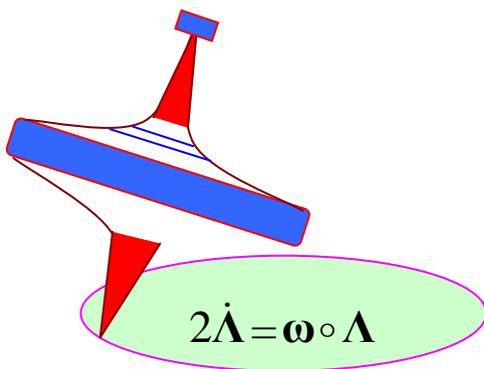


Н.И. Амелькин

Динамика твердого тела



$$\mathbf{J}\dot{\omega} + \omega \times \mathbf{J}\omega = \mathbf{M}$$

ВВЕДЕНИЕ

В предлагаемом учебном пособии дается изложение основ кинематики и динамики твердого тела по курсу теоретической механики.

Произвольное движение тела всегда можно разложить на движение некоторой точки тела и движение тела с неподвижной точкой (вращение). При этом основную проблему представляет изучение вращательного движения тела, поскольку задача о движении точки сравнительно проста.

В данном пособии раздел кинематики вращательного движения твердого тела построен на использовании аппарата кватернионов – четырехмерных гиперкомплексных чисел со специальными правилами умножения.

Кватернионы имеют ряд практических преимуществ по сравнению с другими способами описания вращательного движения твердого тела. С помощью кватернионов эффективно решаются задачи на определение параметров конечного поворота твердого тела и задачи сложения поворотов. Кинематические уравнения движения твердого тела в кватернионах не вырождаются, как в углах Эйлера, и не содержат тригонометрических функций, а число этих уравнений существенно меньше, чем число уравнений в направляющих косинусах (четыре против девяти).

Предлагаемый вариант изложения кинематики твердого тела с помощью кватернионов дает также и методические преимущества. В кватернионах это изложение получается наиболее полным и компактным, являясь одновременно достаточно простым и доступным для изучения.

В разделе динамики твердого тела наряду с освещением традиционных вопросов подробно рассмотрен случай Лагранжа. Выводится формула для средней скорости оси «быстрого» волчка, на примере которой объясняется прецессионная теория гироскопа.

Автор выражает благодарность академику В.Ф. Журавлеву за оказанное внимание к работе.

1. Алгебра кватернионов

Кватернионы были введены в математику В.Р. Гамильтоном в 1843 году. Они представляют собой четырехмерные гиперкомплексные числа и записываются выражениями следующего вида:

$$\Lambda = \lambda_0 \mathbf{i}_0 + \lambda_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_3 \mathbf{i}_3, \quad (1.1)$$

где $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – произвольные действительные числа, называемые компонентами кватерниона Λ , а $\mathbf{i}_0, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ – кватернионные единицы.

Кватернионное сложение определяется по правилам обычной векторной алгебры, т. е. при сложении двух кватернионов складываются их соответствующие компоненты:

$$\Lambda + \mathbf{M} = \sum_{k=0}^3 (\lambda_k + \mu_k) \mathbf{i}_k.$$

Кватернионное произведение обозначается знаком « \circ » и определяется так, что при умножении кватерниона на скаляр умножаются на этот скаляр все его компоненты, т. е.

$$a \circ \Lambda = \Lambda \circ a = \sum_{k=0}^3 a \lambda_k \mathbf{i}_k, \quad (1.2)$$

а правила умножения кватернионных единиц определяются следующей таблицей:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_0 \circ \mathbf{i}_0 &= \mathbf{i}_0, \quad \mathbf{i}_0 \circ \mathbf{i}_k = \mathbf{i}_k \circ \mathbf{i}_0 = \mathbf{i}_k, \quad \mathbf{i}_k \circ \mathbf{i}_k = -1, \quad k = 1, 2, 3. \\ \mathbf{i}_1 \circ \mathbf{i}_2 &= \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{i}_2 \circ \mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_1, \quad \mathbf{i}_3 \circ \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2, \\ \mathbf{i}_2 \circ \mathbf{i}_1 &= -\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{i}_3 \circ \mathbf{i}_2 = -\mathbf{i}_1, \quad \mathbf{i}_1 \circ \mathbf{i}_3 = -\mathbf{i}_2. \end{aligned} \quad (1.3)$$

В соответствии с этими правилами можно использовать такую интерпретацию кватернионов, при которой элемент \mathbf{i}_0 отождествляется с вещественной единицей, а элементы $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ – с единичными векторами, образующими в трехмерном пространстве правую ортогональную тройку. Тогда по аналогии с ком-

плексными числами кватернион Λ можно представить в виде формальной суммы скалярной части λ_0 и векторной части $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_3 \mathbf{i}_3 = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}, \quad (1.4)$$

а правила (1.3) умножения базисных векторов записать через скалярное и векторное произведения следующей формулой:

$$\mathbf{i}_k \circ \mathbf{i}_j = -(\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_j) + \mathbf{i}_k \times \mathbf{i}_j, \quad k, j = 1, 2, 3. \quad (1.3^*)$$

Отсюда, аксиоматизируя свойство дистрибутивности

$$\Lambda \circ (\mathbf{M} + \mathbf{N}) = \Lambda \circ \mathbf{M} + \Lambda \circ \mathbf{N}, \quad (1.5)$$

получаем для кватернионного произведения векторов $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\mu}$ (кватернионов с нулевой скалярной частью) формулу

$$\boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\mu} = -(\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\mu}. \quad (1.6)$$

Формула для произведения двух «полноценных» кватернионов $\Lambda = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}$ и $\mathbf{M} = \mu_0 + \boldsymbol{\mu}$ принимает с учетом (1.2) следующий вид:

$$\Lambda \circ \mathbf{M} = \lambda_0 \mu_0 - (\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\mu}) + \lambda_0 \boldsymbol{\mu} + \mu_0 \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\mu}. \quad (1.7)$$

Из приведенных правил сложения и умножения следует, что алгебра кватернионов включает в себя алгебру вещественных и комплексных чисел. При рассмотрении кватернионов с нулевыми векторными частями ($\Lambda = \lambda_0$) получаем алгебру вещественных чисел, а в случае, когда векторная часть кватернионов представлена одним измерением ($\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \mathbf{i}_1$) – алгебру комплексных чисел.

Укажем основные свойства умножения кватернионов.

1. Умножение кватернионов обладает дистрибутивными по отношению к сложению свойствами (1.5).

2. Умножение кватернионов ассоциативно, т. е.

$$\Lambda \circ \mathbf{M} \circ \mathbf{N} = \Lambda \circ (\mathbf{M} \circ \mathbf{N}) = (\Lambda \circ \mathbf{M}) \circ \mathbf{N}. \quad (1.8)$$

3. Кватернионное умножение *не обладает свойством коммутативности*, т. е. $\Lambda \circ \mathbf{M} \neq \mathbf{M} \circ \Lambda$. Этот факт является следствием некоммутативности векторного произведения $\boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\mu}$, входящего в формулу (1.7). Равенство $\Lambda \circ \mathbf{M} = \mathbf{M} \circ \Lambda$ имеет место только в том случае, когда векторные части сомножителей коллинеарны, т. е. $\boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\mu} = 0$.

4. Скалярная часть произведения кватернионов не изменяется при циклической перестановке сомножителей, т. е.

$$sqa(\Lambda \circ \mathbf{M} \circ \mathbf{N}) = sqa(\mathbf{N} \circ \Lambda \circ \mathbf{M}). \quad (1.9)$$

Свойство (1.8) устанавливается непосредственной проверкой с использованием аксиом сложения и умножения, а свойство (1.9) вытекает из свойства (1.8) и формулы (1.7), в силу которой скалярная часть произведения двух кватернионов не зависит от порядка сомножителей:

$$sqa[(\Lambda \circ \mathbf{M}) \circ \mathbf{N}] = sqa[\mathbf{N} \circ (\Lambda \circ \mathbf{M})].$$

По аналогии с комплексными числами для кватерниона $\Lambda = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}$ определяется *сопряженный кватернион* $\bar{\Lambda}$:

$$\bar{\Lambda} = \lambda_0 - \boldsymbol{\lambda}. \quad (1.10)$$

Нормой кватерниона Λ называется произведение этого кватерниона на его сопряженное значение $\bar{\Lambda}$:

$$\|\Lambda\| = \Lambda \circ \bar{\Lambda} = \lambda_0^2 + (\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{k=0}^3 \lambda_k^2. \quad (1.11)$$

Таким образом, норма кватерниона является скаляром и инвариантна по отношению к выбору базиса $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$, в то время как компоненты $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ векторной части кватерниона зависят от выбора базиса.

Кватернион Λ называется *нормированным*, если $\|\Lambda\| = 1$.

Правила вычисления сопряженного значения и нормы от произведения двух кватернионов легко устанавливаются с по-

мощью формулы умножения (1.7). Так, для произведения двух кватернионов $\overline{\mathbf{M}} = \mu_0 - \boldsymbol{\mu}$ и $\overline{\boldsymbol{\Lambda}} = \lambda_0 - \boldsymbol{\lambda}$ имеем

$$\overline{\mathbf{M}} \circ \overline{\boldsymbol{\Lambda}} = \lambda_0 \mu_0 - (\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\mu}) - (\lambda_0 \boldsymbol{\mu} + \mu_0 \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\mu}) = \overline{(\boldsymbol{\Lambda} \circ \mathbf{M})}.$$

Отсюда следует, что сопряженное значение от произведения двух кватернионов равно произведению их сопряженных значений, взятых в обратном порядке:

$$\overline{(\boldsymbol{\Lambda} \circ \mathbf{M})} = \overline{\mathbf{M}} \circ \overline{\boldsymbol{\Lambda}}. \quad (1.12)$$

Полученное соотношение позволяет в свою очередь найти выражение для нормы произведения двух кватернионов:

$$\|\boldsymbol{\Lambda} \circ \mathbf{M}\| = \boldsymbol{\Lambda} \circ \mathbf{M} \circ \overline{\mathbf{M}} \circ \overline{\boldsymbol{\Lambda}} = \|\boldsymbol{\Lambda}\| \cdot \|\mathbf{M}\|, \quad (1.13)$$

т. е. норма произведения двух кватернионов равна произведению норм сомножителей. Отсюда следует, что произведение нормированных кватернионов есть также нормированный кватернион.

Методом индукции легко показать, что правила (1.12) и (1.13) распространяются на случай произвольного числа сомножителей, т. е.

$$\overline{(\boldsymbol{\Lambda}_1 \circ \dots \circ \boldsymbol{\Lambda}_n)} = \overline{\boldsymbol{\Lambda}_n} \circ \dots \circ \overline{\boldsymbol{\Lambda}_1}, \quad (1.14)$$

$$\|\boldsymbol{\Lambda}_1 \circ \dots \circ \boldsymbol{\Lambda}_n\| = \|\boldsymbol{\Lambda}_1\| \cdot \dots \cdot \|\boldsymbol{\Lambda}_n\|. \quad (1.15)$$

Важным свойством алгебры кватернионов является существование операции *деления*, которая определяется как операция умножения на *обратный* кватернион.

Кватернионом, *обратным* к $\boldsymbol{\Lambda}$, называется кватернион $\boldsymbol{\Lambda}^{-1}$, определяемый из условия

$$\boldsymbol{\Lambda} \circ \boldsymbol{\Lambda}^{-1} = \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \circ \boldsymbol{\Lambda} = 1. \quad (1.16)$$

Выражение для обратного кватерниона можно найти непосредственно из этого определения, рассматривая его как уравнение

относительно неизвестного Λ^{-1} . Умножив обе части уравнения $\Lambda \circ \Lambda^{-1} = 1$ на $\bar{\Lambda}$ слева, получим формулу

$$\Lambda^{-1} = \bar{\Lambda} / \|\Lambda\|, \quad (\|\Lambda\| \neq 0). \quad (1.17)$$

Отсюда следует, что для нормированного кватерниона Λ обратным будет его сопряженное значение $\bar{\Lambda}$.

Из правил (1.15) и (1.14) получаем, что норма обратного кватерниона равна $\|\Lambda^{-1}\| = 1/\|\Lambda\|$, а кватернион, обратный произведению кватернионов, вычисляется по формуле

$$(\Lambda_1 \circ \dots \circ \Lambda_n)^{-1} = \Lambda_n^{-1} \circ \dots \circ \Lambda_1^{-1}. \quad (1.18)$$

Обратим внимание, что свойства сложения и умножения кватернионов аналогичны свойствам сложения и умножения матриц. Как следствие этого, правила решения кватернионных уравнений аналогичны правилам решения матричных уравнений. Например, для линейных уравнений вида

$$a) \mathbf{X} \circ \Lambda = \mathbf{M}, \quad b) \Lambda \circ \mathbf{X} = \mathbf{M}$$

решения определяются формулами

$$a) \mathbf{X} = \mathbf{M} \circ \Lambda^{-1} = \mathbf{M} \circ \bar{\Lambda} / \|\Lambda\|, \quad b) \mathbf{X} = \Lambda^{-1} \circ \mathbf{M} = \bar{\Lambda} \circ \mathbf{M} / \|\Lambda\|.$$

Кватернионное уравнение эквивалентно четырем скалярным уравнениям. Одно из них представляет собой равенство скалярных составляющих правой и левой частей уравнения, а остальные три – это равенства компонент векторных составляющих в некотором ортогональном базисе трехмерного пространства.

Тригонометрическая форма записи кватернионов

Пусть Λ – нормированный кватернион. Вводя новые переменные с помощью равенств $\lambda_0 = \cos \nu$, $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{e} \sin \nu$, где \mathbf{e} – единичный вектор, коллинеарный вектору $\boldsymbol{\lambda}$, получим тригонометрическую форму записи кватерниона:

$$\Lambda = \cos\nu + \mathbf{e}\sin\nu. \quad (1.19)$$

Для ненормированного кватерниона будем иметь

$$\Lambda = |\Lambda|(\cos\nu + \mathbf{e}\sin\nu), \quad (1.20)$$

где $|\Lambda| = \sqrt{\|\Lambda\|}$ – модуль кватерниона Λ .

Форма кватерниона (1.20) аналогична тригонометрической записи комплексных чисел. Из нее следует, что любой кватернион однозначно определяется значением модуля $|\Lambda|$, единичным вектором \mathbf{e} и углом ν . Выбор же \mathbf{e} и ν для заданного Λ является двухзначным, т. к. одновременная замена знака при \mathbf{e} и ν на обратный не изменяет кватерниона Λ . Заметим также, что если векторная часть λ кватерниона Λ равна нулю, то $\sin\nu = 0$, и тогда \mathbf{e} – любой единичный вектор из трехмерного пространства.

Используя тригонометрическую формулу (1.20), получим формулу для произведения двух кватернионов с коллинеарными векторными частями. Пусть

$$\Lambda_1 = |\Lambda_1|(\cos\varphi_1 + \mathbf{e}\sin\varphi_1), \quad \Lambda_2 = |\Lambda_2|(\cos\varphi_2 + \mathbf{e}\sin\varphi_2).$$

Тогда будем иметь

$$\Lambda_1 \circ \Lambda_2 = |\Lambda_1| \cdot |\Lambda_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathbf{e}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \quad (1.21)$$

Для k -й степени кватерниона $\Lambda = |\Lambda|(\cos\nu + \mathbf{e}\sin\nu)$ на основании (1.21) получим формулу

$$\Lambda^k = |\Lambda|^k (\cos k\nu + \mathbf{e}\sin k\nu), \quad (1.22)$$

которая аналогична формуле Муавра для комплексных чисел.

Последняя формула дает возможность легко находить решения степенных кватернионных уравнений вида

$$\mathbf{X}^k = \Lambda. \quad (1.23)$$

Представляя \mathbf{X} и Λ в тригонометрической форме

$$\mathbf{X} = |\mathbf{X}|(\cos x + \boldsymbol{\varepsilon} \sin x), \quad \boldsymbol{\Lambda} = |\boldsymbol{\Lambda}|(\cos \nu + \mathbf{e} \sin \nu),$$

получим в качестве (1.23) уравнение

$$|\mathbf{X}|^k (\cos kx + \boldsymbol{\varepsilon} \sin kx) = |\boldsymbol{\Lambda}|(\cos \nu + \mathbf{e} \sin \nu). \quad (1.23^*)$$

Решения этого уравнения записываются в виде

$$|\mathbf{X}| = |\boldsymbol{\Lambda}|^{1/k}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{e}, \quad x = (\nu + 2\pi i)/k; \quad i = 0, 1, \dots, k-1. \quad (1.24)$$

Полученные соотношения определяют k разных решений уравнения (1.23) в том случае, когда векторная часть кватерниона $\boldsymbol{\Lambda}$ отлична от нуля ($\sin \nu \neq 0$). Если же $\sin \nu = 0$, то каждому значению $x_i = (\nu + 2\pi i)/k$, для которого $\sin x_i \neq 0$, будет соответствовать бесконечное множество решений

$$\mathbf{X}_i = |\boldsymbol{\Lambda}|^{1/k} (\cos x_i + \mathbf{e} \sin x_i),$$

где \mathbf{e} – произвольный единичный вектор из трехмерного пространства.

При $k = 2$ решение уравнения $\mathbf{X}^2 = \boldsymbol{\Lambda}$ можно записать в алгебраической форме, если представить кватернионы в виде

$$\mathbf{X} = x_0 + \mathbf{x}, \quad \boldsymbol{\Lambda} = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}.$$

Тогда получим уравнение

$$x_0^2 - |\mathbf{x}|^2 + 2x_0\mathbf{x} = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda},$$

которое с учетом равенства $x_0^2 + |\mathbf{x}|^2 = |\boldsymbol{\Lambda}|$ сводится у системе

$$2x_0^2 = |\boldsymbol{\Lambda}| + \lambda_0, \quad 2x_0\mathbf{x} = \boldsymbol{\lambda}.$$

Отсюда следует решение:

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\Lambda}^{1/2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\boldsymbol{\Lambda} + |\boldsymbol{\Lambda}|}{\sqrt{\lambda_0 + |\boldsymbol{\Lambda}|}}, \quad \text{если } \lambda_0 + |\boldsymbol{\Lambda}| > 0. \quad (1.25)$$

При $\lambda_0 + |\boldsymbol{\Lambda}| = 0$, а это возможно только в случае $\boldsymbol{\Lambda} = \lambda_0 \leq 0$, решение имеет вид

$$\Lambda^{1/2} = \mathbf{e}\sqrt{-\lambda_0}, \quad (1.25^*)$$

где \mathbf{e} – произвольный единичный вектор.

Упражнения

1. Показать, что для скалярной и векторной частей произведения векторов справедливы соотношения:

$$sqa(\lambda_1 \circ \lambda_2 \circ \dots \circ \lambda_n) = (-1)^n sqa(\lambda_n \circ \lambda_{n-1} \circ \dots \circ \lambda_1);$$

$$vec(\lambda_1 \circ \lambda_2 \circ \dots \circ \lambda_n) = (-1)^{n+1} vec(\lambda_n \circ \lambda_{n-1} \circ \dots \circ \lambda_1).$$

2. Найти все решения кватернионных уравнений:

a) $\mathbf{X}^2 + \Lambda \circ \mathbf{X} + \mathbf{M} = 0.$

b) $\mathbf{X} \circ \Lambda - \Lambda \circ \mathbf{X} = \mathbf{M}.$

c) $\mathbf{X}^3 = 1; \quad \mathbf{X}^3 = -1; \quad \mathbf{X}^4 = 1; \quad \mathbf{X}^4 = -1.$

d) $\mathbf{X}^n \circ \Lambda - \Lambda \circ \mathbf{X}^m = \mathbf{M},$ где m и n – целые числа.

