Министерство образования и науки Российской Федерации
Московский физико-технический институт (государственный университет)
Кафедра высшей математики

Вопросы к лекциям по аналитической геометрии и линейной алгебре

Составитель: Беклемишева Л.А.

Москва
2014

Часть I

Аналитическая геометрия.

Векторы.

1. Что называется упорядоченной парой элементов множества?

2. Что называется бинарной операцией на множестве?

3. Что называется вектором?

4. Какие векторы называются а)коллинеарными, б)сонаправленными, в)компланарными, г)равными, д)ортогональными?

5. Что называется а)суммой векторов, б)произведением вектора на число, в)линейной комбинацией векторов?

6. Перечислить алгебраические свойства линейных операций над векторами.

7. Дать определение абстрактного линейного (векторного) пространства.

8. Что называется а)базисом на прямой, б)базисом на плоскости, в)базисом в пространстве? Какой базис называется ортонормированным?

9. Сформулировать теорему о возможности разложения вектора по базису.

10. Что называется размерностью векторного пространства?

11. Что называется координатами (компонентами) вектора?

12. Выразить признак коллинеарности векторов в терминах операций над векторами и через координаты векторов.

13. Что называется арифметическим (координатным, стандартным) векторным пространством?

14. Какие векторы называются а)линейно зависимыми, б)линейно независимыми?

15. Доказать, что если среди набора векторов есть нулевой, то этот набор линейно зависим.

16. Доказать, что если среди набора векторов есть 2 одинаковых, то этот набор линейно зависим.

17. Сформулировать теорему о связи линейной зависимости систем векторов, коллинеарности и компланарности.

18. Дать по 2 определения базиса на плоскости, на прямой и в пространстве (используя термины коллинеарность и компланарность либо понятие линейной независимости).

Скалярное, векторное и смешанное произведения.

1. Дать определение скалярного произведения.

2. Как связаны проекция и скалярное произведение?

3. Перечислить алгебраические свойства скалярного произведения.

4. Выразить длину вектора и угол между векторами через скалярное произведение.

5. Записать неравенство Коши-Буняковского через скалярные произведения и через координаты векторов.
6. Выразить а)скалярное произведение, б)длину вектора, в)угол между векторами через координаты вектора (если базис ортонормированный).
7. Можно ли вычислить скалярное произведение векторов по их координатам, если базис не ортонормированный?
8. Выразить условие ортогональности векторов а)через их скалярное произведение, б)через координаты векторов (если базис ортонормированный).
9. Что такое упорядоченная тройка векторов? Какая тройка векторов называется а)ориентированной, б)правой, в)левой?
10. Перечислить свойства ориентации.
11. Дать определение смешанного произведения.
12. Перечислить алгебраические свойства смешанного произведения.
13. Выразить объъм параллелепипеда, построенного на 3 векторах, через их смешанное произведение.
14. Дать определение векторного произведения.
15. Перечислить алгебраические свойства векторного произведения.
16. Сформулировать определение ориентированного параллелограмма и площади ориентированного параллелограмма.
17. Как выражается площадь параллелограмма и ориентированного параллелограмма через, построенных на паре векторов, через векторное произведение этих векторов.

18. Сформулировать определение ориентированного параллелепипеда и его объъчма.

19. Выразить объем ориентированного параллелепипеда через смешанное произведение.

20. Выразить векторное произведение, площадь параллелограмма, треугольника(на плоскости и в пространстве), площадь ориентированного параллелограмма на плоскости через координаты векторов, на которых они построены (базис ортонормированный).

21. Выразить условие коллинеарности векторов через их векторное произведение и через их координаты, используя векторное произведение.

22. Можно ли вычислить векторное произведение векторов по их координатам, если базис не ортонормированный?

23. Выразить объем ориентированного параллелепипеда через координаты векторов, на которых он построен в произвольном и ортонормированном базисе.

24. Выразить признак правой и признак левой тройки векторов через их смешанное произведение и через их координаты.

Системы координат и уравнения множеств.

1. Что называется радиус-вектором точки?

2. Что называется декартовой системой координат на плоскости и в пространстве?

3. Что называется декартовыми координатами точки?

4. Дать геометрическое описание способа вычисления координат точки, если система координат общая декартова и если декартова прямоугольная.

5. Что называется а)полярной системой координат, б)сферической системой координат?

6. Что называется координатами точки, если система координат а)полярная, б)сферическая?

7. Какая связь между полярными координатами точки и декартовыми прямоугольными?

8. Выписать формулы перехода для координат вектора при замене базиса на плоскости и в пространстве и объяснить смысл входящих в них величин.

9. Выписать формулы перехода для координат точки при замене декартовой системы координат на плоскости и в пространстве и объяснить смысл входящих в них величин.

10. Выписать формулы перехода для координат точки и вектора при повороте прямоугольной системы координат на плоскости на угол α .

11. Выписать формулы перехода координат точки при параллельном переносе системы координат

12. Что называется уравнением множества точек?

13. Какое уравнение называется алгебраическим? Что называется степенью многочлена, одночлена, алгебраического уравнения?

14. Что называется а)алгебраической кривой порядка n на плоскости, б)алгебраической поверхностью порядка n в пространстве?

