

Московский  
физико-технический институт

В.В.Сидоренко

**Малые колебания  
в механических системах**

Москва  
2004

## Введение

Рассмотрим механическую систему с конечным числом степеней свободы  $n$ , возможные положения которой определяются обобщенными координатами  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)^T$ . При исследовании поведения данной системы в малой окрестности положения равновесия  $\mathbf{q}^\circ = (q_1^\circ, \dots, q_n^\circ)^T$  уравнения движения целесообразно «линеаризовать» – выделив в этих уравнениях члены, линейные относительно отклонений от положения равновесия  $\mathbf{q} - \mathbf{q}^\circ$  и скоростей  $\dot{\mathbf{q}}$ , пренебречь членами более высокого порядка малости. Анализ динамики системы на основе полученных подобным образом приближенных уравнений является основной задачей теории малых колебаний.

# Раздел I

## Малые колебания

### в консервативных системах

*Консервативной* называют механическую систему со стационарными связями, в которой все (обобщенные) силы потенциальны и потенциальная энергия  $\Pi$  не зависит от времени.

#### 1. Основные понятия

**1.1. Уравнения движения.** Без ограничения общности будем считать, что в положении равновесия обобщенные координаты  $\mathbf{q}^\circ = 0$  и  $\Pi(0) = 0$ .

Уравнения движения консервативной системы можно записать в форме уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}}. \quad (1.1)$$

Предполагая в (1.1) кинетическую энергию  $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  и потенциальную энергию  $\Pi(\mathbf{q})$  аналитическими функциями своих аргументов, разложим эти функции в ряды Тейлора:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + \dots, \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n c_{jk} q_j q_k + \dots, \quad (1.2)$$

где

$$a_{jk} = \left. \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \right|_{\mathbf{q}=0}, \quad c_{jk} = \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_j \partial q_k} \right|_{\mathbf{q}=0}.$$

Отсутствие линейных членов в разложении для потенциальной энергии – следствие равенства нулю обобщенных сил в положении равновесия:

$$Q_j(0) = - \left. \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \right|_{\mathbf{q}=0} = 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Воспользовавшись выражениями (1.2) для  $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  и  $\Pi(\mathbf{q})$ , получим, что в рассматриваемом случае уравнения движения можно записать следующим образом:

$$\sum_{k=1}^n (a_{jk} \ddot{q}_k + c_{jk} q_k) + \dots = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (1.3)$$

Многоточие в (1.3) обозначает совокупность членов второго и более высоких порядков относительно  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$ . Пренебрегая этими членами, получим линеаризованные уравнения движения:

$$\sum_{k=1}^n (a_{jk} \ddot{q}_k + c_{jk} q_k) = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (1.4)$$

или (в матричной форме)

$$A \ddot{\mathbf{q}} + C \mathbf{q} = 0$$

где  $A = (a_{jk}), C = (c_{jk})$  – симметричные  $n \times n$ -матрицы. В дальнейшем матрицу  $A$  будем называть матрицей инерции, матрицу  $C$  – матрицей жесткости.

Отметим, что уравнения (1.4) получатся и в том случае, когда уже при построении уравнений движения в форме уравнений Лагранжа кинетическая и потенциальная энергии аппроксимируются квадратичными формами

$$T = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}, A \dot{\mathbf{q}}), \quad \Pi = \frac{1}{2}(\mathbf{q}, C \mathbf{q}). \quad (1.5)$$

Здесь  $(\cdot, \cdot)$  – скалярное произведение в  $\mathbf{E}^n$ .

**1.2. Нормальные координаты.** Из естественного условия  $T > 0$  при  $\dot{\mathbf{q}} > 0$  вытекает положительная определенность квадратичной формы  $2T = (\dot{\mathbf{q}}, A \dot{\mathbf{q}})$ . Основываясь на известной теореме линейной алгебры об одновременном приведении к каноническому виду пары квадратичных форм, одна из которых положительно определена, можно сделать вывод о существовании невырожденной вещественной замены координат

$$\mathbf{q} = U \Theta, \quad \Theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)^T, \quad (1.6)$$

позволяющей преобразовать выражения для кинетической и потенциальной энергий к виду

$$T = \frac{1}{2}(\dot{\Theta}, \dot{\Theta}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \dot{\theta}_j^2,$$

$$\Pi = \frac{1}{2}(\Theta, \Lambda \Theta) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i \theta_i^2, \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Покажем, что коэффициенты  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  (коэффициенты Пуанкаре) являются корнями векового уравнения

$$\det(C - \lambda A) = 0. \quad (1.7)$$

Принимая во внимание правила преобразования матриц квадратичных форм при заменах координат, получим:

$$\begin{aligned} \det(\Lambda - \lambda E) &= \det(U^T C U - \lambda U^T A U) = \\ &= \det U^T (C - \lambda A) U = \det U^T \cdot \det(C - \lambda A) \cdot \det U. \end{aligned}$$

Так как  $\det U = \det U^T \neq 0$  (замена (1.6) невырождена!), множество корней векового уравнения (1.7) должно совпадать со множествами корней уравнения

$$\det(\Lambda - \lambda E) = (-1)^n \prod_{k=1}^n (\lambda - \lambda_k) = 0.$$

Обобщенные координаты  $\Theta$  называют *главными* или *нормальными* координатами. В главных координатах уравнения движения распадаются на  $n$  уравнений второго порядка относительно одной неизвестной функции

$$\ddot{\theta}_j + \lambda_j \theta_j = 0, \quad j = \overline{1, n} \quad (1.8)$$

Легко найти общее решение уравнений (1.8):

$$\theta = \begin{cases} C_1 \cos(\omega t + C_2) & \text{при } \lambda = \omega^2 > 0 & \text{(колебания)} \\ C_1 t + C_2 & \text{при } \lambda = 0 & \left( \begin{array}{l} \text{безразличное} \\ \text{равновесие} \end{array} \right) \\ C_1 e^{\sqrt{-\lambda} t} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda} t} & \text{при } \lambda < 0 & \text{(неустойчивость)} \end{cases} \quad (1.9)$$

Значения постоянных величин  $C_1, C_2$  в (1.9) определяются начальными условиями.

Из соотношений (1.9) следует, что при наличии в выражении для потенциальной энергии хотя бы одного коэффициента  $\lambda_j \leq 0$  будут существовать фазовые траектории, покидающие окрестность положения равновесия за конечное время. В дальнейшем будем предполагать выполненным условие  $\lambda_j > 0 (j = \overline{1, n})$ , гарантирующее пребывание фазовой траектории в окрестности положения равновесия на неограниченном интервале времени (в этом случае потенциальная энергия  $\Pi(\mathbf{q})$  имеет изолированный минимум в точке  $\mathbf{q} = 0$ ; таким образом, по теореме Лагранжа положение равновесия устойчиво по Ляпунову в силу точных нелинейных уравнений движения).

**1.3. Собственные колебания.** Рассмотрим частное решение уравнений (1.3)

$$\theta_k(t) = C_{k1} \sin(\omega_k t + C_{k2}), \quad \theta_j \equiv 0 \quad (j = \overline{1, n}, j \neq k).$$

В исходных координатах оно будет иметь вид

$$\mathbf{q}(t) = C_{k1} \mathbf{u}_k \sin(\omega_k t + C_{k2}), \quad (1.10)$$

где  $\mathbf{u}_k$  –  $k$ -й столбец матрицы  $U$ . Движение, описываемое соотношением (1.10), будем называть  *$k$ -ым главным или нормальным колебанием*. Вектор  $\mathbf{u}_k$ , характеризующий взаимосвязь изменений обобщенных координат в этом движении, называют *амплитудным вектором  $k$ -го главного колебания*. Движения (1.10) называют также *собственными колебаниями*, частоты этих колебаний – *собственными частотами*.

Общее решение уравнений (1.4) является суммой собственных колебаний

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{k=1}^n C_{k1} \mathbf{u}_k \sin(\omega_k t + C_{k2}), \quad (1.11)$$

Отметим, что при несоизмеримых частотах собственных колебаний  $\omega_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) движение (1.11) будет непериодическим.

При изучении динамики конкретных механических систем вектора главных колебаний разыскивают как собственные вектора матрицы  $C$  относительно матрицы  $A$ :

$$C\mathbf{u} = \lambda A\mathbf{u}.$$

Если вектора  $\mathbf{u}_k$  и  $\mathbf{u}_j$  отвечают собственным колебаниям с разными частотами  $\omega_k = \lambda_k^{1/2}$  и  $\omega_j = \lambda_j^{1/2}$ , то тогда

$$(\mathbf{u}_k, A\mathbf{u}_j) = 0. \quad (1.12)$$

Для того, чтобы убедиться в этом, домножим соотношения

$$C\mathbf{u}_j = \lambda_j A\mathbf{u}_j, \quad C\mathbf{u}_k = \lambda_k A\mathbf{u}_k$$

на  $\mathbf{u}_k$  и  $\mathbf{u}_j$  соответственно. После элементарных преобразований получим:

$$\lambda_j(\mathbf{u}_k, A\mathbf{u}_j) = (\mathbf{u}_k, C\mathbf{u}_j) = (\mathbf{u}_j, C\mathbf{u}_k) = \lambda_k(\mathbf{u}_j, A\mathbf{u}_k) = \lambda_k(\mathbf{u}_k, A\mathbf{u}_j).$$

Так как  $\lambda_j \neq \lambda_k$ , равенство  $\lambda_j(\mathbf{u}_k, A\mathbf{u}_j) = \lambda_k(\mathbf{u}_k, A\mathbf{u}_j)$  возможно только при  $(\mathbf{u}_j, A\mathbf{u}_k) = 0$ .

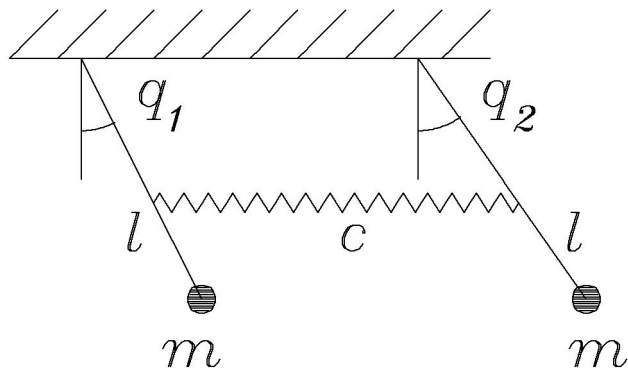


Рис. 1

Произвол в выборе независимых амплитудных векторов из собственного подпространства позволяет обеспечить выполнение условия их А-ортогональности (1.12) и в том случае, когда  $\lambda_j$  является кратным корнем векового уравнения.

