

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ  
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

*Кафедра теоретической механики*

**ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ БИФУРКАЦИЙ И  
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ  
Часть II**

Учебно-методическое пособие

по курсу *Аналитическая механика*

Составитель  
*А.В. Фомичев*

МОСКВА  
МФТИ  
2019

Рецензент

Профессор, доктор физико-математических наук, *А. П. Иванов*

**Элементы теории бифуркаций и динамических систем. Часть II:** учебно-методическое пособие по курсу *Аналитическая механика* / сост. А.В. Фомичев. – М.: МФТИ, 2019. – 50 с.

Вторая часть пособия предназначена для студентов второго курса МФТИ, изучающих аналитическую механику, и знакомых с основами теорией бифуркаций в объеме первой части пособия. Рассмотрено несколько важных нелинейных явлений, наблюдающихся в системах дифференциальных уравнений при размерности фазового вектора больше двух, и в нелинейных дискретных отображениях.

- © Фомичев А.В., 2019
- © Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», 2019

# Содержание

Введение	4
1. Динамический хаос и усложнение структуры аттракторов	5
2. Нелинейные дискретные отображения: неподвижные точки, удвоение периода, сценарий Фейгенбаума перехода к хаосу	23
3. Простейшие бифуркации отображения Пуанкаре на плоскости	38
4. Заключение	44
Литература	45

# Введение

Можно сказать, что в нелинейных системах дифференциальных уравнений вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}), \quad \dim \mathbf{x} \geq 3,$$

где  $\mathbf{x}$  – фазовый вектор,  $\boldsymbol{\alpha}$  – набор параметров, проявляется целый пласт новых явлений, принципиально не наблюдаемых при меньшей размерности фазового вектора. Это связано с тем, что при  $\dim \mathbf{x} \geq 3$  теорема Коши накладывает меньше ограничений на структуру траекторий, что и приводит к их качественному усложнению.

Примечательно, что даже в системах с простейшими полиномиальными нелинейностями могут появляться аттракторы чрезвычайно сложной структуры и возникать явление *динамического хаоса*, описываемое ниже.

В многомерных системах возникают и новые типы бифуркаций. Например, при изменении параметров из предельных циклов могут рождаться инвариантные торы, на которых лежат траектории системы, из торов – торы большей размерности, характерные периоды колебаний могут скачкообразно удваиваться, а поведение одной и той же системы для разных значений параметров может изменяться от совершенно тривиального до хаотического.

Интересной и плодотворной оказывается взаимосвязь систем дифференциальных уравнений и дискретных систем вида

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{X}(\mathbf{x}_{n-1}, \boldsymbol{\alpha}), \quad \dim \mathbf{x}_n \geq 1.$$

через отображение Пуанкаре, позволяющая понять структуру аттракторов, объяснить важную бифуркацию удвоения периода и механизм перехода к хаосу через каскад таких бифуркаций.

Естественно, что многообразие эффектов в динамических системах далеко не исчерпывается содержанием пособия и, конечно, требует изучения специальной литературы, например, [1]–[6].

Автор выражает благодарность А.П. Иванову, Д.А. Притыкину и А.В. Сахарову за внимание к работе и конструктивную критику, существенно улучшившую пособие.

# 1. Динамический хаос и усложнение структуры аттракторов

Исследование нелинейных систем вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \alpha), \dim \mathbf{x} \geq 3$$

показывает, что решение задачи Коши  $\mathbf{x}(t)$  в некоторых случаях может проявлять чрезвычайно сложное поведение, напоминающее случайный процесс и называемое *динамическим хаосом*.

**Определение.** *Динамическим хаосом* называется сверхчувствительность решения задачи Коши нелинейной системы по отношению к начальным условиям, обусловленная постоянным экспоненциальным «разбеганием» изначально близких траекторий, локализованных в ограниченной области фазового пространства.

Подчеркнем существенность нелинейности системы и ограниченности ее траекторий.

Линейная система с постоянными коэффициентами может обладать экспоненциальной расходимостью траекторий всюду, однако эти траектории устроены тривиально и динамический хаос отсутствует. При этом экспоненциально растущие траектории не ограничены. А при отсутствии экспоненциального роста решений динамика линейной системы с постоянными коэффициентами описывается достаточно простыми аналитическими выражениями и также не хаотична [12]. Это влечет за собой необходимость нелинейности.

Для пояснения существенности ограниченности траекторий удобно ввести следующие определения.

**Определение.** Множество решений (траекторий) системы дифференциальных уравнений в фазовом пространстве называется *фазовым потоком* системы.

**Определение.** Объем некоторой области фазового пространства системы называется *фазовым объемом*.

Локализация фазового потока системы в ограниченной области в сочетании с экспоненциальным разбеганием траекторий всюду приводит к перемешиванию фазовым потоком элемента фазового объема, из которого «стартуют» решения задачи Коши, что и приводит к хаотическому поведению.

Для иллюстрации динамического хаоса в литературе по динамическим системам обычно приводится система Лоренца, полученная американским математиком и метеорологом Э. Лоренцом как приближенная модель конвективных процессов в плоском слое морской воды и послужившая отправной точкой в исследованиях динамического хаоса. Она имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= x_1(b - x_3) - x_2, \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - cx_3, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $a, b, c$  — некоторые положительные постоянные параметры. В зависимости от значений параметров  $a, b, c$  поведение системы изменяется от тривиального с единственным асимптотически устойчивым положением равновесия в начале координат до очень сложного хаотического. Хаотическое поведение реализуется для достаточно больших значений параметров. Траектории системы в этом случае имеют характерный вид, представленный на рис. 1.

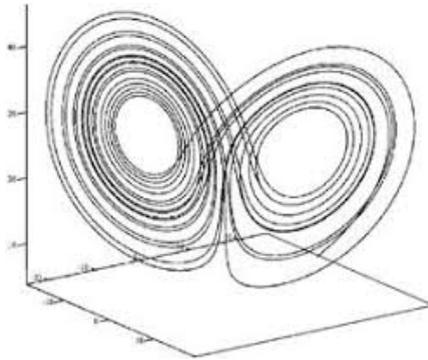


Рис. 1. Траектории системы Лоренца для хаотического случая

Для обсуждения эволюций траекторий системы Лоренца при изменении параметров необходимо изучить некоторые новые бифуркационные сценарии, частично рассмотренные ниже.

Из теоремы Коши следует вывод о детерминированности движения системы, описываемой дифференциальными уравнениями, удовлетворяющими условиям теоремы Коши, и любая траек-

тория полностью определяется начальными условиями. Однако в системах с хаотическим поведением на качественном уровне наблюдается своего рода «непредсказуемость» поведения: траектории при сколь угодно малом отличии начальных условий быстро расходятся и полностью отличаются друг от друга по форме.

Чтобы подчеркнуть, что динамика системы все же соответствует теореме Коши, вместо понятия *динамический хаос* используют термин *детерминированный хаос*. А иногда применяется образный термин *эффект бабочки* благодаря аналогии поведения хаотических систем и одной из философских идей рассказа Р. Брэдли «И грянул гром».

Модель Лоренца позволяет объяснить одну из основных причин, препятствующих долгосрочным прогнозам явлений в нелинейных системах, например, долгосрочным метеорологическим прогнозам — даже упрощенная модель конвективных процессов приводит к хаотическому поведению. Естественно, что от более полной модели или реальной системы едва ли можно ожидать более простой динамики.

**Замечание.** Интересно отметить один из фактов о системе Лоренца, лежащих на поверхности. Известно [16], что производная по времени от фазового объема  $V = \int \dots \int dx_1 \dots dx_n$  в системе

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$$

вычисляется по формуле

$$\dot{V} = \int \dots \int \nabla \cdot \mathbf{X} dx_1 \dots dx_n.$$

В системе Лоренца  $\nabla \cdot \mathbf{X} = -a - 1 - c$  и, следовательно,

$$\dot{V} = -(a + 1 + c)V \Rightarrow V = V_0 e^{-(a+1+c)t} \rightarrow 0.$$

Тем не менее экспоненциальное убывание фазового объема не препятствует экспоненциальному разбеганию траекторий.

Аттракторы многомерных динамических систем подразделяются на *регулярные* и *странные* [2], [6]. Регулярные аттракторы в многомерных системах — положения равновесия, предельные циклы, многомерные торы и другие многообразия [16] (фактически многообразия можно считать  $m$ -мерными поверхностями в  $\mathbb{R}^n$ ,  $m < n$ ).

Если притягивающее множество в фазовом пространстве соответствует режиму установившихся непериодических колебаний и система демонстрирует хаотическое поведение, то это множество называется *хаотическим аттрактором*. Например, хаотическим аттрактором обладает система Лоренца при определенных значениях параметров.

В теории динамических систем показывается, что даже в достаточно простых нелинейных системах аттракторы могут иметь *фрактальную структуру* (см. ниже). В этом случае аттракторы называются *странными*. Примером и здесь может служить система Лоренца, обладающая странным аттрактором.

**Замечание.** Можно привести примеры [6] систем, имеющих:

- а) странный аттрактор, но не обладающих хаотическим поведением (нет экспоненциальной неустойчивости траекторий);
- б) хаотическое поведение и хаотический аттрактор, не имеющих фрактальную структуру;
- в) хаотическое поведение и странный аттрактор.

Для иллюстрации понятия фрактала на рис. 2 приведен один из простейших примеров – треугольник Серпинского, принцип построения которого ясен из рисунка. Для любых фракталов,



Рис. 2. Треугольник Серпинского

в том числе более сложных, характерно самоподобие отдельных элементов и устремление количества шагов самоподобия к бесконечности. Вычисление размерности фракталов требует введения понятия *размерности Хаусдорфа* либо *фрактальной размерности*. Намеренно не вдаваясь в тонкости, возникающие при строгом абстрактном изложении понятия размерности и имея в виду, что это понятие далее будет применяться к относительно простым множествам евклидова пространства, можно определить фрактальную размерность следующим образом.

**Определение.** Фрактальной размерностью множества  $G \subset \mathbb{R}^n$  называется число

$$D = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\varepsilon}{\ln \varepsilon}, \quad (2)$$

где  $N_\varepsilon$  – минимальное число шаров радиуса  $\varepsilon$ , покрывающее множество  $G$ .

Например, гладкая кривая длины  $l$  покрывается  $N_\varepsilon \sim l/\varepsilon$  шарами и

$$D = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(l/\varepsilon)}{\ln \varepsilon} = 1,$$

что совпадает с "обычной" (топологической) размерностью кривой. Данный пример также показывает, что для вычисления фрактальной размерности достаточно знать лишь порядок величин, входящих в формулу (2). Ограниченная двумерная поверхность в  $\mathbb{R}^3$  с характерным размером  $l$  покрывается  $N_\varepsilon \sim (l/\varepsilon)^2$  шарами и  $D = 2$ , что также совпадает с топологической размерностью.

