ПОНЯТИЕ КАНОНИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. КРИТЕРИЙ КАНОНИЧНОСТИ, ВЫРАЖЕННЫЙ ЧЕРЕЗ МАТРИЦУ ЯКОБИ[1]

А.П.Маркеев

1. Введение. Пусть движение материальной системы с n степенями свободы описывается каноническими уравнениями

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad i = 1, 2, ..., n, \tag{1.1}$$

где $H = H(q_1, q_2, ..., q_n, p_1, p_1, ..., p_n, t)$ — функция Гамильтона.

При анализе и интегрировании дифференциальных уравнений (1.1), как и всяких других, очень важен удачный выбор переменных. Например, если для задания движения материальной точки в центральном поле сил в плоскости Oxy выбраны полярные координаты r, φ, то угол φ будет циклической координатой и порядок системы дифференциальных уравнений движения может быть понижен на две единицы. А если рассматривать движение в декартовых координатах x, y, то циклической координаты не будет.

Уравнения Лагранжа второго рода обладают свойством ковариантности. Выбор обобщенных координат $q_1, q_2, ..., q_n$ в этих уравнениях весьма произволен. Но нет общего метода упрощения уравнений Лагранжа за счет того или иного выбора обобщенных координат.

При переходе от уравнений Лагранжа к каноническим уравнениям Гамильтона дополнительно к координатам $q_1, q_2, ..., q_n$ вводятся обобщенные импульсы $p_1, p_2, ..., p_n$ и тем самым количество переменных удваивается. Величины $q_1, q_2, ..., q_n, p_1, p_2, ..., p_n$ — координаты в $2n$ – мерном фазовом пространстве. При этом ни одна из совокупностей $q_1, q_2, ..., q_n$ и $p_1, p_2, ..., p_n$ не является более существенной, чем другая. В гамильтоновой динамике они равноправны.

Для иллюстрации только что сказанного рассмотрим систему с одной степенью свободы ($n = 1$), описываемую уравнениями

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \qquad H = H(q, p). \tag{1.2}$$

[1] Излагается содержание первой лекции из раздела "Канонические преобразования" курса теоретической механики для студентов факультета общей и прикладной физики МФТИ (2010 - 2012 г.г.)

Сделаем в этих уравнениях замену переменных $q = -P\,, p = Q$. Легко проверить, что в новых переменных Q, P движение описывается каноническими уравнениями вида

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial \Gamma}{\partial P}\,, \qquad \frac{dP}{dt} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial Q}\,, \qquad \Gamma = H(-P, Q). \tag{1.3}$$

Уравнения (1.3) по форме не отличаются от уравнений (1.2). Но в этих уравнениях Q — координата (в (1.2) это был импульс), P — импульс (а была координата, взятая с обратным знаком). Как видим при замене переменных первоначальный физический смысл названий "координата" и "импульс" потерялся.

По отмеченной причине и по ряду других причин переменные $q_1, q_2, ..., q_n$ и $p_1, p_2, ..., p_n$ часто называют *канонически сопряженными* или просто *сопряженными* переменными.

Упомянутое удвоение числа независимых переменных расширяет множество возможных преобразований, что является одним из преимуществ гамильтоновой механики перед лагранжевой. Равноправность переменных $q_1, q_2, ..., q_n$ и $p_1, p_2, ..., p_n$ дает большую свободу для выбора "координат" и "импульсов".

2. Замена переменных. Для дальнейшего нам удобнее будет записать систему уравнений (1.1) в векторно - матричной форме (штрихом обозначаем операцию транспонирования)

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{J} H_{\mathbf{x}}^{'}\,, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{x}$ — $2n$ - мерный вектор - столбец: $\mathbf{x}^{'} = (\mathbf{q}^{'}, \mathbf{p}^{'})\,,\quad \mathbf{q}^{'} = (q_1, q_2, ..., q_n)\,,$ $\mathbf{p}^{'} = (p_1, p_2, ..., p_n)\,,$

$$\mathbf{J} = \left\| \begin{matrix} \mathbf{0} & \mathbf{E}_n \\ -\mathbf{E}_n & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|\,, \tag{2.2}$$