При формировании матрицы  $U$  амплитудные вектора следует нормировать в соответствии с условием  $(\mathbf{u}_j, A\mathbf{u}_j) = 1$ .

Задача. Доказать С-ортогональность амплитудных векторов.

**1.4. Пример.** Исследуем малые колебания системы из двух математических маятников, соединенных невесомой пружиной, длина которой в недеформированном состоянии равна расстоянию между точками подвеса (рис. 1). Массы маятников  $m$ , длины  $l$ , жесткость пружины  $c$ . Предполагается, что маятники могут двигаться только в вертикальной плоскости, содержащей точки подвеса.

Система имеет две степени свободы. В качественно обобщенных координат  $\mathbf{q} = (q_1, q_2)^T$  удобно использовать углы отклонения маятников от вертикали.

Кинетическая энергия системы

$$T(\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}ml^2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) = \frac{1}{2}(\mathbf{q}, A\mathbf{q}), \quad A = \begin{pmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{pmatrix}.$$

Выражение для потенциальной энергии

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{q}) = \frac{c}{2} \left\{ \sqrt{[L + l(\sin q_2 - \sin q_1)]^2 + l^2(\cos q_1 - \cos q_2)^2} - L \right\}^2 - \\ - mgl(\cos q_1 + \cos q_2) \end{aligned} \quad (1.13)$$

где  $L$  – расстояние между точками подвеса маятников. В окрестности устойчивого положения равновесия  $q_1 = q_2 = 0$

аппроксимируем (1.13) (с точностью до несущественной постоянной величины) квадратичной формой:

$$\Pi(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} [cl^2(q_1 - q_2)^2 + mgl(q_1^2 + q_2^2)] = \frac{1}{2}(\mathbf{q}, C\mathbf{q}),$$

$$C = \begin{pmatrix} l(mg + cl) & -cl^2 \\ -cl^2 & l(mg + cl) \end{pmatrix}.$$

Вековое уравнение  $\det(C - \lambda A) = 0$  после элементарных преобразований принимает следующий вид:

$$m^2l^4\lambda^2 - 2ml^3(mg + cl)\lambda + mgl^2(mg + 2cl) = 0. \quad (1.14)$$

Корнями квадратного уравнения (1.14) будут

$$\lambda_1 = \frac{g}{l}, \quad \lambda_2 = \frac{g}{l} \left(1 + \frac{2cl}{mg}\right),$$

соответствующие собственные частоты

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} \left(1 + \frac{2cl}{mg}\right)}.$$

В качестве амплитудного вектора  $\mathbf{u}_1$  следует взять какое-либо нетривиальное решение линейной системы

$$(C - \lambda_1 A)\mathbf{u} = 0. \quad (1.14)$$

Существование таких решений гарантировано равенством нулю детерминанта матрицы системы. Обратившись к явным выражениям для элементов матриц  $A$  и  $C$ , перепишем (1.14) в развернутой форме:

$$\begin{pmatrix} cl^2 & -cl^2 \\ -cl^2 & cl^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (1.15)$$

Легко проверить, что частным решением системы (1.15) будет  $\mathbf{u}_1 = (1, 1)^T$ . В соответствующем собственном колебании маятники движутся синфазно, пружина не деформируется (рис. 2).

Аналогичным образом система  $(C - \lambda_2 A)\mathbf{u} = 0$  приводится к виду

$$\begin{pmatrix} -cl^2 & -cl^2 \\ -cl^2 & -cl^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0.$$

В качестве второго амплитудного вектора возьмем  $\mathbf{u}_2 = (1, -1)^T$ . Собственное колебание в этом случае представляет движение



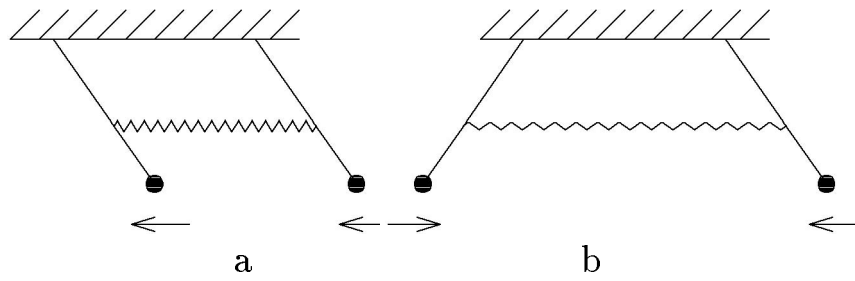


Рис. 2

маятников в противофазе с увеличившейся из-за наличия пружины частотой (рис. 2).

В общем случае

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = C_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(\omega_1 t + C_{12}) + C_{21} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \sin(\omega_2 t + C_{22}). \quad (1.16)$$

Заметим, что амплитудные вектора  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$  можно было выписать без проведения каких-либо вычислений, опираясь только на соображения симметрии. В многих задачах о малых колебаниях подобные соображения упрощают решение или позволяют убедиться в истинности результатов, полученных с помощью сложных выкладок.

Когда пружина очень слабая ( $\varepsilon = \frac{cl}{mg} \ll 1$ ), в данной системе наблюдается эффект «перекачки энергии»: если, например, в момент времени  $t = 0$  маятники покоились и грузику одного из них была сообщена скорость  $v$ , то через некоторое время  $T$  этот маятник будет почти неподвижен, а вся энергия перейдет второму.

Располагая общим решением (1.16), найдем, что при начальных условиях

$$q_1(0) = q_2(0) = \dot{q}_2 = 0, \quad \dot{q}_1 = \frac{v}{l}$$

малые колебания описываются формулами

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{v}{2l} \left( \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1} + \frac{\sin \omega_2 t}{\omega_2} \right), \\ q_2(t) &= \frac{v}{2l} \left( \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1} - \frac{\sin \omega_2 t}{\omega_2} \right). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Принимая во внимание малое отличие частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$  при  $\varepsilon \ll 1$  ( $\omega_2 \approx (1 + \varepsilon)\omega_1$ ), получим:

$$q_1(t) \approx \frac{v}{2\omega_1 l} (\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t) = \frac{v}{\omega_1 l} \cos \frac{\varepsilon \omega_1 t}{2} \sin \omega_1 \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t,$$

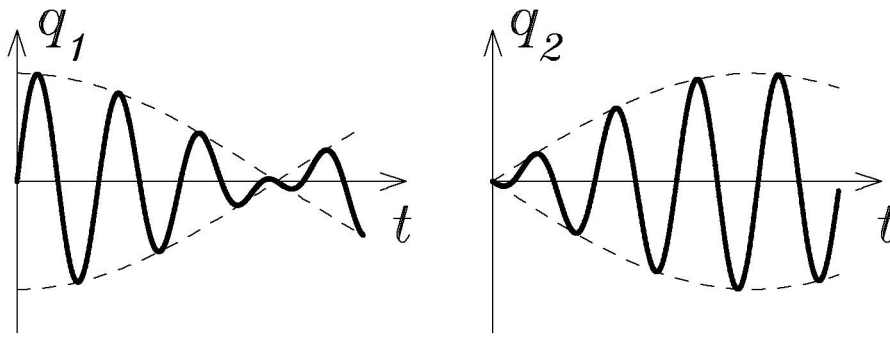


Рис. 3. Биения.

$$q_2(t) \approx \frac{v}{2\omega_1 l} (\sin \omega_1 t - \sin \omega_2 t) = -\frac{v}{\omega_1 l} \sin \frac{\varepsilon \omega_1 t}{2} \cos \omega_1 \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) t,$$

Таким образом, в обсуждаемом движении маятники совершают колебания с частотой  $\omega' = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \omega_1$ , амплитуда которых медленно изменяется. Через время  $T = \pi/\omega_1 \varepsilon$  будет колебаться только второй маятник, колебания первого практически затухнут. В момент времени  $t = 2T$  ситуация будет противоположной (Рис. 3).

## 2. Теоремы Рэля

**2.1. Экстремальные свойства собственных частот.** В большинстве случаев экспериментальное определение собственных частот реальных механических систем, совершающих малые колебания, представляет относительно простую задачу; найти амплитудные вектора существенно сложнее. Степень соответствия теоретических и экспериментальных значений собственных частот служит одним из главных критериев корректности математической модели изучаемой системы. Получение собственных векторов очень часто вообще не входит в цели исследования или имеет второстепенное значение.

Примечательным фактом является возможность записать выражение для какой-либо собственной частоты, не содержащее других собственных частот и амплитудных векторов.

**Теорема (Рэлей-Курант-Фишер).** *Собственные частоты*

$$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n$$

*можно определить следующим образом:*

$$\omega_1^2 = \min_{\mathbf{q}} \frac{(\mathbf{q}, C\mathbf{q})}{(\mathbf{q}, A\mathbf{q})}, \quad (2.1)$$

$$\omega_2^2 = \max_{|\mathbf{q}_*|=1} \min_{(\mathbf{q}_*, \mathbf{q})=0} \frac{(\mathbf{q}, C\mathbf{q})}{(\mathbf{q}, A\mathbf{q})},$$

.....

$$\omega_n^2 = \max_{|\mathbf{q}_*^k|=1} \min_{\substack{(\mathbf{q}_*^k, \mathbf{q})=0 \\ k=1, \dots, n}} \frac{(\mathbf{q}, C\mathbf{q})}{(\mathbf{q}, A\mathbf{q})},$$

Здесь и далее при записи каких-либо выражений, включающих отношение квадратичных форм, предполагается, что  $\mathbf{q} \neq 0$ .

