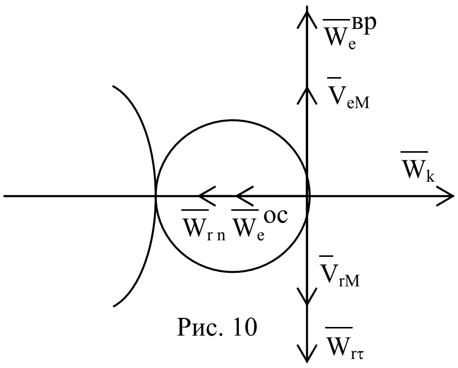

Рис. 10

Теперь можно найти величины относительных скоростей V_{rM}, V_{rN} и ускорений W_{rM}, W_{rN}. Относительные скорости $V_{rM} = V_{rN} = 4\omega r$.

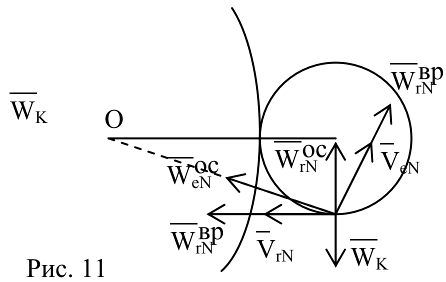

Рис. 11

Так как относительное движение тела чисто вращательное, то касательная составляющая $\overline{W}_{r\tau}$ ускорения совпадает с вращательной

$W_r^{вр}$, а нормальная W_{rn} – с осестремительной W_r^{oc}:

$$W_{r\tau} = W_{rM}{}^{вр} = W_{rN}{}^{вр} = 4\varepsilon r,\quad W_{rn} = W_{rM}{}^{oc} = W_{rN}{}^{oc} = 16\omega^2 r$$

(это не всегда справедливо, так как направления $\overline{W}_{r\tau}$ и $\overline{W}_{rn}$ определяются траекторией движения точки, а $\overline{W}_r^{вр}$ и $\overline{W}_r^{oc}$ зависят от выбора полюса, с помощью которого записывается выражение ускорения точки тела (см. формулу (2.2)).

Кориолисово ускорение:

$$\left|\overline{W}_{KM}\right| = \left|W_{KN}\right| = 2\omega 4\omega r = 8\omega^2 r.$$

Направления составляющих скоростей и ускорений точек M и N представлены на рис. 10 и 11. Складывая соответствующие составляющие для модулей векторов скорости и ускорения, получаем

$$V_{aM} = V_{eM} - V_{rM} = 3\omega r,$$

$$V_{aN} = \sqrt{\left(\frac{6}{\sqrt{37}}V_{eN}\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{37}}V_{eN} - V_{rN}\right)^2} = 3\sqrt{5}\omega r,$$

$$W_{aM} = \sqrt{\left(W_K - W_e^{oc} - W_{rN}\right)^2 + \left(W_e^{вр} - W_{r\tau}\right)^2} =$$

$$= 3r\sqrt{\varepsilon^2 + 25\omega^4},$$

$$W_{aN} = \sqrt{\begin{array}{l}\left(\dfrac{6}{\sqrt{37}}W_e^{вр} - W_K + W_e^{oc}\dfrac{1}{\sqrt{37}} + W_r^{oc}\right)^2 + \\ + \left(\dfrac{W_e^{вр}}{\sqrt{37}} - \dfrac{6W_e^{oc}}{\sqrt{37}} - W_r^{вр}\right)^2\end{array}} =$$

$$= 3r\sqrt{13\omega^4 + 5\varepsilon^2 + 16\omega^2\varepsilon}.$$

2. Так как подвижная система координат движется теперь поступательно, то $\omega_e = 0,\ \varepsilon_e = 0.$ Поэтому

$$V_e = V_A = 6\omega r,\ W_e = W_A,\ \left(W_{A\tau} = 6\varepsilon r,\ W_{An} = 6\omega^2 r\right).$$

Относительное движение – движение точки M (N) по окружности радиуса r с центром в точке A. При этом

$$\bar{v}_r = \bar{\omega}_4 \times \overline{AM},\ \ \overline{W}_r = \overline{W}_r^{\,вр} + \overline{W}_r^{\,ос}.$$

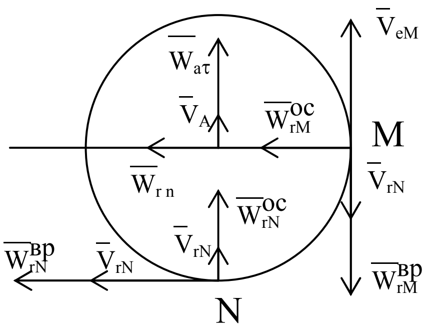

Рис. 12

Относительные угловая скорость и угловое ускорение совпадают в данном случае с абсолютным (см. формулы (4.1) и (4.2)).