Хаусдорфова размерность фракталов может не быть целым числом. Вычислим ее для рассмотренного треугольника Серпинского. Минимальное покрытие треугольника можно получить описывая окружность вокруг каждого треугольника при очередной итерации процесса самоподобия. Пусть сторона исходного треугольника равна  $l$ . Тогда при итерации с номером  $m$  сторона нового треугольника равна  $l/2^m$  и, следовательно,  $\varepsilon \sim l/2^m$ . Количество треугольников (и шаров покрытия) при этой итерации равно  $N_\varepsilon = 3^m$ . Соответственно, размерность

$$D = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1.585,$$

т.е. не является целым числом! Таким образом, фракталы не относятся к классам кривых или поверхностей – многообразий [16], всегда имеющих целую размерность. Для основательного изучения понятия *хаусдорфовой размерности* и *свойств фракталов* можно обратиться, например, к следующим книгам [17], [18].

**Примечание.** Интересно обратить внимание, что форму, напоминающую фрактальные множества, имеют многие ветвящиеся объекты природы, например, листья различных растений,

деревья, системы сосудов, некоторые кристаллы и другие объекты. В качестве примера на рис. 3 представлен один из сортов капусты.



Рис. 3. Капуста сорта Романеску

Не менее интересно и обратное наблюдение. Известны дискретные отображения, позволяющие строить структуры, поразительно напоминающие природные объекты. Один из наиболее известных примеров — фрактал, называемый *папоротником Барнсли*. Он строится при помощи линейного отображения

$$\begin{bmatrix} x_{1n+1} \\ x_{2n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix},$$

коэффициенты  $a, b, c, d, e, f$  которого могут принимать значения из четырех фиксированных наборов [19]. Оказывается, что, выполняя итерации приведенного отображения и отмечая полученные точки на плоскости  $\{x_1, x_2\}$ , можно получить картину, изображенную на рис. 4.

Многомерные нелинейные системы обладают рядом нетривиальных свойств, требующих от исследователя освоения тонких математических методов и весьма сложных понятий, что очевидно даже из беглого просмотра специальной литературы. Однако один из немногих общих результатов [16] о движении многомерных систем доказывается весьма просто и имеет интересные следствия.

**Теорема Пуанкаре о возвращении.** Пусть  $g$  — сохраняющее объем непрерывное взаимно-однозначное отображение, переводящее ограниченную область  $D$  евклидова пространства в себя:  $gD = D$  (использовано сокращение  $gD \equiv g(D)$ ).



Рис. 4. Папортник Барнсли

Тогда в любой окрестности  $U$  любой точки области  $D$  найдется точка  $\mathbf{x} \in U$ , возвращающаяся в область  $U$  при  $n$ -кратном действии отображения  $g$ , т.е.  $g^n \mathbf{x} \in U$  для некоторого  $n > 0$ .

**Доказательство.** Рассмотрим образы окрестности  $U$ :  $U, gU, \dots, g^n U$ . По условию теоремы все образы имеют одинаковые положительные объемы и поэтому не могут не пересекаться, т.к. в противном случае объем  $U \cup gU \cup \dots \cup g^n U$  неограниченно растет и при некотором  $n$  превысит объем  $D$ . Таким образом, для некоторых  $m$  и  $k$ ,  $m > k$  будет выполнено условие

$$g^m \cap g^k \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad g^{m-k} \cap U \neq \emptyset.$$

Следовательно,  $\exists \mathbf{x} \in U : \mathbf{y} = g^{m-k} \mathbf{x} \in g^{m-k} U \cap U$ , что и доказывает теорему.

Теорема Пуанкаре может применяться к произвольным отображениям, например, к фазовым потокам систем дифференциальных уравнений с ограниченным фазовым пространством и нулевой дивергенцией, которые по теореме Коши обладают гладкостью и взаимной однозначностью:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{Y}(\mathbf{y}), \quad \nabla \cdot \mathbf{Y} = 0, \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) = g\mathbf{x}.$$

В частности, теорема Пуанкаре применима к консервативным механическим системам, у которых потенциал  $\Pi(\mathbf{q})$  растет на бесконечности. Действительно, записывая уравнения движения в гамильтоновой форме

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}_i &= H_{\mathbf{p}}, \\ \dot{\mathbf{p}}_i &= -H_{\mathbf{q}},\end{aligned}\tag{3}$$

где  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = T(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \Pi(\mathbf{q})$  – функция Гамильтона,  $T(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  – положительно определенная кинетическая энергия, получаем, что условия теоремы Пуанкаре выполнены: в качестве области  $D$  можно выбрать  $D = \{\mathbf{q}, \mathbf{p} : H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \leq E\}$ , где  $E$  – уровень полной энергии системы. Фазовый объем гамильтоновой системы при отображении фазового потока сохраняется, поскольку

$$\nabla \cdot \begin{bmatrix} H_{\mathbf{p}} \\ -H_{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \sum H_{p_i q_i} - H_{q_i p_i} = 0,$$

а область  $D$  ограничена из-за роста  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  на бесконечности.

Интересными следствиями теоремы Пуанкаре о возвращении являются приводимые далее утверждения.

**Утверждение 1.** Пусть  $D$  – окружность,  $\varphi$  – некоторая точка на ней,  $g\varphi = \varphi + \alpha$  – поворот на угол  $\alpha$  относительно центра окружности. Тогда если  $\alpha$  удовлетворяет условию  $\exists m, n \in \mathbb{Z} : \alpha = 2\pi \frac{m}{n}$ , то множество точек

$$\{\varphi, g\varphi, \dots, g^n \varphi \dots\}\tag{4}$$

всюду плотно на окружности  $D$  (множество  $M$  называется всюду плотным в множестве  $N$ , если в любой окрестности из  $N$  существуют точки из  $M$ ).

Отображение  $g$  и область его действия удовлетворяют всем условиям теоремы Пуанкаре при любом  $\alpha$ , а при  $\alpha = 2\pi m/n$  выполнено условие  $g^n \varphi = \varphi$  и множество (4) состоит из конечного набора точек.

Рассмотрим случай, когда  $\alpha$  несоизмерим с  $2\pi$ . Пусть  $U = (\varphi - \delta/2, \varphi + \delta/2)$  – произвольная  $\delta/2$ -окрестность точки  $\varphi$ . Тогда теорема Пуанкаре гарантирует, что  $\exists n, \psi \in U : g^n \psi \in U$  и, значит,  $|g^n \psi - \psi| < \delta$ . Поскольку отображение  $g$  действует на все точки окружности одинаково, то из этого следует, что

$|g^n\varphi - \varphi| < \delta$ ,  $|g^{2n}\varphi - g^n\varphi| < \delta$ , ...,  $|g^{nk}\varphi - g^{n(k-1)}\varphi| < \delta$  и соседние точки подпоследовательности  $\{\varphi, g^n\varphi, \dots, g^{nk}\varphi, \dots\}$  последовательности (4) равноудалены между собой. Таким образом, в любой  $\delta$ -окрестности  $V$  произвольной точки окружности  $D$  найдутся точки последовательности (4), что и доказывает утверждение.

**Утверждение 2.** Рассмотрим линейную колебательную консервативную систему с двумя степенями свободы

$$A\ddot{\mathbf{q}} + C\mathbf{q} = 0, \quad (5)$$

где  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$ ,  $A, C$  – симметрические положительно определенные матрицы. Тогда если частоты главных мод колебаний соизмеримы, то траектории системы – замкнутые траектории на двумерных торах, а если частоты несоизмеримы, то траектории всюду плотны на двумерных торах (всюду плотная обмотка тора).

В нормальных координатах [7],[8] система (5) описывается уравнениями двух независимых осцилляторов:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 + \omega_1^2\theta_1 &= 0, \\ \ddot{\theta}_2 + \omega_2^2\theta_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим отдельно уравнение осциллятора

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0,$$

перепишем его в виде системы

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= u, \\ \dot{u} &= -\omega^2\theta \end{aligned} \quad (7)$$

и заметим, что система имеет первый интеграл  $E = \frac{1}{2}(u^2 + \omega^2\theta^2)$ , в чем легко убедиться, дифференцируя его в силу (7). Уравнения  $E(\theta, u) = \text{const}$  задают на плоскости параметров  $(\theta, u)$  концентрические эллипсы, которые и будут фазовыми траекториями (7). Делая растяжение по оси  $u$  за счет замены переменной  $u = \omega v$ , получаем систему

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega v, \\ \dot{v} &= -\omega\theta, \end{aligned} \quad (8)$$

траекториями которой будут окружности  $\theta^2 + v^2 = \text{const}$ , а решениями – функции  $\theta(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ ,  $v(t) = -A \sin(\omega t + \varphi)$ , задающие отображения этих окружностей на себя.

Теперь вернемся к рассмотрению системы (6). Проводя для каждого осциллятора, составляющего (6), аналогичные преобразования, получим систему

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= \omega_1 v_1, \quad \dot{v}_1 = -\omega_1 \theta_1, \\ \dot{\theta}_2 &= \omega_2 v_2, \quad \dot{v}_2 = -\omega_2 \theta_2,\end{aligned}\tag{9}$$

имеющую решение

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad v_1(t) = -A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1), \\ \theta_2(t) &= A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \quad v_2(t) = -A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2).\end{aligned}\tag{10}$$

Двумерный тор  $T^2$  определяется как декартово произведение двух окружностей  $T^2 = S^1 \times S^1$ , т.е. множество пар точек  $\{\varphi_1, \varphi_2\}$  таких, что  $\varphi_1$  принадлежит первой окружности  $S^1$ , входящей в произведение, а  $\varphi_2$  – второй. Поскольку для любых ненулевых начальных условий каждое из решений  $\{\theta_1(t), v_1(t)\}$  и  $\{\theta_2(t), v_2(t)\}$  системы (9) лежит на некоторой окружности, то можно утверждать, что полный набор параметров  $\{\theta_1(t), v_1(t), \theta_2(t), v_2(t)\}$  лежит на двумерном торе (рис. 5). При отображении фазового потока системы точки тора остаются на нем и поэтому тор называют *инвариантным тором*.

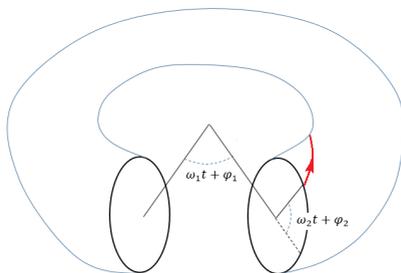


Рис. 5. Траектория на торе

Решение (10) системы (9) задает отображение начальных условий фазовым потоком системы (9). Выберем некоторую на-

чальную точку на траектории и рассмотрим данное отображение в моменты времени  $t_k = 2\pi k/\omega_1$ , кратные периоду первой главной моды колебаний. Для первой моды отображение  $\{\theta_1(t_k), v_1(t_k)\}$  тождественно, а для второй моды  $\{\theta_2(t_k), v_2(t_k)\}$  будет представлять собой поворот вокруг центра окружности на угол:

$$2\pi k \frac{\omega_2}{\omega_1},$$

т.е. преобразование, рассмотренное в утверждении 1. По доказанному это отображение задает конечный набор точек при  $\omega_2/\omega_1 = m/n$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$ , и всюду плотное множество на окружности, когда  $\omega_2/\omega_1$  иррационально. В первом случае через некоторое количество периодов первой моды отображение возвращается в исходную точку и поэтому соответствующая траектория на торе будет замкнутой. Во втором случае траектория всюду плотна на торе, поскольку доказано, что точки ее пересечения с одной из окружностей, образующей тор, всюду плотны на ней, а сама окружность может быть выбрана произвольно.