15. Привести примеры, когда одно и то же множество на плоскости и в пространстве может быть задано разными уравнениями одной степени или разных степеней в одной и той же системе координат.

16. Сформулировать теорему об инвариантности степени алгебраического уравнения при замене декартовой системы координат.

17. Во что переходит уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ при замене декартовой системы координат? Привести вычисления.

18. Дать геометрическое определение и координатную запись, что является а)цилиндром, б)поверхностью вращения?

19. Что называется параметрическим и векторным параметрическим уравнением кривой и поверхности?

20. Выписать параметрические уравнения прямой, окружности на плоскости и в пространстве, винтовой линии.

21. Выписать параметрические уравнения плоскости, конуса.

Прямая и плоскость.

1. Выпишите уравнения прямой на плоскости, заданной а)точкой и вектором, б)парой точек в векторной и координатной форме.

2. Выпишите каноническое уравнение прямой на плоскости, общее линейное уравнение прямой на плоскости.

3. Выпишите уравнение плоскости, заданной точкой и парой векторов, или точкой и нормальным вектором, или 3 точками - в векторной и координатной форме.

4. Выпишите общее линейное уравнение плоскости. Какой геометрический смысл имеют коэффиценты?
5. Как перейти от общего линейного уравнения плоскости к векторному параметрическому?
6. Как перейти от векторного уравнения плоскости к общему линейному?
7. Сформулируйте общую теорему об уравнении плоскости.
8. Сформулируйте основную теорему об уравнении прямой на плоскости.
9. Сформулируйте признак параллельности плоскостей.
10. Сформулируйте признак ортогональности 2 плоскостей.
11. Как найти угол между 2 плоскостями по их уравнениям?
12. Сформулируйте признаки параллельности, перпендикулярности прямых на плоскости. Как найти угол между 2 прямыми на плоскости?
13. Как связаны угловой коэффицент прямой и еѕ направляющий вектор?
14. Выпишите уравнения прямой в пространстве, заданной точкой и вектором или парой точек, в векторной и координатной форме. Какие уравнения прямой называются каноническими?
15. Как перейти от уравнения прямой, заданной как линия пересечения 2 плоскостей, к каноническому уравнению? Как перейти обратно от канонического к пересекающимся плоскостям?

16. Сформулируйте признаки параллельности, перпендикулярности прямых в пространстве. Как найти угол между прямыми в пространстве?

17. Как найти расстояние от точки до прямой на плоскости, в пространстве, от точки до плоскости?

18. Как найти расстояние между 2 плоскостями, между прямой и плоскостью, между 2 прямыми?

19. Дайте определение пучка прямых на плоскости, пучка плоскостей, связки плоскостей и напишите соответствующие уравнения.

20. Выпишите уравнения полуплоскости и полупространства.

Линии второго порядка.

1. Дать определение линии второго порядка.

2. Перечислить центральные линии второго порядка. Перечислить линии а)эллиптического типа, б)параболического типа, в)гиперболического типа.

3. Какое множество точек может представлять собой линия второго порядка?

4. Что называется а)эллипсом, б)параболой, в)гиперболой?

5. Дать определение центра симметрии, оси симметрии множества точек.

6. Есть ли центры симметрии, оси симметрии и сколько их у а)эллипса, б)параболы, в)гиперболы?

7. Есть ли линии второго порядка с несколькими центрами симметрии?

8. Какие особенности имеет уравнение второй степени, если оно характеризует окружность?

9. Для эллипса, параболы и гиперболы что такое а)фокусы, б)директрисы, в)полуоси, г) эксцентриситет?

10. Сформулировать директориальное свойство для а)эллипса, б)параболы, в)гиперболы.

11. Для них же сформулировать фокальное свойство.

12. для них же сформулировать оптическое свойство.

13. Написать и нарисовать семейства софокусных эллипсов, парабол и гипербол.

14. Написать уравнения пары асимптот гиперболы, заданной каноническим уравнением.

15. Доказать, что парабола не имеет асимптот.

16. Сколько общих точек может иметь прямая с линией второго порядка? Рассмотреть все возможные случаи.

17. Написать уравнения касательных к эллипсу, параболе и гиперболе, если они заданы в каноническом виде.

18. Может ли прямая иметь с эллипсом, параболой, гиперболой 1 общую точку, если она не касательная?

19. Может ли касательная к одной ветви гиперболы пересекать ећ другую ветвь?

Поверхности второго порядка.

1. Дать определение алгебраической поверхности второго порядка.
2. Может ли алгебраическая поверхность второго порядка быть прямой, плоскостью? При каких условиях?
3. Какое множество называют поверхностью вращения?
4. Что называется а)цилиндром, б)конусом?
5. Сколько есть разных видов поверхностей второго порядка? Назовите, нарисуйте и выпишите канонические уравнения.
6. Какой вид может иметь множество общих точек плоскости и поверхности второго порядка? Рассмотрите все возможные случаи.
7. Что называется прямолинейной образующей поверхности?
8. Какие поверхности второго порядка имеют прямолинейные образующие?
9. Сколько прямолинейных образующих может проходить через 1 точку поверхности второго порядка?
10. Напишите уравнения семейств прямолинейных образующих а)конуса, б)однополостного гиперболоида, в)гиперболического параболоида?
11. Может ли через 1 точку поверхности второго порядка проходить более 2 или всего 1 образующая?