Следовательно,

$$V_{rM} = V_{rN} = 3\omega r,$$

$$W_{rM}^{\,вр} = W_{rN}^{\,вр} = 3\varepsilon r,$$

$$W_{rN}^{\,ос} = W_{rN}^{\,ос} = 9\omega^2 r,$$

$$W_{KM} = W_{KN} = 0.$$

Так как система отсчета движется поступательно, то для величины скорости и ускорения точек M и N получаем (см. рис. 12)

$$V_M = V_A - V_{rM} = 3\omega r,\ V_N = \sqrt{V_A^{\,2} + V_{rN}^{\,2}} = 3\sqrt{5}\omega r,$$

$$W_M = \sqrt{\left(W_{A\tau} - W_r^{\,вр}\right)^2 + \left(W_{An} + W_r^{\,ос}\right)^2} = 3r\sqrt{\varepsilon^2 + 25\omega^4},$$

$$W_N = \sqrt{\left(W_{A\tau} + W_r^{\,ос}\right)^2 + \left(W_{An} + W_r^{\,вр}\right)^2} =$$

$$= 3r\sqrt{13\omega^4 + 5\varepsilon^2 + 16\omega^2\varepsilon}.$$

<u>Задача 4.2.</u> Решить задачу 2.2 с помощью формул сложного движения точки.

<u>Решение.</u> Если рассматривать движение диска как сложное, то можно, например, взять в качестве относительного движения вращение диска вокруг оси ОС, а переносным тогда будет вращение диска вместе с осью ОС вокруг оси OZ. Так как центр диска участвует только в переносном движении, легко найти переносную угловую скорость:

$$\omega_e = V_c / R = at / R.$$

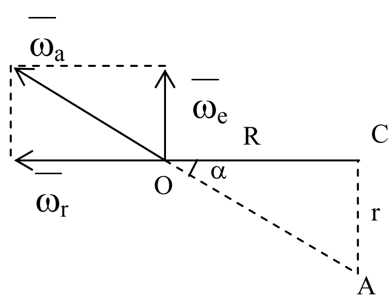

Рис. 13

Зная ω_e, находим ω_r:

$$\omega_a = \frac{at}{rR}\sqrt{R^2 + r^2},$$

$$\omega_r = \omega_e \operatorname{ctg}\alpha = at / r$$

(см. рис. 13). Соответственно $\varepsilon_e = a / R$, $\varepsilon_r = -a / r$, так как переносное и относительное движения – вращения вокруг неподвижных в соответствующих системах осей. Абсолютное угловое ускорение получим по формуле (4.2):

$$\overline{\varepsilon}_a = \overline{\varepsilon}_e + \overline{\varepsilon}_r + \overline{\omega}_e \times \overline{\omega}_r = \bar{i}\,\frac{a^2t^2}{rR} - \bar{j}\,\frac{a}{r} + \bar{k}\,\frac{a}{R}$$

Компоненты ускорения точки М найдем по формуле Кориолиса. В проекциях на три ортогональных направления они имеют вид (см.рис.6)

$$\overline{W}_e^{вр} = \bar{\varepsilon}_e \times \overline{OM} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & a/R \\ r\sin\varphi & R & -r\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$-\bar{i}\,a + \bar{j}\,\frac{ar}{R}\sin\varphi,$$

$$\overline{W}_e^{oc} = \overline{\omega}_e \times \overline{\omega}_e \times \overline{OM} = -\bar{i}\,\frac{a^2t^2}{R^2}\,r\sin\varphi - \bar{j}\,\frac{a^2t^2}{R},$$

$$\overline{W}_r^{вр} = \bar{\varepsilon}_r \times \overline{CM} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & -a/r & 0 \\ r\sin\varphi & 0 & -r\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i}\,a\cos\varphi + \bar{k}a\sin\varphi,$$

$$\overline{W}_r^{oc} = \overline{\omega}_r \times \overline{\omega}_r \times \overline{CM} = -\omega_r^{\,2}\,\overline{CM} =$$

$$= \frac{a^2t^2}{r}\left(\bar{i}\sin\varphi - \bar{k}\cos\varphi\right),$$

$$\overline{W}_K = 2\overline{\omega}_e \times \bar{v}_r = 2\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & at/R \\ at\cos\varphi & 0 & at\sin\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{j}\,\frac{2a^2t^2}{R}\cos\varphi.$$

V. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ СКОЛЬЗЯЩИХ ВЕКТОРОВ В КИНЕМАТИКЕ

При рассмотрении сложного движения твердого тела требуется найти распределение скоростей точек тела. При этом возникает задача о сложении движений.