**Доказательство.** После перехода к главным координатам имеем:

$$\frac{(\mathbf{q}, C\mathbf{q})}{(\mathbf{q}, A\mathbf{q})} = \frac{\omega_1^2 \theta_1^2 + \dots + \omega_n^2 \theta_n^2}{\theta_1^2 + \dots + \theta_n^2} \geq \omega_1^2.$$

При  $\theta_1 \neq 0, \theta_2 = \dots = \theta_n = 0$

$$\frac{(\mathbf{q}, C\mathbf{q})}{(\mathbf{q}, A\mathbf{q})} = \omega_1^2.$$

Следовательно,

$$\omega_1^2 = \min_{\mathbf{q}} \frac{(\mathbf{q}, C\mathbf{q})}{(\mathbf{q}, A\mathbf{q})}.$$

Рассмотрим теперь задачу отыскания минимума при дополнительном условии  $(\mathbf{q}_*, \mathbf{q}) = 0$ , где  $\mathbf{q}_*$  – произвольно выбранный единичный вектор. При переходе к нормальным координатам данное условие приобретает вид

$$(\Theta_*, \Theta) = 0, \Theta_* = U^T \mathbf{q}_* \neq 0.$$

В том случае, когда  $\theta_{*1}\theta_1 + \theta_{*2}\theta_2 = 0, \theta_3 = \dots = \theta_n = 0$ , получим:

$$\frac{(\mathbf{q}, C\mathbf{q})}{(\mathbf{q}, A\mathbf{q})} = \frac{\omega_1^2 \theta_1^2 + \omega_2^2 \theta_2^2}{\theta_1^2 + \theta_2^2} \leq \omega_2^2.$$

Отсюда следует, что независимо от выбора  $\mathbf{q}_*$

$$\min_{(\mathbf{q}_*, \mathbf{q})} \frac{(\mathbf{q}, C\mathbf{q})}{(\mathbf{q}, A\mathbf{q})} \leq \omega_2^2. \quad (2.2)$$

При  $\mathbf{q}_* = A\mathbf{u}_1/|A\mathbf{u}_1|$  ( $\Theta_* = (1, 0, \dots, 0)^T$ ) выражение в левой части неравенства (2.2) равно  $\omega_2^2$ :

$$\min_{(\mathbf{q}_*, \mathbf{q})=0} \frac{(\mathbf{q}, C\mathbf{q})}{(\mathbf{q}, A\mathbf{q})} = \min_{\sum_{k=2}^n \theta_k^2 > 0} \frac{\omega_2^2 \theta_2^2 + \dots + \omega_n^2 \theta_n^2}{\theta_2^2 + \dots + \theta_n^2} = \omega_2^2.$$

Таким образом,

$$\omega_2^2 = \max_{|\mathbf{q}^*|=1} \min_{(\mathbf{q}^*, \mathbf{q})=0} \frac{(\mathbf{q}, C\mathbf{q})}{(\mathbf{q}, A\mathbf{q})},$$

Аналогичные формулы для  $\omega_3, \dots, \omega_n$  получаются на основе похожих рассуждений.

**2.2. Поведение собственных частот при внесении изменений в механическую систему.** Предположим, что параметры механической системы по каким-то причинам изменились, но, как и прежде, положение  $\mathbf{q} = 0$  является положением равновесия, в окрестности которого система может совершать малые колебания с собственными частотами

$$\tilde{\omega}_1 \leq \tilde{\omega}_2 \leq \dots \leq \tilde{\omega}_n.$$

Пусть  $\tilde{A}$  и  $\tilde{C}$  – матрицы инерции и жесткости модифицированной системы. Говорят, что система стала менее инерционной, если

$$(\mathbf{q}, \tilde{A}\mathbf{q}) \leq (\mathbf{q}, A\mathbf{q}) \text{ для } \forall \mathbf{q} \in \mathbf{R}^n, \tilde{C} = C.$$

В случае

$$\tilde{A} = A, (\mathbf{q}, \tilde{C}\mathbf{q}) \geq (\mathbf{q}, C\mathbf{q}) \text{ для } \forall \mathbf{q} \in \mathbf{R}^n$$

говорят об увеличении жесткости системы.

*Теорема (Рэлей). При увеличении жесткости системы или уменьшении ее инерции собственные частоты увеличиваются:  $\omega_k \leq \tilde{\omega}_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ .*

*Доказательство.* При обсуждаемых изменениях свойств системы

$$\frac{(\mathbf{q}, C\mathbf{q})}{(\mathbf{q}, A\mathbf{q})} \leq \frac{(\mathbf{q}, \tilde{C}\mathbf{q})}{(\mathbf{q}, \tilde{A}\mathbf{q})}, \quad (2.3)$$

где  $\mathbf{q} \neq 0$ . Очевидно, что

$$\min_{\mathbf{q}} \frac{(\mathbf{q}, C\mathbf{q})}{(\mathbf{q}, A\mathbf{q})} \leq \min_{\mathbf{q}} \frac{(\mathbf{q}, \tilde{C}\mathbf{q})}{(\mathbf{q}, \tilde{A}\mathbf{q})}, \quad (2.4)$$

Неравенство (2.4) означает, что  $\omega_1 \leq \tilde{\omega}_1$ : в соответствии с теоремой Рэля-Куранта-Фишера

$$\min_{\mathbf{q}} \frac{(\mathbf{q}, C\mathbf{q})}{(\mathbf{q}, A\mathbf{q})} = \omega_1^2, \quad \min_{\mathbf{q}} \frac{(\mathbf{q}, \tilde{C}\mathbf{q})}{(\mathbf{q}, \tilde{A}\mathbf{q})} = \tilde{\omega}_1^2.$$

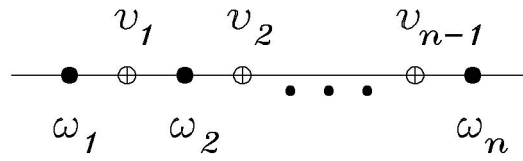


Рис. 4. Разделение частот.

Запишем еще одно неравенство, вытекающее из (2.3). При любом выборе единичных векторов  $\mathbf{q}_*^1, \dots, \mathbf{q}_*^{k-1}$  ( $1 < k \leq n$ )

$$\min_{(\mathbf{q}_*^j, \mathbf{q})=0, j=1, k-1} \frac{(\mathbf{q}, C\mathbf{q})}{(\mathbf{q}, A\mathbf{q})} \leq \min_{(\mathbf{q}_*^j, \mathbf{q})=0, j=1, k-1} \frac{(\mathbf{q}, \tilde{C}\mathbf{q})}{(\mathbf{q}, \tilde{A}\mathbf{q})}. \quad (2.5)$$

Пусть  $\mathbf{q}_{**}^1, \dots, \mathbf{q}_{**}^{k-1}$  – набор векторов, обеспечивающих наибольшее значение выражению в левой части неравенства (2.5) (такой набор действительно существует – данное выражение, рассматриваемое как функция  $\mathbf{q}_*^1, \dots, \mathbf{q}_*^{k-1}$  имеет замкнутую ограниченную область определения). Основываясь на теореме Рэлея-Куранта-Фишера, получим:

$$\begin{aligned} \omega_k &= \max_{|\mathbf{q}_*^j|=1} \min_{(\mathbf{q}_*^j, \mathbf{q})=0, j=1, k-1} \frac{(\mathbf{q}, C\mathbf{q})}{(\mathbf{q}, A\mathbf{q})} = \min_{(\mathbf{q}_{**}^j, \mathbf{q})=0, j=1, k-1} \frac{(\mathbf{q}, C\mathbf{q})}{(\mathbf{q}, A\mathbf{q})} \leq \\ &\leq \min_{(\mathbf{q}_{**}^j, \mathbf{q})=0, j=1, k-1} \frac{(\mathbf{q}, \tilde{C}\mathbf{q})}{(\mathbf{q}, \tilde{A}\mathbf{q})} \leq \max_{|\mathbf{q}_*^j|=1} \min_{(\mathbf{q}_*^j, \mathbf{q})=0, j=1, k-1} \frac{(\mathbf{q}, \tilde{C}\mathbf{q})}{(\mathbf{q}, \tilde{A}\mathbf{q})} = \tilde{\omega}_k. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь, что произойдет при наложении на систему дополнительно стационарной голономной связи  $f(\mathbf{q}) = 0$ . Если устойчивое положение равновесия  $\mathbf{q} = 0$  совместимо с данной связью, модифицированная подобным образом система (уже с  $n - 1$  степенями свободы!) также может совершать малые колебания в окрестности положения этого положения равновесия.

*Теорема. Собственные частоты  $v_1 \leq \dots \leq v_{n-1}$  системы с дополнительной связью разделяют собственные частоты исходной системы:*

$$\omega_1 \leq v_1 \leq \omega_2 \leq v_2 \leq \dots \leq \omega_{n-1} \leq v_{n-1} \leq \omega_n. \quad (2.6)$$

Доказательство. Рассуждения, аналогичные использованным для доказательства теоремы Рэля-Куранта-Фишера, позволяют установить, что

$$v_1^2 = \min_{(\mathbf{f}, \mathbf{q})=0} \frac{(\mathbf{q}, C\mathbf{q})}{(\mathbf{q}, A\mathbf{q})}, \quad (2.7)$$

$$v_2^2 = \max_{|\mathbf{q}_*|=1} \min_{(\mathbf{f}, \mathbf{q})=0, (\mathbf{q}_*, \mathbf{q})=0} \frac{(\mathbf{q}, C\mathbf{q})}{(\mathbf{q}, A\mathbf{q})},$$

.....

$$v_{n-1}^2 = \max_{|\mathbf{q}_*^j|=1} \min_{(\mathbf{f}, \mathbf{q})=0, (\mathbf{q}_*^j, \mathbf{q})=0} \frac{(\mathbf{q}, C\mathbf{q})}{(\mathbf{q}, A\mathbf{q})},$$

$j=1, \dots, n-1$

где условие  $(\mathbf{f}, \mathbf{q}) = \sum_{k=1}^n f_k q_k = 0$  является линейной аппроксимацией связи  $f(\mathbf{q}) = 0$ . Необходимо отметить, что в (2.8) фигурируют обобщенные координаты, матрица инерции и матрица жесткости исходной системы.

Из очевидного соотношения

$$\min_{\mathbf{q}} \frac{(\mathbf{q}, C\mathbf{q})}{(\mathbf{q}, A\mathbf{q})} \leq \min_{(\mathbf{f}, \mathbf{q})=0} \frac{(\mathbf{q}, C\mathbf{q})}{(\mathbf{q}, A\mathbf{q})} \leq \max_{|\mathbf{q}_*|=1} \min_{(\mathbf{q}_*, \mathbf{q})=0} \frac{(\mathbf{q}, C\mathbf{q})}{(\mathbf{q}, A\mathbf{q})}$$

вытекает  $\omega_1 \leq v_1 \leq \omega_2$ . Продолжив сопоставление выражений (2.1) и (2.7), можно установить истинность всей цепочки неравенств (2.6).