Аффинные преобразования плоскости.

1. Дать определение понятий:а)отображение, б)преобразование, в)сюръективное отображение, в)инъективное отображение, г)гомоморфизм, д)изоморфизм, е)тождественное преобразование, ж)линейное преобразование, ж)невырожденное линейное преобразование.

2. Привести примеры невырожденных и вырожденных линейных преобразований.

3. Доказать, что линейное преобразование вырождено тогда и только тогда, когда образ некоторого ненулевого вектора ест нулевой вектор.

4. Сформулировать принцип сохранения координат.

5. Доказать, что при невырожденном линейном преобразовании 2-мерного пространства линейно независимые векторы переходят в линейно независимые.

6. Написать формулы, задающие невырожденное линейное преобразование, и указать геометрический смысл входящих в них величин.

7. Дать определение аффинного преобразования плоскости.

8. Доказать, что аффинное преобразование взаимно однозначно.

9. Выписать формулы, задающие аффинное преобразование, и указать геометрическое значение входящих в них величин.

10. Какие геометрическими и алгебраическими свойствами обладают аффинные преобразования?

11. Что такое определитель аффинного преобразования? Докажите, что он не зависит от выбора системы координат.

12. Что называется движением(ортогональным преобразованием)?

13. Что называется обратным преобразованием и произведением преобразований?

14. Что такое группа? Привести примеры.

15. Доказать ассоциативность произведения преобразований.

16. Привести пример некоммутирующих преобразований.

17. Сформулировать теорему и разложении произвольного аффинного преобразования в произведение.

18. Сформулировать теорему разложения произвольного движения в произведение.

19. Единственным ли образом определены сомножители в предыдущих вопросах?

20. В каком случае преобразования считают эквивалентными (геометрически)?

Определители и правило Крамера.

1. Сформулировать определение матрицы. Что называется размером и порядком матрицы?

2. Какие есть алгебраические операции над матрицами? Какими свойствами они обладают?

3. Доказать, что множество всех матриц данных размеров $m \times n$ образует линейное пространство. указать базис и размерность этого пространства.
4. Что называется арифметическим пространством? Указать какой-нибудь базис в арифметическом пространстве.
5. Какая функция на линейном пространстве называется линейной? Какая функция от 2 переменных $f(x, y)$ называется кососимметрической?
6. Что называется определителем матрицы?
7. Напишите формулу для вычисления определителя.
8. Перечислите основные свойства определителей.
9. При каких условиях определитель матрицы равен 0?
10. Сформулируйте теорему о разложении определителя по строке.
11. Что называется а)минором матрицы, б)алгебраическим дополнением?
12. Записать систему из n линейных уравнений с n неизвестными в развчрнутой и краткой форме.
13. Что называется решением системы линейных уравнений?
14. Сформулируйте теорему существования и единственности решения системы из n линейных уравнений с n неизвестными (правило Крамера).
15. Какие есть способы решения системы из n линейных уравнений с n неизвестными?

16. Доказать, что система линейных уравнений, столбцы матрицы которой линейно независимы, имеет не более одного решения.

17. Доказать, что строки единичной матрицы линейно независимы.

18. Доказать, что любая строка из n чисел есть линейная комбинация строк единичной матрицы.

19. Доказать, что определитель клеточно-диагональной матрицы и определитель клеточно-треугольной матрицы равны произвдениям определителей диагональных клеток.

20. Как изменится детерминант матрицы при отражении относительно а)главной диагонали(транспонировании), б)побочной диагонали?

21. Если известны $\det A$ и $\det B$, то чему равны: 1) $\det(A^{-1})$, 2) $\det AB$?

Часть II

Линейная алгебра.

Операции с матрицами.

1. Что называется произведением матриц?

2. Можно ли умножить столбец высоты m на строку длины n?

3. Можно ли умножить строку длины n на столбец длины n? А наоборот?

4. Доказать, что k-й столбец матрицы AB равен линейной комбинации столбцов матрицы A с коэффицентами из элементов k-го столбца матрицы B.

5. Доказать, что k-я строка AB равна линейной комбинации строк B с коэффицентами из k-й строки матрицы A.

6. Доказать, что если k-я строка матрицы A умножается на число λ, то и k-я строка AB тоже умножается на λ.

7. Доказать, что при перестановке каких-либо строк в A соответствующие строки в AB тоже переставляются.

8. Сформулируйте и докажите аналоги предыдущих утверждений для столбцов.

9. Подобрать квадратную матрицу K так, чтоб KA получалась из A а)умножением первой строки на α, б)перестановкой 2-х первых строк, в)прибавлением второй строки к первой.

10. Всегда ли верно, что $AB = BA$? Что можно сказать о размерах B и A, если известно, что они коммутируют?

11. Доказать, что если для любой квадратной матрицы A порядка n выполнено $AB = BA$, то $B = \alpha E_n$.

12. Какая матрица называется обратной к данной?

13. Может ли у матрицы быть несколько обратных?

14. Вычислить обратную для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

15. Какие есть методы вычисления обратной матрицы?