Когда говорят о сложении двух вращений или вращательного и поступательного движений тела, то подразумевают, что одно из этих движений тело совершает по отношению к подвижной системе отсчета, а другое – подвижная система отсчета по отношению к неподвижной.

Рассмотрим сначала сложение вращательных движений. Покажем, что при этом вектор $\overline{\omega}$ ведет себя как скользящий вектор, т.е. характеризуется величиной, направлением и линией действия.

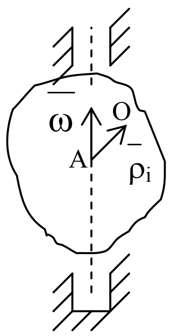

Рис. 14

Пусть тело совершает вращательное движение вокруг некоторой оси. Вектор угловой скорости $\overline{\omega}$ задает направление вращения и скорость изменения угла поворота тела. При этом распределение скоростей точек тела $\overline{V}_i = \overline{\omega} \times \overline{\rho}_i$ в силу свойств векторного произведения не зависит от того, в какой точке оси вращения мы построим вектор $\overline{\omega}$.

Момент скользящего вектора относительно полюса O вводится в соответствии с равенством $\overline{m}_O(F) = \overline{r} \times \overline{F} = \overline{OA} \times \overline{F}$, где $\overline{OA}$ – радиус-вектор, проведенный из полюса O в любую точку A на линии действия вектора $\overline{F}$. Рассмотрим момент вектора $\overline{\omega}$ относительно полюса O:

$$\overline{m}_O(\overline{\omega}) = \overline{OA} \times \overline{\omega} = \overline{\omega} \times \overline{OA}. \qquad (5.1)$$

Но $\overline{\omega} \times \overline{AO}$ – вектор линейной скорости точки О при вращении тела вокруг оси с угловой скоростью $\overline{\omega}$, т.е. понятие вектора момента скользящего вектора относительно полюса имеет эквивалент в кинематике в виде вектора линейной скорости полюса О при вращении тела вокруг неподвижной оси. Таким образам, при изучении поля скоростей точек твердого тела вектор $\overline{\omega}$ можно считать скользящим вектором.

Рассмотрим теперь распределение скоростей точек твердого тела при других движениях и покажем, что сформулированный вывод ($\overline{\omega}$ – скользящий вектор) сохраняет свою силу.

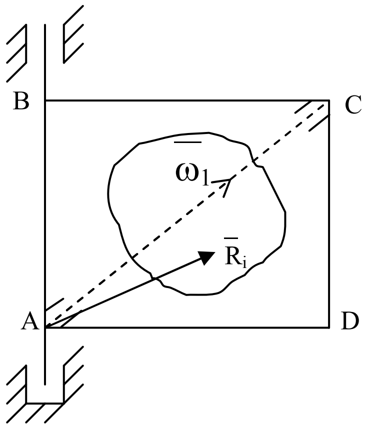

Рис. 15

Задача 5.1. Тело участвует в двух вращениях вокруг пересекающихся осей, т.е. тело вращается с угловой скоростью $\overline{\omega}_1$ вокруг некоторой оси АС (относительное движение), а сама ось вращается с угловой скоростью $\overline{\omega}_2$ вокруг оси АВ, пересекающейся с первой (переносное движение). Найти поле скоростей точек тела.

Решение. Воспользуемся формулой (3.1) сложения скоростей. При этом переносная скорость произвольной точки тела $\overline{V}_e = \overline{\omega}_2 \times \overline{R}_i$, относительная скорость $\overline{V}_r = \overline{\omega}_1 \times \overline{R}_i$. Подставляя $\overline{V}_e$ и $\overline{V}_r$ в (3.1), получаем

$$\overline{V}_{ai} = \left(\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2\right) \times \overline{R}_i.$$

Обозначим $\overline{\Omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2$. Тогда $\overline{V}_{ai} = \overline{\Omega} \times \overline{R}_i$.