2. Кинематика твердого тела

2.1. Способы задания положения твердого тела

Твердым телом называется такая система материальных точек, для которой расстояние между любой парой точек не меняется с течением времени.

Из приведенного определения следует, что для векторов \mathbf{r}_B и \mathbf{r}_C , соединяющих произвольную точку O тела с точками B и C , выполняются условия:

$$\begin{aligned} r_B^2 = \text{const}, \quad r_C^2 = \text{const}, \\ (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C)^2 = r_B^2 + r_C^2 - 2(\mathbf{r}_B \cdot \mathbf{r}_C) = \text{const}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Отсюда получаем соотношение

$$(\mathbf{r}_B \cdot \mathbf{r}_C) = \text{const} \quad (2.2)$$

которое описывает неизменность скалярного произведения векторов, соединяющих любые пары точек в теле. В силу произвольности точек B и C из условия (2.2) следуют все равенства (2.1). Поэтому условия (2.1) и (2.2) эквивалентны.

Отметим, что приведенное определение твердого тела не является полным. Всевозможные зеркальные отражения пространства также удовлетворяют условию (2.2), но они не включаются в математическую модель твердого тела. Полное определение твердого тела описывается условием (2.2), дополненным условием неизменности смешанного произведения векторов, соединяющих произвольные пары точек в теле:

$$((\mathbf{r}_B \times \mathbf{r}_C) \cdot \mathbf{r}_D) = \text{const}. \quad (2.3)$$

Из условия (2.2) следует, что если в какой-то момент времени с некоторыми точками тела связать *ортонормированный базис* $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, то этот базис будет оставаться ортонормированным в любой последующий момент, а разложение вектора \mathbf{r} произвольной точки тела в этом базисе будет неизменно.

В свою очередь условие (2.3) означает неизменность взаимной ориентации базисных векторов в том смысле, что правая тройка векторов остается правой, а левая – левой. Этим условием зеркальные отражения исключаются из математической модели твердого тела.

Задача определения положения твердого тела в некоторой системе отсчета заключается в определении такого набора параметров, через которые однозначно выражается положение каждой точки тела.

Рассмотрим произвольное движение твердого тела относительно системы отсчета $A\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$, задаваемой правым ортонормированным базисом с началом в точке A (рис. 1). Выберем в теле жестко связанный с ним правый ортонормированный базис $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ с началом в точке O . В этом базисе радиус-вектор \mathbf{r} произвольной точки тела имеет неизменные компоненты r_k ($k = 1, 2, 3$), а положение этой точки в системе $A\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ дается соотношением

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_O + \mathbf{r} = \mathbf{R}_O + \sum_{k=1}^3 r_k \mathbf{e}_k. \quad (2.4)$$

Отсюда следует, что для однозначного определения положения каждой точки тела в системе $A\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ достаточно задать положение базиса $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ относительно базиса $A\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$.

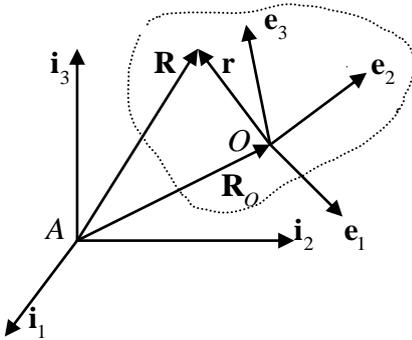


Рис. 1

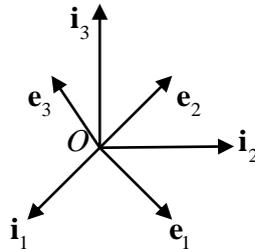


Рис. 2

Введем систему отсчета $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$, оси которой параллельны одноименным осям исходной системы $A\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$. Тогда движение базиса $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ относительно исходной системы отсчета $A\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ может быть полностью описано движением точки O (радиус-вектор \mathbf{R}_O) и движением базиса $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ относительно $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ (рис. 2). Последнее представляет собой движение твердого тела с неподвижной точкой O и называется *вращением* твердого тела.

Описанная схема лежит в основе всех существующих способов задания положения твердого тела. В каждом из них в качестве трех параметров выбираются координаты вектора \mathbf{R}_O некоторой точки O тела, а разница в способах заключается в разном выборе остальных параметров, задающих ориентацию тела (положение базиса $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ относительно базиса $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$).

Приведем основные способы задания ориентации твердого тела.

Матрицы направляющих косинусов

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}; \quad \alpha_{kj} = (\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{e}_j). \quad (2.5)$$

Элементы матрицы (2.5) представляют собой коэффициенты в разложении ортов связанного с телом базиса $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ по ортам системы отсчета $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$:

$$\mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^3 \alpha_{kj} \mathbf{i}_k, \quad j = 1, 2, 3. \quad (2.6)$$

Из ортонормированности базисов $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ и $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ следует, что матрица направляющих косинусов ортогональна, т. е.

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}, \quad (2.7)$$

где \mathbf{I} – единичная матрица, « T » – знак транспонирования.

Условие (2.7) определяет 6 уравнений, связывающих коэффициенты матрицы \mathbf{A} , поэтому только три из девяти направляющих косинусов являются независимыми. Отсюда следует, что положение твердого тела с неподвижной точкой задается тремя независимыми параметрами, а положение свободного тела – шестью независимыми параметрами.

Матрица (2.5) удовлетворяет условию $\det(\mathbf{A})=1$, вытекающему из того, что базисы $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ и $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ являются правыми тройками векторов. Из соотношений (2.5) и (2.6) следует также, что имеет место взаимно однозначное соответствие между положениями тела и элементами матрицы направляющих косинусов.

Пусть \mathbf{r} – вектор-столбец, составленный из координат r_j некоторой точки тела в связанном с телом базисе $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$. В силу соотношений (2.6) вектор-столбец \mathbf{r}' , составленный из координат r'_k этой точки в системе отсчета $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$, определяется формулой

$$\mathbf{r}' = \mathbf{A}\mathbf{r}. \quad (2.8)$$

Если принять, что в начальный момент времени орты связанного с телом базиса совпадают с одноименными ортами системы отсчета ($\mathbf{e}_k(0) = \mathbf{i}_k$), то положение каждой точки тела $\mathbf{r}(t)$ будет определяться через ее начальное положение $\mathbf{r}(0)$ формулой $\mathbf{r}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{r}(0)$. Отсюда в силу ортогональности матрицы \mathbf{A} следует, что движение твердого тела можно рассматривать как зависящее от времени ортогональное преобразование в трехмерном пространстве.

Углы конечного вращения. Положение твердого тела с неподвижной точкой можно задавать также различными системами углов – Эйлера, Крылова и др. Суть такого описания основывается на том, что два правых ортонормированных базиса $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ и $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ можно совместить последовательными по-

воротами вокруг трех некопланарных осей на некоторые углы.

Рассмотрим систему **углов Эйлера** (рис. 3). Пусть базис $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ занимает произвольное положение. Все векторы \mathbf{i}_k базиса $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ можно совместить с базисными векторами \mathbf{e}_k с помощью следующих трех поворотов:

1. Поворот вокруг оси \mathbf{i}_3 на угол ψ до совмещения вектора \mathbf{i}_1 с *линией узлов* \mathbf{i}'_1 , т. е. с линией пересечения плоскостей векторов $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$ и $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$.
2. Поворот вокруг линии узлов \mathbf{i}'_1 на угол θ до совмещения орта \mathbf{i}_3 с ортом \mathbf{e}_3 .
3. Поворот вокруг оси \mathbf{e}_3 на угол φ до полного совмещения базисов.

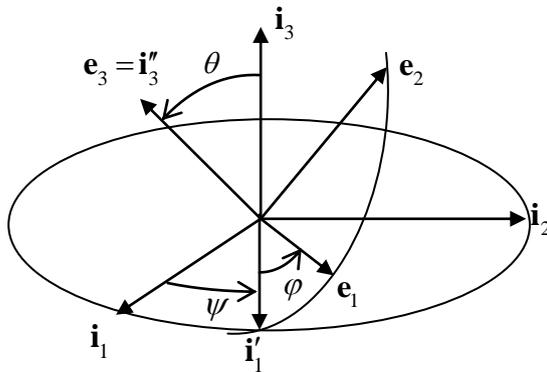


Рис. 3

Совокупность указанных поворотов переводит базис $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ в базис $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ и представляет собой последовательность поворотов на *эйлеровы углы* ψ (*угол прецессии*), θ (*угол нутации*) и φ (*угол собственного вращения*).

Связь между направляющими косинусами (2.5) и углами Эйлера определяется следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\alpha_{11} &= \cos\psi \cos\varphi - \sin\psi \sin\varphi \cos\theta, \\ \alpha_{12} &= -\cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\varphi \cos\theta, \quad \alpha_{13} = \sin\psi \sin\theta, \\ \alpha_{21} &= \sin\psi \cos\varphi + \cos\psi \sin\varphi \cos\theta, \\ \alpha_{22} &= -\sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\varphi \cos\theta, \quad \alpha_{23} = -\cos\psi \sin\theta, \\ \alpha_{31} &= \sin\varphi \sin\theta, \quad \alpha_{32} = \cos\varphi \sin\theta, \quad \alpha_{33} = \cos\theta.\end{aligned}$$

Кватернионный способ задания ориентации твердого тела основан на следующей теореме.

Теорема 1. *Произвольное положение твердого тела с неподвижной точкой задается нормированным кватернионом Λ по формулам*

$$\mathbf{e}_k = \Lambda \circ \mathbf{i}_k \circ \bar{\Lambda}; \quad k=1, 2, 3. \quad (2.9)$$

При этом каждому положению тела соответствует два значения кватерниона Λ , отличающиеся знаком.

Доказательство. Найдем кватернион Λ из соотношений (2.9), рассматривая их как систему уравнений относительно неизвестного Λ . Решение системы (2.9) будем искать в виде

$$\Lambda = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}, \quad \text{где } \lambda_0^2 + |\boldsymbol{\lambda}|^2 = 1.$$

Введем следующие обозначения для разностей и сумм одноименных базисных векторов:

$$\mathbf{r}_k = (\mathbf{e}_k - \mathbf{i}_k), \quad \mathbf{s}_k = (\mathbf{e}_k + \mathbf{i}_k); \quad k=1, 2, 3. \quad (2.10)$$

Для этих векторов выполняются следующие равенства:

$$(\mathbf{s}_k \cdot \mathbf{r}_k) = 0, \quad (\mathbf{s}_j \cdot \mathbf{r}_k) = -(\mathbf{s}_k \cdot \mathbf{r}_j). \quad (2.11)$$

Записывая уравнения (2.9) в виде $\mathbf{e}_k \circ \Lambda = \Lambda \circ \mathbf{i}_k$, получим систему

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{e}_k \cdot \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{i}_k \cdot \boldsymbol{\lambda}, \\ \lambda_0 \mathbf{e}_k + \mathbf{e}_k \times \boldsymbol{\lambda} = \lambda_0 \mathbf{i}_k - \mathbf{i}_k \times \boldsymbol{\lambda}, \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}_k \cdot \boldsymbol{\lambda} = 0, \\ \lambda_0 \mathbf{r}_k = \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{s}_k. \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Рассматривая сначала случай, когда базисы совпадают, т. е. $\mathbf{e}_k = \mathbf{i}_k$, получим из (2.13) $\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{i}_k = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\lambda} = 0$, откуда следует $\Lambda = \lambda_0 = \pm 1$, что соответствует утверждению теоремы.

В общем случае, когда базисы $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ и $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ не совпадают, найдется, по крайней мере, два не равных нулю вектора \mathbf{r}_k и \mathbf{r}_j . Пусть для определенности $\mathbf{r}_1 \neq 0$ и $\mathbf{r}_2 \neq 0$. Тогда из соотношений (2.12) получим, что векторная часть искомого решения может быть записана в виде

$$\boldsymbol{\lambda} = x(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2), \quad (2.14)$$

где x – некоторый скаляр. Подставляя это выражение в (2.13) и учитывая (2.11), получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_0 \mathbf{r}_1 = -x \mathbf{s}_1 \times (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) = -x \mathbf{r}_1 (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r}_2), \\ \lambda_0 \mathbf{r}_2 = -x \mathbf{s}_2 \times (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) = x \mathbf{r}_2 (\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r}_1), \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_0 = -x (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r}_2), \\ \lambda_0 = x (\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r}_1). \end{array} \right.$$

В силу (2.11) полученные два уравнения тождественно совпадают, и из них и (2.14) следует, что искомое решение системы (2.9) имеет вид

$$\Lambda = x(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2). \quad (2.15)$$

С учетом условия нормировки $\lambda_0^2 + |\boldsymbol{\lambda}|^2 = 1$ окончательно получаем формулу

$$\Lambda = \pm \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{s}_2 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{\sqrt{(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{s}_2)^2 + (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)^2}}, \quad (2.16)$$

которая определяет два нормированных кватерниона, отличающиеся друг от друга знаком. Теорема доказана.

Преобразование $\Lambda \circ (\) \circ \bar{\Lambda}$, фигурирующее в формулах (2.9), называется *присоединенным отображением*.

Таким образом, в кватернионном способе для задания ориентации твердого тела используются четыре параметра: $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, которые подчинены одному уравнению связи:

$$\|\Lambda\| = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1.$$

На основании формул преобразования базисов (2.9) можно установить связь между компонентами кватерниона в разных базисах. Пусть положение базиса $\mathbf{E} (O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)$ относительно базиса $\mathbf{I} (O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3)$ задается кватернионом Λ . Рассмотрим некоторый кватернион \mathbf{R} . Обозначим через R_k^E и R_k^I его компоненты в базисе \mathbf{E} и \mathbf{I} соответственно, где $R_0^I = R_0^E = R_0$ (скалярная компонента кватерниона не зависит от базиса). Тогда этот кватернион можно записать в виде следующих двух выражений:

$$\mathbf{R} = R_0 + \sum_1^3 R_k^I \mathbf{i}_k = R_0 + \sum_1^3 R_k^E \mathbf{e}_k.$$

Отсюда с учетом формул преобразования базисов (2.9) и равенства $\Lambda \circ \bar{\Lambda} = 1$ получим

$$R_0 + \sum_1^3 R_k^I \mathbf{i}_k = \Lambda \circ (R_0 + \sum_1^3 R_k^E \mathbf{i}_k) \circ \bar{\Lambda} \Rightarrow \mathbf{R}^I = \Lambda \circ \mathbf{R}^E \circ \bar{\Lambda}, \quad (2.17)$$

где \mathbf{R}^I и \mathbf{R}^E – векторы-столбцы, составленные из компонент кватерниона \mathbf{R} в базисе \mathbf{I} и \mathbf{E} соответственно.

Соотношение (2.17) представляет собой *формулу преобразования компонент кватерниона при замене базиса*. Из нее следует, что вектор-столбец \mathbf{r}' , составленный из координат произвольной точки тела в базисе \mathbf{I} , выражается через вектор столбец \mathbf{r} ее координат в базисе \mathbf{E} формулой

$$\mathbf{r}' = \Lambda \circ \mathbf{r} \circ \bar{\Lambda}. \quad (2.18)$$

В дальнейшем условимся считать начальным положением твердого тела такое его положение, когда орты связанного с телом базиса совпадают с одноименными ортами системы отсчета, т. е. $\mathbf{e}_k(0) = \mathbf{i}_k$. Тогда формула (2.18) будет определять связь между конечным положением \mathbf{r}' произвольной точки тела и ее начальным положением \mathbf{r} .

Теорема 2 (теорема Эйлера о конечном повороте). Любое положение твердого тела с неподвижной точкой может быть получено из начального положения одним поворотом вокруг оси $\mathbf{e} = \boldsymbol{\lambda}/|\boldsymbol{\lambda}|$ на угол $\vartheta = 2\arccos\lambda_0$, где $\boldsymbol{\Lambda} = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}$ – нормированный кватернион, задающий положение тела.

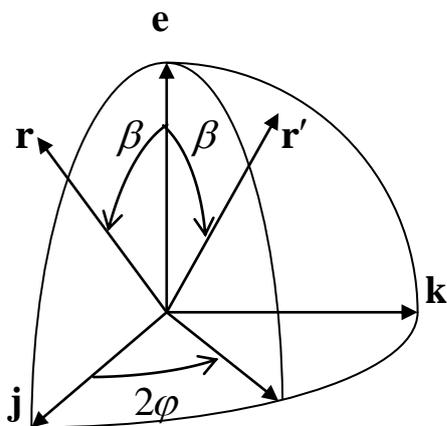


Рис. 4

Доказательство. Запишем кватернион $\boldsymbol{\Lambda}$ в тригонометрической форме:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda} = \cos\varphi + \mathbf{e}\sin\varphi; \quad \cos\varphi = \lambda_0, \quad \mathbf{e} = \boldsymbol{\lambda}/|\boldsymbol{\lambda}|$$

и исследуем преобразование (2.18). Дополним вектор \mathbf{e} единичными векторами \mathbf{j} и \mathbf{k} до правой ортогональной тройки ($\mathbf{e} \circ \mathbf{j} = \mathbf{k}$) таким образом, чтобы вектор \mathbf{r} оказался в плоскости

векторов \mathbf{e} и \mathbf{j} (рис. 4). Тогда вектор \mathbf{r} запишется в виде

$$\mathbf{r} = |\mathbf{r}|(\mathbf{e}\cos\beta + \mathbf{j}\sin\beta).$$

Учитывая, что из условия ортогональности векторов \mathbf{e} и \mathbf{j} следует равенство $\mathbf{j} \circ \bar{\Lambda} = \Lambda \circ \mathbf{j}$, получим из формулы (2.18):

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= |\mathbf{r}|(\Lambda \circ \mathbf{e} \circ \bar{\Lambda} \cos\beta + \Lambda \circ \mathbf{j} \circ \bar{\Lambda} \sin\beta) = \\ &= |\mathbf{r}|(\mathbf{e}\cos\beta + \Lambda^2 \circ \mathbf{j}\sin\beta) = \\ &= |\mathbf{r}|(\mathbf{e}\cos\beta + (\mathbf{j}\cos 2\varphi + \mathbf{k}\sin 2\varphi)\sin\beta). \end{aligned}$$

Из этого выражения следует, что конечное положение \mathbf{r}' каждой точки тела получается из начального положения \mathbf{r} поворотом вокруг оси \mathbf{e} на угол $\mathcal{G} = 2\varphi = 2\arccos\lambda_0$. Теорема доказана.

В дальнейшем на основании доказанной теоремы будем говорить, что кватернион Λ задает поворот из базиса \mathbf{I} в базис \mathbf{E} , если этот кватернион связывает векторы этих базисов формулами (2.9). Заметим, что обратное преобразование задается обратным кватернионом $\bar{\Lambda}$, поскольку формулы этого преобразования имеют вид

$$\mathbf{i}_k = \bar{\Lambda} \circ \mathbf{e}_k \circ \Lambda; \quad k = 1, 2, 3.$$

Кватернионные формулы сложения поворотов. Пусть кватернион Λ задает поворот тела из базиса \mathbf{I} в базис \mathbf{I}' , а кватернион \mathbf{M} – поворот из базиса \mathbf{I}' в базис \mathbf{I}'' (рис. 5). Найдем кватернион \mathbf{N} результирующего поворота из базиса \mathbf{I} в базис \mathbf{I}'' . В силу (2.18) в результате указанных двух поворотов начальное положение \mathbf{r} произвольной точки тела преобразуется в конечное положение \mathbf{r}'' по формуле

$$\mathbf{r}'' = \mathbf{M} \circ \mathbf{r}' \circ \bar{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \circ \Lambda \circ \mathbf{r} \circ \bar{\Lambda} \circ \bar{\mathbf{M}} = \mathbf{N} \circ \mathbf{r} \circ \bar{\mathbf{N}}.$$

Отсюда следует, что кватернион результирующего поворота определяется выражением

$$\mathbf{N} = \mathbf{M} \circ \Lambda. \quad (2.19)$$

В случае n последовательных поворотов, задаваемых кватернионами $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n$, формула сложения поворотов имеет вид

$$\Lambda = \Lambda_n \circ \Lambda_{n-1} \circ \dots \circ \Lambda_1. \quad (2.20)$$

Эта формула легко доказывается методом индукции.