16. Доказать тождества:

$$\begin{array}{cc}
\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B & (\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A \\
\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A & (A+B)+C = A+(B+C) \\
(\alpha A)B = \alpha(AB) & (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \\
A+B = B+A & (\alpha A)^T = \alpha A^T \\
(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T & A(B+C) = AB + AC \\
(A+B)^T = A^T + B^T & (ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1} \\
(A+B)C = AC + BC & (AB)^T = B^T A^T \\
(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1} & (AB)C = A(BC) \\
(ABC)^T = C^T B^T A^T &
\end{array}$$

Ранг матрицы

1. Дать определение базисного минора.

2. Возможно ли такое, что в матрице нет базисного минора?

3. Дать определение ранга матрицы.

4. Сформулировать теорему о базисном миноре.

5. Сформулировать теорему о ранге матрицы.

6. Доказать, что если в матрице все миноры порядка k равны 0, то и все миноры порядка $k+1$ тоже равны 0.

7. Пусть $\det A = 0$. Доказать, что строки A линейно зависимы.

8. Доказать, что ранг матрицы не меньше ранга любой ечј подматрицы.

9. Доказать, что добавление к матрице столбца, являющегося линейной комбинацией ечј столбцов, не меняет ранга матрицы.

10. Две матрицы с одинаковым числом строк A и B объединяются в одну AB. Оценить ранг AB через ранги A и B.

11. Доказать, что если столбцы B являются линейными комбинациями столбцов A, то $rgB \leq rgA$

12. Чему равен ранг AB, если A - столбец, B - строка?

13. Доказать, что если $\det A \neq 0$, то $rgAB = rgB$

14. Оценить ранг произведения AB по рангам сомножителей A и B.

15. В каких случаях а) $rgAB = rgA$, б) $rgAB < rgA$?

16. Оценить ранг $A+B$ через ранги A и B. В каких случаях выполнено: 1) $rg(A+B) = rgA$, 2) $rg(A+B) < rgA+rgB$, 3) $rg(A+B) = rga+rgB$, 4) $rg(A+B) = \max(rgA, rgB)$, 5) $rg(A+B) < max(rgA, rgB)$?

17. Дать определение элементарных преобразований.

18. Как вычислить ранг матрицы, используя элементарные преобразования?

19. В ччјм состоит метод Гаусса?

20. Доказать, что если $\det A \neq 0$, то A можно привести к единичной матрице при помощи элементарных преобразований строк.

21. К какой простейшей форме можно привести матрицу элементарными преобразованиями а)строк, б)столбцов, в)строк и столбцов?

22. Доказать, что элементарные преобразования строк матрицы неeняют линейной зависимости между еч столбцами.

23. Какие преобразования системы линейных уравнений соответствуют элементарным преобразованиям а)со столбцами, б)со строками матрицы коэффицентов?

Системы линейных уравнений.

1. Что называется решением системы линейных уравнений?

2. Какая система линейных уравнений называется совместной?

3. Сформулировать теорему Кронекера-Капелли.

4. Применить теорему Кронекера-Капелли к выводу условия параллельности плоскостей в 3-мерном пространстве.

5. На сколько ранг основной матрицы может отличаться от ранга расширенной?

6. Сформулировать теорему Фредгольма.

7. Доказать, что сумма решений однородной системы есть снова решение той же системы.

8. Доказать, что произведение решения однородной системы на число есть снова решение той же системы.

9. Доказать, что если столбцы матрицы Φ являются решениями однородной системы уравнений,и c — столбец соответствующей размерности, то и Φc — тоже решение той же системы.

10. Что называется фундаментальной матрицей?

11. Что называется фундаментальной системой решений однородной системы линейных уравнений?

12. Доказать, что разность решений произвольной системы линейных уравнений есть всегда решение соответствующей однородной системы.

13. Доказать, что сумма произвольного решения системы линейных уравнений и решения соответствующей однородной системы удовлетворяет исходной системе.

14. Сколько линейно независимых в совокупности решений может иметь однородная система из m линейных уравнений с n неизвестными, если еч ранг равен r?

15. Сколько линейно независимых в совокупности решений может иметь однородная система из n линейных уравнений с n неизвестными с матрицей A, если 1)$\det A \neq 0$ 2)$\det A = 0$?

16. Что называется общим решением системы линейных уравнений?

17. Написать формулу общего решения системы линейных уравнений. Верна ли она для однородной системы?

18. Написать общее решение системы из одного уравнения : 1)$x+y = 1$, 2)$x + y + z = 1$, 3)$x_1 - x_n = 0$.

19. Дать геометрическую интерпретацию (для $n = 3$) связи между решениями системы и решениями ее однородной.

20. Доказать, что если столбцы матрицы системы линейно независимы, то система имеет не более одного решения.

21. Доказать, что если строки матрицы системы линейно независимы, то система имеет не менее 1 решения.

22. В каком случае однородная система m уравнений с n неизвестными имеет единственное решение?

23. В каком случае система линейных уравнений с данной матрицей A разрешима при любом столбце свободных членов?

24. Доказать, что либо система линейных уравнений разрешима при любом столбце свободных членов, либо еҷ сопряжҷнная однородная система имеет нетривиальное решение (альтернатива Фредгольма).