То есть мы получили, что распределение скоростей точек твердого тела таково, как если бы оно вращалось вокруг оси, направление которой в данный момент определяется вектором $\overline{\Omega}$. Таким образом, мы получаем, что угловые скорости, как и любые скользящие векторы с пересекающимися линиями действия, складываются по правилу параллелограмма.

Задача 5.2. Тело вращается с угловой скоростью $\overline{\omega}_1$ вокруг оси 1-1. Ось 1-1 в свою очередь вращается вокруг параллельной ей оси 2-2 с угловой скоростью $\overline{\omega}_2$. Найти распределение скоростей точек тела при следующих условиях: а) направления $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$ совпадают; б) направления $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$ противоположны и $|\overline{\omega}_1| > |\overline{\omega}_2|$; в) направления $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$ противоположны и $|\overline{\omega}_1| = |\overline{\omega}_2|$.

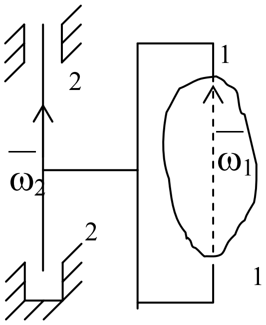

Рис. 16

Решение. Вращение тела вокруг оси 1-1 примем за относительное, а вращение самой оси 1-1 – за переносное.

Очевидно, при всех указанных условиях движение тела будет плоскопараллельным и скорости точек, расположенных на какой-либо прямой, параллельной угловым скоростям, будут в данный момент одинаковы. Поэтому достаточно рассмотреть скорости точек, расположенных в любой плоскости П, перпендикулярной к $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$.

Случай а). Пусть плоскость П пересекает плоскость $(\overline{\omega}_1 \overline{\omega}_2)$ по прямой АВ. Тогда скорость произвольной точки N отрезка AB в соответствии с теоремой сложения скоростей может быть получена из равенства

$$\overline{V}_N = \overline{V}_{Nr} + \overline{V}_{Ne} = \overline{\omega}_1 \times \overline{BN} + \overline{\omega}_2 \times \overline{AN}. \qquad (5.2)$$

Так как слагаемые в равенстве (5.2) представляют собой противоположно направленные векторы, то на отрезке AB найдется такая точка C, для которой эти векторы равны по модулю, и поэтому $\overline{V}_C = 0$. Положение этой точки определяется равенством $\omega_2 AC = \omega_1 BC$, откуда $AC / BC = \omega_1 / \omega_2$. Для произвольной точки M плоской фигуры, учитывая, что

$$\overline{AM} = \overline{AC} + \overline{CM},$$

$$\overline{BM} = \overline{BC} + \overline{CM},$$

из (5.2) получаем

$$\overline{V}_M = \left(\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2\right) \times \overline{CM}$$

или, обозначая

$$\overline{\Omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2,$$

$$\overline{V}_M = \overline{\Omega} \times \overline{CM}.$$

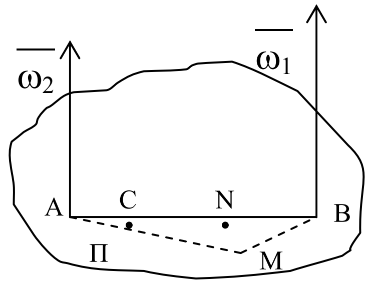

Рис. 17

Таким образом, картина распределения скоростей точек в этом случае такая же, как если бы движение было чистым вращением вокруг оси, параллельной $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$, лежащей между осями 1-1 и 2-2 на расстояниях, обратно пропорциональных модулям угловых скоростей. При этом вектор угловой скорости $\overline{\Omega}$ результирующего движения равен сумме векторов $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$.

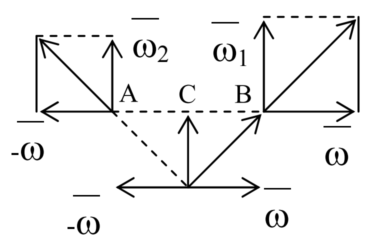

Рис. 18

К такому же результату мы придем, исходя из теории скользящих векторов. В самом деле, добавим векторный нуль $\left(\overline{\omega}, -\overline{\omega}\right)$ к системе векторов $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$ (см. рис. 18) и сложим векторы $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}$, $\overline{\omega}_2$ и $-\overline{\omega}$. Пользуясь свойством скользящих векторов скользить вдоль линии действия (см. задачу 5.1), перенесем полученные векторы в точку их пересечения и сложим снова. Горизонтальные компоненты дадут векторный нуль, а вертикальные сложатся $\overline{\Omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2$.