$\mathbf{E}_n$ — единичная матрица n - го порядка, $H = H(\mathbf{x}, t)$ - функция Гамильтона из (1.1), $H_{\mathbf{x}}$ — матрица - строка размером $1 \times 2n$,

$$H_{\mathbf{x}} = (H_{\mathbf{q}}, H_{\mathbf{p}}) = (H_{q_1}, H_{q_2}, ..., H_{q_n}, H_{p_1}, H_{p_2}, ..., H_{p_n}).$$

Нетрудно проверить, что

$$\mathbf{J}^{'} = \mathbf{J}^{-1} = -\mathbf{J}\,, \qquad \mathbf{J}^2 = -\mathbf{E}_{2n}\,, \qquad \det \mathbf{J} = 1. \tag{2.3}$$

В некоторой области фазового пространства $q_1, q_2, ..., q_n, p_1, p_2, ..., p_n$ рассмотрим обратимую, дважды непрерывно дифференцируемую замену переменных $\mathbf{q}, \mathbf{p} \to \mathbf{Q}, \mathbf{P}$, содержащую t в качестве параметра:

$$Q_i = Q_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)\,, \qquad P_i = P_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)\,, \qquad i = 1, 2, ..., n. \tag{2.4}$$

Если ввести обозначение $\mathbf{y}^{'} = (\mathbf{Q}^{'}, \mathbf{P}^{'})$, где $\mathbf{Q}^{'} = (Q_1, Q_2, ..., Q_n)$, $\mathbf{P}^{'} = (P_1, P_2, ..., P_n)$, то замену (2.4) можно записать в виде

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}, t). \tag{2.5}$$

Пусть $\mathbf{M}$ — матрица Якоби преобразования (2.4),

$$\mathbf{M} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{Vmatrix} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}} & \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{p}} \\ \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{q}} & \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial Q_1}{\partial q_n} & \frac{\partial Q_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial Q_1}{\partial p_n} \\ . & \cdots & . & . & \cdots & . \\ \frac{\partial Q_n}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial Q_n}{\partial q_n} & \frac{\partial Q_n}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial Q_n}{\partial p_n} \\ \frac{\partial P_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial q_n} & \frac{\partial P_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial p_n} \\ . & \cdots & . & . & \cdots & . \\ \frac{\partial P_n}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial q_n} & \frac{\partial P_n}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial p_n} \end{Vmatrix}. \tag{2.6}$$

Предполагается, что $\det \mathbf{M} \neq 0$. Для обратного к (2.5) преобразования

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y}, t) \tag{2.7}$$

матрица Якоби является обратной к матрице (2.6),

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{M}^{-1}\,. \tag{2.8}$$

Преобразуем уравнения (2.1) к новым переменным. Из (2.5),(2.6) и (2.1) имеем

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} = \mathbf{M}\mathbf{J} H_{\mathbf{x}}^{'} + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t}\,. \tag{2.9}$$

Обозначим через $\Phi(\mathbf{y}, t)$ функцию Гамильтона H, записанную в переменных $\mathbf{y}$,

$$\Phi(\mathbf{y}, t) = H(\mathbf{x}(\mathbf{y}, t), t). \tag{2.10}$$

Тогда

$$H_{\mathbf{x}}^{'} = \left(\Phi_{\mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \right)^{'} = \left(\Phi_{\mathbf{y}} \mathbf{M} \right)^{'} = \mathbf{M}^{'} \Phi_{\mathbf{y}}^{'}$$

и из равенства (2.9) получаем уравнения движения в новых переменных

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{MJM}'\Phi'_{\mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t}\,. \tag{2.11}$$

Второе слагаемое в правой части равенства (2.11) — функция переменных $\mathbf{y}, t$. Эта функция получается после частного дифференцирования функции (2.5) по t с последующей заменой $\mathbf{x}$ на функцию (2.7), задающую преобразование, обратное (2.5). Справедливо следующее утверждение.

Лемма. Матрица $(\mathbf{J}\partial\mathbf{y}/\partial t)_{\mathbf{y}}$ будет симметрической тогда и только тогда, когда матрица $\mathbf{M}'\mathbf{JM}$ не зависит от t.