25. Сформулировать условие, при котором данная система из n линейных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение. Выразить это условие в терминах столбцов и строк расширенной матрицы.

26. В каком случае система из n линейных уравнений с n неизвестными имеет а)бесконечно много решений, б)единственное решение, в)несовместна ?

27. Пусть некоторое линейное уравнение является следствием заданной системы линейных уравнений в том смысле, что присоединение данной системы к исходному уравнению не меняет множества еҷ решений. Доказать, что данное уравнение есть линейная комбинация уравнений системы.

28. Какие системы уравнений называются эквивалентными?

29. Доказать, что если 2 совместные системы уравнений эквивалентны, то их ранги равны.

30. Доказать, что элементарными преобразованиями над строками расширенной матрицы система линейных уравнений приводится всегда к эквивалентной ей системе.

Линейные пространства.

1. Что называется линейным пространством?

2. Привести примеры линейных пространств. Какое пространство называется арифметическим?

3. Какая система векторов называется 1)линейно независимой, 2)линейно зависимой?

4. Доказать, что если система векторов содержит нулевой вектор, то она линейно зависима.

5. Доказать, что если система векторов линейно независима, то любая ее подсистема тоже линейно независима.

6. Доказать, что если система векторов содержит линейно зависимую подсистему, то и сама она линейно зависима.

7. Пусть система векторов $(a_1, \dots, a_k)$ линейно независима, а система $(a_0, a_1, \dots, a_k)$ линейно зависима. Доказать, что тогда a_0 можно разложить по $a_1, \dots, a_k$.

8. Что называется базисом линейного пространства? Указать базисы в пространствах матриц порядка $m \times n$, столбцов, строк.

9. Существуют ли линейные пространства без базиса?
10. Указать базис в пространстве многочленов степени не выше n.
11. Что называется координатами вектора в линейном пространстве?
12. Перечислить основные свойства координат.
13. Что называется размерностью линейного пространства?
14. Доказать, что все базисы в линейном пространстве содержат одинаковое число элементов.
15. Выписать формулу замены координат вектора при замене базиса.
16. Что называется линейным подпространством?
17. Привести примеры линейных подпространств.
18. Пусть в пространстве L_n выбран базис и есть подпространство F — линейная оболочка векторов $a_1, \ldots, a_k$. Тогда написать систему уравнений, определяющую F.
19. Линейное подпространство задано системой линейных однородных уравнений. как найти в нем базис?
20. Что называется суммой подпространств?
21. Что называется пересечением подпространств?
22. Как связаны размерности суммы и пересечения 2 подпространств?
23. Что называется прямой сумой подпространств?
24. Как вычислить размерность прямой суммы подпространств?
25. Доказать, что пересечение подпространств есть снова линейное подпространство.

26. Пусть подпространства F_1 и F_2 определены с помощью своих базисов. Как тогда найти базис в 1) $F_1 + F_2$, 2) $F_1 \cup F_2$?

27. Пусть подпространства F_1 и F_2 заданы с помощью линейных уравнений. Как определить $F_1 + F_2$ и $F_1 \cup F_2$?

28. В n-мерном пространстве даны 2 линейных подпространства, k-мерное и m-мерное. Определить максимальную и минимальную размерность их суммы и пересечения.

Линейные отображения.

1. Что называется линейным отображением?

2. Что называется рангом линейного отображения?

3. Доказать, что образ нулевого элемента при линейном отображении всегда нулевой элемент.

4. Доказать. что при линейном отображении образ линейного подпространства есть всегда линейное подпространство размерности, не большей, чем у исходного.

5. Что называется ядром линейного отображения?

6. Доказать, что ядро отображения есть подпространство.

7. Найти ранг и размерность ядра отображения, сопоставляющего каждому многочлену степени не выше n его производную.

8. Что называется матрицей линейного отображения?

9. Дано отображение пространства матриц размера $m \times n$ в пространство столбцов размера m, сопоставляющее каждой

матрице её первый столбец. Найти ранг, ядро, матрицу этого отображения в стандартных базисах. Проверить его линейность.

10. Все векторы 3-мерного пространства ортогонально проектируются на ось абсцисс. Доказать, что данное отображение линейно и найти его матрицу.

11. Как связаны ранг отображения, его матрица и размерность ядра?

12. Что называется изоморфизмом? Сформулировать теорему об изоморфизме.

13. Как связано свойство сюръективности отображения и его ранг?

14. Как связаны свойство инъективности отображения и его ядро?

15. Чему равны ранг и ядро отображения, если оно является изоморфизмом? Чем характерна матрица такого отображения?

16. Как связаны матрицы линейного отображения в 2 различных парах базисов?

17. Пусть матрицы A и A' — матрицы одного и того же линейного отображения в разных парах базисов. Доказать, что A' можно получить из A элементарными преобразованиями.

18. Пусть для отображений f, g, h определены отображения fg, fh, $g+h$. Доказать, что в этом случае $f(g+h) = fg + fh$.

19. Пусть для отображений f, g, h $h = fg$. Как связаны их матрицы?

20. Что называется обратным отображением?