Случай б). Проводя аналогичные рассуждения, убеждаемся, что в случае, когда векторы $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$ направлены в противоположные стороны, результирующее движение представляет собой вращение с угловой скоростью $\overline{\Omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2$. При этом вектор $\overline{\Omega}$ лежит в плоскости $\left(\overline{\omega}_1 \overline{\omega}_2\right)$, параллелен векторам $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$, направлен в сторону большей из них и проходит через точку, лежащую на продолжении отрезка АВ за вектором большей по модулю угловой скорости.

Случай в). Векторы $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$ образуют пару. Используя формулу (3.1) и учитывая, что $\overline{\omega}_1 = -\overline{\omega}_2$, $\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MB}$, для скорости произвольной точки М тела имеем

$$\overline{V}_{aM} = \overline{\omega}_1 \times \overline{BM} + \overline{\omega}_2 \times \overline{AM} = \overline{\omega}_1 \times \overline{BA}.$$

Мы получили, что скорости всех точек тела в данный момент совпадают между собой, т.е. движение тела мгновенно поступательное. Таким образом, пара вращений дает чисто поступательное движение.

Обратно, всякая поступательная скорость может быть представлена в виде пары мгновенных угловых скоростей, плоскость которой перпендикулярна к $\overline{V}$.

Из теории скользящих векторов известно, что пара скользящих векторов характеризуется моментом пары, который является свободным вектором. То есть мы снова делаем совпадающие выводы из формул кинематики и из теории скользящих векторов. Обратим внимание еще на такой факт. Пусть тело в данный момент вращается вокруг оси, проходящей через точку A, с угловой скоростью $\overline{\omega}$. Построим в точке B тела векторный нуль, образованный двумя векторами угловой скорости $\overline{\omega}' = \overline{\omega}$ и $-\overline{\omega}' = -\overline{\omega}$. Векторы $\overline{\omega}$ и $-\overline{\omega}'$ образуют пару с моментом $\overline{V} = \overline{\omega} \times \overline{AB}$ (поступательная скорость), вектор $\overline{\omega}'$ определяет вращательное движение. Значит, вращение тела с угловой скоростью $\overline{\omega}$ вокруг оси, проходящей через точку A, эквивалентно сумме двух движений: мгновенному вращению с такой же по модулю угловой скоростью $\overline{\omega}' = \overline{\omega}$ вокруг параллельной оси, проходящей через точку B, и поступательному движению со скоростью $\overline{V} = \overline{\omega} \times \overline{AB}$.

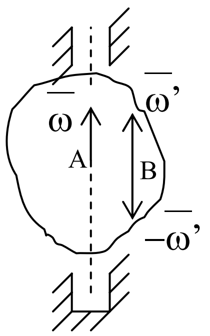

Рис. 19

Тем самым мы убедились, что вектор $\overline{\omega}$, как и всякий скользящий вектор, приложенный в точке A, можно, не изменяя его действия,

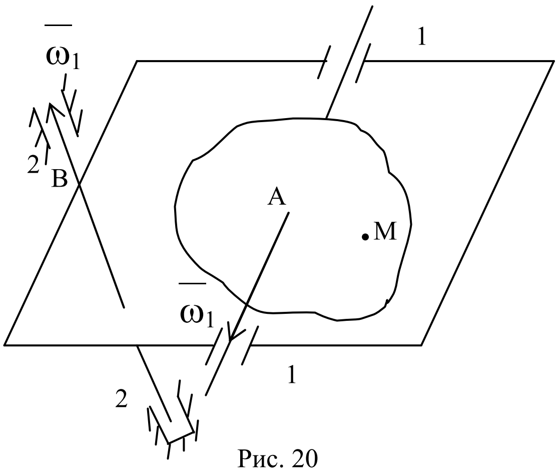

Рис. 20

перенести в любую точку В,
прибавив при этом пару с моментом, равным моменту приложенного в точке А вектора $\overline{\omega}$ относительно точки В.

Задача 5.3. Найти распределение скоростей точек тела, вращающегося с угловой скоростью $\overline{\omega}_1$ вокруг оси 1-1, укрепленной на платформе. Платформа вращается с угловой скоростью $\overline{\omega}_2$ вокруг оси 2-2. Оси 1-1 и 2-2 скрещиваются.