Действительно, учитывая,что $\mathbf{J}$ — постоянная матрица, а замена переменных (2.4) обратима и дважды непрерывно дифференцируема, имеем

$$\left(\mathbf{J}\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t}\right)_{\mathbf{y}} = \mathbf{J}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t}\right)\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{J}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}\right)\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{J}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}\mathbf{M}^{-1}$$

и, следовательно, симметричность матрицы $(\mathbf{J}\partial\mathbf{y}/\partial t)_{\mathbf{y}}$ означает, что

$$\left(\mathbf{J}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}\mathbf{M}^{-1}\right)' = \mathbf{J}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}\mathbf{M}^{-1}\,. \tag{2.12}$$

Но

$$\left(\mathbf{J}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}\mathbf{M}^{-1}\right)' = (\mathbf{M}^{-1})'\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}\right)'\mathbf{J}' = -(\mathbf{M}')^{-1}\frac{\partial \mathbf{M}'}{\partial t}\mathbf{J}$$

и равенство (2.12) запишется в виде

$$(\mathbf{M}')^{-1}\frac{\partial \mathbf{M}'}{\partial t}\mathbf{J} = -\mathbf{J}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}\mathbf{M}^{-1}\,.$$

Умножив обе части этого равенства слева на матрицу $\mathbf{M}'$, а справа на $\mathbf{M}$, придем к соотношению

$$\frac{\partial \mathbf{M}'}{\partial t}\mathbf{JM} = -\mathbf{M}'\mathbf{J}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}\,,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{M}'\mathbf{JM}) = 0.$$

Последнее равенство эквивалентно равенству (2.12). Лемма доказана.

3. Понятие канонического преобразования. В новых переменных уравнения движения могут стать проще исходных уравнений (1.1). Но они могут уже не быть гамильтоновыми. Мы, однако, будем рассматривать только такие преобразования (2.4), которые не нарушают гамильтоновой формы уравнений движения, т.е. мы требуем, чтобы уравнения (2.11) записывались в виде

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial \Gamma}{\partial P_i}\,, \qquad \frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial Q_i}\,, \qquad i = 1, 2, ..., n, \tag{3.1}$$

где $\Gamma = \Gamma(\mathbf{y}, t)$ — новая функция Гамильтона, вообще говоря, отличная от старой функции H, задающей исходные уравнения (1.1). Векторно - матричной формой уравнений (3.1) будут уравнения

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{J}\,\Gamma'_{\mathbf{y}}\,, \tag{3.2}$$

где $\mathbf{J}$ — матрица (2.2), а $\Gamma_{\mathbf{y}}$ — матрица - строка вида

$$\Gamma_{\mathbf{y}} = (\Gamma_{Q_1}, \Gamma_{Q_2}, ..., \Gamma_{Q_n}, \Gamma_{P_1}, \Gamma_{P_2}, ..., \Gamma_{P_n}).$$

Определение. Преобразование (2.4) называется каноническим, если оно переводит л ю б у ю гамильтонову систему (1.1) снова в гамильтонову систему (3.1) (вообще говоря, с другой функцией Гамильтона Γ).

Замечание 1. Обратим внимание на выделенное разрядкой в определении канонического преобразования слово "любую". Преобразование, переводящее некоторую конкретную гамильтонову систему (1.1) в некоторую другую гамильтонову систему (3.1), не обязательно является каноническим. Например, если старая функция Гамильтона $H = \alpha = const$, то произвольное не зависящее от времени неканоническое преобразование $\mathbf{x} \to \mathbf{y}$ переводит систему (1.1) в систему (3.1) с новой функцией Гамильтона $\Gamma = \alpha = const$.

Замечание 2. Канонические преобразования тесно связаны с преобразованиями, которые в математике называют *контактными* или *касательными* преобразованиями [1 - 4]. Доказательство того факта, что при контактном преобразовании любая гамильтонова система переходит в гамильтонову, дано Якоби [5]. Приведенное выше определение канонического преобразования встречается во многих монографиях и учебниках по математике и механике (см., например, [6 - 15]).