Всюду плотная траектория по определению проходит через любую сколь угодно малую окрестность произвольной точки на торе. Из этого получается, что любая траектория со временем достигает фактически любой точки на этом торе.

Движения системы при рациональном  $\omega_2/\omega_1$  называют *периодическими колебаниями*, а при иррациональном  $\omega_2/\omega_1$  – *квазипериодическими*.

**Замечание 1.** Действуя аналогичным образом, можно получить обобщение результата на случай консервативной колебательной системы произвольной конечной размерности.

**Замечание 2.** Возвращение к исходным фазовым переменным  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  задается линейным преобразованием с постоянной матрицей. Поэтому полученный тор и фазовые траектории на нем при возвращении к исходным переменным подвергнутся аффинному преобразованию и доказанный результат останется справедливым. По той же причине он справедлив и при переходе к описанию системы в гамильтоновых переменных.

**Замечание 3.** Важность исследований траекторий гамильтоновых систем на торах обусловлена известной теоремой Лиувилля об интегрируемых системах [7],[8], [16], дающей условия,

гарантирующие, что траектории системы лежат на многомерных торах и ее связью с теорией резонансных явлений, нормальных форм [7],[14] и КАМ-теорией.

**Утверждение 3.** Укажем еще одно следствие теоремы Пуанкаре [16]. Допустим, что сосуд фиксированной формы разделен перегородкой на две половины, в одной из которых – вакуум, а в другой – молекулы идеального газа. Затем перегородка убирается. Если столкновения молекул со стенками считать абсолютно упругими, то из теоремы Пуанкаре следует, что газ через некоторое время будет находиться в состоянии, близком к исходному. Отображение, фигурирующее в теореме Пуанкаре, будет задаваться фазовым потоком системы уравнений движения молекул идеального газа в  $6N$ -мерном пространстве их импульсов и декартовых координат. Разрешение этого парадокса состоит в колоссальной величине «некоторого времени».

**Бифуркация рождения тора - бифуркация Неймарка-Сакера.** Рассмотрим динамическую систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha_1 x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \alpha_1 x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_3 &= \alpha_2 x_3 - x_4 - x_3(x_3^2 + x_4^2), \\ \dot{x}_4 &= x_3 + \alpha_2 x_4 - x_4(x_3^2 + x_4^2). \end{aligned} \quad (11)$$

В первой части пособия было доказано, что в подсистемах из двух первых и двух последних уравнений, образующих (11), при  $\alpha_{1,2} < 0$  имеется асимптотически устойчивое положение равновесия в начале координат, а при  $\alpha_{1,2} > 0$  из него рождается устойчивый предельный цикл. Поэтому если в (11)  $\alpha_1 > 0$ ,  $\alpha_2 < 0$ , то траектории (11) стремятся к предельному циклу в плоскости  $(x_1, x_2)$ . Если увеличивать параметр  $\alpha_2$ , то при переходе через  $\alpha_2 = 0$  в область положительных величин во второй системе рождается второй цикл.

Исследуя линейную колебательную систему (5), мы видели, что движение отдельных компонент фазового вектора по двум периодическим траекториям в непересекающихся подпространствах фазового пространства системы можно трактовать как движение всего фазового вектора по поверхности двумерного тора. Таким образом, можно утверждать, что рождение второго цикла в системе (11) эквивалентно *перерождению устойчивого*

*предельного цикла в инвариантный тор.* Инвариантность тора означает, что фазовые траектории, начинающиеся на торе, продолжают оставаться на нем, что означает инвариантность тора по отношению к отображению фазового потока системы. В данном примере инвариантный тор асимптотически устойчив. Рождение тора – новый тип бифуркации, не возможный для систем на плоскости.

Приведенный пример рождения тора важен для понимания геометрии и принципиальной возможности этой бифуркации. Однако обычно уравнения динамической системы не разделяются на независимые подсистемы (тор может рождаться как раз благодаря взаимодействию отдельных компонент фазового вектора в силу структуры системы), а частоты возникающих мод колебаний не совпадают. Изучение рождения тора в общей постановке – сложная задача, выходящая далеко за рамки элементарного изложения.

Более физичный пример системы с устойчивым тором в фазовом пространстве дает осциллятор Ван дер Поля под действием внешней гармонической силы:

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = p \sin \omega t, \quad p = \text{const.}$$

Для большей геометрической ясности этого утверждения перепишем уравнение в эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &- \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = pu \\ \ddot{u} &+ \omega^2 u = 0, \quad u(0) = 0, \quad \dot{u}(0) = 1. \end{aligned}$$

Тогда при  $p = 0$  первое уравнение совпадает с однородным уравнением Ван дер Поля, решения которого стремятся к устойчивому циклу на плоскости  $\{x, \dot{x}\}$ , второе уравнение гармонического осциллятора задает периодическую траекторию на плоскости  $\{u, \dot{u}\}$ . При  $p \neq 0$  цикл в первом уравнении теряет устойчивость и перерождается в устойчивый тор в пространстве  $\{x, \dot{x}, u, \dot{u}\}$ , проекцию которого на плоскость  $\{x, \dot{x}\}$  можно построить численно. Рисунок 6 иллюстрирует описанную ситуацию.

Каскадом последовательных бифуркаций рождения тора может объясняться один из сценариев усложнения структуры траекторий многомерных систем. В этом случае изменение параметров системы приводит к появлению новых периодических реше-

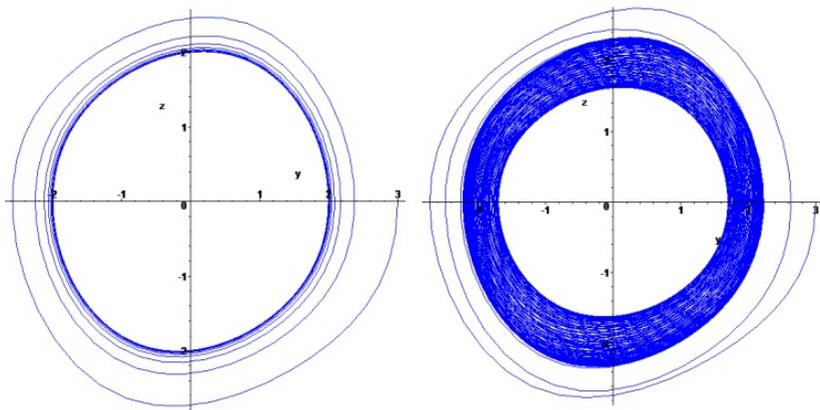


Рис. 6. Численные решения уравнения Ван дер Поля на фазовой плоскости  $x, \dot{x}$ . Слева решение однородного уравнения Ван дер Поля  $\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$ ,  $x(0) = 3$ ,  $\dot{x}(0) = 0$  при  $\varepsilon = 0.1$ . Справа – решение уравнения  $\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = p \sin \omega t$ ,  $x(0) = 3$ ,  $\dot{x}(0) = 0$  при  $\varepsilon = 0.1$ ,  $p = 0.2$ ,  $\omega = 1 + 0.1\pi$ . Решение слева стремится к циклу, справа – к инвариантному тору

ний и перестройкам положения равновесия в цикл, цикла – в двумерный инвариантный тор, двумерного тора – в трехмерный и т.д. В 40-е гг XX в. Ландау и Хопф [20], [21] высказали гипотезу о том, что этим сценарием можно объяснить возникновение турбулентности при увеличении скорости течения, но в 1971 г. эта гипотеза подверглась критике в работе Рюэля и Такенса [22]: в нелинейной системе рождению большого числа периодических мод может предшествовать появление странного аттрактора, что и объясняет появление хаотической динамики.

**Сечения Пуанкаре и типы траекторий.** Обычно простое само по себе исследование многомерных динамических систем бывает сопряжено и с трудностями наглядного представления результатов исследования. Даже в трехмерном случае, когда такое представление еще возможно, не всегда получается изобразить фазовые траектории системы так, чтобы была ясна качественная картина движения.

Один из методов, позволяющих получить наглядные представления о траекториях системы, называется *методом сечений*

*Пуанкаре* и состоит в следующем. В фазовом пространстве системы выбирается некоторая двумерная поверхность, обычно плоскость, и рассматриваются точки пересечения этой поверхности траекториями системы. При этом важно, чтобы траектории не касались поверхности и не лежали на ней.

Для большинства систем это построение делается численными методами интегрирования, поскольку аналитические выкладки обычно не представляются возможными.

В зависимости от поведения траекторий системы получившаяся картина может оказаться как очень простой, так и чрезвычайно сложной. Например, для периодической траектории в сечении получается конечный набор точек, а для систем с хаотическим поведением в сечении может наблюдаться хаотический набор точек, либо фрактальная структура. Последнее доказывалось также при помощи численных оценок и позволяет показать возникновение странного аттрактора.

При анализе двумерных неавтономных систем с периодической правой частью, т.е.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t), \dim \mathbf{x} = 2, \mathbf{X}(\mathbf{x}, t + T) = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t),$$

часто используются сечения траекторий набором плоскостей  $t_n = Tn$ , ортогональных оси времени и проходящих через равные интервалы, кратные периоду воздействия  $T$ . К этому классу уравнений, в частности, относятся механические системы с одной степенью свободы при периодическом внешнем воздействии.

В качестве иллюстрации на рисунке 7 представлены сечения Пуанкаре траектории колебательной системы, лежащей на двумерном торе.

Если частоты мод колебаний соизмеримы, то траектория периодическая и в сечении Пуанкаре будет наблюдаться дискретный набор точек, лежащих на замкнутой кривой-сечении тора. Если частоты несоизмеримы, то точки будут заполнять всю кривую (см. Утверждение 2).

Наличие странного аттрактора обычно приводит к сложным структурам в сечении Пуанкаре. Для примера на рис. 8 представлена картина сечений Пуанкаре траектории плоскостями  $t_n = 2\pi n$  для уравнения Дуффинга:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} - x + x^3 = F \cos t,$$

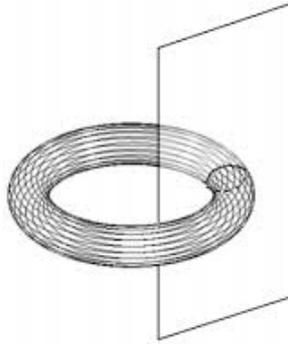


Рис. 7. Сечение Пуанкаре для траекторий на торе

демонстрирующего хаотическое поведение при достаточно больших  $F$ .