Решение. Скорость любой точки тела М в соответствии с формулой (3.1) равна $\overline{V}_M = \overline{\omega}_1 \times \overline{AM} + \overline{\omega}_2 \times \overline{BM}$, где первое и второе слагаемые представляют собой относительную и переносную скорости соответственно. Так как
$\overline{BM} = \overline{BA} + \overline{AM}$, а $\overline{V}_A = \overline{\omega}_2 \times \overline{BA}$, то

$$\overline{V}_M = \overline{V}_A + \left(\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2\right) \times \overline{AM} = \overline{V}_A + \overline{\Omega} \times \overline{AM}.$$

Мы убедились, что распределение скоростей при сложении двух вращений вокруг скрещивающихся осей эквивалентно распределению скоростей при сложении поступательного движения со скоростью выбранного полюса А и вращательного движения вокруг оси, проходящей через выбранный полюс, причем направление оси вращения и угловая скорость определяются вектором $\overline{\Omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2$.

Рассмотрим эту задачу, опираясь на теорию скользящих векторов.

Выберем на линии действия вектора $\overline{\omega}_1$ произвольную точку А и построим в ней векторный нуль с векторами $\overline{\omega}_2{}' = \overline{\omega}_2$ и $-\overline{\omega}_2{}' = -\overline{\omega}_2$, и перенесем в эту точку А вектор $\overline{\omega}_1$. Эти операции, очевидно, не изменят действия векторов $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$. Совокупность векторов $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2{}'$ может быть заменена вектором $\overline{\Omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2$, так как они образуют систему пересекающихся векторов. А векторы

$\overline{\omega}_2$ и $-\overline{\omega}_2'$ образуют пару, момент которой равен моменту вектора $\overline{\omega}_2$ относительно точки А. Таким образом, совокупность двух вращательных движений вокруг скрещивающихся осей эквивалентна сумме следующих двух движений: вращательного движения с угловой скоростью $\overline{\Omega}$ и поступательного движения со скоростью $\overline{V} = \overline{\omega}_2' \times \overline{BA}$, где B – произвольная точка на линии действия вектора $\overline{\omega}_2$. Направление оси вращения определяется вектором $\overline{\Omega}$, а поступательное движение реализуется в направлении, перпендикулярном плоскости пары $(\overline{\omega}_2, -\overline{\omega}_2')$ т.е. мы снова получили тот же результат, что и исходя из формул кинематики.

Приведенные выше рассуждения (см. решения задач 5.1 – 5.3) показывают, что векторы угловых скоростей при сложении вращательных движений, в которых участвует твердое тело, можно рассматривать как систему скользящих векторов.

Опираясь теперь на теорию скользящих векторов, рассмотрим общий случай сложения движений тела.

Общий случай сложного движения тела можно представить следующим образом. Тело одновременно участвует в К вращениях с угловыми скоростями $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \ldots, \overline{\omega}_k$ и поступательных движениях со скоростями $\overline{V}_1, \overline{V}_2, \ldots, \overline{V}_m$. Но каждое поступательное движение можно представить как пару мгновенных вращений. Следовательно, общий случай сводится к сложению одних только мгновенных вращательных движений.

Рассмотрим систему векторов угловых скоростей $\overline{\omega}_1, \ldots, \overline{\omega}_n$, расположенных как угодно в пространстве. Перенесем эти векторы в произвольно выбранную точку О, добавляя при этом соответствующие пары. Мы получим в точке O две системы векторов: систему векторов $\overline{\omega}_i\left(\overline{\omega}_i{}'=\overline{\omega}_i\right)$ и систему векторов $\overline{OA_i}\times\overline{\omega}_i$, где A_i – точки, выбранные произвольно на линиях действия векторов $\overline{\omega}_i$.

Складывая по правилу параллелограмма векторы $\overline{\omega}_i{}'$, получаем

$$\overline{\Omega}=\sum_{i=1}^{n}\overline{\omega}_i{}'=\sum_{i=1}^{n}\overline{\omega}_i. \tag{5.3}$$

Вектор $\overline{\Omega}$ называют главным вектором системы. Складывая векторы $\overline{OA_i}\times\overline{\omega}_i$ имеем

$$\overline{V}_O=\sum_{i=1}^{n}\overline{OA_i}\times\overline{\omega}_i=\sum_{i=1}^{n}\overline{\omega}\times\overline{A_iO}. \tag{5.4}$$

Вектор $\overline{V}_O$ называется главным моментом данной системы скользящих векторов относительно полюса O. Главный момент системы векторов относительно полюса O' связан с моментом $\overline{V}_O$ соотношением

$$\overline{V}_{O'}=\overline{V}_O+\overline{O'O}\times\overline{\Omega}. \tag{5.5}$$

С другой стороны, эта формула задает связь между скоростями точек O и O'. Вспоминая соотношение между скоростями двух точек тела при произвольном движении $\left(\overline{V}_B=\overline{V}_A+\overline{\omega}\times\overline{AB}\right)$, видим, что главный вектор $\overline{\Omega}=\sum_{i=1}^{n}\overline{\omega}_i$ представляет собой мгновенную угловую скорость твердого тела, которая является инвариантом относительно выбора полюса.