Канонические преобразования дают метод исследования движения совсем иной, нежели метод интегрирования системы дифференциальных уравнений (1.1). Можно забыть об этих уравнениях, но выбором тех или иных канонических преобразований стремиться упростить функцию Гамильтона Г преобразованной системы (3.1). В гамильтоновой механике разработаны конструктивные методы упрощения функции Г. Эти методы особенно эффективны в теории возмущений, когда невозможно получить точные решения.

В теории канонических преобразований нужно, в первую очередь, найти ответы на два принципиальных вопроса: а) как проверить, является ли замена переменных (2.4) каноническим преобразованием; б) если замена (2.4) — каноническое преобразование, то как найти функцию Гамильтона Г преобразованной системы.

Ниже мы коснемся только первого вопроса. А именно, получим критерий каноничности преобразования (2.4) в матричной форме. Из него затем несложно будет получить другие формы критерия каноничности (через скобки Лагранжа, через скобки Пуассона, через производящие функции).

4. Критерий каноничности преобразования (2.4), выраженный через матрицу Якоби (2.6). Справедливо следующее утверждение.

Теорема. Для того чтобы преобразование (2.4) было каноническим, необходимо и достаточно, чтобы существовало число $c \neq 0$ такое, что матрица Якоби (2.6) удовлетворяет тождеству

$$\mathbf{M}'\mathbf{J}\mathbf{M} = c\,\mathbf{J}\,. \tag{4.1}$$

Число c называется *валентностью* преобразования (2.4); если $c = 1$, то преобразование называется *унивалентным.*

Замечание 3. Матрица $\mathbf{M}$, удовлетворяющая тождеству (4.1) при $c = 1$, называется *симплектической*; если же в (4.1) $c \neq 1$, то матрица $\mathbf{M}$ называется *обобщенно симплектической* (с валентностью c). Так как $\det \mathbf{J} = 1$, то из (4.1) следует, что $\det \mathbf{M} = \pm c^n$, т.е. обощенно симплектические матрицы являются невырожденными.

Замечание 4. Умножив обе части тождества (4.1) слева на матрицу $(\mathbf{M}')^{-1}$, а справа на $\mathbf{M}^{-1}$, получим $\mathbf{J} = c\,(\mathbf{M}')^{-1}\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}$. Беря обратные матрицы от обеих частей этого равенства, его можно переписать в виде $\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{M}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{M}'\,c^{-1}$. Учтя теперь, что $\mathbf{J}^{-1} = -\mathbf{J}$, приходим к тождеству, эквивалентному (4.1):

$$\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}' = c\,\mathbf{J}\,. \tag{4.2}$$

Сначала покажем д о с т а т о ч н о с т ь условия (4.1) для каноничности преобразования (2.4). В самом деле, пусть выполнено условие (4.1). Тогда имеет место тождество (4.2), и, при любой функции H в исходных уравнениях (1.1), уравнения движения (2.11) в новых переменных записываются в виде

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{J}c\Phi'_{\mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t}\,, \tag{4.3}$$

причем, согласно доказанной лемме (ввиду того, что матрица $\mathbf{M}'\mathbf{J}\mathbf{M}$ при условии (4.1) не зависит от t), матрица $(\mathbf{J}\partial\mathbf{y}/\partial t)_{\mathbf{y}}$ будет симметрической. Поэтому[2] существует функция $R(\mathbf{y}, t)$ такая, что

$$\mathbf{J}\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} = -R'_{\mathbf{y}}\,. \tag{4.4}$$

Алгоритм построения функции R здесь не обсуждается. Из (4.4) получаем

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} = \mathbf{J}R'_{\mathbf{y}}\,, \tag{4.5}$$

и уравнения (4.3) запишутся в виде (3.2), где $\Gamma = \Gamma(\mathbf{y}, t)$ — функция Гамильтона преобразованной системы,

$$\Gamma = c\,\Phi + R\,. \tag{4.6}$$

Напомним, что в правой части равенства (4.6) Φ — старая функция Гамильтона, записанная в новых переменных; "добавочная" функция R в (4.6) возникла из - за того, что преобразование (2.4) явно зависит от t. Отметим также, что валентность преобразования c и функция R не зависят от исходной функции Гамильтона, они определяются только самим преобразованием (2.4).