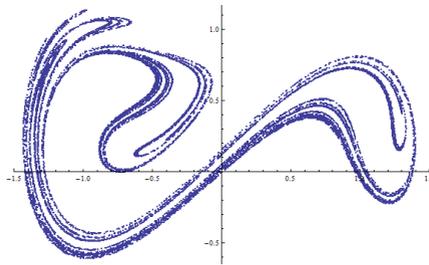


Рис. 8. Сечение Пуанкаре для уравнения Дуффинга

**Замечание 1.** Может показаться, что последняя иллюстрация противоречит приведенным выше утверждениям о невозможности хаотического поведения фазовых траекторий двумерных систем. Это кажущееся противоречие снимается тем, что рассмотренная система не автономна и заменами переменных сводится к автономной системе третьего порядка, для которой

хаотическая динамика уже возможна:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u, \\ \dot{u} &= -\gamma u + x - x^3 + F \cos v, \\ \dot{v} &= 1.\end{aligned}$$

**Замечание 2.** Перестройки траекторий уравнения Дуффинга достаточно подробно исследованы ниже.

**Замечание 3.** Уравнение Дуффинга в некотором приближении описывает поведение механической системы, изображенной на рис. 9

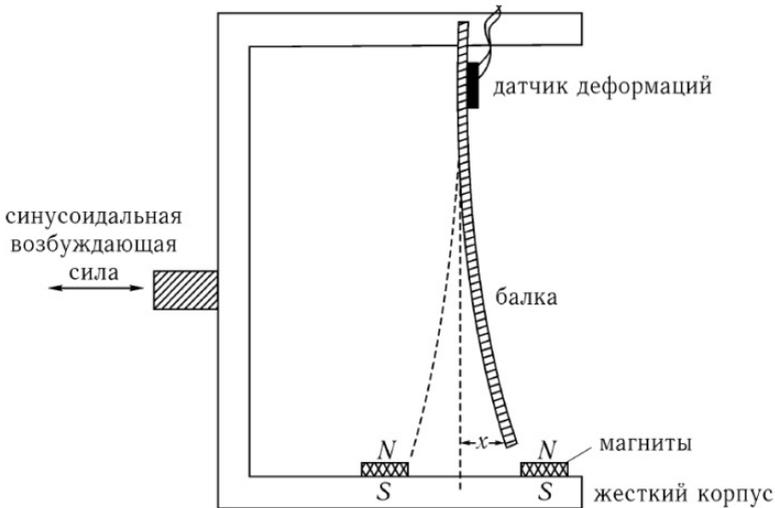


Рис. 9. Система, описываемая уравнением Дуффинга. Рисунок заимствован из книги [1]

В случае хаотического нестранного аттрактора точки в сечении Пуанкаре хаотически заполняют некоторую область в сечении. При наличии странного аттрактора точки в сечении образуют сложные упорядоченные структуры. Доказательство фрактальной природы сечения – тонкий вопрос, выходящий далеко за рамки элементарного изложения.

Отображение Пуанкаре приводит к очень полезной взаимосвязи между дифференциальными уравнениями и дискретными отображениями. Действительно, рассмотрим траекторию  $\mathbf{x}(t_0, \mathbf{x}_0)$ , являющуюся решением задачи Коши

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0.$$

Пусть  $\mathbf{x}_1$  – первая точка пересечения этой траектории с поверхностью, выбранной для построения сечения Пуанкаре. Тогда  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t^*(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0) \triangleq \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ , где  $t^*(\mathbf{x}_0)$  – время пересечения, зависящее от выбора начальной точки  $\mathbf{x}_0$ ,  $\triangleq$  – равно по обозначению. Выбрав в качестве начальных условий  $\mathbf{x}_1$  в момент времени  $t^*$  и снова рассматривая пересечение с поверхностью, получим отображение  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_1)$  и, действуя по индукции, дискретное отображение поверхности на себя:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n).$$

Данная взаимосвязь позволяет устанавливать соответствия между определенными явлениями в системах дифференциальных уравнений и в дискретных отображениях, что оказывается полезным для объяснения ряда эффектов в динамических системах.

## 2. Нелинейные дискретные отображения: неподвижные точки, удвоение периода, сценарий Фейгенбаума перехода к хаосу

В разделе изучается отображение

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad x_n \in \mathbb{R}, n = 0, 1, \dots \quad (12)$$

функция  $f$  будет считаться нелинейной. Случай линейной функции  $f$  тривиален и для него легко выписывается выражение общего члена  $x_n$  через начальное условие  $x_0$ .

Отображение (12) удобно иллюстрировать графически с помощью следующего приема. На плоскости  $(x, y)$  строятся графики функций  $y = x$  и  $y = f(x)$ , на оси  $x$  откладывается первая точка  $x_0$ , затем в соответствии с рис. 10 отмечается точка  $f(x_0)$ . После этого прямая  $y = x$  используется для отметки на оси  $x$  точки  $x_1 = f(x_0)$ . Отмеченные точки соединяются отрезками, как показано на рис. 10, и процесс повторяется для следующих итераций. Полученную картину называют *итерационной диаграммой*, *диаграммой Ламерея*, либо *лестницей Ламерея*. Для наглядности

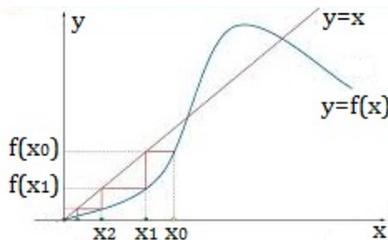


Рис. 10. Диаграмма Ламерея

на диаграмме можно изображать стрелки на отрезках в направлении итераций.

Если дискретное отображение соответствует отображению Пуанкаре для некоторой двумерной системы дифференциальных уравнений, то неподвижная точка отображения Пуанкаре соответствует периодической траектории (рис. 11).

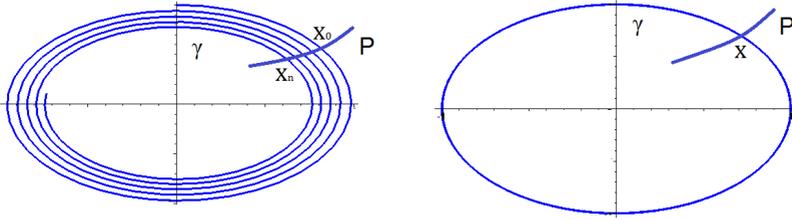


Рис. 11. Соответствие неподвижной точки и периодической траектории. Слева  $\gamma$  изображена непериодическая траектория системы на плоскости,  $P$  – кривая, используемая для построения отображения Пуанкаре,  $x_0, \dots, x_n$  – последовательность точек при отображении Пуанкаре. Справа  $\gamma$  – периодическая траектория,  $x$  – неподвижная точка отображения Пуанкаре

Поэтому неподвижные точки (12) и поведение отображения в их окрестности представляют особый интерес. Неподвижные точки (12) находятся из уравнения

$$x = f(x),$$

соответствующего точкам пересечения графиков функций  $y = x$  и  $y = f(x)$  на итерационной диаграмме, поскольку для неподвижных точек  $x_{n+1} = x_n = x$ . Поэтому, например, для отображения, изображенного на рисунке 10, имеются три неподвижные точки.

Неподвижные точки дискретных отображений аналогичны положениям равновесия систем дифференциальных уравнений и также могут быть устойчивыми либо неустойчивыми. Для анализа устойчивости используется линеаризация отображения системы при малом отклонении от неподвижной точки.

Если  $x_n = x + \varepsilon_n$ , где  $x$  – неподвижная точка отображения (12),  $\varepsilon_n$  – малое отклонение от нее на  $n$ -й итерации, то

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x + \varepsilon_{n+1} = f(x_n) = f(x + \varepsilon_n) \simeq f(x) + f'(x)\varepsilon_n \Rightarrow \\ &\Rightarrow \varepsilon_{n+1} \simeq f'(x)\varepsilon_n. \end{aligned}$$

Из этого следует, что итерации в главном приближении образуют геометрическую прогрессию и характер устойчивости неподвижной точки определяется величиной  $|f'(x)|$ . При  $|f'(x)| > 1$

неподвижная точка неустойчива, а при  $|f'(x)| < 1$  – асимптотически устойчива. В качестве упражнения полезно построить диаграмму Ламерея, позволяющую проиллюстрировать сказанное и понять, что при  $|f'(x)| = 1$  устойчивость неподвижной точки зависит от расположения кривой  $y = f(x)$  относительно  $y = x$  в окрестности неподвижной точки. На рис. 12 представлено характерное поведение отображения вблизи устойчивой и неустойчивой точек:

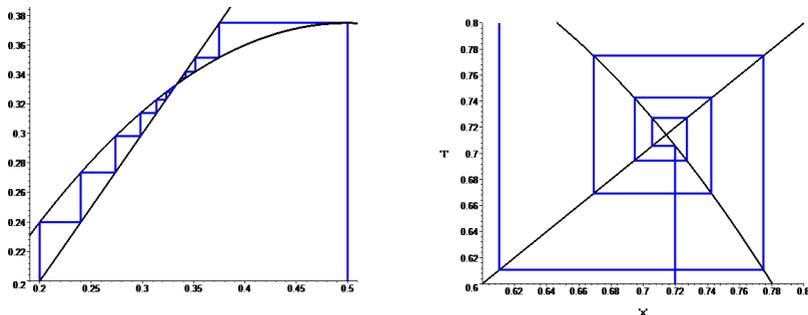


Рис. 12. Диаграммы Ламерея вблизи устойчивой и неустойчивой неподвижных точек отображения  $x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$ ,  $\mu \in [0, 4]$ . Левый рисунок – итерации вблизи устойчивой неподвижной точки при  $\mu = 1.5$  для двух разных начальных условий  $x_0 = 0.2$  и  $x_0 = 0.5$ . Правый рисунок – итерации вблизи неустойчивой неподвижной точки при  $\mu = 3.5$  и начальном условии  $x_0 = 0.72$

При появлении в отображении дополнительных параметров, т.е. когда  $x_{n+1} = f(x_n, \mu)$ , свойства отображения могут существенно меняться в зависимости от значений  $\mu$ : неподвижные точки могут появляться и исчезать, может изменяться характер их устойчивости, поведение отображения может варьироваться от тривиального до очень сложного. Далее считается, что  $\mu \in \mathbb{R}$ .

Весьма примечательно, что эти явления можно продемонстрировать на весьма элементарном отображении отрезка  $[0, 1]$  на себя, задаваемом формулой

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n), \mu \in [0, 4]. \quad (13)$$

Отображение (13) возникло как модель изменения удельной численности популяции, обитающей в среде ограниченной емкости, в

дискретные моменты времени наблюдения и называется *отображением Фейгенбаума* или *логистическим отображением*. Происхождение этого названия объясняется аналогией (13) и логистического уравнения

$$\dot{x} = x(1 - x),$$

предложенного П.Ф. Ферхюльстом в качестве непрерывной модели численности популяции. Называя это уравнение, Ферхюльст, по видимому, пользовался созвучием слов "логарифмический" и "логистический" и называл "логарифмическими" зависимости экспоненциального вида. При этом греческое слово *λογιστική* буквально переводится как "счетное искусство".