Таким образом, совокупность произвольных вращений твердого тела эквивалентна сумме двух движений: вращения вокруг оси, проходящей через точку O, с угловой скоростью $\overline{\Omega} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\omega}_i$ и поступательного движения с линейной скоростью $\overline{V}_O = \sum_{i=1}^{n} \overline{OA} \times \overline{\omega}_i$.

С целью упростить представление произвольного движения тела найдем такие точки Р, для которых линейная скорость коллинеарна $\overline{\Omega}$, т.е.

$$\overline{V}_P = \lambda \overline{\Omega}, \tag{5.6}$$

где λ – скалярная постоянная. В этом случае результирующее движение представляет собой винтовое движение; тело вращается вокруг оси, проходящей через точку Р, с угловой скоростью $\overline{\Omega}$ и движется поступательно со скоростью $\overline{V}_P$ вдоль оси $\overline{\Omega}$.

Геометрическим местом таких точек Р является прямая, называемая осью кинематического винта. Для нахождения оси винта используем соотношение (5.6). Так как $\overline{V}_P = \overline{V}_n + \overline{PO} \times \overline{\Omega}$, то

$$\frac{\overline{V}_O + \overline{PO} \times \overline{\Omega}}{\overline{\Omega}} = \lambda, \tag{5.7}$$

или, вводя декартову систему координат OXYZ, получаем уравнение винтовой оси в скалярной форме:

$$\frac{V_x - y\Omega_z + z\Omega_y}{\Omega_x} = \frac{V_y - z\Omega_x + x\Omega_z}{\Omega_y} = \frac{V_z - x\Omega_y + y\Omega_x}{\Omega_z}. \tag{5.8}$$

Скорость поступательного движения вдоль оси винта находится как проекция вектора скорости произвольной точки О тела на направление вектора $\overline{\Omega}$:

$$V_P = \frac{\overline{V}_O \overline{\Omega}}{\Omega}, \tag{5.9}$$

так как из формулы (5.5) следует, что эта величина является инвариантом системы скользящих векторов. Таким образом, общий случай сложного движения твердого тела приводится к мгновенному винтовому движению около некоторой мгновенной оси, направление которой совпадает с направлением $\overline{\Omega}$. Угловая скорость вращения вокруг оси равна $\overline{\Omega} = \sum \omega_i$, а скорость поступательного движения вдоль оси винта $\overline{V}_P = (\overline{V}_O \cdot \overline{\Omega}) / \Omega$.

Рассмотрим частные случаи. Если в полюсе О мы получим, что $\overline{\Omega} = 0$, $\overline{\mathrm{V}}_O \neq 0$, то в силу инвариантности вектора $\overline{\Omega}$ он будет равен нулю и в любом другом полюсе, и движение сводится к мгновенному поступательному движению (см. задачу 5.2 в).

Если проекция вектора $\overline{V}_O$ на направление $\overline{\Omega}$ равна нулю, то мгновенная винтовая ось становится осью чистого вращения (см. задачу 5.1, 5.2 а), б)). Если $\overline{\Omega} = 0$, и $\overline{V}_O = 0$, то в данный момент тело покоится.

Таким образом, имеем

$\overline{\Omega} \neq 0$	$\overline{V}_O \neq 0$	$\overline{V}_O \cdot \overline{\Omega} \neq 0$	винт
$\overline{\Omega} \neq 0$ $\overline{\Omega} \neq 0$	$\overline{V}_O \neq 0$ $\overline{V}_O = 0$	$\overline{V}_O \cdot \overline{\Omega} = 0$	чистое вращение
$\overline{\Omega} = 0$	$\overline{V}_O \neq 0$		поступательное движение
$\overline{\Omega} = 0$	$\overline{V}_O = 0$		равновесие

Теперь задача сложения движений в общем случае сводится к задаче сложения винтов.

<u>Задача 5.4</u>. Точка O_1 стержня O_1A скользит с постоянной скоростью V_O вдоль стержня OX, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω около центра O (ось вращения перпендикулярна плоскости рисунка). Стержень O_1A вращается вокруг стержня OX с постоянной угловой скоростью ω_O. Найти результирующее движение стержня O_1A.