21. Доказать, что для изоморфизма существует обратное отображение, и оно тоже изоморфизм.

22. Доказать, что отображение, не являющееся изоморфизмом, не имеет обратного.

23. Как связаны матрицы прямого и обратного отображений?

24. Доказать, что если k базисных векторов пространства принадлежат ядру отображения, то соответствующие столбцы матрицы отображения нулевые.

25. Доказать, что если образы первых k базисных векторов совпадают с первыми k базисными векторами образа, то в матрице отображения первые k столбцов совпадают с таковыми у единичной матрицы.

26. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис линейного пространства L, а векторы $e_1, \ldots, e_k$ образуют базис ядра отображения f. Доказать, что $f(e_{k+1}), \ldots, f(e_n)$ образуют базис в $f(L)$.

27. Доказать, что для любого линейного отображения существуют базисы, в которых матрица отображения имеет вид $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Линейные преобразования.

1. Что называется линейным преобразованием ?

2. Что называется матрицей линейного преобразования?

3. Все векторы 3-мерного пространства ортогонально проектируются на ось абсцисс. Доказать, что данное преобразование линейно и найти его матрицу. Сравнить с задачей 10 предыдущего раздела.

4. Что называется инвариантным подпространством линейного преобразования?

5. Привести примеры инвариантных подпространств.

6. Проверить утверждения:

   1) сумма инвариантных подпространств есть инвариантное подпространство,

   2) пересечение инвариантных подпространств есть инвариантное подпространство,

   3) ядро линейного преобразования есть инвариантное подпространство.

7. Какой вид имеет матрица линейного преобразования, если первые k базисных векторов пространства образуют базис инвариантного подпространства?

8. Какой вид имеет матрица преобразования в базисе $e_1, \dots, e_n$, если $e_1, \dots, e_k$ образуют базис в инвариантном подпространстве M, а $e_{k+1}, \dots, e_n$ — базис в инвариантном подпространстве N?

9. Доказать, что если матрица линейного преобразования имеет вид $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, то пространство распадается в сумму 2 инвариантных подпространств.

10. Что называется собственным вектором линейного преобразования?

11. Что называется собственным значением?

12. Может ли собственный вектор быть нулевым элементом? Может ли собственное значение равняться 0?

13. Выписать систему уравнений, определяющую собственные векторы и собственные значения для данного линейного преобразования.

14. Что называется характеристическим уравнением?

15. Доказать, что собственные значения удовлетворяют характеристическому уравнению.
16. Обязательно ли все корни характеристического уравнения являются собственными значениями?
17. Доказать, что в вещественном (соответственно, комплексном) пространстве каждый вещественный (соответственно, комплексный) корень характеристического уравнения является собственным значением.
18. Как связаны матрицы линейного преобразования в разных базисах?
19. Доказать, что характеристический многочлен не зависит от базиса.
20. Что называется кратностью корня алгебраического уравнения?
21. Доказать,что все собственные векторы, соответствующие одному собственному значению λ_0, вместе с нулевым вектором образуют инвариантное подпространство. Как оно называется? Как связана его размерность с кратностью корня λ_0 характеристического уравнения? Может ли она быть меньше, чем кратность корня? Привести пример.
22. Как связано ядро преобразования и собственные векторы, отвечающие нулевому собственному значению?
23. Доказать, что собственные векторы, соответствующие разным собственным значениям, линейно независимы.
24. Какую особенность имеет матрица преобразования, если первые k базисных векторов пространства — собственные?

25. Что можно сказать о базисе, если матрица преобразования имеет в нчм диагональный вид?

26. Найти все собственные векторы и собственные значения преобразования, заданного матрицей:
1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

27. Пусть $\mathbb{A}$ — линейное преобразование некоторого комплексного пространства. Доказать, что любое инвариантное подпространство содержит хотя бы один собственный вектор $\mathbb{A}$. Верно ли это уьварждение для вещественных пространств?

28. Доказать, что базис, в котором матрица преобразования имеет диагональный вид тогда и только тогда, когда каждому корню характеристического уравнения кратности k соответствует k-мерное подпространство собственных векторов.

29. Доказать, что образ пространства при линейном преобразовании есть инвариантное подпространство.

30. Может ли образ пространства иметь с ядром преобразования ненулевое пересечение K ? Рассмотреть пример преобразования $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Будет ли являться в таком случае K инвариантным подпространством?

31. Доказать, что для линейного преобразования существует базис, в котором его матрица диагональна, то образ пространства есть линейная оболочка собственных векторов, соответствующих ненулевым собственным значениям, и все пространство распадается в сумму образа и ядра. Верно ли обратное

утверждение? Рассмотреть пример преобразования с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

32. Доказать, что линейное преобразование взаимно однозначно тогда и только тогда, когда характеристическое уравнение не имеет нулевых корней.

33. Привести пример линейного преобразования, для которого не существует базиса, в котором матрица преобразования диагональна.

34. Линейное преобразование f есть ортогональное проектирование всех векторов 3-мерного пространства на прямую $x = y = z$. Приводится ли матрица этого преобразования к диагональному виду? Найти собственные значения и собственные векторы f.