Задача. Как изменится частота звучания колокола при появлении трещины?

### 3. Вынужденные колебания консервативной системы

#### 3.1. Основные свойства вынужденных колебаний.

Малые колебания механической системы при совместном действии потенциальных сил  $-\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}}$  и некоторых зависящих от времени обобщенных сил  $\mathbf{Q}(t) = (Q_1(t), \dots, Q_n(t))^T$  описывается уравнениями

$$A\ddot{\mathbf{q}} + C\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(t), \quad (3.1)$$

Разложим вектор вынуждающих сил  $\mathbf{Q}(t)$  по базисным векторам в пространстве  $\mathbf{R}^n$ :

$$\mathbf{Q}(t) = \sum_{k=1}^n \mathbf{e}_k Q_k(t), \quad (3.2)$$

где

$$\mathbf{e}_k = (0, \dots, 0, \underset{\substack{k\text{-ый} \\ \text{элемент}}}{1}, 0, \dots, 0)^T.$$

Сумма решений уравнений

$$A\ddot{\mathbf{q}} + C\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{e}_k Q_k(t), \quad k = \overline{1, n} \quad (3.3)$$

будет решением исходной системы (3.1).

Изучим свойства решений уравнений вида (3.3), предполагая для простоты, что  $Q_k(t) = F \cos \Omega t$  (анализ общего случая несколько сложнее, но не имеет каких-либо принципиальных отличий).

После перехода в (3.3) к нормальным координатам  $\Theta = U^{-1}\mathbf{q}$  получим:

$$\ddot{\Theta} + \Lambda\Theta = FU^T \mathbf{e}_k \cos \Omega t \quad (3.4)$$

или (в координатной записи)

$$\ddot{\theta}_j + \omega_j^2 \theta_j = F u_{kj} \cos \Omega t, \quad j = \overline{1, n}. \quad (3.5)$$

Если  $\Omega = \omega_s$ ,  $1 \leq s \leq n$ , то говорят, что в системе имеет место *резонанс*. В общем случае при резонансе  $\Omega = \omega_s$   $s$ -ая компонента решения уравнений (3.4) возрастает неограниченным образом:

$$\theta_s(t) = \frac{u_{ks}F}{2\omega_s^2} [(\omega_s t) \sin \omega_s t - \cos \omega_s t] + \theta_s^*(t). \quad (3.6)$$

Здесь  $\theta_s^*(t)$  – общее решение однородного уравнения  $\ddot{\theta}_s + \omega_s^2 \theta_s = 0$ .

В дальнейшем мы будем предполагать, что резонанса между частотой вынуждающей силы и собственными частотами механической системы нет ( $\Omega \neq \omega_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ ). В этом случае уравнения (3.5) имеют частное решение

$$\theta_j(t) = \frac{u_{kj}F \cos \Omega t}{\omega_j^2 - \Omega^2}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (3.7)$$

В координатах  $\mathbf{q}$  движение (3.7) описывается формулой

$$\mathbf{q}(t) = FV \mathbf{e}_k \cos \Omega t, \quad (3.8)$$

где

$$V = U(\Lambda - \Omega^2 E)^{-1} U^T. \quad (3.9)$$

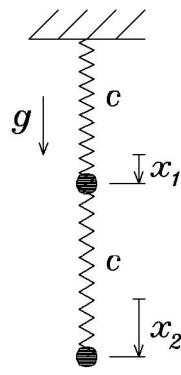


Рис. 5

Элементы  $v_{jk}$  ( $n \times n$ )-матрицы  $V$  называются гармоническими коэффициентами влияния:

$$v_{jk} = \sum_{s=1}^n \frac{u_{js} u_{ks}}{\omega_s^2 - \Omega^2}. \quad (3.10)$$

Коэффициент  $v_{jk}$  характеризует отклик  $j$ -ой координаты на возбуждение по  $k$ -ой координате. Если  $v_{jk} > 0$ , колебания по  $j$ -ой координате происходят синфазно с изменением вынуждающей силы. Если  $v_{jk} < 0$ , то колебания совершаются в противофазе. При некоторых значениях частоты  $\Omega$  какие-то коэффициенты влияния могут обратиться в нуль. Отсутствие отклика по какой-то координате на прикладываемое к механической системе периодическое воздействие называется *антирезонансом*.

У п р а ж н е н и е. Проверить, что при  $n = 1$  вынужденное движение совпадает по фазе с вынуждающей силой, если частота ее изменения меньше резонансной, и происходит в противофазе при частоте изменения вынуждающей силы, большей резонансной.

Из (3.9) следует, что матрица  $V$  – симметрическая. Соотношение

$$v_{jk} = v_{kj}, \quad j, k = \overline{1, n}. \quad (3.11)$$

выражает важное свойство вынужденных колебаний в консервативных системах (*принцип взаимности*): отклик по  $j$ -ой координате на воздействие по  $k$ -ой координате совпадает с откликом  $k$ -ой координаты на воздействие по  $j$ -ой.

**3.2. Пример.** Исследуем свойства вынужденных колебаний в изображенной на рис.5 механической системе в нерезонансном случае. Будем предполагать, что точечные массы  $m$  и  $M = 2m$  могут перемещаться только по вертикали. Жесткость пружин равна  $c$ . Сила, приложенная к нижней массе, изменяется по закону  $f(t) = F \cos \Omega t$ .

Система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат используем смещения точечных масс  $x_1, x_2$  относительно



положений, в которых пружины недеформированы (рис.5). Для построения уравнений движения в форме уравнений Лагранжа II рода

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_j} = Q_j(t), \quad j = 1, 2, \quad (3.12)$$

нам потребуются выражения для кинетической и потенциальной энергии системы

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + 2\dot{x}_2^2), \quad (3.13)$$

$$\Pi = \frac{c}{2} [x_1^2 + (x_2 - x_1)^2] - mg(x_1 + 2x_2)$$

и обобщенных сил  $Q_1, Q_2$ , соответствующих вынуждающей силе  $f(t)$ :

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = F \cos \Omega t. \quad (3.14)$$

После подстановки в (3.12) выражений (3.13), (3.14) получим:

$$m\ddot{x}_1 + c(2x_1 - x_2) - mg = 0, \quad (3.15)$$

$$2m\ddot{x}_2 - c(x_1 - x_2) - 2mg = F \cos \Omega t.$$

Легко проверить, что при отсутствии нестационарного воздействия  $f(t)$  изучаемая механическая система имеет положение равновесия

$$x_1^\circ = \frac{3mg}{c}, \quad x_2^\circ = \frac{5mg}{c}. \quad (3.16)$$

Замена переменных

$$y_1 = x_1 - x_1^\circ, \quad y_2 = x_2 - x_2^\circ$$

позволяет переписать уравнения движения (3.15) следующим образом:

$$A\ddot{\mathbf{y}} + C\mathbf{y} = \mathbf{e}_2 F \cos \Omega t. \quad (3.17)$$

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2c & -c \\ -c & c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Общее решение неоднородной системы (3.17) в нерезонансном случае имеет вид

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}^*(t) + F\mathbf{v}_2 \cos \Omega t, \quad (3.18)$$

где  $\mathbf{y}^*(t)$  – общее решение однородной системы,  $\mathbf{v}_2$  – вектор, компонентами которого являются коэффициенты гармонического влияния:

$$\mathbf{v}_2 = V\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix}.$$

Действуя по схеме, описанной в первом разделе пособия, несложно найти общее решение однородной системы ( $F = 0$ ):

$$\mathbf{y}^*(t) = C_{11}\mathbf{u}_1 \cos(\omega_1 t + C_{12}) + C_{21}\mathbf{u}_2 \cos(\omega_2 t + C_{22}), \quad (3.19)$$

где

$$\omega_1 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{c}{m}}\sqrt{5 - \sqrt{17}}, \quad \omega_2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{c}{m}}\sqrt{5 + \sqrt{17}}$$

– собственные частоты рассматриваемой механической системы,

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 + \sqrt{17} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 - \sqrt{17} \end{pmatrix}$$

– векторы, коллинеарные соответствующим амплитудным векторам.

Для отыскания элементов вектора  $\mathbf{v}_2$  в (3.18) мы не будем использовать полученные ранее общие результаты – это приведет к неоправданно длинными вычислениями. Прямая подстановка предполагаемого вынужденного решения  $\mathbf{y} = F\mathbf{v}_2 \cos \Omega t$  в уравнения движения (3.7) после сокращения на  $\cos \Omega t$  дает простую линейную систему уравнений относительно  $v_{12}$  и  $v_{22}$ :

$$\begin{pmatrix} 2c - \Omega^2 m & -c \\ -c & c - 2\Omega^2 m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Решение данной системы имеет вид:

$$v_{12}(\Omega) = \frac{c}{2\Omega^4 - 5\Omega^2 cm + c^2},$$

$$v_{22}(\Omega) = \frac{2c - \Omega^2}{2\Omega^4 - 5\Omega^2 cm + c^2}.$$

Графики функций  $v_{12}(\Omega)$ ,  $v_{22}(\Omega)$  приведены на рис. 6. Видно, что в системе возможен антирезонанс:  $v_{22}(\omega_*) = 0$ ,  $\omega_* = \sqrt{\frac{2c}{m}}$ .

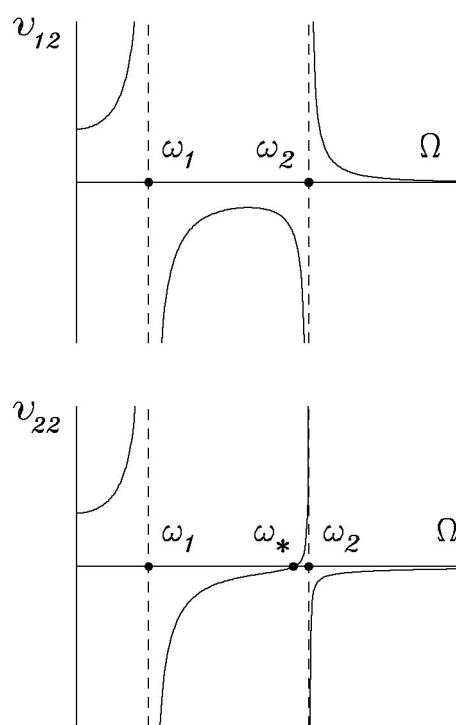


Рис. 6

## 4. Малые колебания в простых моделях сложных физических систем

**4.1. Расчет молекулярных спектров.** Для определения химического состава во многих случаях применяются спектроскопические методы. Надежность интерпретации данных, полученных в эксперименте, существенно возрастает при наличии теоретически расчетов спектров собственных колебаний различных молекул, образующих исследуемое вещество.