Теперь покажем н е о б х о д и м о с т ь условия (4.1). Пусть преобразование (2.4) л ю б у ю гамильтонову систему (1.1) переводит в гамильтонову. Покажем, что тогда имеет место тождество (4.1).

Рассмотрим равенство (2.11). По предположению ее правая часть при любой H (или, что одно и то же, при любой функции Φ) имеет структуру правой части уравнения (3.2). Положим $\Phi \equiv 0$. Тогда из (2.11) и (3.2) следует, что существует функция $R(\mathbf{y}, t)$ такая, что для второго слагаемого из правой части равенства (2.11) справедливо представление (4.5). Отсюда

[2] Здесь мы пользуемся известной теоремой из анализа (*условиями интегрируемости*): для того, чтобы дифференциальная форма $(\mathbf{a}, d\mathbf{x}) = a_1(x_1, ..., x_m)dx_1 + ... + a_m(x_1, ..., x_m)dx_m$ была в некоторой области полным дифференциалом, необходимо и достаточно, чтобы матрица $\partial\mathbf{a}/\partial\mathbf{x}$ была симметрической (иными словами, чтобы выполнялись равенства $\partial a_i/\partial x_j = \partial a_j/\partial x_i$ для всех $i, j = 1, ..., m$)

вытекает, что матрица $(\mathbf{J}\partial\mathbf{y}/\partial t)_{\mathbf{y}}$ симметрическая (см. *условие интегрируемости* в сноске на предыдущей странице). Следовательно, согласно лемме, матрица $\mathbf{M}'\mathbf{J}\mathbf{M}$ не зависит от t. Очевидно, что тогда и матрица $\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}'$ тоже не зависит от t.

Теперь рассмотрим первое слагаемое в правой части равенства (2.11). Из сказанного выше о структуре второго слагаемого и всей правой части следует, что при любой функции Φ существует такая функция $G(\mathbf{y}, t)$, что имеет место равенство

$$\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}'\Phi'_{\mathbf{y}} = \mathbf{J}G'_{\mathbf{y}}. \tag{4.7}$$

Если ввести обозначения

$$\mathbf{A} = -\mathbf{J}\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}' = \| \, a_{kr} \, \|_{k,r=1}^{2n}\,, \tag{4.8}$$

то равенство (4.7) можно переписать в виде

$$G'_{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\Phi'_{\mathbf{y}}\,. \tag{4.9}$$

Элементы a_{kr} матрицы $\mathbf{A}$ не зависят от t. Это видно из (4.8) и показанной выше независимости матрицы $\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}'$ от t.

Из (4.9) имеем такие выражения для k - го и ℓ - го элементов вектора - столбца $G'_{\mathbf{y}}$:

$$\frac{\partial G}{\partial y_k} = \sum_{r=1}^{2n} a_{kr}\frac{\partial \Phi}{\partial y_r}\,, \qquad \frac{\partial G}{\partial y_\ell} = \sum_{r=1}^{2n} a_{\ell r}\frac{\partial \Phi}{\partial y_r}\,, \quad k, \ell = 1, 2, ..., 2n.$$

Соотношение (4.9) возможно тогда и только тогда, когда имеют место равенства (*условия интегрируемости*)

$$\frac{\partial}{\partial y_\ell}\left(\sum_{r=1}^{2n} a_{kr}\frac{\partial \Phi}{\partial y_r}\right) = \frac{\partial}{\partial y_k}\left(\sum_{r=1}^{2n} a_{\ell r}\frac{\partial \Phi}{\partial y_r}\right), \quad k, \ell = 1, 2, ..., 2n. \tag{4.10}$$

Эти равенства должны выполняться для любой функции Φ. Пусть Φ — произвольная функция, зависящая только от одной переменной y_k (k — любое значение из $1, 2, ..., 2n$). Тогда равенства (4.10) запишутся в виде

$$\frac{\partial a_{kk}}{\partial y_\ell}\frac{\partial \Phi}{\partial y_k} + a_{kk}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_k \partial y_\ell} = \frac{\partial a_{\ell k}}{\partial y_k}\frac{\partial \Phi}{\partial y_k} + a_{\ell k}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_k^2}\,, \quad k, \ell = 1, 2, ..., 2n. \tag{4.11}$$