35. Линейное преобразование f есть поворот всех векторов в 3-мерном пространстве вокруг оси Oz на $\frac{\pi}{2}$. Есть ли базис, в котором оно имеет диагональный вид? Найти все собственные значения и собственные векторы.

36. Выяснить геометрический смысл преобразования с матрицей $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ для всевозможных значений a, b и c.

Линейные и билинейные функции.

1. Дать определение линейной функции на линейном пространстве. Описать линейную функцию как линейное отображение.

2. Будет ли линейной функция, принимающая одно и то же значение на любом векторе пространства?

3. Как выражается значение линейной функции на векторе через его координаты?

4. Как преобразуется строка коэффицентов функции при замене базиса?

5. Как определяются сложение и умножение на число для линейных функций? Перечислить свойства этих операций.

6. Какое пространство называется сопряжчнным к данному линейному пространству?

7. Дать определение взаимного (биортогонального) базиса для данного базиса линейного пространства.

8. Как преобразуется взаимный базис, если данный базис преобразуется матрицей перехода S?

9. Что называется билинейной функцией (формой) на линейном пространстве?

10. Как выражается значение билинейной функции на векторах x и y через их координаты? Что называется матрицей билинейной формы?

11. Составить матрицу билинейной формы $\xi_1\eta_1 + 2\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1$ в двухмерном пространстве. Что изменится, если пространство 3-мерное?

12. Как преобразуется матрица билинейной формы при замене базиса?

13. Какая билинейная функция называется симметричной? Какое свойство имеет матрица симметричной билинейной функции?

Квадратичные формы.

1. Что называется квадратичной функцией (формой)?

2. Что называется матрицей квадратичной формы? Какое свойство имеют матрицы квадратичных форм?

3. Составить матрицу квадратичной формы $\xi_1\xi_2 + \xi_3\xi_4$ в 4-мерном пространстве. Составить соответствующую симметричную билинейную форму.

4. Сравнить изменение матрицы квадратичной формы и матрицы линейного преобразования при изменении базиса пространства. В каком случае эти матрицы меняются одинаково?

5. Что называется диагональным видом квадратичной функции?

6. Что называется каноническим видом квадратичной формы?

7. Доказать, что для каждой квадратичной формы существует ортонормированный базис, в котором она диагональна.

8. Можно ли для произвольной квадратичной формы выбрать ортонормированный базис, в котором она имеет канонический вид? Пусть квадратичная форма в некотором ортонормированном базисе имеет вид $2\xi_1^2 + \xi_2^2 - 3\xi_3^2$. Доказать, что не существует онб, в котором она имеет канонический вид.

9. Как можно привести квадратичную функцию к диагональному виду?

10. Как можно привести квадратичную функцию к каноническому виду?

11. Привести к диагональному виду форму $\xi_1\xi_2 + \xi_2\xi_4$.

12. Какая квадратичная функция называется положительно определенной?

13. Что называется ограничением квадратичной функции на подпространстве?

14. Как найти матрицу ограничения квадратичной формы на подпространстве?

15. Какие есть необходимые и достаточные условия, чтобы квадратичная форма была положительно определена? Сформулировать критерий Сильвестра.

16. Дать определение отрицательно определчнной квадратичной формы.

17. Сформулировать необходимые и достаточные условия, при которых квадратичная форма отрицательно определена. Привести аналог критерия Сильвестра.

18. Доказать, что если квадратичная форма положительно определена, то все диагональные миноры ее матрицы положительны.

19. Будет ли положительно определчнной квадратичная форма с матрицей:

$$1)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix},\ 2)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{pmatrix},\ 3)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\ ?$$

20. Что называется рангом квадратичной формы?

21. Доказать, что ранг квадратичной формы не зависит от выбора базиса.

22. Доказать, что знак детерминанта матрицы квадратичной формы не зависит от выбора базиса. Доказать, что при переходе от онб к онб не меняется детерминант матрицы квадратичной формы.

23. Что называется а)положительным, б)отрицательным индексом инерции квадратичной формы?

24. Является ли подпространством множество векторов, на которых квадратичная функция принимает а)положительные значения, б)неотрицательные значеия, если к нему присоединить нулевой вектор? Неотрицательные значеия?

25. Сформулировать закон инерции квадратичной формы.

26. Выразить индексы инерции и ранг квадратичной формы через свойства корней характеристического уравнения ее матрицы.

Евклидовы пространства.

1. Что называется скалярным произведением?

2. Что называется евклидовым пространством?

3. В любом ли вещественном пространстве можно ввести скалярное произведение?

4. Какое линейное пространство называется псевдоевклидовым?

5. Дано линейное пространство квадратных матриц второго порядка. ВВести на нҷм скалярное произведение.

6. Рассмотрим линейное пространство векторов-направленных отрезков, построенных из одной точки, с обычным скалярным произведением. Является ли оно евклидовым? Будет ли оно евклидовым при фиксированной единице масштаба?

7. Можно ли в обычном геометрическом пространстве ввести скалярное произведение, отличное от обычного?

8. Доказать, что нулевой вектор ортогонален любому вектору пространства.

9. Что называется ортонормированной системой векторов?

10. Будет ли линейно независимой произвольная система попарно ортогональных векторов?

11. Доказать, что ортонормированная система векторов линейно независима.