Формулы (2.19) и (2.20) пригодны для практического использования в том случае, когда кватернионы составляющих поворотов заданы своими компонентами в одном и том же базисе. Если же кватернионы составляющих поворотов заданы в разных базисах, то возникает необходимость преобразования указанных формул к такому виду, в котором векторные части всех сомножителей будут записаны в ортах того базиса, в котором требуется найти результирующий кватернион (как правило, этим базисом является неподвижный базис \mathbf{I}).

Рассмотрим случай, когда составляющие повороты задаются параметрами Родрига–Гамильтона.

Определение. *Параметры Родрига–Гамильтона называются компоненты кватерниона в базисе, преобразуемом этим кватернионом.* В дальнейшем, чтобы отличать параметры Родрига–Гамильтона от компонент кватерниона в других базисах, будем обозначать их символами со звездочкой (за исключением скалярных компонент, не зависящих от базиса).

В задаче с двумя поворотами (рис. 5) параметрами Родрига–Гамильтона для первого и результирующего поворотов являются компоненты Λ и \mathbf{N} в базисе \mathbf{I} , а для второго поворота – компоненты \mathbf{M} в базисе \mathbf{I}' . Поэтому кватернионы этих поворотов выражаются через параметры Родрига–Гамильтона соотношениями

$$\Lambda = \lambda_0 + \sum_{k=1}^3 \lambda_k^* \mathbf{i}_k, \quad \mathbf{N} = \eta_0 + \sum_{k=1}^3 \eta_k^* \mathbf{i}_k, \quad \mathbf{M} = \mu_0 + \sum_{k=1}^3 \mu_k^* \mathbf{i}'_k. \quad (2.21)$$

В случае n последовательных поворотов будем иметь

$$\Lambda_j = \lambda_{j0} + \boldsymbol{\lambda}_j = \lambda_{j0} + \sum_{k=1}^3 \lambda_{jk}^* \mathbf{i}_k^{(j-1)}; \quad \mathbf{i}_k^{(0)} = \mathbf{i}_k. \quad (2.22)$$

Здесь $\mathbf{i}_k^{(j-1)}$ – орты базиса $\mathbf{I}^{(j-1)}$, получаемого в результате первых $j-1$ поворотов.

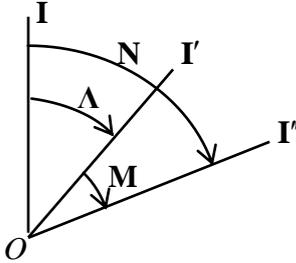


Рис. 5

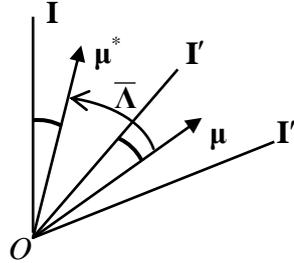


Рис. 6

Поскольку кватернионы (2.22) заданы в разных базисах, то формула (2.20) не может быть непосредственно использована для вычисления результирующего кватерниона. Для получения формулы сложения поворотов в параметрах Родрига–Гамильтона каждому повороту поставим в соответствие *собственный кватернион*, определяемый выражением

$$\Lambda_j^* = \lambda_{j0} + \lambda_j^* = \lambda_{j0} + \sum_{k=1}^3 \lambda_{jk}^* \mathbf{i}_k. \quad (2.23)$$

Этот кватернион получается из (2.22) заменой ортов базиса $\mathbf{I}^{(j-1)}$ ортами неподвижного базиса \mathbf{I} . Иными словами, каждый собственный кватернион (2.23) представляет собой заданный в неподвижном базисе вектор-столбец, составленный из параметров Родрига–Гамильтона. При этом для первого и результирующего поворотов имеем $\Lambda_1 = \Lambda_1^*$, $\Lambda = \Lambda^*$.

В задаче с двумя поворотами (рис. 5, 6) собственные кватернионы определяются выражениями

$$\Lambda^* = \Lambda, \quad \mathbf{N}^* = \mathbf{N}, \quad \mathbf{M}^* = \mu_0 + \mu^* = \mu_0 + \sum_{k=1}^3 \mu_k^* \mathbf{i}_k. \quad (2.24)$$

Из формул преобразования базисов $\mathbf{i}'_k = \Lambda \circ \mathbf{i}_k \circ \bar{\Lambda}$ следует соотношение $\mathbf{M} = \Lambda \circ \mathbf{M}^* \circ \bar{\Lambda}$, подстановка которого в (2.19) дает:

$$\mathbf{N} = \mathbf{M} \circ \mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{M}^* \circ \overline{\mathbf{\Lambda}} \circ \mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{M}^* \Rightarrow \mathbf{N}^* = \mathbf{\Lambda}^* \circ \mathbf{M}^*. \quad (2.25)$$

В полученной формуле (2.25) все кватернионы записаны в ортах одного и того же базиса \mathbf{I} , а их компонентами являются параметры Родрига–Гамильтона. Поэтому данная формула связывает параметры Родрига–Гамильтона результирующего поворота и составляющих поворотов.

Для случая n поворотов формула сложения в параметрах Родрига–Гамильтона принимает вид

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}^* = \mathbf{\Lambda}_1^* \circ \mathbf{\Lambda}_2^* \circ \dots \circ \mathbf{\Lambda}_n^*. \quad (2.26)$$

Обратим внимание, что в формуле (2.26) собственные кватернионы перемножаются в обратном порядке по отношению к порядку умножения кватернионов в формуле (2.20).

Используем формулу (2.26) для определения связи между параметрами Родрига–Гамильтона, задающими положение твердого тела, и углами Эйлера (рис. 3).

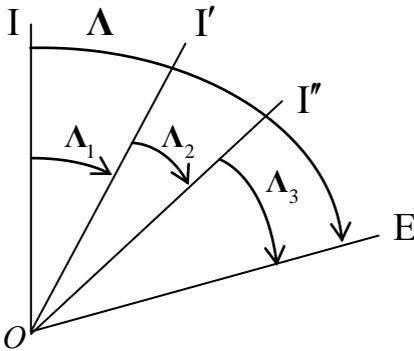


Рис. 7

Конечное положение связанного с телом базиса \mathbf{E} получается из начального положения \mathbf{I} в результате трех поворотов (рис. 7). Первым является поворот из положения \mathbf{I} вокруг оси \mathbf{i}_3 на угол прецессии ψ . Кватернион этого поворота $\mathbf{\Lambda}_1$ и собственный кватернион $\mathbf{\Lambda}_1^*$ имеют вид

$$\Lambda_1 = \cos \frac{\psi}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\psi}{2} = \Lambda_1^*.$$

Второй поворот осуществляется из положения \mathbf{I}' вокруг оси \mathbf{i}'_1 на угол θ . Поэтому имеем

$$\Lambda_2 = \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{i}'_1 \sin \frac{\theta}{2}; \quad \Lambda_2^* = \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{i}_1 \sin \frac{\theta}{2}.$$

Для третьего поворота, осуществляемого из положения \mathbf{I}'' вокруг оси \mathbf{i}''_3 на угол φ , получаем

$$\Lambda_3 = \cos \frac{\varphi}{2} + \mathbf{i}''_3 \sin \frac{\varphi}{2}; \quad \Lambda_3^* = \cos \frac{\varphi}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Вычислив теперь в соответствии с формулой (2.26) произведение $\Lambda^* = \Lambda_1^* \circ \Lambda_2^* \circ \Lambda_3^*$, найдем связь между параметрами Родрига–Гамильтона и углами Эйлера:

$$\begin{aligned} \lambda_0^* &= \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi + \varphi}{2}, & \lambda_1^* &= \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi - \varphi}{2}, \\ \lambda_2^* &= \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi - \varphi}{2}, & \lambda_3^* &= \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi + \varphi}{2}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Соотношения (2.27) дают возможность определить ось и угол конечного поворота твердого тела как функции углов Эйлера, а именно, направление оси конечного поворота по отношению к неподвижному базису \mathbf{I} определяется компонентами $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*$, а угол конечного поворота вычисляется по формуле

$$\alpha = 2 \arccos(\lambda_0^*) = 2 \arccos \left[\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi + \varphi}{2} \right]. \quad (2.28)$$

2.2. Угловая скорость твердого тела.

Уравнения Пуассона

В предыдущем параграфе было установлено, что произвольное движение твердого тела относительно некоторой системы отсчета $A\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ может быть разложено на движение некоторой

точки O этого тела и вращение (движение с неподвижной точкой O) – движение связанного с телом базиса $\mathbf{E}(O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)$ относительно базиса $\mathbf{I}(O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3)$ (рис. 1, 2). Определяемая ниже угловая скорость твердого тела является характеристикой вращательного движения.

Рассмотрим движение тела с неподвижной точкой O относительно базиса \mathbf{I} (рис. 2). Моментам времени t и $t + \Delta t$ соответствуют положения связанного с телом базиса $\mathbf{E}(t)$ и $\mathbf{E}(t + \Delta t)$. По теореме Эйлера о конечном повороте твердого тела указанные положения можно совместить одним поворотом вокруг некоторой оси $\mathbf{e}(t, \Delta t)$ на некоторый угол $\Delta\varphi(t, \Delta t)$.

Определение. Угловой скоростью твердого тела относительно базиса \mathbf{I} в момент t называется предел [3]

$$\boldsymbol{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi(t, \Delta t)}{\Delta t} \mathbf{e}(t, \Delta t). \quad (3.1)$$

Найдем выражение для вектора $\boldsymbol{\omega}$ через кватернион $\boldsymbol{\Lambda}(t)$, задающий положение тела относительно базиса \mathbf{I} . Перемещению тела из положения $\mathbf{E}(t)$ в положение $\mathbf{E}(t + \Delta t)$ соответствует кватернион

$$\begin{aligned} \delta\boldsymbol{\Lambda} &= \cos \frac{\Delta\varphi(t, \Delta t)}{2} + \mathbf{e}(t, \Delta t) \sin \frac{\Delta\varphi(t, \Delta t)}{2} = \\ &= 1 + \mathbf{e}(t, \Delta t) \frac{\Delta\varphi(t, \Delta t)}{2} + O((\Delta\varphi)^2), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $O((\Delta\varphi)^2)$ – члены второго порядка и выше относительно $\Delta\varphi(t, \Delta t)$. Этот кватернион определяется из формулы сложения поворотов (2.19) $\boldsymbol{\Lambda}(t + \Delta t) = \delta\boldsymbol{\Lambda} \circ \boldsymbol{\Lambda}(t)$, которую можно переписать в виде

$$\boldsymbol{\Lambda}(t + \Delta t) - \boldsymbol{\Lambda}(t) = \delta\boldsymbol{\Lambda} \circ \boldsymbol{\Lambda}(t) - \boldsymbol{\Lambda}(t) \Rightarrow \Delta\boldsymbol{\Lambda} = (\delta\boldsymbol{\Lambda} - 1) \circ \boldsymbol{\Lambda}(t).$$

Отсюда с учетом (3.2) и (3.1) следует

$$\dot{\Lambda} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \Lambda}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \Lambda - 1}{\Delta t} \circ \Lambda(t) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \circ \Lambda(t). \quad (3.3)$$

Формула для вектора угловой скорости получается разрешением уравнения (3.3) относительно $\boldsymbol{\omega}$ и имеет вид

$$\boldsymbol{\omega} = 2\dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda}. \quad (3.4)$$

Уравнения (3.3) являются кинематическими уравнениями вращательного движения твердого тела, записанными в кватернионах, и называются *уравнениями Пуассона*.

При практическом использовании кинематических уравнений (3.3) кватернион Λ целесообразно задавать компонентами в системе отсчета \mathbf{I} , т. е. параметрами Родрига–Гамильтона. В этом случае будем иметь

$$\Lambda = \lambda_0 + \sum_1^3 \lambda_k^* \mathbf{i}_k, \quad \dot{\Lambda} = \dot{\lambda}_0 + \sum_1^3 \dot{\lambda}_k^* \mathbf{i}_k.$$

Представляя вектор $\boldsymbol{\omega}$ тоже его компонентами $\omega_k = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{i}_k)$ в базисе \mathbf{I} и выполняя умножение в формуле (3.3), получим четыре скалярных дифференциальных уравнения, которые связывают параметры Родрига–Гамильтона с проекциями угловой скорости тела на оси базиса \mathbf{I} .

Однако во многих практических задачах угловая скорость задается проекциями $\omega_k^* = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_k)$ на связанный с телом базис \mathbf{E} (например, в системах ориентации космических аппаратов датчики угловых скоростей измеряют проекции угловой скорости на связанные с аппаратом оси). В этих случаях уравнение (3.3) не может быть непосредственно использовано, т. к. Λ и $\boldsymbol{\omega}$ заданы в разных базисах. Но, используя формулы преобразования базисов (2.9), вектор $\boldsymbol{\omega}$ можно записать в виде

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_1^3 \omega_k^* \mathbf{e}_k = \Lambda \circ \left(\sum_1^3 \omega_k^* \mathbf{i}_k \right) \circ \bar{\Lambda} = \Lambda \circ \boldsymbol{\omega}^* \circ \bar{\Lambda}; \quad \boldsymbol{\omega}^* = \sum_1^3 \omega_k^* \mathbf{i}_k,$$

где $\boldsymbol{\omega}^*$ – заданный в базисе \mathbf{I} вектор-столбец, составленный из проекций угловой скорости на связанные с телом оси. Подстав-

для это выражение в (3.3), получим вторую форму кинематических уравнений Пуассона:

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2} \Lambda \circ \omega^* . \quad (3.5)$$

Поскольку теперь Λ и ω^* записаны в ортах одного и того же базиса \mathbf{I} , то дифференциальное уравнение (3.5) связывает параметры Родрига–Гамильтона с проекциями угловой скорости тела на оси связанного с телом базиса \mathbf{E} .

Покажем, что вектор угловой скорости не зависит от выбора базиса в теле. Для этого свяжем с телом другой базис $O'E'$ с началом в точке O' и ортами e'_1, e'_2, e'_3 . Пусть кватернион \mathbf{C} задает положение базиса $O'E'$ относительно $O\mathbf{E}$. Тогда кватернион Λ' , задающий положение базиса $O'E'$ относительно базиса $O\mathbf{I}$, можно записать формулой (2.25) $\Lambda' = \Lambda \circ \mathbf{C}^*$, где \mathbf{C}^* – постоянный кватернион в базисе $O\mathbf{I}$, т.е. $\dot{\mathbf{C}}^* = 0$. Вычисляя на основе формулы (3.4) угловую скорость ω' базиса $O'E'$, получаем

$$\omega' = 2\dot{\Lambda}' \circ \bar{\Lambda}' = 2\dot{\Lambda} \circ \mathbf{C}^* \circ \bar{\mathbf{C}}^* \circ \bar{\Lambda} = 2\dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda} = \omega . \quad (3.6)$$

Угловая скорость тела одинакова также относительно разных систем отсчета, взаимная ориентация которых неизменна. Пусть взаимное положение базисов $O\mathbf{I}$ и $O\mathbf{I}'$ не меняется. Тогда кватернион \mathbf{C} , задающий положение $O\mathbf{I}$ относительно $O\mathbf{I}'$, остается постоянным ($\dot{\mathbf{C}} = 0$), а производные по времени от любого вектора в этих базисах совпадают. Поэтому, учитывая, что кватернионы Λ и Λ' , определяющие положение тела относительно $O\mathbf{I}$ и $O\mathbf{I}'$, связаны формулой $\Lambda' = \Lambda \circ \mathbf{C}$, получим аналогичное (3.6) равенство $\omega' = \omega$.

Таким образом, угловая скорость является дифференциальной характеристикой движения твердого тела как целого и не зависит от выбора каких-либо точек в теле. Поэтому лишены смысла формулировки типа “угловая скорость точки” или “угловая скорость тела относительно точки”. *Угловая скорость*

твердого тела всегда определяется по отношению к некоторой системе отсчета.

Движение твердого тела с угловой скоростью, равной нулю, называется *поступательным движением*. В этом случае из уравнения (3.3) следует $\dot{\Lambda} = 0$, т. е. Λ – постоянный кватернион, что соответствует неизменной ориентации тела относительно системы отсчета.

2.3. Формулы распределения скоростей и ускорений в твердом теле

Рассмотрим произвольное движение тела относительно системы отсчета $Ai_1i_2i_3$ (рис. 1). Пусть Λ – нормированный кватернион, задающий ориентацию связанного с телом базиса $Oe_1e_2e_3$ относительно $Ai_1i_2i_3$. Вычислим производные по времени от базисных векторов e_k в системе отсчета $Ai_1i_2i_3$. На основании формул (2.9) получим

$$\dot{e}_k = \dot{\Lambda} \circ i_k \circ \bar{\Lambda} + \Lambda \circ i_k \circ \dot{\bar{\Lambda}}; \quad k = 1, 2, 3.$$

Эти соотношения с учетом равенств

$$\Lambda \circ \bar{\Lambda} = 1, \Rightarrow \dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda} + \Lambda \circ \dot{\bar{\Lambda}} = 0 \quad (3.7)$$

приводятся к следующему виду:

$$\begin{aligned} \dot{e}_k &= \dot{\Lambda} \circ (\bar{\Lambda} \circ \Lambda) \circ i_k \circ \bar{\Lambda} + \Lambda \circ i_k \circ (\bar{\Lambda} \circ \Lambda) \circ \dot{\bar{\Lambda}} = \\ &= \dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda} \circ e_k - e_k \circ \dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda}. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая выражение (3.4) для вектора угловой скорости тела, получаем

$$\dot{e}_k = \omega \times e_k; \quad k = 1, 2, 3. \quad (3.8)$$

Найдем скорость произвольной точки тела в системе $Ai_1i_2i_3$. Положение этой точки определяется вектором

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_O + \mathbf{r} = \mathbf{R}_O + \sum_{k=1}^3 r_k e_k, \quad (3.9)$$

где \mathbf{R}_O – радиус-вектор точки O , а r_k – неизменные координаты точки в связанном с телом базисе $Oe_1e_2e_3$. Дифференцируя равенство (3.9) по времени и учитывая соотношения (3.8), приходим к формуле Эйлера распределения скоростей в твердом теле:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_O + \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{V}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (3.10)$$

Дифференцирование формулы (3.10) по времени дает формулу Ривальса распределения ускорений в твердом теле:

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \quad (3.11)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$ – угловое ускорение твердого тела, а \mathbf{r} – вектор, соединяющий точку O с рассматриваемой точкой тела.

Первое слагаемое в формуле (3.11) называется *ускорением полюса*, второе слагаемое – *вращательным ускорением*, третье – *осеостремительным ускорением*. При этом осеостремительное ускорение точки можно записать в виде

$$\mathbf{W}^{oc} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = -\mathbf{h}\omega^2,$$

где \mathbf{h} – составляющая вектора \mathbf{r} , ортогональная вектору $\boldsymbol{\omega}$.

Из формулы Эйлера следует, что проекции скоростей двух точек твердого тела на направление, соединяющее эти точки, одинаковы. Этот результат получается скалярным умножением уравнения (3.10) на вектор \mathbf{r} : $\mathbf{V} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{V}_O \cdot \mathbf{r}$. Кроме того, величина проекции скорости точки тела на направление угловой скорости тела является инвариантом, т. е. не зависит от выбора точки, поскольку в силу (3.10) $\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{V}_O \cdot \boldsymbol{\omega}$.