Далее показано, что при увеличении  $\mu$  асимптотически устойчивые неподвижные точки (13) разветвляются, а поведение отображения изменяется от сходимости к единственной неподвижной точке до хаотического поведения через последовательные разветвления неподвижных точек. Исследования показывают, что подобная картина хаотизации динамики системы оказывается весьма универсальной, реализуется для многих других отображений и называется *сценарием Фейгенбаума*. Простота отображения (13) удобна для выкладок и наглядных построений, но, как следует из самого хода дальнейших рассуждений, они обобщаются и на другие отображения. Для дальнейших построений потребуется следующее определение.

**Определение.** Неподвижной точкой периода  $k \in \mathbb{Z}$  называется точка  $x$ , для которой

$$f^k(x) = f(f(\dots f(x)\dots)) = x, \quad \forall m < k \quad f^m(x) \neq x.$$

Т.е. период дискретного отображения – это минимальное количество итераций, возвращающих точку в исходное значение.

Заметим, что в множество неподвижных точек отображения  $f^k(x)$ ,  $k \geq 2$  всегда входят неподвижные точки  $f(x)$  (имеющие период 1):  $f(x) = x \Rightarrow f(f(x)) = f(x) = x, \dots, f^k(x) = x$  и могут входить неподвижные точки периодов  $m < k$ .

Неподвижные точки произвольного периода удобно обозначать  $x_{i,j}$  где  $i$  – период неподвижной точки,  $j$  – номер неподвижной точки. На рис. 13 изображена итерационная диаграмма для

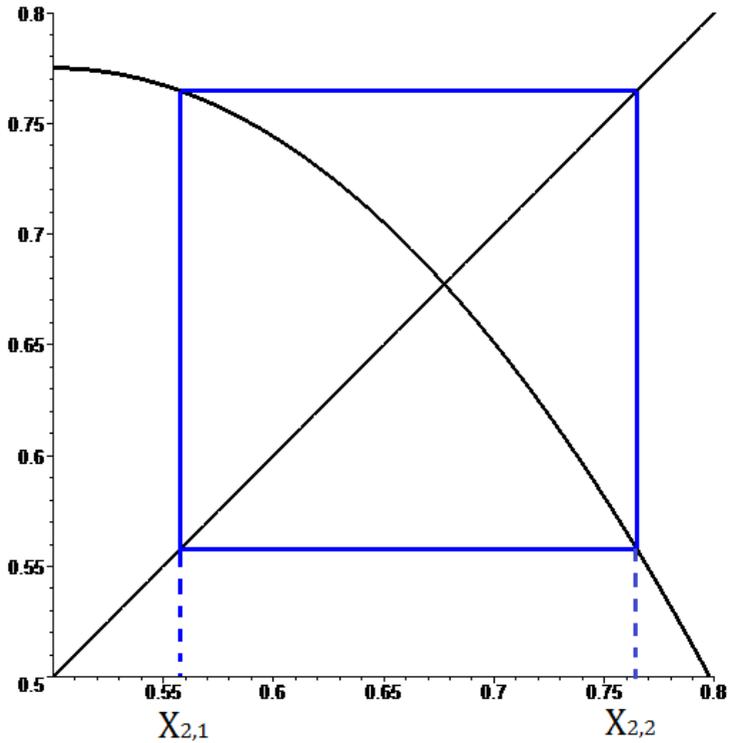


Рис. 13. Неподвижные точки периода 2  $x_{2,1} \approx 0.558$  и  $x_{2,2} \approx 0.765$  логистического отображения при  $\mu = 3.1$

неподвижных точек периода 2 для логистического отображения.

Для отображения  $x_{n+1} = f(x_n, \mu)$ , зависящего от параметра, появление неподвижных точек с новыми периодами может быть результатом бифуркации. Покажем это на примере логистического отображения. Неподвижные точки периода 2 находятся из уравнения  $f^2(x) = x$ , соответственно графики функций  $y = x$  и  $y = f^2(x)$  должны пересекаться в этих точках. На рис. 14 построено семейство графиков функций  $y = f^2(x) = \mu^2 x(1-x)[1 - \mu x(1-x)]$  для нескольких значений параметра  $\mu$  и график  $y = x$ .

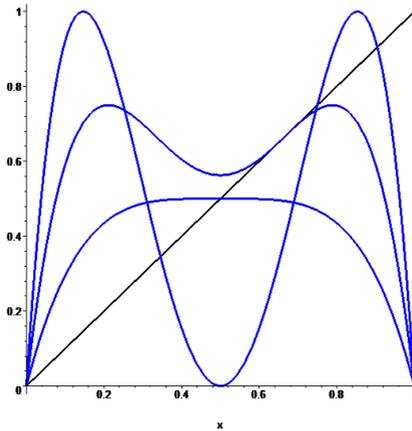


Рис. 14. Графики  $y = f^2(x)$  и  $y = x$ , где  $f = \mu x(1 - x)$  – логистическое отображение при  $\mu = 2, 3, 4$

Из рис. 14 видно, что для  $\mu = 2$  графики пересекаются в  $x_{1,1} = 0$  и в  $x_{1,2}$  – неподвижной точке  $f(x)$ , при  $\mu = 3$  графики имеют общую касательную в  $x_{1,2}$ , а при  $\mu = 4$  есть две новые точки пересечения  $x_{2,1}$   $x_{2,2}$ , являющиеся неподвижными точками периода 2.

Представляя себе непрерывную деформацию графика  $y = f^2(x)$  при увеличении  $\mu$  от 2 до 4, три "кадра" которой изображены на рис. 14, можно понять, что при переходе  $\mu$  через  $\mu = 3$  пересечение кривых  $y = x$  и  $y = f^2(x)$  переходит в касание, затем переходящее в три новых точки пересечения. На рис. 15 этот процесс изображен подробнее.

При  $\mu = 3 + \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  – малое отклонение,  $|df^2(x)/dx| < 1$  в точках  $x_{2,1}$  и  $x_{2,2}$  (см. рис. 15), и эти точки асимптотически устойчивы. В точке  $x_{1,2}$   $|df^2(x)/dx| > 1$  и  $x_{1,2}$  (устойчивая при  $\mu = 3 - \varepsilon$ ) неустойчива. Данный процесс напоминает бифуркацию положения равновесия типа вилка, рассмотренную в первых разделах пособия для дифференциальных уравнений.

**Определение.** Появление двух асимптотически устойчивых неподвижных точек отображения  $x_{n+1} = f(x_n, \mu)$  периода 2 в окрестности неподвижной точки периода 1, теряющей устойчи-

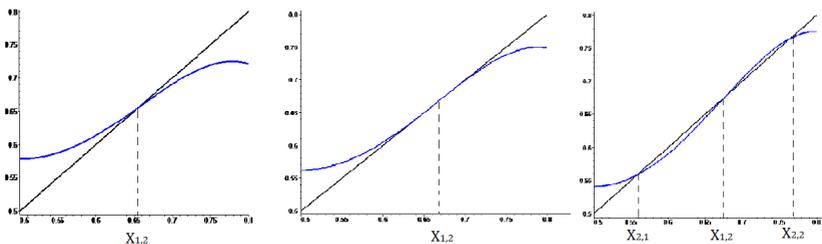


Рис. 15. Графики  $y = f^2(x)$  и  $y = x$ , где  $f = \mu x(1 - x)$  – логистическое отображение при  $\mu = 2.9, 3, 3.1$

вость при переходе параметра  $\mu$  некоторого значения, называется *бифуркацией удвоения периода*.

Теперь снова вспомним, что периодическому решению системы дифференциальных уравнений соответствует неподвижная точка отображения Пуанкаре (рис. 11). Период  $T$  движения по замкнутой фазовой кривой соответствует периоду 1 отображения Пуанкаре. Поэтому если в отображении  $x_{n+1} = f(x_n, \mu)$ , являющемся отображением Пуанкаре некоторой системы дифференциальных уравнений, происходит бифуркация удвоения периода, то в системе дифференциальных уравнений происходит перерождение предельного цикла периода  $T$  в цикл периода  $2T$ , и тоже реализуется бифуркация удвоения периода. Соответствующая этому иллюстрация приводится на рис. 16.

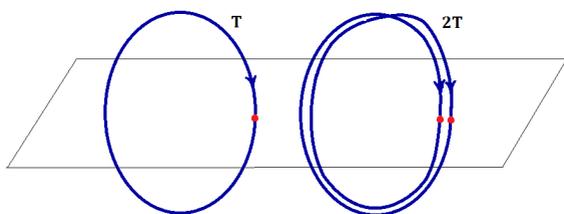


Рис. 16. Бифуркация удвоения периода и появление двух неподвижных точек отображения Пуанкаре

Период движения по замкнутой траектории и ее форма в нелинейной системе, как правило, зависят от параметров системы и начальных условий. Поэтому при дальнейшем отклонении

$\mu$  от бифуркационного значения получившийся цикл периода  $2T$  будет менять как форму, так и период. Этот процесс будет происходить непрерывно, если  $\mu$  не достигнет следующих бифуркационных значений.

Вернемся к исследованию логистического отображения. Появление устойчивых неподвижных точек периода 2 вблизи  $\mu = 3$  при  $\mu > 3$  легко промоделировать численно и представить результаты на графиках (рис. 17).

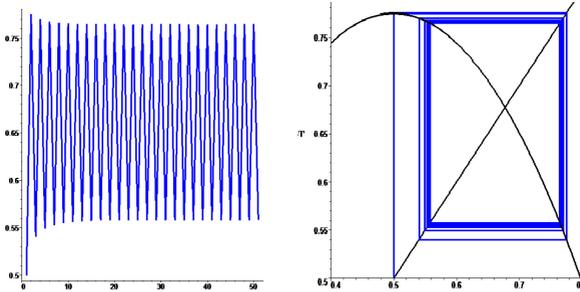


Рис. 17. Итерации логистического отображения для  $\mu = 3.1$  и  $x_0 = 0.5$ . Слева – зависимость  $x_n$  от  $n$  справа – диаграмма Ламерея. Видна сходимость итераций к неподвижным точкам периода 2

Аналогичный механизм появления новых неподвижных точек при увеличении  $\mu$  работает и для отображений  $x_{n+1} = f^k(x_n, \mu)$ ,  $k > 2$ . В результате этого появляются неподвижные точки с новыми периодами. Для примера на рис. 18 показаны 8 неподвижных точек отображения  $x_{n+1} = f^3(x_n, \mu)$  при  $\mu = 4$ . Нетрудно понять, что при  $\mu = 4$   $x_{n+1} = f^4(x_n, \mu)$  будет иметь 8 максимумов и 16 неподвижных точек,  $x_{n+1} = f^5(x_n, \mu)$  – 32 неподвижные точки и т.д.

Появление неподвижных точек с новыми периодами происходит по тому же сценарию, что и первое разветвление точки периода 1 в две точки периода 2. Покажем это с помощью описанного ниже численного моделирования, необходимость которого диктуется усложнением выражения  $f^k(x, \mu)$  с ростом  $k$ .