Если $\ell \neq k$,то равенства (4.11) становятся такими:

$$\left(\frac{\partial a_{kk}}{\partial y_\ell} - \frac{\partial a_{\ell k}}{\partial y_k}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial y_k} = a_{\ell k}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_k^2}\,.$$

Ввиду произвольности Φ отсюда следует, что

$$a_{\ell k} = 0\,, \qquad \frac{\partial a_{kk}}{\partial y_\ell} = 0\,,$$

т. е. все внедиагональные элементы матрицы $\mathbf{A}$ равны нулю, а ее диагональный элемент a_{kk} может зависеть только от y_k. Установив это, вернемся снова к равенствам (4.10), в которых Φ — опять произвольная функция от всех своих переменных. Но теперь равенства (4.10) становятся такими

$$\frac{\partial}{\partial y_\ell}\left(a_{kk}\frac{\partial \Phi}{\partial y_k}\right) = \frac{\partial}{\partial y_k}\left(a_{\ell\ell}\frac{\partial \Phi}{\partial y_\ell}\right), \quad k, \ell = 1, 2, ..., 2n.$$

Проведя дифференцирование, перепишем их в виде

$$a_{kk}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_k \partial y_\ell} = a_{\ell\ell}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_\ell \partial y_k}\,, \quad k, \ell = 1, 2, ..., 2n.$$

Отсюда, учтя равенство смешанных производных функции Φ, приходим к равенству $a_{kk} = a_{\ell\ell}$. Но a_{kk} — функция y_k, а $y_{\ell\ell}$ — функция y_ℓ, поэтому последнее равенство возможно только тогда, когда

$$a_{kk} = a_{\ell\ell} = c = const\,,$$

причем $c \neq 0$ (в противном случае из (4.8) следовало бы, что $\det\mathbf{M} = 0$).

Таким образом показано, что

$$\mathbf{A} = c\mathbf{E}_{2n}\,, \tag{4.12}$$

где c — постоянная, отличная от нуля.

Из (4.8) и (4.12) следует, что $-\mathbf{JMJM}' = c\mathbf{E}_{2n}$, или $\mathbf{MJM}' = c\mathbf{J}$. Но последнее равенство эквивалентно равенству (4.1) (см. Замечание 4).

Теорема доказана. Она дает простой и практически удобный способ проверки каноничности преобразования (2.4).

5. Примеры

Приведем несколько примеров канонических преобразований [16]. Старую и новую функции Гамильтона обозначаем через $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ и $\Gamma(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$ соответственно.

1. Тождественное преобразование

$$Q_j = q_j\,, \quad P_j = p_j\,, \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{5.1}$$

Преобразование (5.1) каноническое, унивалентное; при этом $\Gamma = H(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$.

2. Преобразование

$$Q_j = p_j\,, \quad P_j = q_j\,, \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{5.2}$$

Это каноническое преобразование с валентностью $c = -1$. Оно меняет ролями обобщенные координаты и обобщенные импульсы. При этом

$$\Gamma = -H(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t).$$

3. Преобразование

$$Q_j = \alpha q_j\,, \quad P_j = \beta p_j\,, \quad j = 1, 2, ..., n, \tag{5.3}$$

где $\alpha = const\,, \beta = const\,, \alpha\beta \neq 0$, каноническое с валентностью $\alpha\beta$ и

$$\Gamma = \alpha\beta H(\frac{1}{\alpha}\mathbf{Q}, \frac{1}{\beta}\mathbf{P}, t).$$

4. Преобразование

$$Q_j = \alpha p_j\,, \quad P_j = \beta q_j\,, \quad j = 1, 2, ..., n, \tag{5.4}$$

где $\alpha = const\,, \beta = const\,, \alpha\beta \neq 0$, также каноническое и

$$\Gamma = -\alpha\beta H(\frac{1}{\beta}\mathbf{P}, \frac{1}{\alpha}\mathbf{Q}, t).$$

5. Перенос начала координат в фазовом пространстве

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q} - \mathbf{f}(t)\,, \qquad \mathbf{P} = \mathbf{p} - \mathbf{g}(t). \tag{5.5}$$