Формулы (3.10) и (3.11) являются основными рабочими формулами при решении задач на определение скоростей и ускорений точек твердого тела. Из них следует, что скорость и ускорение любой точки тела могут быть найдены, если известны скорость и ускорение какой-либо одной его точки O , а также угловая скорость и угловое ускорение тела.

В свою очередь формула (3.10) может быть использована для определения угловой скорости тела по известным скоростям его точек. При этом в общем случае (при пространственном движении твердого тела) скоростей двух точек тела недостаточно для однозначного определения его угловой скорости, т. к. векторное уравнение (3.10), рассматриваемое как уравнение относительно неизвестного вектора $\boldsymbol{\omega}$, определяет только два независимых скалярных уравнения (система (3.10) вырождена). Угловую скорость тела можно однозначно определить по скоростям трех его точек, не лежащих на одной прямой.

Остановимся на особенностях плоского движения тела.

Движение твердого тела относительно системы отсчета $Ai_1i_2i_3$ называется *плоским*, если каждая точка тела перемещается в неподвижной плоскости, параллельной некоторой плоскости Π . Иными словами, любое сечение тела неподвижной плоскостью, параллельной Π , остается в этой плоскости при плоском движении тела. При этом все точки тела, лежащие на оси, перпендикулярной к плоскости Π , имеют одинаковые скорости и ускорения, вследствие чего изучение плоского движения тела сводится к изучению движения только одного из его сечений, т. е. к изучению движения плоской фигуры в ее плоскости.

Рассмотрим движение плоского тела в плоскости. Будем считать, что плоскость Π совпадает с плоскостью базисных векторов i_1 и i_2 системы отсчета $Ai_1i_2i_3$. Выберем связанный с телом базис $Oe_1e_2e_3$ таким образом, чтобы орты e_1 и e_2 лежали в плоскости фигуры (рис. 8). Очевидно, что положение фигуры в плоскости Π можно задать тремя параметрами – двумерным радиусом-вектором R_O точки O и углом φ между ортами e_1 и i_1 .

Из определения плоского движения следует, что вектор e_3 связанного с телом базиса $Oe_1e_2e_3$ в любой момент времени ортогонален к плоскости движения фигуры и совпадает по на-

правлению с вектором \mathbf{i}_3 системы отсчета. Поэтому на основании формулы (3.8) получаем

$$\dot{\mathbf{e}}_3 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_3 = \omega \mathbf{i}_3, \quad (3.12)$$

т. е. при плоском движении вектор угловой скорости тела ортогонален к плоскости движения, и задача его определения сводится к нахождению одной скалярной величины ω .

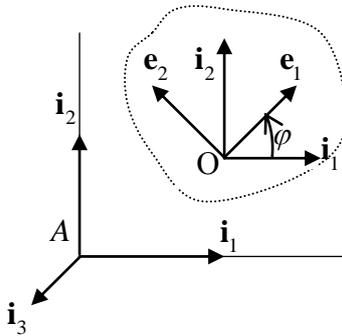


Рис. 8

Значение величины угловой скорости тела при плоском движении может быть выражено через производную от угла φ следующим образом. С одной стороны, производная от вектора \mathbf{e}_1 в системе отсчета $\mathbf{A}\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ выражается соотношением $\dot{\mathbf{e}}_1 = \dot{\varphi} \mathbf{e}_2$, а с другой стороны, в силу формул (3.8) и (3.12) имеем $\dot{\mathbf{e}}_1 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_1 = \omega \mathbf{e}_2$. Отсюда получаем $\omega = \dot{\varphi}$.

При плоском движении плоской фигуры вектор угловой скорости однозначно определяется по скоростям двух точек этой фигуры. Действительно, в силу формулы Эйлера (3.10) скорости двух точек фигуры O и B связаны равенством $\mathbf{V}_B - \mathbf{V}_O = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OB}$. Умножив обе части этого равенства векторно на вектор \mathbf{r}_{OB} слева, получим с учетом взаимной ортогональности векторов $\boldsymbol{\omega}$ и \mathbf{r}_{OB} следующее выражение:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{r}_{OB} \times (\mathbf{V}_B - \mathbf{V}_O) / |\mathbf{r}_{OB}|^2. \quad (3.13)$$

Отсюда, в частности, следует, что если при плоском движении скорости двух точек тела одинаковы, то угловая скорость тела равна нулю, т.е. тело совершает мгновенно поступательное движение и скорости всех точек тела одинаковы.

Одним из важных свойств плоского движения тела является существование в каждый момент времени *мгновенного центра скоростей* (неподвижной точки тела). Наличие этой точки доказывается следующим образом. Из формулы Эйлера следует, что неподвижная точка C тела удовлетворяет уравнению $\mathbf{V}_C = \mathbf{V}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OC} = 0$. Умножив векторно это уравнение на вектор $\boldsymbol{\omega}$ слева и учитывая взаимную ортогональность векторов $\boldsymbol{\omega}$ и \mathbf{r}_{OC} , получим следующую формулу, однозначно определяющую положение неподвижной точки тела:

$$\mathbf{r}_{OC} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_O / \omega^2; \quad \omega \neq 0. \quad (3.14)$$

Из этой формулы следует, что мгновенный центр скоростей лежит на прямой, проходящей через точку O и перпендикулярной к вектору скорости этой точки. Поэтому он может быть найден как точка пересечения перпендикуляров к скоростям двух точек тела, если скорости этих точек не параллельны друг другу (рис. 9). Для случая, когда известные скорости двух точек \mathbf{V}_B и \mathbf{V}_O параллельны, геометрический способ определения положения точки C приведен на рис. 10.

Использование мгновенного центра скоростей при решении задач на плоское движение полезно в том отношении, что если эту точку выбрать в качестве полюса, то формула Эйлера (3.10) приобретает наиболее простой вид:

$$\mathbf{V}_B = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{CB}. \quad (3.15)$$

Из этой формулы следует, что по величине скорости точек тела пропорциональны их расстояниям до мгновенного центра скоростей, а величину угловой скорости тела можно определить

как отношение величины скорости некоторой точки тела к ее расстоянию до точки C : $|\omega| = |\mathbf{V}_B|/|\mathbf{r}_{CB}|$.

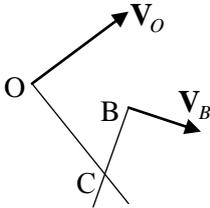


Рис. 9

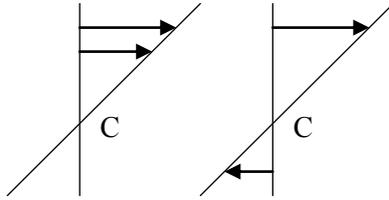


Рис.10

Отметим также, что при плоском движении тела выражение для осеострительного ускорения точек в формуле Ривальса (3.11) в силу ортогональности векторов ω и \mathbf{r} принимает упрощенный вид:

$$\mathbf{W}^{oc} = \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) = -\mathbf{r} \omega^2. \quad (3.16)$$

Кинематический винт твердого тела. Согласно формуле Эйлера (3.10) в каждый момент времени произвольное движение твердого тела может быть представлено как комбинация поступательного движения со скоростью \mathbf{V}_O некоторой точки O тела и вращения вокруг оси, проходящей через точку O , параллельной вектору ω . Выбирая в качестве полюса различные точки тела, получим разные представления одного и того же движения тела. *Кинематическим винтом* называется такое представление движения тела, в котором вектор скорости \mathbf{V}_C выбранного полюса C параллелен вектору угловой скорости тела ω , т. е. $\omega \times \mathbf{V}_C = 0$.

Предположим, что известны скорость \mathbf{V}_O некоторой точки O тела и угловая скорость тела ω , и найдем точку C , удовлетворяющую условию $\omega \times \mathbf{V}_C = 0$. В силу формулы Эйлера $\mathbf{V}_C = \mathbf{V}_O + \omega \times \mathbf{r}_{OC}$ для этой точки должно выполняться равенство

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_O + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OC}) = 0, \quad (3.17)$$

где \mathbf{r}_{OC} – радиус-вектор искомой точки. Разложим этот вектор на две составляющие:

$$\mathbf{r}_{OC} = \mathbf{h}_{OC} + \mathbf{f}_{OC}, \text{ где } \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{h}_{OC} = 0, \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{f}_{OC} = 0.$$

Тогда из уравнения (3.17) получим, что составляющая, ортогональная к вектору $\boldsymbol{\omega}$, однозначно определится формулой

$$\mathbf{h}_{OC} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_O / \omega^2; \quad \omega \neq 0,$$

а составляющая \mathbf{f}_{OC} , параллельная вектору $\boldsymbol{\omega}$, может принимать любое значение.

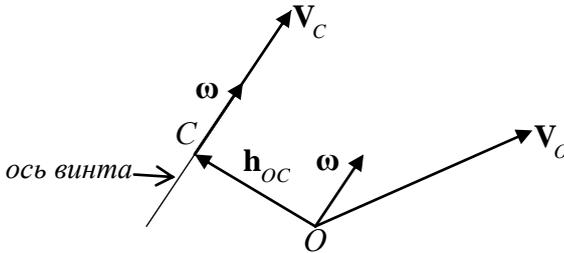


Рис. 11

Отсюда следует, что точки, удовлетворяющие условию $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_C = 0$, образуют прямую, называемую *осью кинематического винта*. Эта прямая параллельна вектору угловой скорости тела – *главному вектору винта*. Скорости всех точек тела, принадлежащих оси винта, одинаковы по величине и по направлению. Величину V_C скорости этих точек можно определить по известной скорости точки O и угловой скорости тела, используя инвариантность скалярного произведения: $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{V}_C = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{V}_O$. Записывая вектор \mathbf{V}_C в виде $\mathbf{V}_C = V_C \boldsymbol{\omega} / |\boldsymbol{\omega}|$, получим

$$V_C = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{V}_O / |\boldsymbol{\omega}|.$$

Кинематический винт тела характеризуется *тремя параметрами*: осью винта, вектором угловой скорости тела и величиной скорости V_C точек оси винта.

Отметим, что ось кинематического винта является осью минимальных скоростей твердого тела. В частном случае, когда $V_C = 0$, движение тела представляет собой мгновенное вращение вокруг этой оси. Для мгновенно поступательного движения тела ($\omega = 0$) кинематический винт не определен.

2.4. Метод сложного движения

Формулировка задачи на сложное движение состоит в следующем. Пусть задано движение связанного с твердым телом базиса OE относительно базиса BI' , и задано движение базиса BI' относительно системы отсчета AI (рис. 12). Требуется найти движение базиса OE относительно AI .

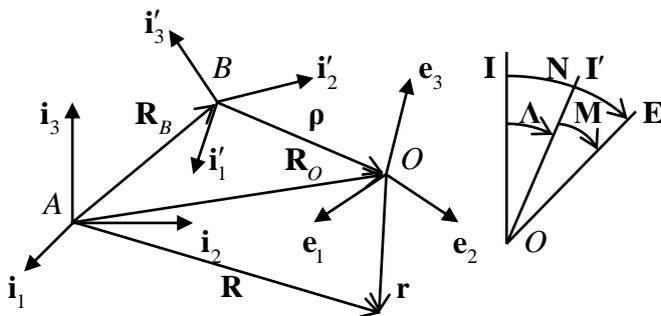


Рис. 12

В этой задаче движение базиса OE относительно BI' называется *относительным* движением тела, движение базиса BI' относительно AI – *переносным* движением, а движение базиса OE относительно AI – *абсолютным* движением.

Переносное движение тела задается скоростью V_B и ускорением W_B точки B относительно системы AI , а также угло-

вой скоростью $\boldsymbol{\omega}^{\text{пер}}$ и угловым ускорением $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{пер}}$ базиса \mathbf{B}' относительно \mathbf{A}' . В свою очередь векторы $\mathbf{V}_O^{\text{отн}}$ и $\mathbf{W}_O^{\text{отн}}$ задают скорость и ускорение точки O в системе \mathbf{B}' , а векторы $\boldsymbol{\omega}^{\text{отн}}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{отн}}$ – угловую скорость и угловое ускорение связанного с телом базиса $\mathbf{O}\mathbf{E}$ относительно \mathbf{B}' .

Чтобы найти параметры абсолютного движения тела, нужно найти скорость \mathbf{V}_O и ускорение \mathbf{W}_O точки O в системе отсчета \mathbf{A}' , а также угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ и угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon}$ базиса $\mathbf{O}\mathbf{E}$ относительно \mathbf{A}' .

Найдем сначала скорость и ускорение точки O в системе \mathbf{A}' . Записывая вектор $\boldsymbol{\rho}$, определяющий положение точки O в базисе \mathbf{B}' в виде $\boldsymbol{\rho} = \sum \rho_k \mathbf{i}'_k$ и дифференцируя вектор $\mathbf{R}_O = \mathbf{R}_B + \boldsymbol{\rho}$ по времени в системе \mathbf{A}' , получим

$$\mathbf{V}_O = \dot{\mathbf{R}}_B + \dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{V}_B + \sum_1^3 \dot{\rho}_k \mathbf{i}'_k + \sum_1^3 \rho_k \dot{\mathbf{i}}'_k. \quad (3.18)$$

Отсюда, учитывая, что $\sum_1^3 \dot{\rho}_k \bar{\mathbf{i}}'_k = \mathbf{V}_O^{\text{отн}}$, а производные от базисных векторов \mathbf{i}'_k выражаются в силу формулы (3.8) соотношениями $\dot{\mathbf{i}}'_k = \boldsymbol{\omega}^{\text{пер}} \times \mathbf{i}'_k$, имеем

$$\mathbf{V}_O = \mathbf{V}_O^{\text{отн}} + \mathbf{V}_B + \boldsymbol{\omega}^{\text{пер}} \times \boldsymbol{\rho} = \mathbf{V}_O^{\text{отн}} + \mathbf{V}_O^{\text{пер}}, \quad (3.19)$$

где $\mathbf{V}_O^{\text{пер}} = \mathbf{V}_B + \boldsymbol{\omega}^{\text{пер}} \times \boldsymbol{\rho}$ – *переносная скорость точки O* . В соответствии с формулой Эйлера распределения скоростей в твердом теле (3.10) вектор $\mathbf{V}_O^{\text{пер}}$ равен скорости той точки системы \mathbf{B}' , рассматриваемой как твердое тело, в которой в данный момент находится точка O . Иначе говоря, переносная скорость точки O получается “замораживанием” относительного движения этой точки в системе \mathbf{B}' .

Ускорение точки O в системе \mathbf{A}' находится дифференцированием вектора \mathbf{V}_O (3.18) по времени в системе \mathbf{A}' :

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_O &= \mathbf{W}_B + \sum_1^3 \ddot{\rho}_k \mathbf{i}'_k + 2 \sum_1^3 \dot{\rho}_k \dot{\mathbf{i}}'_k + \sum_1^3 \rho_k \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\omega}^{nep} \times \mathbf{i}'_k) = \\ &= [\mathbf{W}_B + \boldsymbol{\varepsilon}^{nep} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega}^{nep} \times (\boldsymbol{\omega}^{nep} \times \boldsymbol{\rho})] + \sum_1^3 \ddot{\rho}_k \mathbf{i}'_k + 2 \boldsymbol{\omega}^{nep} \times \mathbf{V}_O^{отн}.\end{aligned}$$

В полученном выражении первое слагаемое, выделенное скобками, дает в соответствии с формулой (3.11) ускорение той точки системы $B\mathbf{I}'$, в которой в рассматриваемый момент находится движущаяся относительно этой системы точка O . Оно называется *переносным ускорением точки O* , обозначается через \mathbf{W}_O^{nep} и вычисляется «замораживанием» точки O в системе $B\mathbf{I}'$. Второе слагаемое $\mathbf{W}_O^{отн} = \sum_1^3 \ddot{\rho}_k \mathbf{i}'_k$ представляет собой *относительное ускорение точки O* , а третье слагаемое $\mathbf{W}_O^{кор} = 2\boldsymbol{\omega}^{nep} \times \mathbf{V}_O^{отн}$ называется *кориолисовым ускорением точки O* . Таким образом, абсолютное ускорение точки O определяется формулой Кориолиса:

$$\mathbf{W}_O = \mathbf{W}_O^{nep} + \mathbf{W}_O^{отн} + \mathbf{W}_O^{кор}. \quad (3.20)$$

Формулы (3.19) и (3.20) дают правило вычисления скоростей и ускорений точек методом сложного движения.

Чтобы найти угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ твердого тела в системе $A\mathbf{I}$, запишем скорость произвольной точки \mathbf{r} в этой системе. С одной стороны, в силу формулы Эйлера (3.10) скорость точки может быть записана через искомую угловую скорость в виде $\mathbf{V} = \mathbf{V}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ (рис. 12). С другой стороны, эту скорость можно вычислить по установленным выше правилам сложного движения точки:

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= \mathbf{V}^{nep} + \mathbf{V}^{отн} = [\mathbf{V}_B + \boldsymbol{\omega}^{nep} \times (\boldsymbol{\rho} + \mathbf{r})] + [\mathbf{V}_O^{отн} + \boldsymbol{\omega}^{отн} \times \mathbf{r}] = \\ &= [\mathbf{V}_B + \boldsymbol{\omega}^{nep} \times \boldsymbol{\rho} + \mathbf{V}_O^{отн}] + (\boldsymbol{\omega}^{nep} + \boldsymbol{\omega}^{отн}) \times \mathbf{r} = \mathbf{V}_O + (\boldsymbol{\omega}^{nep} + \boldsymbol{\omega}^{отн}) \times \mathbf{r}.\end{aligned}$$

Отсюда в силу произвольности \mathbf{r} получаем для абсолютной угловой скорости тела формулу

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^{\text{пер}} + \boldsymbol{\omega}^{\text{отн}}. \quad (3.21)$$

Формулу сложения угловых скоростей (3.21) можно установить также, используя формулу (3.4), которая определяет угловую скорость одного базиса относительно другого как функцию кватерниона, задающего взаимную ориентацию этих базисов. Обозначим через $O\mathbf{I}$ и $O\mathbf{I}'$ базисы с началом в точке O и ортами, параллельными одноименным ортам базисов $A\mathbf{I}$ и $B\mathbf{I}'$ соответственно (рис. 12). Пусть кватернион Λ задает положение базиса $O\mathbf{I}'$ относительно $O\mathbf{I}$, а кватернионом \mathbf{M} – положение $O\mathbf{E}$ относительно $O\mathbf{I}'$. Тогда по формуле сложения поворотов (2.25) получаем, что положение базиса $O\mathbf{E}$ относительно $O\mathbf{I}$ определяется кватернионом $\mathbf{N} = \Lambda \circ \mathbf{M}^*$, где $\mathbf{M}^* = \bar{\Lambda} \circ \mathbf{M} \circ \Lambda$ – собственный кватернион второго поворота. В соответствии с формулой (3.4) угловая скорость базиса $O\mathbf{E}$ относительно базиса $O\mathbf{I}$ запишется в виде

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= 2\dot{\mathbf{N}} \circ \bar{\mathbf{N}} = 2(\dot{\Lambda} \circ \mathbf{M}^* + \Lambda \circ \dot{\mathbf{M}}^*) \circ \bar{\mathbf{M}}^* \circ \bar{\Lambda} = \\ &= 2\dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda} + 2\Lambda \circ \dot{\mathbf{M}}^* \circ \bar{\mathbf{M}}^* \circ \bar{\Lambda}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Угловые скорости переносного и относительного движения определяются выражениями

$$\boldsymbol{\omega}^{\text{пер}} = 2\dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda}, \quad \boldsymbol{\omega}^{\text{отн}} = 2\dot{\mathbf{M}}_I \circ \bar{\mathbf{M}},$$

где $\dot{\mathbf{M}}_I$ – производная от кватерниона \mathbf{M} , вычисленная в системе $O\mathbf{I}'$, т. е.

$$\dot{\mathbf{M}}_I = \dot{\mu}_0 + \sum_1^3 \dot{\mu}_k^* \mathbf{i}'_k = \Lambda \circ (\dot{\mu}_0 + \sum_1^3 \dot{\mu}_k^* \mathbf{i}_k) \circ \bar{\Lambda} = \Lambda \circ \dot{\mathbf{M}}^* \circ \bar{\Lambda}.$$

Отсюда получаем $\boldsymbol{\omega}^{\text{отн}} = 2\Lambda \circ \dot{\mathbf{M}}^* \circ \bar{\mathbf{M}}^* \circ \bar{\Lambda}$, т. е. соотношение (3.22) совпадает с формулой (3.21).