12. Применить процесс ортогонализации (Грама-Шмидта) к системе векторов (в предположении, что базис ортонормированный): $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

13. Какие подпространства называются ортогональными?

14. Доказать, что пересечение ортогональных подпространств всегда нулевое.

15. Что называется ортогональным дополнением подпространства в евклидовом пространстве?

16. Доказать, что ортогональное дополнение k-мерного подпространства в n-мерном пространстве есть $n-k$-мерное подпространство.

17. Доказать, что в евклидовом пространстве E_n скалярное произведение порождает изоморфизм $E_n \longleftrightarrow {E_n}^*$ (самого пространства на его сопряженное).

18. Как выражается скалярное произведение через компоненты сомножителей?

19. Что называется матрицей Грама?

20. Перечислить основные свойства матрицы Грама.

21. Как связаны матрицы Грама двух базисов?

22. Что можно сказать о детерминанте матрицы из попарных скалярных произведений векторов $x_1, \ldots, x_k$ в n-мерном евклидовом пространстве?

23. Как выражаются при помощи скалярного произведения координаты вектора x в ортонормированном базисе?

24. Какая матрица называется ортогональной?

25. Какими свойствами обладают ортогональные матрицы?

26. Какими свойствами обладает матрица перехода от одного ортонормированного базиса в евклидовом пространстве к другому?

27. Сформулировать и доказать неравенство Коши-Буняковского.

28. Доказать, что для любых векторов в евклидовом пространстве $|x + y| \leq |x| + |y|$. В каком случае $|x + y| = |x| + |y|$?

29. Доказать, что для любых векторов x и y в евклидовом пространстве $|\cos\phi_{xy}| \leq 1$ (вычисленный с помощью скалярного произведения). В каком случае $\cos\phi_{xy} = 1$?

30. Дать определение унитарного (эрмитова) пространства.

31. Выразить в унитарном пространстве $(x, \alpha y)$ через α и (x, y). Как в унитарном пространстве скалярное произведение выражается через координаты сомножителей?

32. Какими свойствами обладает матрица Грама в унитарном пространстве?

33. Какая матрица называется эрмитовой?

34. Какие квадратичные и билинейные функции называются эрмитовыми?

35. Какими свойствами обладает матрица перехода в унитарном пространстве?

36. Как в унитарном пространстве скалярное произведение выражается через координаты сомножителей в ортонормированном базисе?

37. Дать несколько определений унитарной матрицы.

38. Доказать, что унитарные матрицы образуют группу.

Линейные преобразования евклидовых пространств.

1. Какое преобразование называется сопряженным к данному?

2. Как связаны матрицы преобразования и сопряженного к нему? В предположении, что пространство 1)евклидово, 2)унитарное, а базис в нчм а)произвольный, б)ортонормированный.

3. Пусть на пространстве бесконечно дифференцируемых функций, равных 0 вне некоторого ограниченного интервала скалярное произведение определено по формуле $(p, q) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)q(t)dt$. Найти преобразование, сопряженное к дифференцированию.

4. Преобразование f есть поворот векторов плоскости на угол ϕ. Что представляет собой f^*?

5. Доказать, что если подпространство P инвариантно относительно преобразивания $\mathbb{A}$, то $P^\perp$ инвариантно относительно $\mathbb{A}^*$.

6. Доказать, что характеристические многочлены преобразований $\mathbb{A}$ и $\mathbb{A}^*$ совпадают.

7. Доказать, что собственные векторы преобразований $\mathbb{A}$ и $\mathbb{A}^*$, относящиеся к различным собственным значениям, ортогональны.

8. Какое преобразование называется самосопряженным?

9. какими свойствами обладает матрица самосопряженного преобразования (в предположении, что базис ортонормированный, а пространство евклидово или унитарное) ?

10. Привести примеры самосопряженных преобразований евклидова 3-мерного пространства.

11. Доказать, что 2 собственных вектора самосопряженного преобразования, относящиеся к различным собственным значениям, взаимно ортогональны.

12. Какую особенность имеют корни характеристического уравнения самосопряженного преобразования?

13. Как связаны собственные значения, собственные векторы и матрицы преобразований f и g, если f есть ограничение g на инвариантное подпространство P.

14. Сформулировать основную теорему о самосопряженных преобразованиях.

15. Найти онб из собственных векторов преобразования , определенного в некотором онб матрицей : а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

16. Какое преобразование называется а) ортогональным, б) унитарным ?

17. Какой матрицей выражается ортогональное преобразование в онб?

18. Какой матрицей выражается унитарное преобразование в онб?

19. В каком случае ортогональное преобразование является самосопряженным?

20. Какими свойствами обладает произведение двух а) ортогональных, б) унитарных преобразований?

21. Доказать, что ортогональные преобразования образуют группу с операцией композиции. Верно ли это для унитарных преобразований?

22. Какие собственные значения может иметь ортогональное преобразование?

23. Доказать, что ортогональные преобразования невырождены.

24. Сформулировать и доказать теорему об одновременном приведении пары квадратичных форм к диагональному виду.

25. Что называется сингулярным разложением матрицы?

26. Сформулировать и доказать теорему о сингулярном разложении произвольной квадратной матрицы.