представляет собой унивалентное каноническое преобразование. Непосредственной проверкой можно убедиться, что новая функция Гамильтона может быть вычислена по формуле

$$\Gamma = H(\mathbf{Q} + \mathbf{f}(t), \mathbf{P} + \mathbf{g}(t), t) + \Big(\frac{d\mathbf{g}}{dt}\,, \mathbf{Q}\Big) - \Big(\frac{d\mathbf{f}}{dt}\,, \mathbf{P}\Big). \tag{5.6}$$

6. Преобразование

$$q_j = \sqrt{2r_j}\sin\varphi_j\,, \quad p_j = \sqrt{2r_j}\cos\varphi_j\,, \quad j = 1, 2, ..., n \tag{5.7}$$

является унивалентным каноническим преобразованием. Оно осуществляет переход от пары канонически сопряженных переменных $q_j\,, p_j$, играющих роль декартовых координат на плоскости, к паре канонически сопряженных переменных $\varphi_j\,, r_j$ (φ_j — "координата", r_j — "импульс"), имеющих характер полярных координат.

Если старая функция Гамильтона имела вид

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \omega_j (q_j^2 + p_j^2)\,, \tag{5.8}$$

то уравнениям для переменных $\varphi_j\,, r_j$ соответствует функция Гамильтона

$$\Gamma = \sum_{j=1}^{n} \omega_j\, r_j\,. \tag{5.9}$$

7. Преобразование

$$Q_j = q_j - ip_j\,, \quad P_j = q_j - ip_j\,, \qquad j = 1, 2, ..., n\,, \tag{5.10}$$

где i — мнимая единица ($i^2 = -1$), осуществляет переход к комплексно сопряженным переменным. Оно является каноническим с валентностью $2i$ и для новой функции Гамильтона имеем выражение

$$\Gamma = 2i\, H\left(\frac{\mathbf{P}+\mathbf{Q}}{2}\,, \frac{\mathbf{P}-\mathbf{Q}}{2i}\,, t\right). \tag{5.11}$$

Если, например, старая функция Гамильтона имеет вид (5.8), то

$$\Gamma = i\,\sum_{j=1}^{n} \omega_j\, Q_j\, P_j\,. \tag{5.12}$$

8. Пусть

$$H = \frac{1}{2}(q^2 + p^2)\,. \tag{5.13}$$

Замена переменных

$$Q = q\,\cos t - p\,\sin t\,, \qquad P = q\,\sin t + p\,\cos t \tag{5.14}$$

является каноническим унивалентным преобразованием. При этом новые переменные $Q\,, P$ удовлетворяют системе канонических уравнений с функцией Гамильтона $\Gamma \equiv 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Франк М., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Л.;М.: ОНТИ, 1937, 998 с.

2. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т.1. М.: Изд - во иностр. лит.,1958, 931 с.

3. Уиттекер Э.Т. Аналитическая динамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1937, 500 с.

4. Парс Л.А. Аналитическая динамика. М.: Физматлит, 1971, 635 с.

5. Jacobi C. Note sur l′inte′gration des e′quations diffe′rentielles de la dynamique. C. r. Acad. Sci., 1837, t.5, p.61 - 67.

6. Уинтнер А. Аналитические основы небесной механики. М.: Физматлит, 1967, 524 с.

7. Леви - Чивита Т., Амальди Т. Курс теоретической механики. Т.2, ч.2. М.: Изд -во иностр. лит., 1951, 555 с.

8. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т.2, М.;Л.: Гостехиздат, 1951, 544 с.

9. Голдстейн Г. Классическая механика. М.: Физматлит, 1975, 416 с.

10. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике, М.: Физматлит, 296 с.

11. Айзерман М.А. Классическая механика. М.:Физматлит, 1980, 368 с.

12. Яковенко Г.Н. Краткий курс аналитической динамики. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004, 238 с.

13. Петкевич В.В. Теоретическая механика. М.: Физматлит, 1981, 496 с.

14. Лидов М. Л. Курс лекций по теоретической механике. М.: Физматлит, 2010, 495 с.

15. Вилази Г. Гамильтонова динамика. М.- Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2006, 432 с.

16. Маркеев А.П. Теоретическая механика. М.- Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2007, 592 с.