В моделирующей программе задаются некоторые начальные  $\mu$  и  $x_0$ , например  $\mu = 2.5$   $x_0 = 0.5$ , и делается несколько сотен итераций, обеспечивающих сходимость к асимптотически

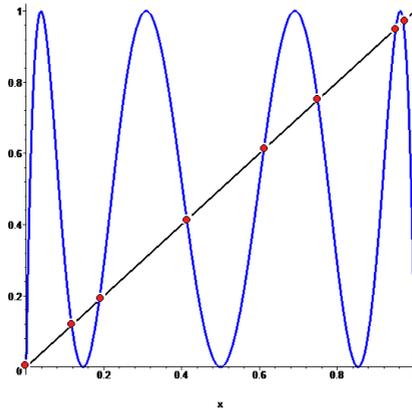


Рис. 18. Неподвижные точки отображения для  $x_{n+1} = f^3(x_n, \mu)$  при  $\mu = 4$

устойчивым неподвижным точкам. После этого выполняются еще несколько сотен итераций, чтобы  $x_n$  "пробежала" по всем неподвижным точкам, в том числе и с большими периодами. Полученные точки изображаются на графике, по горизонтальной оси которого откладывается  $\mu$ , а по вертикальной – неподвижные точки. Затем  $\mu$  смещается на некоторую величину  $\mu + \delta\mu$  и описанное построение повторяется снова. В результате получается картина, приведенная на рис. 19. Можно показать, что период отображения при каждой новой бифуркации удваивается, т.е. образуется последовательность периодов 1, 2, 4, 8,...

Первая бифуркация удвоения периода происходит при  $\mu = 3$ . Это показывалось выше на качественном уровне, однако корни уравнения  $f^2(x, \mu) = x$  нетрудно найти и аналитически с учетом того, что два его корня – решения уравнения  $f(x, \mu) = x$ . Следующее удвоение периода происходит при  $\mu = 1 + \sqrt{6} \approx 3.449$ . При  $\mu \approx 3.569$  рождается хаотический аттрактор и в системе реализуется динамический хаос.

**Определение.** Полученное явление называется *каскадом бифуркаций удвоения периода* или *сценарием Фейгенбаума перехода к хаосу*.

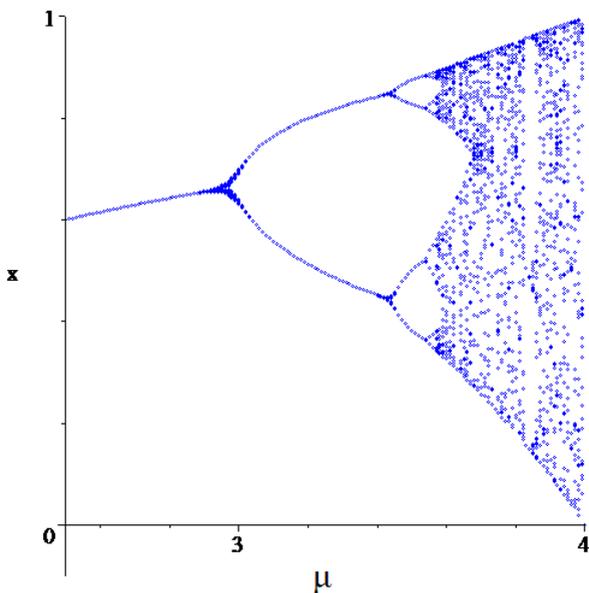


Рис. 19. Каскад бифуркаций удвоения периода логистического отображения (сценарий Фейгенбаума)

Бифуркационную диаграмму, изображенную на рис. 19, также называют *деревом Фейгенбаума*.

Отдельные ветви дерева Фейгенбаума имеют фрактальную структуру. Это можно показать повторяя описанное моделирование для одной из ветвей и используя большее количество итераций для получения достаточного количества точек.

Еще одно интересное явление – так называемые окна регулярности, когда при некоторых значениях параметра хаотическое поведение итерационного процесса вновь сменяется регулярным и наблюдается сходимость к циклам конечного периода.

На рис. 19 заметна светлая вертикальная полоса соответствующая окну регулярности с циклом периода 3. Более детальное построение диаграммы позволяет показать, что таких окон много, они могут быть очень узкими и соответствовать большим периодам.

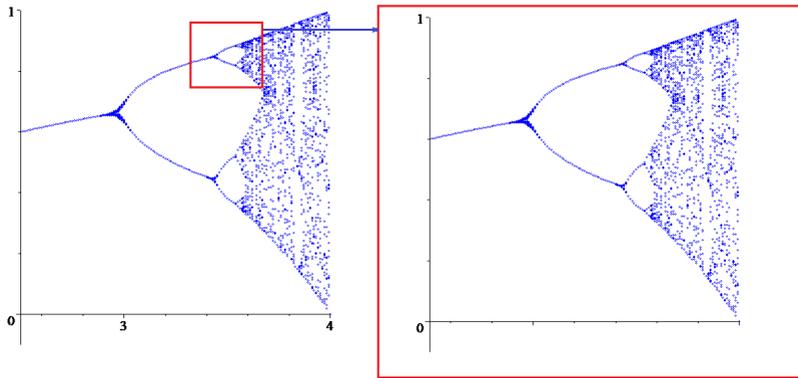


Рис. 20. Фрагмент каскада бифуркаций удвоения периода

В 1970-е гг. М. Фейгенбаумом было показано, что переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода – достаточно общее явление, наблюдающееся не только для логистического отображения. Им также было установлено, что для разных отображений с квадратичным максимумом справедливо следующее предельное соотношение для бифуркационных значений параметров:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu_k - \mu_{k-1}}{\mu_{k+1} - \mu_k} = \delta = \text{const} \approx 4.669201\dots$$

Константа  $\delta$  называется *универсальностью Фейгенбаума* или *универсальной константой Фейгенбаума*.

**Замечание.** Естественно, что для некоторых отображений бифуркационные диаграммы могут быть простыми и количество бифуркаций на диаграмме может быть конечным.

Построение итерационных диаграмм позволяет понять механизм возникновения еще одного необычного явления, когда при некоторых значениях параметров (фиксированных!) регулярное поведение дискретного отображения сменяется хаотическим на последующих итерациях (либо, наоборот, хаотическое поведение сменяется регулярным), причем чередование режимов может повторяться, и в каждом из них система пребывает на достаточно большом количестве последовательно выполняемых итераций.

Участки регулярного поведения появляются при значениях параметра  $\mu$ , близких к появлению новых неподвижных точек отображения  $x_{n+1} = f(x_n, \mu)$  или  $x_{n+1} = f^k(x_n, \mu)$ , когда на итерационной диаграмме отображения  $x_{n+1} = f(x_n, \mu)$  или  $x_{n+1} = f^k(x_n, \mu)$  появляются участки, изображенные на рис. 21. Чем ближе  $\mu$  к появлению неподвижной точки, тем ближе кри-

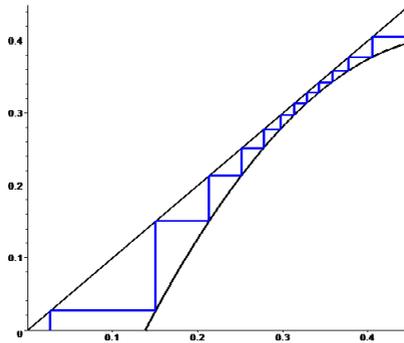


Рис. 21. Итерации на участке регулярного поведения

вые  $y = x$  и  $y = f(x, \mu)$  (или  $f^k(x, \mu)$ ) и тем большее число итераций "застревает" около места сближения кривых на итерационной диаграмме. После прохождения этого "узкого места" точки  $x_n$  удаляются от него и при определенном устройстве функции  $y = f(x, \mu)$  может наблюдаться хаотическое поведение отображения.

Логистическое отображение позволяет продемонстрировать и это явление (рис. 22). Можно убедиться, что  $\mu = 3.8282$  находится вблизи появления новых неподвижных точек отображения  $f^3$ . Это можно сделать, например, построив графики  $y = x$  и  $y = f^3(x, \mu)$  на одной плоскости в подходящем масштабе.

Связь дифференциальных уравнений и дискретных отображений через отображение Пуанкаре объясняет бифуркации по сценарию Фейгенбаума в системах дифференциальных уравнений. Им соответствуют умножения периодов замкнутых траекторий (удвоения, утроения и т.п.), переходы к хаотическому поведению через каскады умножений периодов и участки регулярного поведения, сменяемые хаотическими.

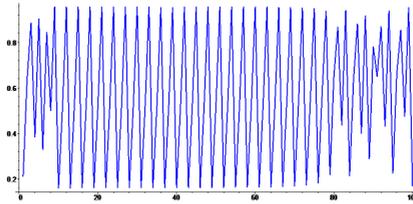


Рис. 22. Первые 100 итераций логистического отображения  $x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$  при  $\mu = 3.8282$ ,  $x_0 = 0.21$ . Наблюдается достаточно длительный интервал регулярного поведения

Покажем, что сценарий Фейгенбаума реализуется для рассмотренного выше уравнения Дуффинга

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} - x + x^3 = F \cos t$$

при увеличении амплитуды внешней силы  $F$  путем численного интегрирования при  $\gamma = 1$  и начальных условиях  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$  с последующим построением фазовых траекторий на плоскости  $(x, \dot{x})$ . Построив фазовые траектории на достаточно длинных интервалах времени (сотни секунд), можно убедиться, что сходимости решения к асимптотически устойчивому циклу предшествует некоторый переходный процесс. Чтобы исключить его из рассмотрения и определить период движения по циклу, можно построить фазовую траекторию на интервалах времени вида  $[t, t + 2\pi n]$ , где  $t$  – достаточно большое число (сотни секунд),  $n$  – целое число, подлежащее подбору.

Если замкнутая траектория получается при  $n = 1$ , то период движения по ней совпадает с периодом внешней силы  $2\pi$  (можно убедиться, что при  $n \in [0, 1)$  замкнутые траектории не получаются), если при  $n = 2$ , то, соответственно, период удваивается и становится равным  $4\pi$  и т.д. Чтобы удостовериться, что период установлен правильно, можно увеличить  $n$  и убедиться, что траектория не будет менять форму.

**Замечание.** При численном интегрировании на длинных интервалах времени могут проявляться особенности численных методов (например, неприемлемое накопление ошибок метода, вычислительная неустойчивость и т.п.), в том числе и при использовании известных математических программных продуктов. По-

этому для проверки правильности вычислений желательно сравнивать решения, полученные разными методами, либо использовать контрольные приемы. Один из таких эффективных приемов – контроль сохранения первых интегралов, если их удастся найти аналитически, на численном решении.