Для вычисления абсолютного углового ускорения тела $\boldsymbol{\varepsilon}$ нужно продифференцировать вектор абсолютной угловой скорости $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^{\text{пер}} + \boldsymbol{\omega}^{\text{отн}}$ в системе $O\mathbf{I}$. При этом следует учиты-

вать, что вектор $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{отн}}$ представляет собой производную по времени от вектора $\boldsymbol{\omega}^{\text{отн}}$, вычисленную в системе $O\mathbf{I}'$, т. е. если $\boldsymbol{\omega}^{\text{отн}} = \sum_1^3 \omega_k^{\text{отн}} \mathbf{i}'_k$, то $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{отн}} = \sum_1^3 \dot{\omega}_k^{\text{отн}} \mathbf{i}'_k$. Поэтому производная от вектора $\boldsymbol{\omega}^{\text{отн}}$, вычисленная в системе $O\mathbf{I}$, равна

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}^{\text{отн}} = \sum_1^3 \dot{\omega}_k^{\text{отн}} \mathbf{i}'_k + \sum_1^3 \omega_k^{\text{отн}} \dot{\mathbf{i}}'_k = \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{отн}} + \boldsymbol{\omega}^{\text{пер}} \times \boldsymbol{\omega}^{\text{отн}}.$$

Отсюда следует формула для абсолютного углового ускорения тела:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}}^{\text{пер}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}^{\text{отн}} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{пер}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{отн}} + \boldsymbol{\omega}^{\text{пер}} \times \boldsymbol{\omega}^{\text{отн}}. \quad (3.23)$$

Полученные формулы (3.19) – (3.23) дают возможность вычислять все кинематические параметры абсолютного движения твердого тела через заданные кинематические параметры переносного и относительного движения.

2.5. О решениях уравнений Пуассона

Уравнения Пуассона (3.3) или (3.5) являются дифференциальными уравнениями первого порядка. Если известен закон изменения угловой скорости тела $\boldsymbol{\omega}(t)$ и задано начальное положение тела $\boldsymbol{\Lambda}(0)$, то интегрированием этих уравнений определяется текущее положение тела $\boldsymbol{\Lambda}(t)$.

Уравнения Пуассона имеют первый интеграл $\|\boldsymbol{\Lambda}\| = \text{const}$. Действительно, из уравнения (3.3) имеем $2\dot{\bar{\boldsymbol{\Lambda}}} = 2\bar{\dot{\boldsymbol{\Lambda}}} = -\bar{\boldsymbol{\Lambda}} \circ \boldsymbol{\omega}$. Поэтому для производной по времени от нормы кватерниона получаем $\dot{\bar{\boldsymbol{\Lambda}}} \circ \bar{\boldsymbol{\Lambda}} + \bar{\boldsymbol{\Lambda}} \circ \dot{\bar{\boldsymbol{\Lambda}}} = 0$.

Наличие первого интеграла $\|\boldsymbol{\Lambda}\| = \text{const}$ является важным свойством уравнений Пуассона. Из него следует, что если $\boldsymbol{\Lambda}(0)$ – нормированный кватернион, то решение $\boldsymbol{\Lambda}(t)$ будет также нормированным кватернионом. Тем самым подтверждается корректность использования нормированных кватернионов для задания ориентации твердого тела.

Исследуем структуру общего решения уравнения (3.3). Пусть $\Lambda(t)$ и $\Lambda'(t)$ – два решения этого уравнения. Записывая $\Lambda(t)$ в виде $\Lambda(t) = \Lambda'(t) \circ \mathbf{M}(t)$ и подставляя это решение в (3.3), получим уравнения

$$2(\dot{\Lambda}' \circ \mathbf{M} + \Lambda' \circ \dot{\mathbf{M}}) = \omega \circ \Lambda' \circ \mathbf{M}, \quad 2\dot{\Lambda}' = \omega \circ \Lambda'.$$

Из них следует $\Lambda' \circ \dot{\mathbf{M}} = 0$, т. е. $\mathbf{M} = \mathbf{C}$ – постоянный кватернион. Таким образом, общее решение уравнения (3.3) имеет вид

$$\Lambda(t) = \Lambda'(t) \circ \mathbf{C}, \tag{3.24}$$

где $\Lambda'(t)$ – любое частное решение, а \mathbf{C} – кватернионная константа.

Полученный результат можно трактовать таким образом, что общее решение (3.24) определяет положение твердого тела относительно любого неподвижного базиса $O\mathbf{I}$, а положение относительно конкретного базиса $O\mathbf{I}'$ определяется частным решением $\Lambda'(t)$. При этом взаимная ориентация базисов $O\mathbf{I}$ и $O\mathbf{I}'$ задается постоянным кватернионом \mathbf{C} (рис. 13).

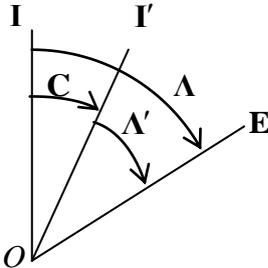


Рис. 13

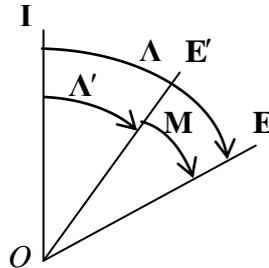


Рис. 14

Возможна и другая трактовка, в которой общее решение (3.24) определяет положение любого связанного с телом базиса $O\mathbf{E}$ относительно системы отсчета $O\mathbf{I}$, а частное решение $\Lambda'(t)$ описывает положение фиксированного базиса $O\mathbf{E}'$ (рис. 14). При этом из формулы сложения поворотов (2.25) имеем

$\Lambda(t) = \Lambda'(t) \circ \mathbf{M}^*$, где \mathbf{M}^* – собственный кватернион поворота из базиса OE' в базис OE . В силу неизменности взаимной ориентации базисов OE' и OE кватернион \mathbf{M}^* – постоянный. Поэтому, полагая $\mathbf{M}^* = \mathbf{C}$, приходим к решению (3.24).

Каждое конкретное решение уравнений Пуассона получается из общего решения (3.24) заданием начальных условий. Если, например, положить $\Lambda(0) = 1$, то решение $\Lambda(t)$ будет определять текущее положение твердого тела относительно его начального положения в момент $t = 0$.

Простейшим движением твердого тела является вращение вокруг неподвижной оси, т. е. когда вектор угловой скорости имеет вид $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{e}\alpha(t)$, где \mathbf{e} – неизменный единичный вектор. В этом случае решение уравнения (3.3), удовлетворяющее условию $\Lambda(0) = 1$, определяется формулой

$$\Lambda(t) = \cos \frac{\varphi(t)}{2} + \mathbf{e} \sin \frac{\varphi(t)}{2}; \quad \varphi(t) = \int_0^t \alpha(\tau) d\tau. \quad (3.25)$$

Аналитически проинтегрировать кинематические уравнения Пуассона удастся также в случаях, когда движение твердого тела представляет собой комбинацию нескольких простых интегрируемых движений. К таким относится случай *прецессионного* движения твердого тела.

Определение. *Движение твердого тела с неподвижной точкой называется прецессионным, если некоторая фиксированная в теле ось \mathbf{e} , проходящая через неподвижную точку, совершает движение по поверхности неподвижного кругового конуса (рис. 15).*

В случае прецессионного движения угол θ между осью конуса \mathbf{i} и осью тела \mathbf{e} не меняется, вследствие чего выполняется равенство $\mathbf{i} \cdot \dot{\mathbf{e}} = 0$. Отсюда с учетом формулы $\dot{\mathbf{e}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}$ получаем $\mathbf{i} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}) = 0$, т. е. вектор угловой скорости тела раскладывается на ось конуса \mathbf{i} и ось тела \mathbf{e} :

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 = \omega_1(t)\mathbf{i} + \omega_2(t)\mathbf{e}. \quad (3.26)$$

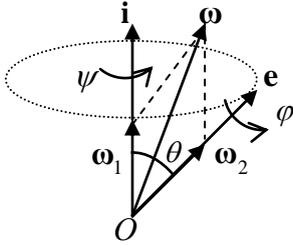


Рис. 15

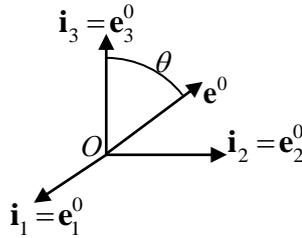


Рис. 16

Ось конуса \mathbf{i} называется *осью прецессии*, ось тела \mathbf{e} – *осью собственного вращения*, а составляющие ω_1 и ω_2 называются *угловой скоростью прецессии* и *угловой скоростью собственного вращения* соответственно. Эти составляющие равны соответствующим производным от углов Эйлера $\omega_1 = \dot{\psi}$, $\omega_2 = \dot{\varphi}$ (рис. 3), если систему отсчета и связанный с телом базис выбрать так, что $\mathbf{i}_3 = \mathbf{i}$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}$. При таком выборе угол θ будет углом нутации.

Если составляющие ω_1 и ω_2 в формуле (3.26) постоянны, то такое движение тела называется *регулярной прецессией*.

Приведем решение кинематических уравнений (3.3) для рассматриваемого прецессионного движения тела. Будем считать, что в начальный момент времени $t=0$ оси связанного с телом базиса $O\mathbf{E}$ совпадают с осями системы отсчета $O\mathbf{I}$, ось прецессии направлена по вектору \mathbf{i}_3 , а ось собственного вращения в начальный момент времени расположена в плоскости векторов $\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ (рис. 16).

Введем базис $O\mathbf{I}'$, вращающийся относительно неподвижного базиса $O\mathbf{I}$ с угловой скоростью $\omega_1 = \omega_1 \mathbf{i}_3$. Тогда связанный с телом базис $O\mathbf{E}$ будет вращаться относительно $O\mathbf{I}'$ с угловой скоростью $\omega_2 = \omega_2 \mathbf{e}$.

Поскольку движение базиса $O\mathbf{I}'$ относительно базиса $O\mathbf{I}$ есть вращение вокруг неподвижной оси \mathbf{i}_3 , то положение этого базиса будет определяться кватернионом

$$\Lambda_1 = \cos \frac{\mathcal{G}_1}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\mathcal{G}_1}{2}; \quad \mathcal{G}_1 = \int_0^t \omega_1(\tau) d\tau.$$

В свою очередь, так как ось \mathbf{e} неподвижна в базисе $O\mathbf{I}'$, то кватернион Λ_2 , задающий положение базиса $O\mathbf{E}$ относительно $O\mathbf{I}'$, определяется выражением

$$\Lambda_2 = \cos \frac{\mathcal{G}_2}{2} + \mathbf{e} \sin \frac{\mathcal{G}_2}{2}; \quad \mathcal{G}_2 = \int_0^t \omega_2(\tau) d\tau.$$

Применяя формулу сложения поворотов (2.25), находим кватернион Λ , задающий положение $O\mathbf{E}$ относительно $O\mathbf{I}$:

$$\Lambda(t) = \Lambda_1^* \circ \Lambda_2^* = \left(\cos \frac{\mathcal{G}_1}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\mathcal{G}_1}{2} \right) \circ \left(\cos \frac{\mathcal{G}_2}{2} + \mathbf{e}^0 \sin \frac{\mathcal{G}_2}{2} \right),$$

где $\mathbf{e}^0 = \bar{\Lambda}_1 \circ \mathbf{e} \circ \Lambda_1 = \mathbf{i}_2 \sin \theta + \mathbf{i}_3 \cos \theta$ – начальное положение оси \mathbf{e} в системе отсчета $O\mathbf{I}$.

2.6. Кинематические уравнения в углах Эйлера

В соответствии с правилом выбора углов Эйлера (рис. 3) движение тела с неподвижной точкой представляется в виде суммы трех вращений: 1) вокруг оси прецессии \mathbf{i}_3 с угловой скоростью $\dot{\psi}$; 2) вокруг линии узлов \mathbf{i}'_1 с угловой скоростью $\dot{\theta}$; 3) вокруг оси собственного вращения \mathbf{e}_3 с угловой скоростью $\dot{\varphi}$. Поэтому из формулы сложения угловых скоростей (3.21) в сложном движении тела следует, что вектор угловой скорости определяется выражением

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \mathbf{i}_3 + \dot{\theta} \mathbf{i}'_1 + \dot{\varphi} \mathbf{e}_3.$$

Проектируя это равенство на оси связанного с телом базиса и используя для проекций угловой скорости на эти оси обозначения $p = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_1$, $q = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_2$, $r = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_3$, получим

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ q &= \dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ r &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Кинематические уравнения Эйлера получаются разрешением системы (3.27) относительно производных от углов Эйлера и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= (p \sin\varphi + q \cos\varphi) / \sin\theta, & \dot{\theta} &= p \cos\varphi - q \sin\varphi, \\ \dot{\varphi} &= r - (p \sin\varphi + q \cos\varphi) / \operatorname{tg}\theta.\end{aligned}\quad (3.28)$$

Если известны проекции угловой скорости $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$ и заданы начальные значения углов Эйлера, то интегрированием уравнений (3.28) определяются текущие значения углов Эйлера. Отметим, что особенностью этих уравнений является вырождение в точках $\sin\theta=0$.

Упражнения

1. Найти связь между параметрами Родрига–Гамильтона и направляющими косинусами.

2. Как изменяется кватернион \mathbf{R} преобразованиями $\mathbf{R}' = \Lambda \circ \mathbf{R} \circ \bar{\Lambda}$ и $\mathbf{R}' = \Lambda \circ \mathbf{R} \circ \Lambda^{-1}$, если Λ – ненормированный кватернион?

3. Показать, что преобразование $\mathbf{r}' = \mathbf{e} \circ \mathbf{r} \circ \mathbf{e}$, $|\mathbf{e}|=1$ представляет собой зеркальное отражение вектора \mathbf{r} относительно плоскости, перпендикулярной \mathbf{e} . Показать также, что последовательность двух зеркальных отражений относительно двух плоскостей эквивалентна повороту вокруг линии пересечения этих плоскостей на двойной угол между ними.

4. Перемещение твердого тела с неподвижной точкой задается двумя последовательными поворотами вокруг осей ξ_1 и ξ_2 . Показать, что перемещение будет тем же самым, если вначале выполнить второй поворот вокруг оси ξ_2 , а затем первый вокруг оси ξ'_1 , полученной из ξ_1 вторым поворотом.

5. С твердым телом связана правая прямоугольная тройка векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Перемещение тела задается тремя последовательными поворотами: вокруг оси \mathbf{e}_1 на угол α_1 , вокруг оси

\mathbf{e}_2 на угол α_2 и вокруг оси \mathbf{e}_3 на угол α_3 . Найти ось и угол результирующего поворота твердого тела.

6. Последовательными поворотами вокруг собственных осей тело повернули на угол α_1 вокруг оси \mathbf{e}_1 и на угол α_2 вокруг оси \mathbf{e}_2 . Другое тело из того же начального положения повернули сначала вокруг оси \mathbf{e}_2 на угол α_2 , а затем вокруг оси \mathbf{e}_1 на угол α_1 . Определить относительное положение тел в параметрах Родрига–Гамильтона.

7. Показать, что из постоянства направления вектора угловой скорости твердого тела в неподвижной системе координат следует постоянство направления этого вектора в связанной с телом системе координат и наоборот.

8. Показать, что если движение твердого тела относительно некоторой системы отсчета является прецессией, то движение этой системы отсчета относительно тела также является прецессией. Найти связь между параметрами этих прецессий.

3. Динамика твердого тела

3.1. Основные теоремы динамики

Основными динамическими величинами, характеризующими движение произвольной механической системы, принято считать *импульс, момент импульса и кинетическую энергию* системы.

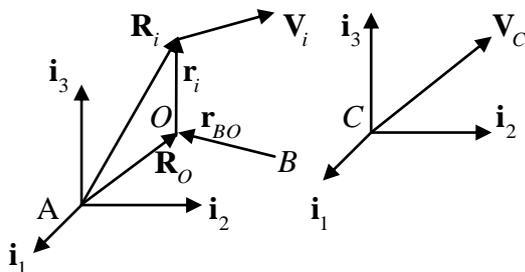


Рис. 17

Импульсом системы материальных точек относительно системы отсчета $Ai_1i_2i_3$ называется вектор

$$\mathbf{Q} = \sum_i m_i \mathbf{V}_i, \quad (4.1)$$

где \mathbf{V}_i – скорость i -й точки в системе отсчета.

Центром масс (центром инерции) системы называется точка C, определяемая соотношением

$$m\mathbf{R}_C = \sum_i m_i \mathbf{R}_i; \quad m = \sum_i m_i. \quad (4.2)$$

Импульс системы выражается через скорость ее центра масс равенством

$$\mathbf{Q} = m\mathbf{V}_C. \quad (4.3)$$

Моментом импульса (кинетическим моментом) системы относительно полюса O называется вектор

$$\mathbf{K}_O = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{V}_i = \sum_i (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_O) \times m_i \mathbf{V}_i. \quad (4.4)$$

Таким образом, кинетический момент зависит и от системы отсчета и от полюса. Формула связи между моментами относительно разных полюсов легко выводится из определения (4.4) и имеет следующий вид:

$$\mathbf{K}_B = \mathbf{K}_O + \mathbf{r}_{BO} \times \mathbf{Q}. \quad (4.5)$$

Из этой формулы следует, в частности, что если импульс системы равен нулю, то кинетический момент не зависит от полюса.

Введем *систему Кенига*: $C \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3$, которая имеет начало в центре масс C и движется поступательно относительно исходной системы отсчета $A \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3$. Обозначим через $\mathbf{V}_i^{\text{отн}}$ скорости точек в системе Кенига. Тогда абсолютные скорости точек будут определяться выражениями

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_C + \mathbf{V}_i^{\text{отн}}, \quad (4.6)$$

а с учетом формул (4.4), (4.2) получим

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_C &= \sum_i (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_C) \times m_i (\mathbf{V}_C + \mathbf{V}_i^{\text{отн}}) = \\ &= \sum_i (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_C) \times m_i \mathbf{V}_i^{\text{отн}} = \mathbf{K}_C^{\text{отн}}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Таким образом, для полюса, совпадающего с центром масс, кинетический момент абсолютного движения тождественно равен кинетическому моменту движения относительно системы Кенига.

С учетом равенства (4.7) формулу (4.5) можно записать в виде

$$\mathbf{K}_B = \mathbf{K}_C + \mathbf{r}_{BC} \times \mathbf{Q} = \mathbf{K}_C^{\text{отн}} + \mathbf{r}_{BC} \times m \mathbf{V}_C. \quad (4.8)$$

Из нее следует, что кинетический момент относительно произвольного полюса B может быть представлен в виде суммы кинетического момента движения центра масс (второе слагаемое)

и кинетического момента относительно центра масс, вычисленного в базисе Кенига (первое слагаемое).

Кинетическая энергия системы определяется выражением

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{V}_i^2. \quad (4.8)$$

Представляя абсолютные скорости точек в виде (4.6) и учитывая равенство $\sum_i m_i \mathbf{V}_i^{\text{отн}} = 0$, получим следующую формулу, называемую *теоремой Кенига* для кинетической энергии:

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{V}_C^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{V}_i^{\text{отн}})^2 = \frac{1}{2} m \mathbf{V}_C^2 + T^{\text{отн}}. \quad (4.9)$$

Здесь первое слагаемое называется кинетической энергией движения центра масс, а второе слагаемое представляет собой кинетическую энергию движения относительно системы Кенига.