Специфической особенностью подобных расчетов является тщательный анализ имеющихся у молекул симметрий. Необходимый математический аппарат был разработан в рамках *теории представлений* – достаточно сложного раздела линейной алгебры, посвященного изучению взаимосвязи между группами симметрий и матричными группами.

Рассмотрим простой пример, позволяющий увидеть связь свойств собственных колебаний с группой симметрий молекулы без привлечения методов теории представлений. Будем предполагать, что молекула состоит из четырех одинаковых атомов, располагающихся в положении равновесия в вершинах правильного

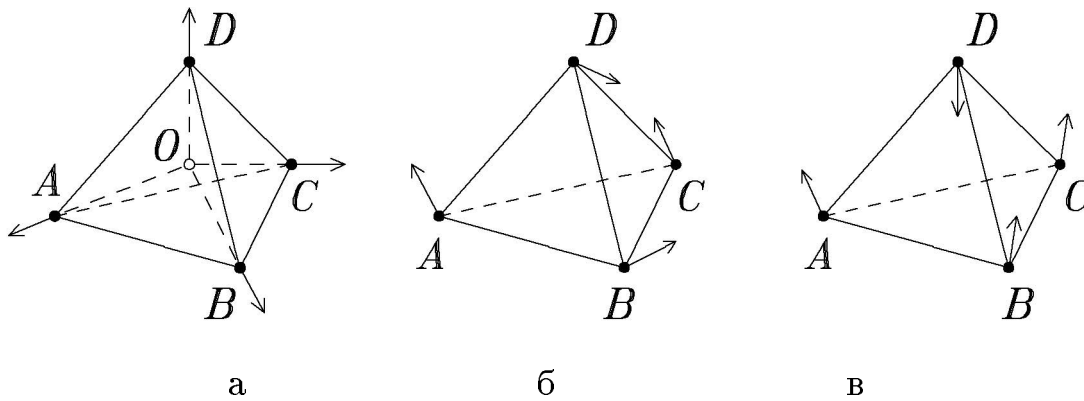


Рис. 7

тетраэдра  $A, B, C, D$  (Рис.7), и что потенциальная энергия межатомного взаимодействия зависит только от расстояния между атомами. Данная механическая система имеет 12 степеней свободы: 3 степени соответствуют поступательному движению ее центра масс  $O$ , 3 степени свободы – вращению относительно центра масс и, наконец, 6 степеней свободы отвечают колебаниям молекулы.

Среди возможных малых колебаний отметим прежде всего движение, в котором атомы перемещаются с некоторой частотой  $\omega_1$  вдоль лучей  $OA, OB, OC$  и  $OD$  – молекула остается подобной сама себе (Рис. 7а). Следующий тип колебаний – колебания с частотой  $\omega_2$ , симметричные относительно одновременно двух взаимно перпендикулярных плоскостей симметрии тетраэдра (рис.7б). Принимая во внимание разный характер смещений, можно предположить, что, по крайней мере, в общем случае  $\omega_1 \neq \omega_2$ . Так как у тетраэдра есть три пары взаимно перпендикулярных плоскостей ( $AOB$  и  $COD, AOC$  и  $BOD, AOD$  и  $BOC$ ), существуют три малых колебания описанного типа. Степень вырождения собственной частоты  $\omega_2$  не менее двух – легко убедиться в независимости любой пары колебаний из этой тройки. Третий тип колебаний – колебания с частотой  $\omega_3$ , сохраняющие свой вид при поворотах вокруг одной из осей симметрии третьего порядка (рис.7в). Четверем осям симметрии третьего порядка будут соответствовать четыре колебания такого типа, любые три из них линейно независимы. Следовательно, частота  $\omega_3$  (нет

оснований предполагать, что она равна  $\omega_1$  или  $\omega_2$ ) имеет степень вырождения не менее трех. Так как с учетом вырождений у системы должно быть шесть собственных частот, можно сделать вывод: частота  $\omega_2$  является двухкратно вырожденной, частота  $\omega_3$  – трехкратно вырожденная.

**4.2. Цепочечные модели.** Для понимания явлений, наблюдаемых при возбуждении колебаний в кристаллической решетке или в длинной полимерной молекуле, специалисты используют простые модели, представляющие совокупность точечных масс, соединенных пружинами. Такие модели называют линейными цепочками.

При исследовании линейной цепочки с большим числом элементов малые колебания целесообразно рассматривать как некие волновые процессы.

В качестве примера изучим свойства малых колебаний изображенной на рис. 8 системы из  $n$  связанных маятников. Углы отклонения маятников от вертикали  $q_1, \dots, q_n$  возьмем в качестве обобщенных координат данной системы. Ее кинетическая энергия  $T(\dot{\mathbf{q}})$  и потенциальная энергия  $\Pi(\mathbf{q})$  имеют вид

$$T(\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}ml^2 \sum_{k=1}^n \dot{q}_k^2, \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{q}) = \frac{c}{2} \sum_{k=1}^n \left\{ \sqrt{[L + l(\sin q_{k+1} - \sin q_k)]^2 + l^2(\cos q_{k+1} - \cos q_k) - L} \right\}^2 - \\ - mgl \sum_{k=1}^n \cos q_k. \end{aligned}$$

Здесь  $l$  и  $m$  – длина подвеса и масса маятников,  $L$  – расстояние между точками подвеса,  $c$  – жесткость пружин. Для построения уравнений малых колебаний аппроксимируем  $\Pi(\mathbf{q})$  квадратичной формой

$$\Pi(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \left[ cl^2 \sum_{k=1}^{n-1} (q_{k+1} - q_k)^2 + mgl \sum_{k=1}^n q_k^2 \right]. \quad (4.2)$$

Уравнения движения, линеаризованные в окрестности устойчивого положения равновесия  $q_1 = \dots = q_n = 0$ , запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + \chi(q_1 - q_2) + \kappa q_1 = 0, \\ \ddot{q}_k + \chi(2q_k - q_{k-1} - q_{k+1}) + \kappa q_k = 0, \quad k = \overline{2, n-1}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

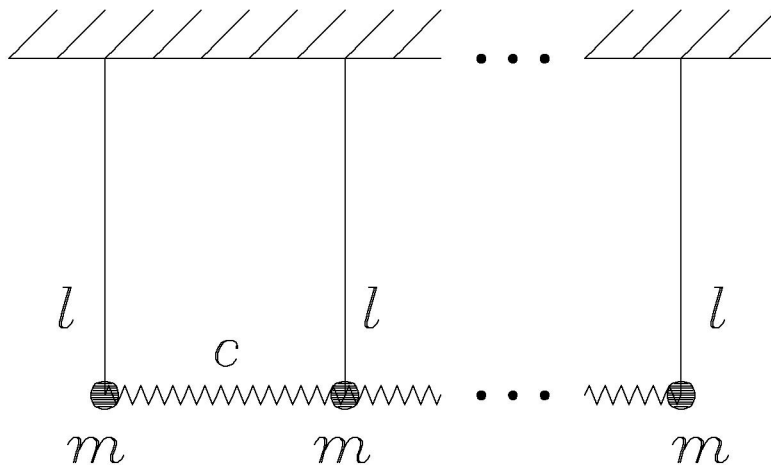


Рис. 8

$$\ddot{q}_n + \chi(q_n - q_{n-1}) + \kappa q_n = 0,$$

где параметры

$$\chi = \frac{c}{m}, \quad \kappa = \frac{g}{l}.$$

Полезно сравнить уравнения (4.3) с уравнениями малых колебаний бесконечной цепочки маятников:

$$\ddot{q}_k + \chi(2q_k - q_{k-1} - q_{k+1}) + \kappa q_k = 0, \quad k = 0, \pm 1, \dots \quad (4.4)$$

Если  $q_1(t), \dots, q_n(t)$  являются компонентами решения уравнений (4.4)

$$(\dots, q_0(t), q_1(t), \dots, q_n(t), q_{n+1}(t), \dots), \quad (4.5)$$

удовлетворяющего условию

$$q_0 = q_1, \quad q_n = q_{n+1}, \quad (4.6)$$

то тогда  $\mathbf{q}(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))^T$  будет решением уравнением (4.3). Таким образом, малые колебания системы из  $n$  маятников можно разыскивать в виде суммы простейших решений системы (4.4) – бегущих волн

$$q_k = V e^{i(\omega t \pm k\varphi)}, \quad k = 0, \pm 1, \dots \quad (4.7)$$

где  $\omega$  – частота колебаний,  $\varphi$  – разность фаз колебаний соседних маятников ( $0 \leq \varphi \leq \pi$ ). Фаза  $\varphi$  и частота  $\omega$  связаны дисперсионным соотношением

$$\omega^2 = 4\chi \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \kappa,$$

возникающем при подстановке (4.7) в (4.4).