На рис. 23 изображены устоявшиеся периодические решения уравнения Дуффинга для разных значений амплитуд вынуждающей силы. Чтобы убедиться в том, что при  $F = 0.8$  действи-

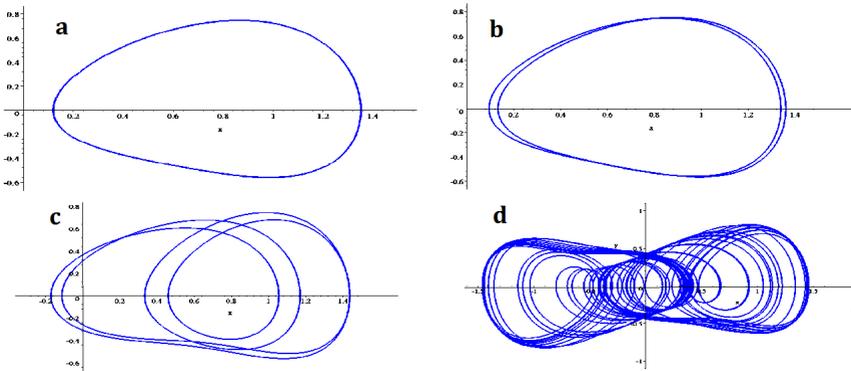


Рис. 23. Решения уравнения  $\ddot{x} + \dot{x} - x + x^3 = F \cos t$  для начальных условий  $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$  и при а)  $F = 0.68, t \in [400, 400 + 2\pi]$ , б)  $F = 0.685, t \in [400, 400 + 4\pi]$  в)  $F = 0.745, t \in [400, 400 + 8\pi]$  д)  $F = 0.8, t \in [400, 400 + 100\pi]$ . Видны последовательные бифуркации удвоения периода и хаотическое поведение при  $F = 0.8$

тельно реализуется хаотическое поведение, можно увеличить  $n$  и проверить, что траектория становится все более сложной. В качестве упражнения рекомендуется проделать это самостоятельно и исследовать динамику системы для других значений коэффициента демпфирования  $\gamma$ .

**Замечание.** Из рис. 23 видно, что траектории имеют достаточно сложную форму даже для периода  $2\pi$ . Это означает, что функции  $x(t)$  и  $\dot{x}(t)$  при разложении в ряд Фурье будут иметь гармоники периодов  $2\pi/n, n \in \mathbb{Z}$ , соответствующие угловым частотам  $\omega = 1, 2, 3, \dots$  Для единственной частоты  $\omega = 1$   $x(t) = A \sin(t + \varphi), \dot{x} = A \cos(t + \varphi)$  и траектория на плоскости  $(x, \dot{x})$  будет окружностью. При первой бифуркации удвоения пе-

риода появляется новая гармоника с частотой  $\omega = 1/2$  и периодом  $T = 4\pi$ , при второй бифуркации – гармоника с  $\omega = 1/4$  и  $T = 8\pi$  и т.д. Это обстоятельство может использоваться для выявления бифуркаций удвоения периода при исследовании систем спектральными методами. Последнее может быть полезно при изучении поведения реальных устройств, данные которых могут быть зарегистрированы в цифровом виде и изучены средствами спектрального анализа.

Сценарий Фейгенбаума реализуется при определенных условиях и в системе Лоренца (1)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= x_1(b - x_3) - x_2, \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - cx_3. \end{aligned}$$

Исследование показывает, что при достаточно больших значениях параметра  $b$  поведение системы оказывается довольно простым и все решения притягиваются к устойчивым циклам. Уменьшение  $b$  приводит к каскаду бифуркаций удвоения периода и последующему переходу к хаосу в соответствии со сценарием Фейгенбаума. Моделирование, иллюстрирующее удвоение периода приведено на рис. 24.

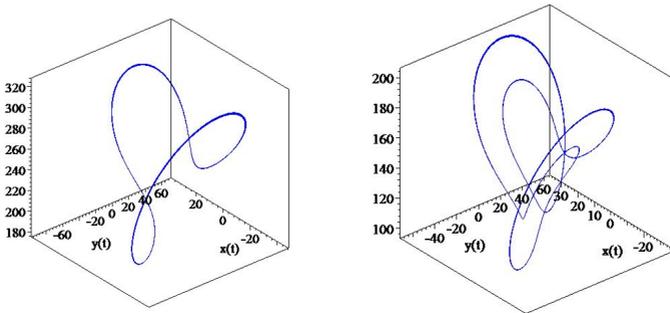


Рис. 24. Предельное поведение траекторий системы Лоренца. Левый рисунок построен для  $a = 10, b = 250, c = 8/3$ , правый – для  $a = 10, b = 150, c = 8/3$ . Начальные условия для обеих рисунков одинаковы:  $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1$

### 3. Простейшие бифуркации отображения Пуанкаре на плоскости

В разделе рассмотрены сценарии потери устойчивости неподвижной точки дискретного отображения

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n, \mu), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \quad (14)$$

Как и в одномерном случае, оно может быть отображением Пуанкаре на плоскости для системы дифференциальных уравнений с размерностью фазового вектора 3 и более. Соответственно, эффекты, установленные для (14), будут иметь некоторые "прообразы" в поведении систем дифференциальных уравнений.

Аналогично одномерному случаю, неподвижная точка отображения (14) находится из уравнения

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu),$$

а изучение ее устойчивости может производиться по линейному приближению. Обозначим  $\mathbf{x}_n = \mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}_n$  и линеаризуем (14) в окрестности  $\mathbf{x}$ :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = A\boldsymbol{\varepsilon}_n, A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mu)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mu)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mu)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mu)}{\partial x_2} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_n = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1n} \\ \varepsilon_{2n} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

**Замечание.** Поскольку явный аналитический вид отображения Пуанкаре обычно не известен, для практического вычисления матрицы  $A$  можно поступить следующим образом. Выберем ортонормированный базис  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  в плоскости Пуанкаре и отложим от неподвижной точки  $\mathbf{x}$  векторы  $\delta\mathbf{e}_1, \delta\mathbf{e}_2$ ,  $0 < \delta \ll 1$ . Затем численно определим образы векторов  $\mathbf{x} + \delta\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{x} + \delta\mathbf{e}_2$  при отображении (14):

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{e}_1, \mu), \mathbf{x}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{e}_2, \mu).$$

Принимая во внимание линеаризованные выражения

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{e}_1, \mu) \simeq \mathbf{x} + \delta A\mathbf{e}_1, \mathbf{f}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{e}_2, \mu) \simeq \mathbf{x} + \delta A\mathbf{e}_2$$

и тот факт, что

$$A\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}, A\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix},$$

получим

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \simeq \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}}{\delta}, \quad \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} \simeq \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}}{\delta}.$$

Вернемся к исследованию линейного отображения(15). Опираясь на утверждения, изложенные в любом курсе линейной алгебры, покажем, что оно асимптотически устойчиво, если все собственные векторы матрицы  $A$  по модулю меньше единицы. Пусть  $\lambda_1, \lambda_2$  – корни характеристического уравнения  $\det(\lambda E - A) = 0$ . Тогда возможны следующие варианты их расположения.

1.  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . В этом случае матрица  $A$  имеет пару линейно независимых собственных векторов  $\{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2\}$  и любой вектор может быть разложен по этому базису, в частности – начальное условие для итерационного процесса (15):

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \mu \mathbf{h}_1 + \nu \mathbf{h}_2.$$

Учитывая, что  $A^n \mathbf{h}_k = \lambda_k^n \mathbf{h}_k$ , выполнение последовательных итераций в (15) приводит к выражению

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n = A^n \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \mu \lambda_1^n \mathbf{h}_1 + \nu \lambda_2^n \mathbf{h}_2,$$

из которого ясно, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \boldsymbol{\varepsilon}_n = \mathbf{0} \Leftrightarrow |\lambda_k| < 1$ .

2.  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Тогда известно, что существует линейно независимая пара векторов  $\{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2\}$  таких, что

$$A\mathbf{h}_1 = \lambda \mathbf{h}_1, \quad A\mathbf{h}_2 = \lambda \mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_1.$$

Аналогично раскладывая  $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \mu \mathbf{h}_1 + \nu \mathbf{h}_2$  и применяя последовательные итерации (15), получим формулу

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n = A^n \boldsymbol{\varepsilon}_0 = (\mu \lambda^n + \nu n \lambda^{n-1}) \mathbf{h}_1 + \nu \lambda^n \mathbf{h}_2,$$

из которой также получается  $\lim_{n \rightarrow \infty} \boldsymbol{\varepsilon}_n = \mathbf{0} \Leftrightarrow |\lambda_k| < 1$ .

3.  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ,  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = \alpha - i\beta$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Такой вид комплексных корней следует из того, что характеристический многочлен имеет действительные коэффициенты и поэтому

$$P(\lambda_1) = a_0 + a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_1^2 = 0 \Rightarrow \overline{P(\lambda_1)} = a_0 + a_1 \bar{\lambda}_1 + a_2 \bar{\lambda}_1^2 = 0.$$

Соответствующие собственные векторы будут иметь вид

$$\mathbf{h}_{1,2} = \mathbf{u} \pm i\mathbf{v},$$

причем действительные векторы  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  линейно независимы и образуют базис. Пусть

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \mu\mathbf{u} + \nu\mathbf{v} = \frac{1}{2}[\mu(\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2) + \frac{\nu}{i}(\mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2)] = \frac{1}{2}(\mu - i\nu)\mathbf{h}_1 + \frac{1}{2}(\mu + i\nu)\mathbf{h}_2.$$

Тогда

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n = A^n \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \frac{1}{2}(\mu - i\nu)\lambda_1^n \mathbf{h}_1 + \frac{1}{2}(\mu + i\nu)\lambda_2^n \mathbf{h}_2$$

и снова получается, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \boldsymbol{\varepsilon}_n = 0 \Leftrightarrow |\lambda_k| < 1$ .

**Замечание.** Интересно отметить, что при  $|\lambda_k| < 1$  само отображение, задаваемое матрицей  $A$ , может не быть сжимающим. Например, матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

имеет двукратное собственное значение  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , но при этом единичный вектор  $\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}[1, -1]^T$  отобразится в

$$\mathbf{y} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \|\mathbf{y}\| = 2.$$

Для сведения напомним условия, гарантирующие, что матрица  $A$  задает сжимающее отображение. Пусть  $\mathbf{x}$  – единичный вектор, т.е.  $\|\mathbf{x}\| = 1$ . Тогда норма вектора  $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$  равна  $\|\mathbf{y}\| = \sqrt{\mathbf{y}^T \mathbf{y}} = \sqrt{\mathbf{x}^T A^T A \mathbf{x}}$ . Матрица  $B = A^T A$  – симметрическая и положительно определенная, следовательно, существует ортонормированный базис из собственных векторов, в котором  $B = \text{diag}[\sigma_1, \sigma_2]$ ,  $\sigma_i > 0$ . Числа  $\sigma_i$  называют *сингулярными числами матрицы  $A$* . Из этого следует, что максимальный коэффициент растяжения находится как  $\|\mathbf{y}\|_{\max} = \sqrt{\max_k \sigma_k}$ . Приведенные рассуждения справедливы для матриц произвольной размерности, однако для размерности  $2 \times 2$  выражения для  $\sigma_k$  нетрудно найти аналитически.