В формулировках основных теорем динамики (теоремы об изменении импульса, момента импульса и кинетической энергии) фигурируют определяемые ниже величины, характеризующие действующие на систему силы.

Главным вектором действующих на систему сил \mathbf{F}_i называется векторная сумма

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i. \quad (4.10)$$

Главный момент сил \mathbf{F}_i относительно полюса O определяется выражением

$$\mathbf{M}_O = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_i (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_O) \times \mathbf{F}_i. \quad (4.11)$$

Связь между моментами сил относительно разных полюсов выражается формулой

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{M}_O + \mathbf{r}_{BO} \times \mathbf{F}, \quad (4.12)$$

аналогичной формуле (4.5) для момента импульса. Из формулы (4.12) следует, что скалярное произведение главного вектора на

главный момент не зависит от полюса, т. е. является инвариантом:

$$\mathbf{M}_B \cdot \mathbf{F} = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{F}.$$

Мощность N и элементарная работа δA сил определяются формулами

$$N = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{V}_i, \quad \delta A = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{R}_i = N dt, \quad (4.13)$$

где \mathbf{V}_i и $d\mathbf{R}_i = \mathbf{V}_i dt$ – скорость и элементарное перемещение материальной точки, на которую действует сила \mathbf{F}_i .

Обратим внимание, что по определению *мощность и элементарная работа сил зависят от системы отсчета.*

Основные теоремы динамики выводятся из аксиом Ньютона, сформулированных для материальной точки. В инерциальной системе отсчета уравнение движения точки описывается вторым законом Ньютона и имеет вид

$$m_i \mathbf{W}_i = \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{\text{ex}} + \mathbf{F}_i^{\text{in}}. \quad (4.14)$$

Здесь сила, действующая на точку, представлена двумя составляющими. Первая из них \mathbf{F}_i^{ex} – внешняя сила, действующая со стороны объектов, не входящих в рассматриваемую систему, а вторая \mathbf{F}_i^{in} – внутренняя сила, обусловленная взаимодействием с точками рассматриваемой системы. Каждая внутренняя сила определяется выражением $\mathbf{F}_i^{\text{in}} = \sum_{k \neq i} \mathbf{F}_{ik}^{\text{in}}$, слагаемые которого в силу третьего закона Ньютона подчиняются равенствам

$$\mathbf{F}_{ik}^{\text{in}} = -\mathbf{F}_{ki}^{\text{in}}, \quad \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ik}^{\text{in}} = -\mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{ki}^{\text{in}}. \quad (4.15)$$

Отсюда следует, что *для внутренних сил главный вектор и главный момент относительно любого полюса равны нулю:*

$$\mathbf{F}^{\text{in}} = \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{in}} = 0, \quad \mathbf{M}_O^{\text{in}} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{in}} = 0. \quad (4.16)$$

Теорема об изменении импульса получается дифференцированием выражения (4.1) по времени и с учетом (4.14), (4.16) описывается соотношением

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F}^{\text{ex}} = \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ex}}, \quad (4.17)$$

т. е. производная от импульса по времени равна главному вектору внешних сил.

С учетом формулы (4.3) теорему (4.17) можно записать в виде закона движения центра масс: $m\mathbf{W}_C = \mathbf{F}^{\text{ex}}$.

Дифференцируя по времени выражение (4.4) и учитывая равенства (4.14) и (4.16), получаем *теорему об изменении кинетического момента*:

$$\dot{\mathbf{K}}_O = \mathbf{M}_O^{\text{ex}} + m\mathbf{V}_O \times \mathbf{V}_O. \quad (4.18)$$

Здесь \mathbf{V}_O – скорость полюса. В частных случаях, когда полюс неподвижен в системе отсчета либо совпадает с центром масс, теорема приобретает наиболее простой вид:

$$\dot{\mathbf{K}}_O = \mathbf{M}_O^{\text{ex}}. \quad (4.19)$$

Теорема об изменении кинетической энергии получается дифференцированием выражения (4.8) по времени и описывается соотношением

$$\dot{T} = \sum_i (\mathbf{F}_i^{\text{ex}} + \mathbf{F}_i^{\text{in}}) \cdot \mathbf{V}_i = N^{\text{ex}} + N^{\text{in}} \Rightarrow dT = \delta A^{\text{ex}} + \delta A^{\text{in}}. \quad (4.20)$$

Из этой теоремы следует, что в общем случае изменение кинетической энергии системы обусловлено работой и внешних, и внутренних сил.

Вычислим элементарную работу сил, действующих на твердое тело. Выражая скорости точек тела по формуле Эйлера $\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$, где \mathbf{V}_O – скорость точки O , принадлежащей телу, получим

$$\delta A = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot (\mathbf{V}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) dt = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{V}_O + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}_O) dt.$$

Отсюда с учетом равенств (4.16) и (4.20) следует

$$\delta A = (\mathbf{F}^{\text{ex}} \cdot \mathbf{V}_O + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}_O^{\text{ex}}) dt \Rightarrow dT = \delta A^{\text{ex}}, \quad (4.21)$$

т. е. изменение кинетической энергии твердого тела обусловлено только работой внешних сил (работа внутренних сил, действующих в твердом теле, равна нулю).

Основные теоремы динамики, описываемые формулами (4.17), (4.18), (4.20), справедливы в инерциальных системах отсчета. Введенная выше система Кенига инерциальной системой в общем случае не является, поскольку центр масс может двигаться с ускорением относительно инерциальной системы. Покажем, что с точки зрения основных теорем динамики система Кенига обладает свойствами инерциальной системы, т. е. в ней, как и в инерциальной системе, формулировки основных теорем динамики не содержат сил инерции.

Действительно, теорема об изменении импульса в системе Кенига принимает тривиальный вид:

$$\mathbf{Q}^{\text{отн}} = \sum_i m_i \mathbf{V}_i^{\text{отн}} \equiv 0. \quad (4.22)$$

Теорема об изменении кинетического момента в системе Кенига для полюса, совпадающего с центром масс, следует из формул (4.7), (4.18) и записывается соотношением

$$\dot{\mathbf{K}}_C^{\text{отн}} = \mathbf{M}_C^{\text{ex}}. \quad (4.23)$$

Чтобы записать теорему об изменении кинетической энергии в системе Кенига, воспользуемся записью (4.20) этой теоремы в инерциальной системе и формулами (4.6), (4.8). Тогда получим

$$\dot{T} = m \mathbf{V}_C \cdot \mathbf{W}_C + \dot{T}^{\text{отн}} = \sum_i (\mathbf{F}_i^{\text{ex}} + \mathbf{F}_i^{\text{in}}) \cdot (\mathbf{V}_C + \mathbf{V}_i^{\text{отн}}).$$

Отсюда в силу (4.16) и (4.17) следует

$$\dot{T}^{\text{отн}} = \sum_i (\mathbf{F}_i^{\text{ex}} + \mathbf{F}_i^{\text{in}}) \cdot \mathbf{V}_i^{\text{отн}} = N_{\text{отн}}^{\text{ex}} + N_{\text{отн}}^{\text{in}}, \quad (4.24)$$

т. е. теорема об изменении кинетической энергии в системе Кеннига выглядит так же, как и в инерциальной системе.

Для определения вида основных теорем динамики в произвольной неинерциальной системе отсчета запишем уравнение движения точки в этой системе. Используя формулу Кориолиса:

$$\mathbf{W}_i = \mathbf{W}_i^{\text{отн}} + \mathbf{W}_i^{\text{пер}} + \mathbf{W}_i^{\text{кор}}$$

и уравнение (4.14), получим уравнение

$$m_i \mathbf{W}_i^{\text{отн}} = \mathbf{F}_i^{\text{ex}} + \mathbf{F}_i^{\text{in}} + \mathbf{J}_i^{\text{пер}} + \mathbf{J}_i^{\text{кор}}, \quad (4.25)$$

где слагаемые $\mathbf{J}_i^{\text{пер}}$ и $\mathbf{J}_i^{\text{кор}}$ определяются выражениями

$$\mathbf{J}_i^{\text{пер}} = -m_i \mathbf{W}_i^{\text{пер}}, \quad \mathbf{J}_i^{\text{кор}} = -m_i \mathbf{W}_i^{\text{кор}} \quad (4.26)$$

и называются *переносной* и *кориолисовой силами инерции*, действующими на точку.

Уравнение (4.25) по форме будет совпадать с уравнением движения точки в инерциальной системе (4.14), если сумму трех слагаемых, $\mathbf{\Phi}_i = \mathbf{F}_i^{\text{ex}} + \mathbf{J}_i^{\text{пер}} + \mathbf{J}_i^{\text{кор}}$, трактовать как внешнюю силу, действующую на точку. Тогда дословно повторяя процедуру вывода основных теорем динамики в инерциальной системе отсчета, получим, что в неинерциальных системах эти теоремы имеют следующий вид:

$$\dot{\mathbf{Q}}^{\text{отн}} = \mathbf{F}^{\text{ex}} + \mathbf{J}^{\text{пер}} + \mathbf{J}^{\text{кор}}, \quad (4.27)$$

$$\dot{\mathbf{K}}_O^{\text{отн}} = \mathbf{M}_O^{\text{ex}} + \mathbf{M}_O^{\text{пер}} + \mathbf{M}_O^{\text{кор}} + m \mathbf{V}_C^{\text{отн}} \times \mathbf{V}_O^{\text{отн}}, \quad (4.28)$$

$$\dot{T}^{\text{отн}} = N_{\text{отн}}^{\text{ex}} + N_{\text{отн}}^{\text{in}} + N_{\text{отн}}^{\text{пер}}. \quad (4.29)$$

В последнем уравнении опущено слагаемое $N_{\text{отн}}^{\text{кор}}$, поскольку оно равно нулю:

$$N_{\text{отн}}^{\text{кор}} = \sum_i \mathbf{J}_i^{\text{кор}} \cdot \mathbf{V}_i^{\text{отн}} = -2 \sum_i m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_i^{\text{отн}}) \cdot \mathbf{V}_i^{\text{отн}} = 0.$$

Таким образом, кориолисовы силы инерции являются *гироскопическими* силами; их работа на действительных перемещениях системы равна нулю.

Для получения конкретного вида основных теорем (4.27) – (4.29) требуется полная информация о движении выбранной неинерциальной системы относительно инерциальной. При этом главные векторы переносных и кориолисовых сил инерции можно вычислить через переносное и кориолисово ускорение центра масс системы с помощью формул

$$\mathbf{J}^{\text{пер}} = -m\mathbf{W}_C^{\text{пер}}, \quad \mathbf{J}^{\text{кор}} = -m\mathbf{W}_C^{\text{кор}}. \quad (4.30)$$

Более сложной является задача вычисления главных моментов сил инерции $\mathbf{M}_O^{\text{пер}}$ и $\mathbf{M}_O^{\text{кор}}$. В общем случае для ее решения применяется процедура интегрирования.

Чаще всего в практических задачах механики используются неинерциальные системы отсчета, которые вращаются относительно инерциальных вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. В этом случае переносные силы инерции потенциальны, причем их потенциальная энергия равна кинетической энергии переносного движения, взятой со знаком минус:

$$П^{\text{пер}} = -T^{\text{пер}} = -\frac{1}{2} \sum_i m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)^2. \quad (4.31)$$

Здесь \mathbf{r}_i – вектор, соединяющий фиксированную точку O на оси вращения с i -й материальной точкой системы.

Для доказательства указанного факта используем то, что векторное произведение $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$ можно записать в виде произведения кососимметрической матрицы $\boldsymbol{\Omega}$, составленной из проекций угловой скорости, на вектор-столбец \mathbf{r}_i следующим образом:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{r}_i; \quad \boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

Тогда с учетом равенства $\mathbf{\Omega}^T = -\mathbf{\Omega}$ функция (4.31) запишется в виде

$$\Pi^{\text{пер}} = -\frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{\Omega} \mathbf{r}_i)^T \mathbf{\Omega} \mathbf{r}_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{r}_i^T \mathbf{\Omega}^2 \mathbf{r}_i .$$

Отсюда, используя определение потенциальных сил и равенство (4.32), получим выражение

$$\mathbf{J}_i^{\text{пер}} = -\frac{\partial \Pi^{\text{пер}}}{\partial \mathbf{r}_i} = -m_i \mathbf{\Omega}^2 \mathbf{r}_i = -m_i \mathbf{\Omega} (\mathbf{\Omega} \mathbf{r}_i) = -m_i \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) ,$$

которое в точности совпадает с выражением для переносных сил инерции в рассматриваемом случае.

3.2. Геометрия масс твердого тела. Тензор инерции и эллипсоид инерции

Тензор инерции твердого тела естественным образом возникает при вычислении кинетического момента тела.

Рассмотрим движение твердого тела относительно некоторой системы отсчета и вычислим его кинетический момент относительно произвольного полюса O . В соответствии с определением (4.4) имеем

$$\mathbf{K}_O = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{V}_i , \quad (5.1)$$

где \mathbf{V}_i – скорость i -й точки тела относительно рассматриваемой системы отсчета, а \mathbf{r}_i – вектор, соединяющий полюс O с i -й точкой тела (рис. 18).

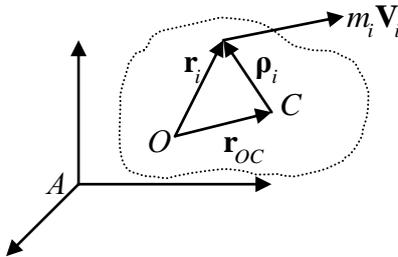


Рис. 18

Обозначим через \mathbf{V}_O скорость той точки тела, которая в данный момент совпадает с полюсом O . Тогда, используя формулу Эйлера распределения скоростей в твердом теле, $\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$, получим выражение

$$\mathbf{K}_O = m\mathbf{r}_{OC} \times \mathbf{V}_O + \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i), \quad (5.2)$$

где m – масса тела, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость тела, а \mathbf{r}_{OC} – радиус-вектор, соединяющий полюс O с центром масс тела C .

Если с телом связать некоторый ортонормированный базис $O\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z$ и рассматривать \mathbf{r}_i и $\boldsymbol{\omega}$ как векторы-столбцы с компонентами x_i, y_i, z_i и $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, то выражение под знаком суммы в (5.2) можно записать с помощью матричных операций следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) &= \sum_i m_i (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i) \boldsymbol{\omega} - m_i \mathbf{r}_i (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) = \\ &= \sum_i m_i (\mathbf{I} \mathbf{r}_i^2 - \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i^T) \boldsymbol{\omega} = \mathbf{J}_O \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Здесь \mathbf{I} – единичная матрица размера 3×3 , T – знак транспонирования, а матрица

$$\mathbf{J}_O = \sum_i m_i (\mathbf{I} \mathbf{r}_i^2 - \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i^T) = \begin{vmatrix} J_O^{xx} & J_O^{xy} & J_O^{xz} \\ J_O^{yx} & J_O^{yy} & J_O^{yz} \\ J_O^{zx} & J_O^{zy} & J_O^{zz} \end{vmatrix} \quad (5.4)$$

называется *тензором инерции твердого тела* относительно базиса $O\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z$. Элементы этой матрицы определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} J_o^{xx} &= \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad J_o^{xy} = J_o^{yx} = -\sum_i m_i x_i y_i, \\ J_o^{yy} &= \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2), \quad J_o^{yz} = J_o^{zy} = -\sum_i m_i y_i z_i, \\ J_o^{zz} &= \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2), \quad J_o^{zx} = J_o^{xz} = -\sum_i m_i z_i x_i. \end{aligned} \quad (5.4^*)$$

Из приведенных соотношений следует, что тензор инерции является симметричной матрицей, зависящей от расположения точек тела относительно выбранного базиса. Диагональные элементы этой матрицы представляют собой моменты инерции относительно осей $O\mathbf{e}_x, O\mathbf{e}_y, O\mathbf{e}_z$, а остальные называются *центробежными моментами инерции*.

Заметим, что если в определяющем тензор инерции соотношении (5.3) заменить вектор $\boldsymbol{\omega}$ на любой другой вектор $\boldsymbol{\mu}$, то получим аналогичное равенство:

$$\sum_i m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{r}_i) = \mathbf{J}_O \boldsymbol{\mu}. \quad (5.5)$$

Поэтому тензор инерции можно рассматривать как матричный оператор, который задает преобразование любого вектора $\boldsymbol{\mu}$ по формуле (5.5).

Через тензор инерции \mathbf{J}_O можно определить момент инерции тела относительно любой оси, проходящей через точку O . Обозначая через \mathbf{e} единичный вектор, указывающий направление оси, и учитывая формулу (5.5), получаем

$$\mathbf{J}_e = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{e})^2 = \mathbf{e} \cdot \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times (\mathbf{e} \times \mathbf{r}_i) = \mathbf{e}^T \mathbf{J}_O \mathbf{e}. \quad (5.6)$$

Определим закон преобразования тензора инерции при повороте базиса. Поворот от базиса $O\mathbf{E}$ к другому базису $O\mathbf{E}'$ представляет собой ортогональное преобразование, при котором каждый вектор \mathbf{r}_i преобразуется в вектор \mathbf{r}'_i по формуле $\mathbf{r}_i = \mathbf{S} \mathbf{r}'_i$, где \mathbf{S} – ортогональная матрица. Подставляя эти выражения в (5.4), получаем

$$\mathbf{J}_O = \sum_i m_i [\mathbf{I}(\mathbf{r}'_i)^2 - \mathbf{S} \mathbf{r}'_i \mathbf{r}'_i{}^T \mathbf{S}^T] = \mathbf{S} \mathbf{J}'_O \mathbf{S}^T.$$

Отсюда находим искомый закон преобразования тензора инерции твердого тела при повороте базиса:

$$\mathbf{J}'_O = \mathbf{S}^T \mathbf{J}_O \mathbf{S}. \quad (5.7)$$

Из полученного выражения следует, что при повороте бази-

са формула преобразования тензора инерции совпадает с формулой преобразования матрицы квадратичной формы: $\mathbf{r}^T \mathbf{J}_O \mathbf{r}$. Поэтому на основе известного факта из курса линейной алгебры о приводимости любой квадратичной формы к диагональному виду заключаем, что для любой точки O твердого тела существует базис $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, в котором тензор инерции твердого тела имеет диагональный вид:

$$\mathbf{J}_O = \begin{vmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{vmatrix}. \quad (5.8)$$

Оси указанного базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ называются *главными осями инерции* твердого тела для рассматриваемой точки O , а моменты инерции A, B, C относительно главных осей – *главными моментами инерции*.

Заметим, что направления главных осей инерции твердого тела относительно некоторого базиса определяются собственными векторами тензора инерции, записанного в этом базисе, а главными моментами инерции являются соответствующие собственные числа тензора инерции.