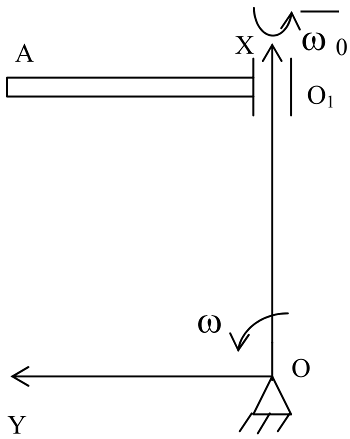

Рис. 21

<u>Решение</u>. Движение стержня O_1A сложное. Пусть переносное движение – движение стержня OX. Таким образом, переносное движение – чистое вращение. Относительное движение – движение стержня O_1A относительно стержня OX. Это движение винтовое. Осью винта относительного движения является ось OX. Приведем систему векторов к полюсу O, введя для удобства декартову систему координат OXYZ (ось OZ перпендикулярна плоскости рисунка). Тогда в проекциях на оси этой системы

$$\overline{\Omega} = \overline{\Omega}(\omega_O, 0, \omega), \quad \overline{V_O} = \overline{V_O}(V_O, 0, 0).$$

Так как проекция вектора $\overline{V_O}$ на направление $\overline{\Omega}$ отлична от нуля, то результирующее движение – винтовое с угловой скоростью $\Omega = \sqrt{\omega^2 + \omega_O{}^2}$ и с поступательной скоростью

$V = V_O \omega_O / \sqrt{\omega^2 + \omega_O{}^2}$ вдоль оси результирующего винта, уравнение которой

$$\frac{V_O - y\omega}{\omega_O} = \frac{-z\omega_O + x\omega}{0} = \frac{y\omega_O}{\omega}$$

или

$$z = \frac{\omega}{\omega_O} x, \quad y = \frac{v_O \omega}{\omega^2 + \omega_O{}^2}.$$

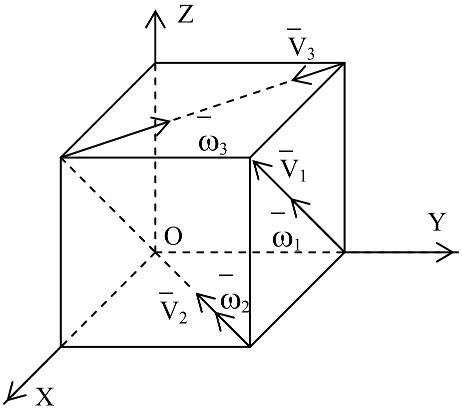

Рис. 22

<u>Задача 5.5</u>. Тело участвует одновременно в трех винтовых движениях, оси которых расположены по диагоналям граней куба, как показано на рисунке 22. Найти результирующее движение, если угловые скорости $|\overline{\omega}_i| = \omega \quad \left(i = \overline{1,3}\right)$ и поступательные скорости $V_i = V \quad \left(i = \overline{1,3}\right)$. Ребро куба равно a.

<u>Решение</u>. Приводя систему к полюсу O, будем иметь

$$\Omega_x = 0, \quad \mathrm{V}_x = \sqrt{2}V + \omega a / \sqrt{2},$$

$$\Omega_y = 0, \quad V_y = \sqrt{2}V - \omega a / \sqrt{2},$$

$$\Omega_z = \sqrt{2}\omega, \quad V_z = \sqrt{2}V - \omega a / \sqrt{2}.$$

Уравнение винтовой оси:

$$x = (V + \omega a)/\omega, \quad y = (2V + \omega a)/2\omega.$$

Результирующее движение – винтовое с угловой скоростью

$\Omega = \sqrt{2}\omega$ и поступательной скоростью

$V_в = \left(\sqrt{2}V - \dfrac{a\omega}{\sqrt{2}} \right)$ вдоль оси винта.

СОДЕРЖАНИЕ

Методические указания по решению задач по курсу:
Теоретическая механика

КИНЕМАТИКА

Составитель Трухан Надежда Михайловна

Редактор Карпова Г.И.

Подписано в печать 10.10.91. Формат 60х90^{1}/16. Бумага писчая №1. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,0. Уч.-изд.л. 2,0. Тираж 1500 экз. Заказ № 1/393 Бесплатно.

Московский физико-технический институт
Лаборатория обработки учебной и научной информации
141700, Моск. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9