Вернемся к исследованию собственных чисел матрицы  $A$ . Характеристическое уравнение имеет следующий вид:

$$\det(\lambda E - A) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - T\lambda + D = 0, \quad T = \text{tr} A, \quad D = \det A. \quad (16)$$

Таким образом, собственные числа определяются инвариантами матрицы  $A$  – ее следом и детерминантом. Из решения (16)

$$\lambda_{1,2} = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4D}}{2} \quad (17)$$

нетрудно получить границы области устойчивости линейного дискретного отображения (15). Если  $\lambda_k \in \mathbb{R}$ , то из (17) следует, что  $\lambda_1 > \lambda_2$ , где  $\lambda_1$  соответствует знаку "+" в числителе. Следовательно, асимптотически устойчивому отображению соответствует  $-1 < \lambda_2 < \lambda_1 < 1$ , а границе области устойчивости – уравнения  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1$ , которые преобразуются к следующему виду:

$$D + T + 1 = 0, \quad D - T + 1 = 0.$$

Парабола  $T^2 - 4D = 0$  отделяет действительные и комплексные корни (16) на плоскости  $\{T, D\}$ . Для комплексных корней

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(T \pm i\sqrt{4D - T^2}) \Rightarrow |\lambda_{1,2}| = D$$

и граница области устойчивости  $|\lambda_{1,2}| = 1$  задается уравнением  $D = 1$ . Взаимное расположение границ области устойчивости и кривой, отделяющей действительные и комплексные корни характеристического уравнения, представлены на рис. 25. Область устойчивости – внутренность треугольника на этом рисунке.

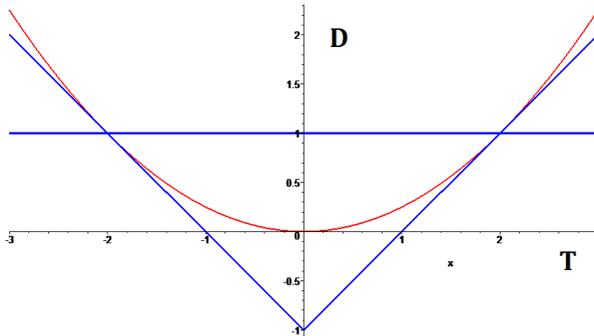


Рис. 25. Область устойчивости (внутренность треугольника) и граница, отделяющая действительные и комплексные корни (парабола)

Если отображение (14) зависит от параметров, то характер устойчивости его неподвижных точек и соответствующее ему линеаризованное отображение (15) могут зависеть от этих параметров. Потеря устойчивости (15) происходит, если корни характеристического уравнения переходят границу области устойчивости через одну из сторон треугольника, изображенного на

рис. 25. Однако в сравнении с одномерным отображением сценарии потери устойчивости при изменении параметров и поведение системы на границе области устойчивости становятся более разнообразными.

1. Если один из корней покидает область устойчивости через правую границу, то потеря устойчивости напоминает седловую точку: экспоненциальная устойчивость вдоль одного собственного вектора матрицы  $A$  и экспоненциальная же расходимость вдоль другого. Но в отличие от седловых точек систем дифференциальных уравнений итерации дискретного отображения будут "перескакивать" относительно начала координат, если один из  $\lambda_k$  отрицателен: если  $\epsilon_{k0}$  – начальное значение составляющей возмущения вдоль собственного вектора  $\mathbf{h}_k$ , то итерации отображения (15) будут иметь вид  $\epsilon_{k0}, -|\lambda_k|\epsilon_{k0}, |\lambda_k|^2\epsilon_{k0}, -|\lambda_k|^3\epsilon_{k0}, \dots$

Пусть  $\epsilon_0 = [\epsilon_{10}, \epsilon_{21}]^T$  – начальное условие в (15). Тогда на правой границе области устойчивости (15) не изменит компоненту вектора возмущения вдоль собственного вектора  $\mathbf{h}_1$ , соответствующего  $\lambda_1 = 1$ . Другая компонента вектора возмущения умножится на мультипликатор  $|\lambda_2| < 1$ . Это означает, что в линейном приближении изменение начальных условий приведет к смещению неподвижной точки вдоль  $\mathbf{h}_1$ , соответствующего  $\lambda_1 = 1$ .

Однако на самом деле поведение системы вблизи и на границе области устойчивости определяется нелинейными членами разложения  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha)$ . В частности, неподвижная точка может потерять устойчивость и у системы могут исчезнуть периодические решения, что соответствует бифуркации типа складки.

2. Если один из корней покидает область устойчивости через левую границу, то картина потери устойчивости также напоминает седловую точку, однако с одним существенным отличием от предыдущего случая.

На левой границе области устойчивости линеаризованного отображения компонента вектора возмущения, направленная вдоль собственного вектора  $\mathbf{h}_2$ , соответствующего  $\lambda_2 = -1$ , на каждой итерации умножается на  $-1$ , тогда как для другой компоненты вектора возмущения мультипликатор  $|\lambda_1| < 1$ . Это означает, что в пределе компонента возмущения вдоль  $\mathbf{h}_1$  устремит-

ся к нулю, а компонента возмущения вдоль  $\mathbf{h}_2$  будет принимать исходное значение при двукратном действии отображения  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = A\boldsymbol{\varepsilon}_n$ , что соответствует бифуркации удвоения периода.

Естественно, что действительное поведение системы на левой границе области устойчивости также определяется нелинейными членами разложения  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha)$  и указанная бифуркация удвоения периода реализуется, если они ее стабилизируют. Бифуркации удвоения периода при  $\dim \mathbf{x} \geq 3$  при изменении параметров могут повторяться и поэтому возможно развитие динамического хаоса по сценарию Фейгенбаума.

3. На верхней границе области устойчивости матрица  $A$  имеет пару комплексно-сопряженных корней вида  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ ,  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ , что соответствует ортогональному преобразованию на плоскости. Поскольку  $D = \det A = 1$ , это преобразование сохраняет ориентацию (т.е. не может быть поворотом с зеркальным отражением), а для собственных чисел справедливо представление  $\lambda_{1,2} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi$ , в котором  $\varphi$  и есть угол поворота, см., например, [7]. Таким образом, в линейном приближении получается, что каждая итерация  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = A\boldsymbol{\varepsilon}_n$  разворачивает вектор  $\boldsymbol{\varepsilon}_n$  вокруг начала координат на угол  $\varphi$ .

Это позволяет говорить о рождении тора в окрестности предельного цикла, причем если  $\varphi$  рационально, то возмущенная траектория будет замкнутой кривой на торе, а при иррациональном  $\varphi$  будет всюду плотна на нем. Как обычно, сказанное справедливо с оговоркой о влиянии нелинейных членов, которые могут нарушать либо стабилизировать эффект, установленный по линейному приближению.

## 4. Заключение

Динамические системы естественным образом возникают при математическом описании самых разнообразных процессов в физике, механике и многих других науках. Иногда они конструируются как формальные математические объекты, представляющие самостоятельный интерес для изучения.

Теория динамических систем – интенсивно развивающаяся и обширная область математики, позволяющая понять многие явления, наблюдаемые в физических экспериментах, природе и технике. Представление о современном состоянии отдельных разделов этой теории можно получить, прочитав, например, обзоры [23],[24]. Несмотря на огромное количество уже полученных результатов, теория динамических систем обладает практически неограниченным запасом нерешенных проблем и пользуется популярностью у современных исследователей.

Чаще всего в теории динамических систем исследуются нелинейные автономные системы дифференциальных уравнений, обычно включающие параметры. Перестройки фазовых потоков динамических систем при изменении параметров изучает теория бифуркаций, позволяющая установить причины многих явлений в динамических системах, в частности, понять некоторые сценарии перехода от регулярного поведения к динамическому хаосу.

Настоящее пособие предназначено для первого знакомства с некоторыми явлениями, наблюдающимися в нелинейных системах дифференциальных уравнений при размерности фазового вектора больше двух и в дискретных отображениях. Это усложнение структуры аттракторов, динамический хаос и некоторые сценарии его возникновения, появление инвариантных торов, теорема Пуанкаре о возвращении, связь дифференциальных уравнений с итерационными процессами через отображение Пуанкаре и некоторые другие темы.

Естественно, что содержание компактного пособия не претендует на широту охвата материала и в его заключительной части приведен список литературы, в котором можно найти книги для профессионального изучения теории динамических систем.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва-Ижевск: ИКИ, 2002. 561 с.
2. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. Москва: URSS, 2001. 320 с.
3. Арнольд В.И. Теория катастроф. Москва: URSS, 2016, 134 с.
4. Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П. Теория бифуркаций. Москва: ВИНТИ АН СССР. Т.5. "Современные проблемы математики. Фундаментальные направления". 1985. 218 с.
5. Томпсон Дж.М.Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. Москва: Мир, 1985. 256 с.
6. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е. Лекции по нелинейной динамике. Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика". 2011. 516 с.
7. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. Москва: Физматлит. 2008. 304 с.
8. Маркеев А.П. Теоретическая механика. Москва: ЧеРо. 1999. 572 с.
9. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 2. Москва: Дрофа, 2004, 720 с.
10. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления нелинейных уравнений. Москва: Наука. 1969. 529 с.
11. Йосс Ж. Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. Москва: Мир. 1983. 301 с.
12. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва: Наука. 1974. 331 с.
13. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. Москва: Мир. 1980. 368 с.
14. Журавлев В.Ф. Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. Москва: Наука. 1988. 328 с.
15. Ф. Хартман. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва: Мир, 1970.
16. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. Москва: УРСС. 2003. 416 с.
17. Мандельброт Б.Б. Фракталы и хаос. Множество Мандельброта и другие чудеса. Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика". 2009. 392 с.

18. Мандельброт Б.Б. Фрактальная геометрия природы = The Fractal Geometry of Nature. — Москва: Институт компьютерных исследований, 2002. — 656 с.
19. Michael F. Barnsley, Hawley Rising. Fractals Everywhere. — Morgan Kaufmann, 1993-01-01. — 568 с. — ISBN 9780120790692
20. Ландау Л. Д. К проблеме турбулентности // Докл. АН СССР, 1944, Т. 44, № 8. С. 339–342.
21. Hopf E. A mathematical example displaying features of turbulence // Comm. Pure Appl. Math., 1948, vol. 1, 303–322.
22. Рюэль Д., Такенс Ф. О природе турбулентности. // Странные аттракторы: Сб. ст. / Я. Г. Синай, Л. П. Шильников. Москва: Мир, 1981. С. 117–151.
23. Мозер Ю. Динамические системы – прошлое и настоящее. Пленарная лекция на международном конгрессе математиков. Берлин. 1998 // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5. № 1. С. 13-32.
24. Лоскутов А.Ю. Динамический хаос. Системы классической механики. // Успехи физических наук. 2007. № 177. С. 989-1015.

Учебно-методическое пособие

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ БИФУРКАЦИЙ И  
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ  
ЧАСТЬ II

Учебно-методическое пособие

по курсу *Аналитическая механика*

Составитель **Фомичев** Александр Владимирович

Редактор *Н.Е. Кобзева*.

Компьютерная верстка *Н.Е. Кобзева*

Подписано в печать ???.2019. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>.

Усл. печ. л. 3,25. Уч.-изд.л. 3,0. Тираж 120 экз. Заказ № 17.

---

Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования «Московский  
физико-технический институт (национальный исследовательский  
университет)»

141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9  
E-mail: rio@mail.mipt.ru

---

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»

141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9  
E-mail: polygraph@mipt.ru

Для заметок

Для заметок