Главные моменты инерции твердого тела положительны (кроме случая, когда тело представляет собой совокупность точек, лежащих на одной прямой, а рассматриваемая точка O принадлежит этой прямой; в этом случае один из главных моментов инерции равен нулю). Поэтому тензор инерции является положительно-определенной матрицей. Однако главными моментами инерции не могут быть произвольные положительные числа, поскольку в силу соотношений (5.4*) они подчиняются *неравенствам треугольника*:

$$A+B \geq C, \quad B+C \geq A, \quad C+A \geq B.$$

Определим закон преобразования тензора инерции при параллельном переносе базиса. Рассмотрим случай, когда первый базис $C\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z$ имеет начало в центре масс твердого тела, а по-

положение параллельного ему базиса $O\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z$ задано вектором $\boldsymbol{\rho}_O = -\mathbf{r}_{OC}$ (рис. 18), определяющим положение точки O в базисе $C\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z$. Тогда, обозначая через $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{r}_i + \boldsymbol{\rho}_O$ радиус-вектор i -й точки тела в базисе $C\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z$, получаем из (5.4) следующее выражение:

$$\mathbf{J}_O = \sum m_i(\mathbf{I}\boldsymbol{\rho}_i^2 - \boldsymbol{\rho}_i\boldsymbol{\rho}_i^T) + m(\mathbf{I}\boldsymbol{\rho}_O^2 - \boldsymbol{\rho}_O\boldsymbol{\rho}_O^T) - \sum_i m_i[\mathbf{I}(\boldsymbol{\rho}_i^T\boldsymbol{\rho}_O) - \boldsymbol{\rho}_i\boldsymbol{\rho}_O^T] - \sum_i m_i[\mathbf{I}(\boldsymbol{\rho}_O^T\boldsymbol{\rho}_i) - \boldsymbol{\rho}_O\boldsymbol{\rho}_i^T].$$

Последние две суммы в полученном выражении равны нулю в силу определения центра масс твердого тела, а первая сумма является по определению тензором инерции твердого тела относительно центрального базиса $C\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z$. Поэтому формула преобразования тензора инерции при параллельном переносе базиса из центра масс приобретает вид

$$\mathbf{J}_O = \mathbf{J}_C + m(\mathbf{I}\boldsymbol{\rho}_O^2 - \boldsymbol{\rho}_O\boldsymbol{\rho}_O^T) = \mathbf{J}_C + m(\mathbf{I}\mathbf{r}_{OC}^2 - \mathbf{r}_{OC}\mathbf{r}_{OC}^T). \quad (5.9)$$

Полученный результат представляет собой *теорему Гюйгенса–Штейнера для тензора инерции*. Формулу (5.9) легко запомнить, если обратить внимание, что второе слагаемое в этой формуле представляет собой тензор инерции центра масс относительно базиса $O\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z$.

Каждой точке O твердого тела соответствует *эллипсоид инерции*, который определяется как множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$\mathbf{r}^T\mathbf{J}_O\mathbf{r} = 1. \quad (5.10)$$

Уравнение (5.10) определяет поверхность второго порядка, которая действительно является эллипсоидом в силу положительной определенности тензора инерции. При этом главные оси эллипсоида инерции совпадают с главными осями инерции твердого тела для рассматриваемой точки.

Поскольку эллипсоид инерции неподвижен в теле, то анализ движения тела можно свести к анализу движения его эллипсоида инерции. Этот прием используется в некоторых задачах для геометрической интерпретации движения тела.

Определим расстояние r_e от центра эллипсоида до его поверхности в направлении, задаваемом единичным вектором \mathbf{e} . Записывая вектор \mathbf{r} в виде $\mathbf{r} = r_e \mathbf{e}$ и подставляя это выражение в (5.10), получаем с учетом (5.6) следующее соотношение:

$$r_e^2 \mathbf{e}^T \mathbf{J}_O \mathbf{e} = 1 \Rightarrow r_e = 1/\sqrt{J_e}, \quad (5.11)$$

т. е. размер эллипсоида в заданном направлении обратно пропорционален квадратному корню от момента инерции твердого тела относительно этого направления.

3.3. Формулы для кинетического момента и кинетической энергии твердого тела

Вернемся к вычислению кинетического момента твердого тела. Из соотношений (5.2) и (5.3) получаем, что кинетический момент твердого тела относительно произвольного полюса O определяется формулой

$$\mathbf{K}_O = m \mathbf{r}_{OC} \times \mathbf{V}_O + \mathbf{J}_O \boldsymbol{\omega}, \quad (5.12)$$

где \mathbf{V}_O – скорость той *точки тела*, которая в данный момент совпадает с полюсом O . Если полюс совпадает с неподвижной точкой тела или с его центром инерции, то формула (5.12) приобретает упрощенный вид:

$$\mathbf{K}_O = \mathbf{J}_O \boldsymbol{\omega}. \quad (5.13)$$

Используя формулу (4.5), связывающую моменты относительно разных полюсов, кинетический момент твердого тела относительно произвольного полюса можно выразить также соотношением

$$\mathbf{K}_O = \mathbf{K}_C + \mathbf{r}_{OC} \times \mathbf{Q} = \mathbf{J}_C \boldsymbol{\omega} + m \mathbf{r}_{OC} \times \mathbf{V}_C, \quad (5.14)$$

где \mathbf{J}_C – тензор инерции твердого тела относительно центрального базиса.

Обозначив через p, q, r проекции угловой скорости твердого тела на главные оси инерции $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, получим из (5.13) следующее выражение для кинетического момента тела относительно неподвижной точки или центра инерции:

$$\mathbf{K}_O = A p \mathbf{e}_1 + B q \mathbf{e}_2 + C r \mathbf{e}_3. \quad (5.15)$$

Кинетическую энергию твердого тела вычислим сначала для случая, когда некоторая точка O тела неподвижна в системе отсчета. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} 2T &= \sum_i m_i (\mathbf{V}_i \cdot \mathbf{V}_i) = \sum_i m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = \\ &= (\boldsymbol{\omega} \cdot \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)) = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{K}_O = \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J}_O \boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем для кинетической энергии твердого тела с неподвижной точкой O следующую формулу:

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J}_O \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (A p^2 + B q^2 + C r^2), \quad (5.16)$$

где A, B, C – главные моменты инерции твердого тела для неподвижной точки O , а p, q, r – проекции угловой скорости твердого тела на главные оси инерции.

В общем случае кинетическая энергия твердого тела может быть найдена по теореме Кенига (4.9). Учитывая, что движение твердого тела относительно системы Кенига представляет собой движение с неподвижной точкой C , и применяя формулу (5.16), получаем

$$T = \frac{1}{2} m V_C^2 + T^{\text{отн}} = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J}_C \boldsymbol{\omega}. \quad (5.17)$$

3.4. Динамические уравнения Эйлера

Динамические уравнения вращательного движения твердого тела выводятся из теоремы об изменении кинетического момента. Рассмотрим движение твердого тела с неподвижной точкой O относительно инерциальной системы отсчета. Если в

качестве полюса выбрать неподвижную точку O , то теорема об изменении кинетического момента запишется в виде

$$\dot{\mathbf{K}}_O = \mathbf{M}_O^{\text{ex}}, \quad (5.18)$$

а вектор кинетического момента тела будет определяться выражением (5.13). Будем считать, что вектор угловой скорости тела задан проекциями p, q, r на оси связанного с телом базиса $O\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z$, т. е. $\boldsymbol{\omega} = p\mathbf{e}_x + q\mathbf{e}_y + r\mathbf{e}_z$. Тогда, учитывая, что тензор \mathbf{J}_O в базисе $O\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z$ не меняется, производную $\dot{\mathbf{K}}_O$, вычисляемую в инерциальном базисе, можно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$\dot{\mathbf{K}}_O = \mathbf{J}_O \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}_O \boldsymbol{\omega}, \quad \text{где } \dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{p}\mathbf{e}_x + \dot{q}\mathbf{e}_y + \dot{r}\mathbf{e}_z. \quad (5.19)$$

В этом выражении первое слагаемое есть производная по времени от вектора \mathbf{K}_O , вычисленная в базисе $O\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z$, т. е. представляет собой относительную скорость вектора \mathbf{K}_O , а второе слагаемое – переносная скорость вектора \mathbf{K}_O , обусловленная вращением связанного с телом базиса. Подставляя выражение (5.19) в уравнение (5.18), получаем *динамические уравнения Эйлера*:

$$\mathbf{J}_O \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}_O \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_O^{\text{ex}}. \quad (5.20)$$

В покоординатной форме уравнения (5.20) принимают наиболее простой вид, если в качестве базиса $O\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z$ выбран базис главных осей инерции $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$. В проекциях на эти оси, учитывая (5.15), получим следующую систему:

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr &= M_1, \\ B\dot{q} + (A - C)rp &= M_2, \\ C\dot{r} + (B - A)pq &= M_3, \end{aligned} \quad (5.21)$$

где A, B, C – главные моменты инерции тела для неподвижной точки O ; p, q, r – проекции угловой скорости тела на

главные оси инерции, а M_1, M_2, M_3 – проекции момента внешних сил на главные оси инерции.

Отметим, что динамические уравнения Эйлера (5.20), описывающие движение твердого тела с неподвижной точкой O относительно инерциальной системы отсчета, применимы также и для движения твердого тела относительно системы Кенига, которая в общем случае не является инерциальной. Действительно, во-первых, движение тела относительно системы Кенига представляет собой движение с неподвижной точкой C . Кроме того, в силу равенств (4.7), (5.13) в системе Кенига кинетический момент твердого тела относительно точки C определяется выражением $\mathbf{K}_C^{\text{отн}} = \mathbf{J}_C \boldsymbol{\omega}$, аналогичным (5.13), а теорема об изменении кинетического момента (4.23) $\dot{\mathbf{K}}_C^{\text{отн}} = \mathbf{M}_C^{\text{ex}}$ имеет вид, аналогичный (5.18). Поэтому из этой теоремы вытекают аналогичные (5.20) уравнения:

$$\mathbf{J}_C \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}_C \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_C^{\text{ex}}. \quad (5.22)$$

Динамические уравнения Эйлера (5.20) или (5.22) связывают в дифференциальной форме угловую скорость твердого тела с моментом действующих на тело сил. В совокупности с кинематическими уравнениями, записанными в той или иной форме, они образуют замкнутую систему уравнений вращательного движения твердого тела. Интегрирование этой системы дает закон движения твердого тела в зависимости от момента действующих на тело сил и начальных условий движения.

3.5. Случай Эйлера

Для движения твердого тела с неподвижной точкой O случай Эйлера определяется условием $\mathbf{M}_O = 0$ и называется движением тела по инерции. В этом случае в силу теоремы (5.18) сохраняется вектор кинетического момента \mathbf{K}_O тела в инерциальном базисе, а в силу формулы (4.21) сохраняется кинетическая энергия тела.

В случае Эйлера правые части в динамических уравнениях (5.21) равны нулю, и эти уравнения имеют два интеграла движения. Один из них является следствием сохранения кинетического момента и имеет вид

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = K_0^2 = \text{const}$$

Второй описывает сохранение кинетической энергии:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2T = \text{const}$$

Приведенные соотношения позволяют выразить две компоненты угловой скорости через третью, затем подставить полученные выражения в соответствующее уравнение Эйлера и получить в конечном итоге решение для компонент угловой скорости в виде квадратуры. Далее полученное решение для угловой скорости подставляется в кинематические уравнения, решение которых в рассматриваемом случае тоже удастся свести к квадратурам.

Таким образом, в случае Эйлера уравнения вращательного движения твердого тела интегрируются при любых начальных условиях. Однако получаемое при этом аналитическое решение выражается через эллиптические интегралы и является достаточно сложным для понимания закономерностей движения твердого тела. В связи с этим анализ движения тела в случае Эйлера дополняется геометрическими интерпретациями, наиболее известными из которых являются интерпретации Пуансо и Мак-Куллага. Указанные интерпретации основываются на использовании записанных выше законов сохранения и подробно изложены в книге В.Ф. Журавлева «Основы теоретической механики».

Анализ движения твердого тела в случае Эйлера существенно упрощается, если имеет место *динамическая симметрия* твердого тела, под которой понимается равенство двух главных моментов инерции твердого тела: $A = B \neq C$. В этом случае вектор угловой скорости твердого тела раскладывается на направление кинетического момента \mathbf{K}_0 и направление оси ди-

налической симметрии \mathbf{e}_3 следующим образом:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{A(p\mathbf{e}_1 + q\mathbf{e}_2) + Cr\mathbf{e}_3 + (A-C)r\mathbf{e}_3}{A} = \frac{\mathbf{K}_O}{A} + \frac{(A-C)}{A}r\mathbf{e}_3, \quad (5.23)$$

а скорость оси симметрии подчиняется уравнению

$$\dot{\mathbf{e}}_3 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{K}_O}{A} \times \mathbf{e}_3. \quad (5.24)$$

В рассматриваемой задаче сохраняется вектор кинетического момента и по величине и по направлению. Во-вторых, не меняется проекция r угловой скорости тела на ось динамической симметрии, что следует из третьего уравнения системы (5.21), которое при $A=B$ приобретает вид $C\dot{r}=0$. В-третьих, остается постоянным угол θ между осью динамической симметрии и вектором кинетического момента, поскольку выполняется равенство

$$\mathbf{K}_O \cdot \mathbf{e}_3 = Cr = |\mathbf{K}_O| \cos\theta = \text{const}$$

Из установленных фактов заключаем, что исследуемое движение представляет собой *регулярную прецессию* вокруг направления кинетического момента (рис. 19), параметры которой определяются соотношениями

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \frac{\mathbf{K}_O}{A}, \quad \boldsymbol{\omega}_2 = \frac{A-C}{A}r\mathbf{e}_3, \quad \cos\theta = \frac{Cr}{|\mathbf{K}_O|}. \quad (5.25)$$

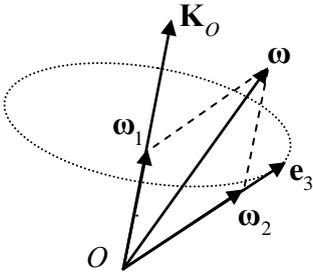


Рис. 19

Это движение представляется в виде комбинации двух вращений. Первым является вращение вокруг неподвижного направления кинетического момента с постоянной угловой скоростью прецессии ω_1 , а вторым – вращение вокруг оси динамической симметрии тела с постоянной по величине угловой скоростью собственного вращения ω_2 .

Регулярная прецессия динамически симметричного тела в случае Эйлера называется *свободной*, поскольку она происходит при отсутствии момента внешних сил. При этом, как следует из формул (5.25), параметры свободной регулярной прецессии связаны равенством $C\omega_2 + (C - A)\omega_1 \cos\theta = 0$, т. е. подбором начальных условий нельзя реализовать свободную регулярную прецессию с произвольными параметрами.

3.6. Уравнение движения динамически симметричного тела с неподвижной точкой

В большинстве прикладных задач, связанных с движением динамически симметричного твердого тела с неподвижной точкой, главным является вопрос о движении оси динамической симметрии \mathbf{e}_3 , которую в дальнейшем будем обозначать символом \mathbf{e} без индекса.

Для получения уравнения движения оси динамической симметрии обозначим через ω_{\perp} экваториальную составляющую угловой скорости твердого тела: $\omega_{\perp} = p\mathbf{e}_1 + q\mathbf{e}_2$. Тогда будем иметь $\dot{\mathbf{e}} = \omega \times \mathbf{e} = \omega_{\perp} \times \mathbf{e}$, откуда в силу взаимной ортогональности векторов ω_{\perp} и \mathbf{e} получим $\omega_{\perp} = \mathbf{e} \times \dot{\mathbf{e}}$. С учетом этого равенства вектор кинетического момента динамически симметричного тела относительно неподвижной точки O (или центра масс) запишется в соответствии с формулой (5.15) в виде

$$\mathbf{K}_O = A\omega_{\perp} + C\mathbf{e} = A\mathbf{e} \times \dot{\mathbf{e}} + H\mathbf{e}; \quad H = Cr, \quad (5.26)$$

где H – проекция кинетического момента на ось симметрии, называемая *собственным* кинетическим моментом тела.

Для кинетической энергии тела, учитывая взаимную ортогональность векторов \mathbf{e} и $\dot{\mathbf{e}}$, получим следующую формулу:

$$2T = A\omega_{\perp}^2 + Cr^2 = A\dot{\mathbf{e}}^2 + H^2/C. \quad (5.27)$$

Уравнение движения оси симметрии выводится из теоремы об изменении кинетического момента (5.18) на основе выражения (5.26) и имеет следующий вид:

$$A\mathbf{e} \times \ddot{\mathbf{e}} + H\dot{\mathbf{e}} + H\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{M}_O. \quad (5.28)$$

Уравнение (5.28) получено В.Ф. Журавлевым. Как и динамические уравнения Эйлера, оно применимо как для движения динамически симметричного тела с неподвижной точкой относительно инерциальной системы отсчета, так и для его движения относительно системы Кенига.

С учетом единичности вектора \mathbf{e} и взаимной ортогональности векторов \mathbf{e} и $\dot{\mathbf{e}}$ уравнение (5.28) сводится к системе

$$\dot{H} = M_3, \quad (5.29)$$

$$A\mathbf{e} \times \ddot{\mathbf{e}} + H\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{M}_{\perp}, \quad (5.30)$$

где M_3 и \mathbf{M}_{\perp} – проекции момента сил на ось симметрии и экваториальную плоскость соответственно.

Уравнение (5.28) можно разрешить относительно второй производной $\ddot{\mathbf{e}}$, если умножить его векторно на вектор \mathbf{e} . Тогда, учитывая равенства

$$\mathbf{e}^2 = 1 \Rightarrow \dot{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{e} = 0 \Rightarrow \ddot{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{e} = -\dot{\mathbf{e}}^2,$$

получим следующее уравнение:

$$A\ddot{\mathbf{e}} = H\mathbf{e} \times \dot{\mathbf{e}} - A(\dot{\mathbf{e}})^2 \mathbf{e} - \mathbf{e} \times \mathbf{M}_O. \quad (5.31)$$

Уравнение (5.31) в отличие от (5.28) не описывает полностью движение оси симметрии, поскольку в нем отсутствует закон изменения величины собственного кинетического момента H . Поэтому для получения замкнутой системы к уравнению (5.31) следует добавить уравнение (5.29).

Отметим одно свойство решений уравнения (5.31). Умножив это уравнение скалярно на вектор \mathbf{e} , получим

$$\ddot{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{e} + \dot{\mathbf{e}}^2 = d(\dot{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{e})/dt = 0.$$

Отсюда следует, что уравнение (5.31) имеет первый интеграл $\dot{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{e} = \text{const}$. Следовательно, если в начальный момент времени выполняются условия

$$\mathbf{e}^2 = 1, \quad \dot{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{e} = 0, \quad (5.32)$$

то решение $\mathbf{e}(t)$ уравнения (5.31) будет удовлетворять этим условиям в любой последующий момент времени.

Используя уравнение (5.28), легко получить формулу для момента, поддерживающего регулярную прецессию динамически симметричного тела. Предположим, что тело совершает регулярную прецессию вокруг оси \mathbf{i} , а осью собственного вращения является ось динамической симметрии тела \mathbf{e} . Тогда, задаваясь параметрами прецессии ω_1 , ω_2 , θ , получаем

$$\dot{\mathbf{e}} = \omega_1 \mathbf{i} \times \mathbf{e}, \quad \ddot{\mathbf{e}} = \omega_1^2 \mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{e}) = \omega_1^2 (\mathbf{i} \cos \theta - \mathbf{e}).$$

Подставляя эти выражения в уравнение (5.28) и учитывая равенство

$$H = Cr = C(\omega_2 + \omega_1 \cos \theta) = \text{const},$$

приходим к искомой формуле:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{i} \times \mathbf{e} (H\omega_1 - A\omega_1^2 \cos \theta) = \omega_1 \times \omega_2 [C + (C - A)\cos \theta \frac{\omega_1}{\omega_2}]. \quad (5.33)$$

3.7. Случай Лагранжа

В случае Лагранжа изучается движение динамически симметричного тела (волчка) с неподвижной точкой в однородном поле тяжести (рис. 20). При этом предполагается, что центр тяжести волчка лежит на оси симметрии на расстоянии L от неподвижной точки O . В рассматриваемой задаче момент внеш-

них сил выражается соотношением $\mathbf{M}_O = mg\mathbf{l} \times \mathbf{e}$, где \mathbf{i} – единичный вектор вертикали, а уравнение (5.31) принимает вид

$$A\ddot{\mathbf{e}} = H\mathbf{e} \times \dot{\mathbf{e}} - A(\dot{\mathbf{e}})^2 \mathbf{e} + [\mathbf{e}(\mathbf{i} \cdot \mathbf{e}) - \mathbf{i}]mgL. \quad (5.34)$$

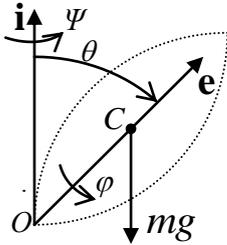


Рис. 20

Поскольку в рассматриваемом случае $M_3 = \mathbf{e} \cdot \mathbf{M}_O = 0$, то из уравнения (5.29) имеем

$$Cr = H = \text{const}, \quad (5.35)$$

т. е. проекции угловой скорости и кинетического момента на ось симметрии остаются постоянными.