Соотношения (4.6) выполняются при наложении волн, бегущих в противоположных направлениях:

$$q_k(t) = V_- e^{i(\omega t - k\varphi)} + V_+ e^{i(\omega t + k\varphi)}, \quad k = 0, \pm 1, \dots \quad (4.8)$$

где коэффициенты  $V_-$  и  $V_+$  должны быть решением системы однородных линейных уравнений

$$V_-(1 - e^{-i\varphi}) + V_+(1 - e^{i\varphi}) = 0, \quad (4.9)$$

$$V_- e^{-in\varphi}(1 - e^{-i\varphi}) + V_+ e^{in\varphi}(1 - e^{i\varphi}) = 0.$$

Система (4.9) имеет нетривиальное решение только в том случае, когда ее детерминант

$$\begin{vmatrix} (1 - e^{-i\varphi}) & (1 - e^{i\varphi}) \\ e^{-in\varphi}(1 - e^{-i\varphi}) & e^{in\varphi}(1 - e^{i\varphi}) \end{vmatrix} = 2i(1 - e^{i\varphi})(1 - e^{-i\varphi}) \sin n\varphi$$

равен 0. Это условие выделяет  $n$  независимых решений, удовлетворяющих условию (4.6), в которых  $\varphi = \varphi_j, \omega = \omega_j$ , где

$$\varphi_j = \frac{\pi(j-1)}{n}, \quad \omega_j = \sqrt{\kappa + 4\chi \sin^2 \frac{\pi(j-1)}{2n}}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (4.10)$$

Перейдем теперь к отысканию компонент амплитудных векторов  $\mathbf{u}_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ . При  $\varphi = \varphi_j$ ,  $j \neq 1$  система (4.9) допускает решение

$$V_- = \alpha e^{i\varphi_j/2}, \quad V_+ = \alpha e^{-i\varphi_j/2}. \quad (4.11)$$

Подстановка (4.10) и (4.11) в (4.8) дает решение

$$\mathbf{q}_j(t) = \mathbf{u}_j e^{i\omega_j t} \quad (4.12)$$

где

$$\mathbf{u}_j = (u_{1j}, \dots, u_{nj})^T, \quad (4.13)$$

$$u_{kj} = 2 \cos\left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\varphi_j}{2} = 2 \cos\left(k - \frac{1}{2}\right) (j-1) \frac{\pi}{2},$$

$$j = \overline{2, n}, \quad k = \overline{1, n}.$$

При  $j = 1$  соотношение (4.10) дает решение, в котором колебания происходят синфазно ( $\varphi_1 = 0$ ) с частотой, равной частоте колебаний математического маятника:  $\omega_1 = \kappa^{1/2} = \sqrt{\frac{g}{l}}$ . Очевидно, что маятники должны колебаться с равными амплитудами ( $u_{11} = \dots = u_{n1}$ ). Принимая во внимание, что формальная подстановка  $j = 1$  в (4.13) приводит к

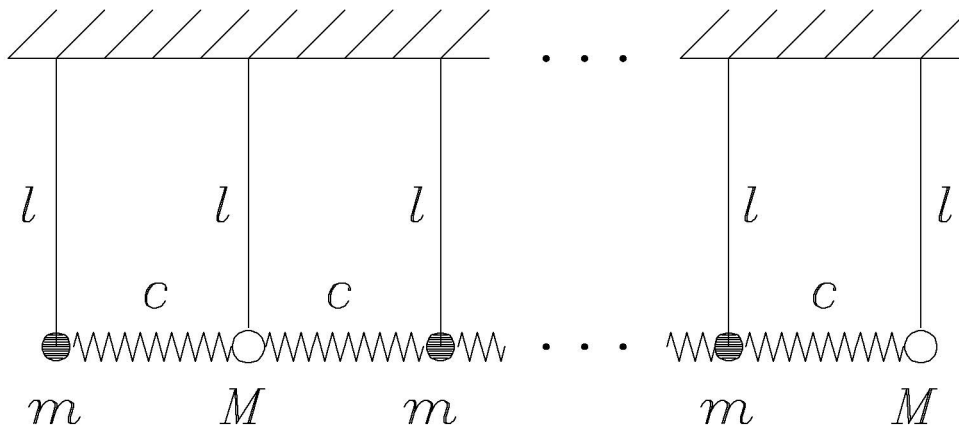


Рис. 9

такому же результату, формулу (4.13) можно рассматривать как общее выражение для компонент амплитудного вектора в "монохроматическом" движении

$$\mathbf{q}_j(t) = C_{j1} \mathbf{u}_j \cos(\omega_j t + C_{j2}), \quad j = \overline{1, n}.$$

Задача. Найти собственные частоты колебания изображенной на рис.9 цепочки из  $2n$  связанных пружинами маятников. Маятники с нечетными номерами имеют массу  $m$ , массы маятников с четными номерами равна  $M$ . Длины маятников и жесткость пружин совпадают.



# Раздел II

## Малые колебания

### в склерономных системах

Механическая система называется *склерономной*, если на нее наложены только стационарные связи.

#### 1. Малые колебания склерономной системы под действием сил, не зависящих явно от времени

**1.1. Уравнения движения.** Движение склерономной системы под действием сил произвольной природы, не зависящих явно от времени, описывается уравнениями Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}, \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{Q} = (Q_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \dots, Q_n(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}))^T$  – вектор обобщенных сил.

Будем предполагать, что  $\mathbf{q}^\circ = 0$  является положением равновесия рассматриваемой системы. В этом случае, в соответствии с необходимым и достаточным условием,

$$\mathbf{Q}(0, 0) = 0. \quad (1.2)$$

Для построения линеаризованных уравнений движения системы в окрестности положения равновесия нужно сделать следующее.

(i) Взять приближенное выражение для кинетической энергии в виде квадратичной формы с постоянными коэффициентами (см. начало предыдущего раздела)

$$T = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}, A\dot{\mathbf{q}}). \quad (1.3)$$

(ii) Разложить  $Q_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \dots, Q_n(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  в ряды Тейлора и отбросить члены второго и более высоких порядков относительно  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$ . Возникающие приближенные формулы для обобщенных сил будут

иметь вид

$$Q_j = \sum_{k=1}^n \frac{\partial Q_j}{\partial q_k} \Big|_{\mathbf{q}=\dot{\mathbf{q}}=0} q_k + \frac{\partial Q_j}{\partial \dot{q}_k} \Big|_{\mathbf{q}=\dot{\mathbf{q}}=0} \dot{q}_k. \quad (1.4)$$

Используя обозначения

$$b_{jk} = -\frac{\partial Q_j}{\partial \dot{q}_k}, \quad b_{jk} = -\frac{\partial Q_j}{\partial q_k}, \quad j, k = \overline{1, n}, \quad (1.4)$$

выражения (1.4) можно переписать в векторно-матричной форме:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -B\dot{\mathbf{q}} - C\mathbf{q}, \quad (1.5)$$

где  $B$  и  $C$  –  $(n \times n)$ -матрицы с элементами  $b_{jk}$  и  $c_{jk}$  соответственно. Матрицу  $B$  называют матрицей *скоростных* сил ( $= -B\dot{\mathbf{q}}$ ), матрицу  $C$  – матрицей *позиционных* сил ( $= -C\mathbf{q}$ ).

(iii) После подстановки (1.2) и (1.5) в (1.1) получим уравнения малых колебаний в окрестности положения равновесия

$$A\ddot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} + C\mathbf{q} = 0, \quad (1.6)$$

**1.2. Классификация обобщенных сил.** Обобщенные силы (1.3) удобно рассматривать как суперпозицию нескольких особых типов обобщенных сил, линейных по  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$ .

Пусть  $D$  и  $\Gamma$  являются симметричной и антисимметричной матрицами, сумма которых равна  $B$ :

$$D = \frac{1}{2}(B + B^T), \quad \Gamma = \frac{1}{2}(B - B^T). \quad (1.7)$$

Силы  $\mathbf{Q}_g = -\Gamma\dot{\mathbf{q}}$  называют *гироскопическими*. В любом движении мощность гироскопических сил  $W_g$  равна нулю:

$$\begin{aligned} W_g &= -(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{Q}_g) = -(\dot{\mathbf{q}}, \Gamma\dot{\mathbf{q}}) = -\frac{1}{2} [(\dot{\mathbf{q}}, B\dot{\mathbf{q}}) - (\dot{\mathbf{q}}, B^T\dot{\mathbf{q}})] = \\ &= \frac{1}{2} [(B\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) - (\dot{\mathbf{q}}, B\dot{\mathbf{q}})] = 0 \end{aligned}$$

Если квадратичная форма  $R = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}, D\dot{\mathbf{q}})$  принимает только неотрицательные значения, силы  $\mathbf{Q}_d = -D\mathbf{q}$  называют *диссипативными* (если  $R > 0$  при  $\dot{\mathbf{q}} \neq 0$ , то тогда силы  $\mathbf{Q}_d$  называют *силами с полной диссипацией*). Форму  $R$  именуют диссипативной функцией Рэлея. Несложно убедиться в справедливости соотношений

$$Q_{dj} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}, \quad j = \overline{1, n},$$

и

$$W_d = (\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{Q}_d) = -2R,$$

где  $W_d$  – мощность диссипативных сил.

Позиционные обобщенные силы можно представить в виде суммы *потенциальных сил*

$$\mathbf{Q}_p = -K\mathbf{q}, \quad K = \frac{1}{2}(C + C^T)$$

и *циркуляционных сил*

$$\mathbf{Q}_c = -N\mathbf{q}, \quad N = \frac{1}{2}(C - C^T).$$

Квадратичная форма  $\Pi = \frac{1}{2}(\mathbf{q}, K\mathbf{q})$  является потенциалом силового поля  $\mathbf{Q}_p$ :

$$Q_j^p = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Из свойств поля циркуляционных сил отметим ортогональность  $\mathbf{Q}_c$  вектору обобщенных координат:

$$(\mathbf{q}, \mathbf{Q}_c) = -(\mathbf{q}, N\mathbf{q}) = 0.$$

**4.3. Влияние диссипативных сил на колебания консервативной системы.** Движение консервативной механической системы при добавлении диссипативных сил  $\mathbf{Q}_d$  описывается уравнениями

$$A\ddot{\mathbf{q}} + D\dot{\mathbf{q}} + K\mathbf{q} = 0, \quad (1.8)$$

где  $A, D, K$  – симметрические положительно определенные матрицы.