В свою очередь, умножив скалярно уравнение (5.34) на вектор $\dot{\mathbf{e}}$ и учитывая (5.32), получим

$$A\ddot{\mathbf{e}} \cdot \dot{\mathbf{e}} + (\mathbf{i} \cdot \dot{\mathbf{e}})mgL = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} A\dot{\mathbf{e}}^2 + (\mathbf{i} \cdot \mathbf{e})mgL \right) = 0.$$

Отсюда следует, что уравнения имеют первый интеграл:

$$\frac{1}{2} A\dot{\mathbf{e}}^2 + (\mathbf{i} \cdot \mathbf{e})mgL = E = \text{const}, \quad (5.36)$$

описывающий закон сохранения полной энергии волчка. При этом вследствие постоянства r в выражении (5.36) фигурирует только та часть T' кинетической энергии волчка (5.27), которая отвечает экваториальной составляющей угловой скорости:

$$2T' = A\dot{\mathbf{e}}^2 = A\omega_{\perp}^2 = A(p^2 + q^2),$$

а слагаемое $(\mathbf{i} \cdot \mathbf{e})mgL$ соответствует потенциальной энергии волчка.

Так как в рассматриваемой задаче момент внешних сил ортогонален вертикали, то сохраняется проекция кинетического момента волчка на вертикаль:

$$\mathbf{K}_O \cdot \mathbf{i} = A(\mathbf{e} \times \dot{\mathbf{e}}) \cdot \mathbf{i} + H\mathbf{e} \cdot \mathbf{i} = K = \text{const.} \quad (5.37)$$

Этот интеграл движения можно также получить из уравнения (5.34), если умножить его скалярно на вектор $\mathbf{i} \times \mathbf{e}$.

Значения констант H , E и K в уравнениях (5.35) – (5.37) определяются начальными условиями движения.

С помощью первых интегралов (5.35) – (5.37) можно получить полное аналитическое решение задачи о движении волчка Лагранжа. Зададим положение волчка углами Эйлера (рис. 14), где θ – угол отклонения оси \mathbf{e} от вертикали (угол нутации), а ψ – угол поворота вокруг вертикали (угол прецессии). Тогда, учитывая уравнения (3.27), получим для первых интегралов (5.36), (5.37) следующие выражения:

$$A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + 2mgL \cos \theta = 2E. \quad (5.38)$$

$$A\dot{\psi} \sin^2 \theta + H \cos \theta = K. \quad (5.39)$$

Из уравнения (5.39) выразим переменную $\dot{\psi}$:

$$\dot{\psi} = \frac{K - H \cos \theta}{A \sin^2 \theta}. \quad (5.40)$$

Подставив это выражение в (5.38), получим уравнение движения по углу нутации:

$$\frac{1}{2} A \dot{\theta}^2 + W(\theta) = E; \quad W(\theta) = \frac{(K - H \cos \theta)^2}{2A \sin^2 \theta} + mgL \cos \theta. \quad (5.41)$$

Отсюда, обращением интеграла

$$t = t_0 + \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sqrt{A} d\vartheta}{\sqrt{2(E - W(\vartheta))}},$$

определяется решение $\theta(t)$ для угла нутации. Далее, с помощью соотношения (5.40) находится $\dot{\psi}(t)$, а интегрированием определяется закон движения по углу прецессии $\psi(t)$. Угол собственного вращения волчка $\varphi(t)$ определяется интегрированием соотношения $\dot{\varphi}(t) = r - \dot{\psi}(t) \cos\theta(t)$ (см. (3.27)).

Таким образом, в случае Лагранжа уравнения движения интегрируются при любых начальных условиях. Однако, как и в случае Эйлера, решение описывается эллиптическими функциями.

Проведем качественный анализ движения оси волчка. Рассмотрим случай, когда волчок начинает движение из положения θ_0 , а ось \mathbf{e} неподвижна, что соответствует начальным условиям $\dot{\mathbf{e}}(0) = 0$, т. е. $\dot{\theta}(0) = 0$, $\dot{\psi}(0) = 0$. Тогда константы первых интегралов (5.38), (5.39) будут иметь значения

$$E = mgL \cos\theta_0, \quad K = H \cos\theta_0.$$

Если ввести переменную $u = \cos\theta$, то, учитывая равенство $\dot{u} = -\dot{\theta} \sin\theta$, уравнение (5.41) можно переписать в виде

$$\alpha^2 \dot{u}^2 + (\cos\theta_0 - u)^2 + \beta(1 - u^2)(u - \cos\theta_0) = 0, \quad (5.41^*)$$

$$\text{где } \alpha = A/H, \quad \beta = 2AmgL/H^2. \quad (5.42)$$

Из уравнения (5.41*) следует, что движение может происходить только для тех значений угла θ , которые удовлетворяют неравенству

$$f(u) = (\cos\theta_0 - u)^2 - \beta(1 - u^2)(\cos\theta_0 - u) \leq 0. \quad (5.43)$$

Левая часть полученного неравенства представляет собой многочлен третьей степени относительно $u = \cos\theta$, график которого изображен на рис. 21. Данный многочлен имеет три корня. Одним из них является очевидное решение $u_2 = \cos\theta_0$. Два других корня находятся из уравнения

$$\beta u^2 - u + \cos\theta_0 - \beta = 0$$

и определяются выражениями

$$u_1 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4\beta^2 - 4\beta \cos\theta_0}}{2\beta}, \quad u_3 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\beta^2 - 4\beta \cos\theta_0}}{2\beta}. \quad (5.44)$$

При этом корень u_1 расположен левее корня $u_2 = \cos\theta_0$, поскольку выполняется неравенство

$$1 - \sqrt{1 + 4\beta^2 - 4\beta \cos\theta_0} \leq 2\beta \cos\theta_0,$$

а корень $u_3 \geq 1$ в силу неравенства

$$1 + \sqrt{1 + 4\beta^2 - 4\beta \cos\theta_0} \geq 2\beta.$$

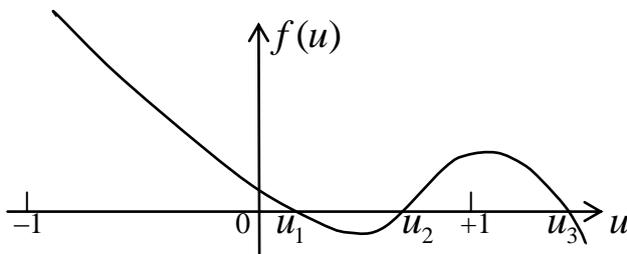


Рис. 21

Таким образом, на отрезке $[-1, +1]$ возможных значений $u = \cos\theta$ находятся два корня многочлена u_1 и u_2 , которые определяют диапазон $[u_1, u_2]$ возможных положений оси волчка в рассматриваемом случае. На границах отрезка $[u_1, u_2]$ скорости \dot{u} и $\dot{\theta}$ равны нулю, а во всех внутренних точках этого отрезка – отличны от нуля. При этом на основе уравнения (5.41*) можно показать, что при выполнении условия $u_1 < u_2$ вторая производная по времени от u на границах отрезка удовлетворяет неравенствам $\ddot{u}(u_2) < 0$, $\ddot{u}(u_1) > 0$. Поэтому движение волчка происходит таким образом, что косинус угла нутации

периодически изменяется между минимальным значением u_1 и максимальным значением u_2 .

Поскольку в силу (5.40) угловая скорость прецессии $\dot{\psi}$ является однозначной функцией угла θ , то она также является периодической функцией с тем же самым периодом, что и для угла θ . Поэтому поведение оси волчка имеет вид, изображенный на рис. 22а траекторией конца единичного вектора \mathbf{e} на единичной сфере. В верхних точках заострения траектории (в точках возврата) ось останавливается, а в нижних точках траектории скорость оси максимальна, поскольку в них потенциальная энергия волчка минимальна.

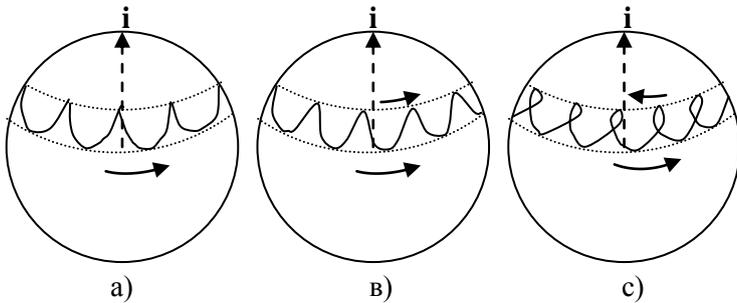


Рис. 22

Если начальные условия движения задать так, что при $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(0) = 0$, $\dot{\Psi}(0) \neq 0$, то получающиеся при этом траектории оси динамической симметрии изображены на рис. 22в и 22с. В случае в), который соответствует условию $\dot{\Psi}(0) > 0$, траектория является гладкой кривой, причем для каждой точки этой траектории скорость прецессии положительна. В случае с), для которого $\dot{\Psi}(0) < 0$, траектория является петлеобразной, а скорость прецессии во время движения меняет знак, так что в нижних точках траектории скорость прецессии положительна, а в верхних точках – отрицательна.

Определим начальные условия, при которых траектория оси симметрии превращается в окружность на единичной сфере, соответствующую углу нутации $\theta = \theta_0$. Такое движение волчка будет регулярной прецессией, поскольку в силу соотношений (5.40) и (3.27) значения $\dot{\psi}$ и $\dot{\phi}$ будут постоянными. Поэтому, используя формулу (5.33) для момента, поддерживающего регулярную прецессию, получим

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{i} \times \mathbf{e} (H\omega_1 - A\omega_1^2 \cos\theta) = mgL\mathbf{i} \times \mathbf{e}, \text{ где } \omega_1 = \dot{\psi}.$$

Отсюда следует уравнение

$$A\dot{\psi}^2 \cos\theta - \dot{\psi}H + mgL = (A-C)\dot{\psi}^2 \cos\theta - C\dot{\psi}\dot{\phi} + mgL = 0, \quad (5.45)$$

из которого определяются начальные условия, обеспечивающие регулярную прецессию волчка:

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = 0, \quad \dot{\psi}(0) = \frac{H \pm \sqrt{H^2 - 4Amgl \cos\theta_0}}{2A \cos\theta_0}. \quad (5.46)$$

Решение (5.46) со знаком «+» называется *быстрой* прецессией, а решение со знаком «-» – *медленной*. Очевидно, что указанные решения существуют при выполнении неравенства

$$H^2 - 4Amgl \cos\theta_0 \geq 0.$$

Отметим, что уравнение (5.45) можно получить и другим способом. Для этого обратимся к уравнению (5.41). Его можно трактовать, как закон сохранения энергии *приведенной* системы с одной степенью свободы, положение которой описывается углом θ . При этом слагаемое $A\dot{\theta}^2/2$ соответствует кинетической энергии, а функция $W(\theta)$ – потенциальной энергии приведенной системы. Движения $\theta(t) = \theta_0$ представляют собой положения равновесия приведенной системы и могут быть найдены как стационарные точки приведенной потенциальной энергии из уравнения

$$\frac{\partial W}{\partial \theta} = \frac{(K - H \cos \theta) H \sin \theta}{A \sin^2 \theta} - \frac{(K - H \cos \theta)^2}{A \sin^3 \theta} \cos \theta - mgL \sin \theta = 0.$$

Отсюда, используя соотношение (5.40), получаем уравнение (5.45).

Частным случаем регулярной прецессии является движение, при котором ось волчка занимает вертикальное положение, т. е. $\cos \theta_0 = 1$. В этом случае неравенство (5.43) принимает вид

$$(1 - \cos \theta)^2 (1 - \beta(1 + \cos \theta)) \leq 0.$$

Если выполняется условие $2\beta \leq 1$, т. е. $H^2 \geq 4AmgL$, то неравенство имеет единственное решение $\cos \theta = 1$, и, следовательно, единственно возможным является вертикальное положение волчка. Неравенство $H^2 > 4AmgL$ известно как условие устойчивости вертикального положения волчка (условие Майевского). Если вертикально поставленный волчок закручен вокруг оси симметрии с угловой скоростью, удовлетворяющей указанному неравенству, то в течение некоторого времени ось волчка остается практически неподвижной, что и объясняет название «спящий» волчок. Затем с течением времени момент сил трения в точке опоры уменьшает угловую скорость собственного вращения волчка, в результате чего условие устойчивости нарушается, и волчок начинает раскачиваться.

Проанализируем более детально движение «быстрого» волчка, который определяется условием

$$\beta \ll 1, \text{ т. е. } H^2 \gg AmgL. \quad (5.47)$$

Предполагая снова, что волчок начинает движение из состояния покоя ($\dot{\theta}(0) = 0$, $\dot{\psi}(0) = 0$), получаем из (5.44), что с точностью до членов второго порядка относительно β нижняя граница значений переменной $u = \cos \theta$ оценивается величиной $u_1 \approx \cos \theta_0 - \beta \sin^2 \theta_0$, т. е. движение происходит в узком диапазоне значений угла нутации, определяемом неравенством

$$\cos\theta_0 - \beta \sin^2 \theta_0 \leq \cos\theta \leq \cos\theta_0.$$

Дифференцируя уравнение (5.41*) по времени с последующим сокращением на \dot{u} и оставляя только члены первого порядка малости по отношению к разности $u - \cos\theta_0$, получим следующее линеаризованное уравнение:

$$\alpha^2 \ddot{u} + (u - \cos\theta_0)(1 - 2\beta \cos\theta_0) + \frac{1}{2} \beta \sin^2 \theta_0 = 0. \quad (5.48)$$

Для указанных выше начальных условий решение этого уравнения записывается в виде

$$\cos\theta - \cos\theta_0 = \frac{1}{2} \beta \sin^2 \theta_0 (\cos\Omega t - 1), \quad (5.49)$$

$$\Omega = \sqrt{1 - 2\beta \cos\theta_0} / \alpha \approx H/A.$$

На основе решения (5.49) и формулы (5.40) находим приближенное решение для угловой скорости прецессии $\dot{\psi}$:

$$\dot{\psi} = \frac{H\beta}{2A} (1 - \cos\Omega t) = \frac{mgL}{H} (1 - \cos\Omega t). \quad (5.50)$$

Таким образом, в рамках уравнений линейного приближения движения по углу нутации и угловой скорости прецессии представляют собой гармонические колебания; при этом средние значения величин $u = \cos\theta$ и $\dot{\psi}$ за период колебаний определяются выражениями

$$\bar{u} = \cos\theta_0 - \frac{1}{2} \beta \sin^2 \theta_0 \approx \cos\theta_0, \quad \bar{\dot{\psi}} = \frac{mgL}{H}. \quad (5.51)$$

Отсюда следует, что *осредненное* движение оси волчка $\bar{\mathbf{e}}(t)$ подчиняется уравнению

$$H \bar{\mathbf{e}} = mg \mathbf{L} \times \bar{\mathbf{e}} = \bar{\mathbf{M}}_O \quad (5.52)$$

и представляет собой равномерное вращение вокруг вертикали с угловой скоростью $\bar{\dot{\psi}} = mgL/H$.

Уравнение (5.52) соответствует основному допущению приближенной теории «быстрого» волчка (гироскопа), согласно которой кинетический момент гироскопа считается сосредото-

ченным на оси симметрии ($\mathbf{K}_O = H\mathbf{e}$). Это допущение эквивалентно отбрасыванию первого слагаемого в уравнении (5.30), определяющем движение оси симметрии. В результате получается, что скорость оси симметрии направлена по моменту \mathbf{M}_\perp действующих сил и определяется уравнением $H\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{M}_\perp$. Однако из проведенного анализа ясно, что уравнение (5.52) описывает только среднее движение оси волчка. Фактическое движение «быстрого» волчка состоит из среднего движения (5.51), на которое накладывается мелкое дрожание оси, описываемое решениями (5.49), (5.50), и поэтому называется *псевдорегулярной прецессией*.

Мы проанализировали движение «быстрого» волчка для случая, когда в начальный момент времени скорость оси волчка равна нулю. Результаты остаются в силе и при ненулевой начальной скорости оси волчка, если эта скорость удовлетворяет сильному неравенству $A|\dot{\mathbf{e}}(0)| \ll H$, т. е. когда экваториальная составляющая кинетического момента волчка мала по сравнению с его осевой составляющей.

Аналогично рассмотренному случаю Лагранжа проводится анализ движения волчка в однородном поле тяжести, опирающегося острой ножкой на гладкую горизонтальную плоскость. В этой задаче уравнения движения волчка имеют аналогичные случаю Лагранжа первые интегралы, вследствие чего эти уравнения интегрируются в квадратурах, а вращательное движение волчка аналогично движению в случае Лагранжа (см. А.П. Маркеев «Теоретическая механика»).

Отметим, что понятие «быстрый» гироскоп, определяемое в случае Лагранжа условием (5.47), при действии на гироскоп сил произвольной природы определяется следующим неравенством: $H^2 \gg A|M_O|$. Именно для «быстрых» гироскопов, закрученных вокруг оси симметрии, применимо прецессионное уравнение $H\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{M}_\perp$, в силу которого средняя скорость «ухода» оси гироскопа равна отношению величины момента действующих сил к величине собственного кинетического момента ги-

роскопа. Этим уравнением объясняется присущее быстрому гироскопу свойство гироскопической «жесткости», которая проявляется в том, что при сравнительно малых значениях возмущающего момента ось симметрии гироскопа остается практически неподвижной. На этом свойстве основано применение свободного гироскопа (гироскопа с тремя степенями свободы) в качестве указателя неизменного направления в инерциальном пространстве.

Из других технических применений гироскопов отметим их использование в качестве гироскопических компасов, указывающих направление относительно Земли, и в качестве датчиков угловой скорости летательных аппаратов. Силовые гироскопы (гиродины) используются для управления ориентацией космических аппаратов.

Литература

1. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. – М.: Наука, 1973. – 320 с.
2. *Голдстейн Г.* Классическая механика / пер. с англ. – 2-е изд. – М.: Наука, 1975. – 408 с.
3. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. – М.: Физматлит, 2008. – 304 с.
4. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. – М.: Наука, 1990. – 416 с.
5. *Кантор И.Л., Солодовников А.С.* Гиперкомплексные числа. – М.: Наука, 1973. – 144 с.

Оглавление

Введение	3
1. Алгебра кватернионов	4
2. Кинематика твердого тела	12
2.1. Способы задания положения твердого тела	12
2.2. Угловая скорость твердого тела. Уравнения Пуассона	25
2.3. Формулы распределения скоростей и ускорений в твердом теле	29
2.4. Метод сложного движения	36
2.5. О решениях уравнений Пуассона	40
2.6. Кинематические уравнения в углах Эйлера.....	44
3. Динамика твердого тела	47
3.1. Основные теоремы динамики	47
3.2. Геометрия масс твердого тела. Тензор инерции и эллипсоид инерции	55
3.3. Формулы для кинетического момента и кинетической энергии твердого тела	60
3.4. Динамические уравнения Эйлера	61
3.5. Случай Эйлера	63
3.6. Уравнение движения динамически симметричного тела с неподвижной точкой	66
3.7. Случай Лагранжа	68
Литература	79