Разыскивая решение уравнений (1.8) в виде  $\mathbf{u}e^{\rho t}$ , после подстановки в (1.8) получим, что вектор  $\mathbf{u}$  и множитель  $\rho$  в показателе экспоненты должны удовлетворять условию

$$(A\rho^2 + D\rho + K)\mathbf{u} = 0. \quad (1.9)$$

Ненулевой вектор  $\mathbf{u}$ , удовлетворяющий соотношению (1.9), существует тогда и только тогда, когда  $\rho$  является корнем *характеристического уравнения*

$$\det(A\rho^2 + D\rho + K) = 0. \quad (1.10)$$

Характеристическое уравнение является алгебраическим уравнением степени  $2n$  относительно  $\rho$ . В общем случае его корни будут комплексными числами. При подстановке в (1.9)  $\rho = \rho_*$ , где  $\rho_*$  – комплексный корень характеристического уравнения, возникает линейная система с комплексными коэффициентами; ее нетривиальное решение  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_*$  будет содержать комплексные компоненты. Домножив на  $\bar{\mathbf{u}}_* = (\bar{u}_{*1}, \dots, \bar{u}_{*n})^T$  правую и левую части тождества

$$(A\rho_*^2 + D\rho_* + K)\mathbf{u}_* = 0, \quad (1.11)$$

получим:

$$a\rho_*^2 + d\rho_* + \kappa = 0, \quad (1.12)$$

где

$$a = (\bar{\mathbf{u}}, A\mathbf{u}) > 0, \quad d = (\bar{\mathbf{u}}, D\mathbf{u}) > 0, \quad \kappa = (\bar{\mathbf{u}}, K\mathbf{u}) > 0.$$

Из соотношения (1.12) вытекает, что  $\rho_*$  является корнем квадратного уравнения с положительными коэффициентами. Воспользовавшись известной формулой для корней квадратного уравнения, легко установить, что

$$\operatorname{Re} \rho_* \leq -\frac{d}{2a} < 0.$$

Приведенные рассуждения показывают, что все корни характеристического уравнения (1.10) имеют отрицательную вещественную часть. Таким образом, после добавления сил с полной диссипацией малые колебания консервативной системы будут затухать экспоненциальным образом.

Предположим теперь, что диссипация слабая – элементы матрицы  $D$  достаточно малы. Пусть  $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)^T$  – нормальные координаты консервативной системы (в отсутствие диссипации), связанные с координатами  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)^T$  формулами перехода

$$\mathbf{q} = U\Theta, \quad \det U \neq 0. \quad (1.13)$$

В нормальных координатах уравнения движения принимают следующий вид:

$$\ddot{\theta}_j + \sum_{k=1}^n \delta_{jk} \dot{\theta}_k + \omega_j^2 \theta_j = 0, \quad (1.14)$$

где  $\omega_j$  – частоты собственных колебаний консервативной системы,  $\delta_{jk}$  – элементы матрицы диссипативных сил в переменных  $\Theta$ :

$$\delta_{jk} = (\mathbf{u}_j, D\mathbf{u}_k), \quad j, k = \overline{1, n}.$$

Следует отметить положительность диагональных элементов:

$$\delta_{jj} = (\mathbf{u}_j, D\mathbf{u}_j) > 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Характеристическое уравнение системы (1.14)

$$\begin{vmatrix} \rho^2 + \delta_{11}\rho + \omega_1^2 & \delta_{12}\rho & \dots & \delta_{1n}\rho \\ \delta_{21}\rho & \rho^2 + \delta_{22}\rho + \omega_2^2 & \dots & \delta_{2n}\rho \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n1}\rho & \delta_{n2}\rho & \dots & \rho^2 + \delta_{nn}\rho + \omega_n^2 \end{vmatrix} = 0.$$

можно записать следующим образом:

$$\prod_{k=1}^n (\rho^2 + \delta_{kk}\rho + \omega_k^2) + O(\delta^2) = 0, \quad (1.15)$$

где  $\delta = \max_{k,j=\overline{1,n}} \delta_{kj}$ . Теперь легко проверить, что корни характеристического уравнения  $\rho_1, \dots, \rho_{2n}$  имеют вид

$$\rho_{2k-1} = -i\omega_k - \frac{\delta_{kk}}{2} + O(\delta^2),$$

$$\rho_{2k} = i\omega_k - \frac{\delta_{kk}}{2} + O(\delta^2), \quad k = \overline{1, n}.$$

*Вывод: в первом приближении малые диссипативные силы не изменяют частот консервативной системы.*

**1.4. Влияние гироскопических сил на колебания консервативной системы.** Покажем, что если в линейном приближении движение консервативной системы в окрестности положения равновесия представляет суперпозицию гармонических колебаний, то оно останется таким и при добавлении гироскопических сил.

Движение консервативной системы после добавления таких сил описывается уравнениями

$$A\ddot{\mathbf{q}} + \Gamma\dot{\mathbf{q}} + K\mathbf{q} = 0, \quad (1.16)$$

где  $A$  и  $K$  – симметрические положительно определенные матрицы кинетической энергии и потенциальных сил,  $\Gamma$  – кососимметрическая матрица гироскопических сил.

Разыскивая частное решение (1.16) в виде  $\mathbf{q} = \mathbf{u}e^{i\rho t}$ , легко установить, что  $\rho$  должно удовлетворять характеристическому уравнению:

$$\det(-\rho^2 A + i\rho\Gamma + K) = 0. \quad (1.17)$$

Уравнение (1.17) имеет  $2n$  корней. Если  $\rho_*$  является корнем (1.17), существует вектор  $\mathbf{u}_* \neq 0$  такой, что

$$(-\rho_*^2 A + i\rho_* \Gamma + K)\mathbf{u}_* = 0. \quad (1.8)$$

Домножив (1.8) на комплексно-сопряженный вектор  $\bar{\mathbf{u}}_*$ , получим:

$$-\rho_*^2(\bar{\mathbf{u}}_*, A\mathbf{u}_*) - i\rho_*(\bar{\mathbf{u}}_*, \Gamma\mathbf{u}_*) + (\bar{\mathbf{u}}_*, K\mathbf{u}_*) = 0. \quad (1.19)$$

Выражение (1.19) можно переписать в форме квадратного уравнения

$$a\rho_*^2 + g\rho_* - k = 0 \quad (1.20)$$

с вещественными коэффициентами

$$a = (\bar{\mathbf{u}}_*, A\mathbf{u}_*) > 0, \quad k = (\bar{\mathbf{u}}_*, K\mathbf{u}_*) > 0, \quad g = i(\bar{\mathbf{u}}_*, \Gamma\mathbf{u}_*).$$

Из соотношения (1.20) следует, что  $\rho_*$  является вещественным – как корень квадратного уравнения с положительным детерминантом ( $D = g^2 + 4ak$ ).

Так как в качестве  $\rho_*$  можно взять любой корень характеристического уравнения (1.17), приведенные рассуждения позволяют сделать вывод о том, что все корни этого уравнения вещественные и отличаются от нуля.

На вещественной прямой корни уравнения (1.17) располагаются симметрично относительно нуля – если  $\rho = \rho_*$  принадлежит множеству корней уравнения (1.17), то  $\rho = -\rho_*$  также является корнем. Действительно,

$$\begin{aligned} \det(-(-\rho_*)^2 A + i(-\rho_*)\Gamma + K) &= \det(-\rho_*^2 A - i\rho_*\Gamma + K) = \\ &= \det(-\rho_*^2 A + i\rho_*\Gamma + K)^T = 0 \end{aligned}$$

## 2. Вынужденные движения склерономных систем

**2.2. Свободные и вынужденные движения.** Пусть  $\mathbf{q} = 0$  является положением равновесия некоторой склерономной системы. Будем предполагать, что анализ линеаризованных в окрестности указанного положения равновесия уравнений движения

$$A\ddot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} + C\mathbf{q} = 0 \quad (2.1)$$

позволяет сделать вывод о его асимптотической устойчивости: корни  $\rho_1, \dots, \rho_{2n}$  характеристического уравнения

$$\Delta(\rho) = \det(A\rho^2 + B\rho + C) = 0 \quad (2.2)$$

удовлетворяют условию

$$\operatorname{Re} \rho_k < 0, \quad k = \overline{1, 2n}.$$

Исследуем движение данной системы в окрестности положения равновесия  $\mathbf{q} = 0$  при наличии дополнительных сил

$$\mathbf{Q}(t) = (Q_1(t), \dots, Q_n(t))^T,$$

зависящих только от времени  $t$ . В линейном приближении интересующее нас движение описывается уравнениями

$$A\ddot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} + C\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t). \quad (2.3)$$

Общее решение уравнений (2.3) представляет сумму какого-то частного решения этих уравнений  $\mathbf{q}^*(t)$  и общего решения  $\mathbf{q}^{**}(t, C_1, \dots, C_{2n})$  однородной системы (2.1):

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}^*(t) + \mathbf{q}^{**}(t, C_1, \dots, C_{2n}). \quad (2.4)$$

Слагаемое  $\mathbf{q}^{**}(t, C_1, \dots, C_{2n})$  в правой части выражения (2.4) описывает движения склерономной системы при отсутствии вынуждающей силы – свободные движения. Слагаемое  $\mathbf{q}^*(t)$  описывает вынужденное движение, которое существует только при наличии вынуждающей силы  $\mathbf{Q}(t)$ . В случае колебательного характера свободных (вынужденных) движений принято говорить о свободных (вынужденных) колебаниях.

В соответствии с предположением об асимптотической устойчивости положения равновесия  $\mathbf{q} = 0$  системы (2.1) общее решение  $\mathbf{q}^{**}(t, C_1, \dots, C_{2n})$  становится сколь угодно малым при возрастании времени  $t$  независимо от выбора значений постоянных  $C_1, \dots, C_{2n}$ . Можно сказать, что собственные движения затухают и в результате в системе происходит только вынужденное движение.

Вынужденное решение  $\mathbf{q}^*(t)$  является откликом системы на прикладываемое нестационарное воздействие  $\mathbf{Q}(t)$ . Действуя точно также, как и при изучении вынужденных движений в консервативных системах, разложим  $\mathbf{Q}(t)$  по базисным векторам:

$$\mathbf{Q}(t) = \sum_{k=1}^n \mathbf{e}_k Q_k(t).$$

Очевидно, что  $\mathbf{q}_*(t)$  представляет суперпозицию вынужденных решений  $\mathbf{q}_*^k$ , соответствующих воздействиям  $\mathbf{Q}^k(t) = \mathbf{e}_k Q_k(t)$ , в которых отлична от нуля только  $k$ -ая обобщенная сила:

$$\mathbf{q}_*(t) = \sum_{k=1}^n \mathbf{q}_*^k(t).$$

Таким образом, для полного решения задачи об отыскании отклика системы достаточно научиться это делать для воздействий  $\mathbf{Q}^k(t) = \mathbf{e}_k Q_k(t)$ ,  $k = \overline{1, n}$ .

**2.2. Амплитудно-фазовая характеристика системы.** Рассмотрим вспомогательную задачу об отыскании формального отклика  $\mathbf{q}_*(t)$  системы (2.3) на «воздействие»

$$\mathbf{Q}^k(t) = \mathbf{e}_k e^{i\Omega t}. \quad (2.5)$$

Частное решение уравнений (2.3) с правой частью (2.5) будем искать в виде

$$\mathbf{q}_*(t) = \mathbf{h} e^{i\Omega t}, \quad (2.6)$$

где  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)^T$ . После подстановки (2.5) и (2.6) в (2.3) и сокращения на  $e^{i\Omega t}$  получим систему линейных уравнений, позволяющую определить  $\mathbf{h}$ :

$$\Xi(i\Omega) \mathbf{h} = \mathbf{e}_k. \quad (2.7)$$

Здесь  $\Xi(i\Omega) = A(i\Omega)^2 + B(i\Omega) + C$ .

Система линейных уравнений (2.7) однозначно разрешима только при условии

$$\det \Xi(i\Omega) = \det [A(i\Omega)^2 + B(i\Omega) + C] = \Delta(i\Omega) \neq 0. \quad (2.8)$$

Условие (2.8) выполнено при любом значении  $\Omega$  – в противном случае мы получили бы противоречие с исходным предположением о принадлежности всех корней характеристического уравнения  $\Delta(\rho) = 0$  левой полуплоскости.

Решение системы (2.7) удобно найти методом Крамера. После элементарных преобразований получим:

$$h_j = \frac{\Delta_{kj}(i\Omega)}{\Delta(i\Omega)},$$

где  $\Delta_{kj}(i\Omega)$  – алгебраическое дополнение элемента  $\xi_{kj}$  матрицы  $\Xi(i\Omega)$ .



Функцию

$$W_{kj}(i\Omega) = \frac{\Delta_{kj}(\Omega)}{\Delta(\Omega)}$$

называют *амплитудно-фазовой характеристикой* системы. Решение задачи об отклике системы на воздействие  $\mathbf{Q}^k(t) = \mathbf{e}_k e^{i\Omega t}$  можно записать в виде

$$q_{j*}(t) = W_{kj}(i\Omega) e^{i\Omega t} = |W_{kj}(i\Omega)| e^{i(\Omega t + \arg W_{kj})}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.9)$$

Из соотношения (2.9) следует, что модуль функции  $W_{kj}(i\Omega)$  характеризует амплитуду отклика, а ее аргумент – фазовый сдвиг по отношению к входному воздействию. В дальнейшем функции  $R_{kj}(\Omega) = |W_{kj}(i\Omega)|$  и  $\Psi_{kj}(\Omega) = \arg W_{kj}(i\Omega)$  будем называть *амплитудно-частотной* и *фазо-частотной* характеристиками. Первый индекс у функций  $W_{kj}(i\Omega)$ ,  $R_{kj}(\Omega)$ ,  $\Psi_{kj}(\Omega)$  указывает, по какой координате прикладывается воздействие, второй определяет координату отклика.

При исследовании вынужденных движений конкретных механических систем для лучшего понимания свойств функции  $W_{kj}$  целесообразно построить ее годограф и графики функций  $R_{kj}(\Omega)$  и  $\Psi_{kj}(\Omega)$  при изменении  $\Omega$  от 0 до  $+\infty$ . Годограф функции  $W_{kj}$  начинается на действительной оси и стягивается к нулю при  $\Omega \rightarrow \infty$ . При анализе свойств амплитудно-частотной характеристики следует обращать внимание на положение локальных максимумов (особенно в тех случаях, когда эти максимумы являются отчетливо выраженными пиками). Возрастание амплитуды отклика при  $\Omega \approx \Omega^*$  называют *резонансом*, а частоту  $\Omega^*$  – *резонансной частотой*.

**2.3. Отклик системы на гармоническое воздействие.** В соотношении

$$A\ddot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} + C\mathbf{q} = \mathbf{e}_k e^{i\Omega t}$$

должны быть равны между собой взятые отдельно действительная и мнимая составляющие выражений в левой и правой части. Это означает, что откликом системы на гармоническое воздействие

$$\mathbf{Q}(t) = F \mathbf{e}_k \cos \Omega t = F \operatorname{Re} (\mathbf{e}_k e^{i\Omega t})$$

является вынужденное движение

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_*(t) &= (F \operatorname{Re} (W_{k1}(i\Omega) e^{i\Omega t}), \dots, F \operatorname{Re} (W_{kn}(i\Omega) e^{i\Omega t}))^T = \\ &= (F R_{k1}(\Omega) \cos(\Omega t + \Psi_{k1}(\Omega)), \dots, F R_{kn}(\Omega) \cos(\Omega t + \Psi_{kn}(\Omega)))^T \end{aligned}$$

Действуя аналогичным образом, можно установить, что откликом на воздействие  $\mathbf{Q}(t) = F\mathbf{e}_k \sin \Omega t$  будет движение:

$$\mathbf{q}_*(t) = (FR_{k1}(\Omega) \sin(\Omega t + \Psi_{k1}(\Omega)), \dots, FR_{kn}(\Omega) \sin(\Omega t + \Psi_{kn}(\Omega)))^T$$

**2.4. Отклик на периодическое воздействие.** Основываясь на принципе суперпозиции, ограничимся рассмотрением случая

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{e}_k Q(t) \quad (2.10)$$

где  $Q(t)$  – некоторая функция с периодом  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ . Раскладывая  $Q(t)$  в ряд Фурье, воздействие (2.10) представим в виде суммы гармонических воздействий:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(t) = \mathbf{e}_k Q(t) &= \mathbf{e}_k \left( \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos m\Omega t + b_m \sin m\Omega t \right) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{e}_k a_m \cos m\Omega t + \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{e}_k b_m \sin m\Omega t. \end{aligned}$$

Воспользовавшись теперь результатами предыдущего пункта, получим следующее выражение для вынужденного движения при наличии периодической внешней силы (2.10):

$$\begin{aligned} q_{*j}(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \{ a_m R_{kj}(m\Omega) \cos [m\Omega t + \Psi_{k1}(\Omega)] + \\ &+ b_m R_{kj}(m\Omega) \sin [m\Omega t + \Psi_{k1}(\Omega)] \}, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

**2.5. Отклик на непериодическое воздействие.** Для отыскания вынужденного движения при наличии непериодического внешнего воздействия используют преобразование Фурье:

$$\mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\Omega t} dt.$$

Фурье-образ отклика  $\mathcal{F}[q_{*j}(t)]$  связан с Фурье-образом воздействия  $\mathcal{F}[Q_k(t)]$  соотношением

$$\mathcal{F}[q_{*j}(t)] = W_{kj} \mathcal{F}[Q_k(t)].$$

Если Фурье-образ отклика известен, его выражение в виде функции  $t$  можно получить с помощью обратного преобразования Фурье.

**6. Пример.** В предыдущем разделе изучались вынужденные колебания консервативной механической системы, стоящей из двух

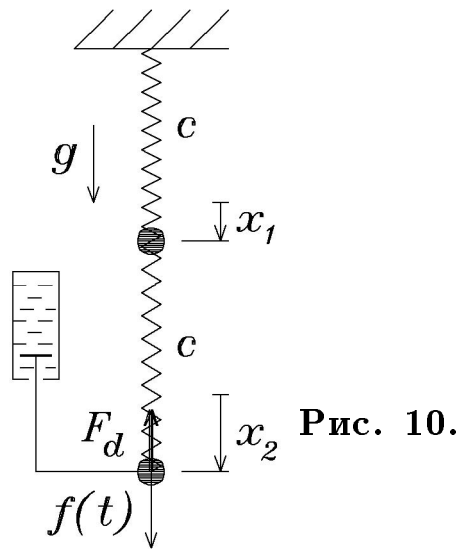


Рис. 10.

точечных масс и двух пружин. Предположим, что к нижней массе присоединен безынерционный демпфер, оказывающий сопротивление ее движению:  $\mathbf{F}_d = -\kappa \mathbf{v}_2$  (рис. 10). Найдем амплитудно-фазовые характеристики системы и построим графики амплитудно-частотных и фазо-частотных характеристик.

Будем использовать обобщенные переменные, введенные при исследовании системы без демпфера. В качестве первого шага убедимся в асимптотической устойчивости положения равновесия

$$\mathbf{x}^\circ = \left( \frac{3mg}{c}, \frac{5mg}{c} \right)^T.$$

Перемещение точечных масс в окрестности положения равновесия  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^\circ$  описывается уравнениями

$$A\ddot{\mathbf{y}} + B\dot{\mathbf{y}} + C\mathbf{y} = 0, \quad (2.11)$$

где  $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^\circ$ ,

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \kappa \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2c & -c \\ -c & c \end{pmatrix}.$$

В характеристическом уравнении системы (2.11)

$$\begin{aligned} \Delta(\rho) &= \det(A\rho^2 + B\rho + C) = \\ &= 2m^2\rho^4 + \kappa m\rho^3 + 5cm\rho^2 + 2\kappa c\rho + c^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

все коэффициенты положительные; первый и третий главные миноры его матрицы Рауса

$$\begin{pmatrix} \kappa m & 2\kappa c & 0 & 0 \\ 2m^2 & 5ct & c^2 & 0 \\ 0 & \kappa m & 2\kappa c & 0 \\ 0 & 2m^2 & 5ct & c^2 \end{pmatrix}$$

также положительные ( $\Delta_1 = \kappa m$ ,  $\Delta_3 = c^2 m^2 \kappa^2$ ). Поэтому, опираясь на критерий Рауса-Гурвица в форме Лъенара-Шипара, можно утверждать, что все корни уравнения (2.12) лежат в левой полуплоскости.

Для нахождения амплитудно-фазовых характеристик, описывающих отклик системы при воздействии на вторую массу, запишем систему линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} m(i\Omega)^2 + 2c & -c \\ -c & 2m(i\Omega)^2 + (i\Omega)\kappa + c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{21} \\ W_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Действуя методом Крамера, получим:

$$W_{21}(i\Omega) = \frac{c}{\Delta(i\Omega)}, \quad W_{22}(i\Omega) = \frac{2c - m\Omega^2}{\Delta(i\Omega)}.$$

Графики амплитудно-частотных характеристик  $R_{21}(\Omega)$ ,  $R_{22}(\Omega)$  и фазо-частотных характеристик  $\Psi_{21}(\Omega)$ ,  $\Psi_{22}(\Omega)$  в случае достаточно слабого трения приведены на рис. 11. Максимумы у функций  $R_{21}(\Omega)$  и  $R_{22}(\Omega)$  достигаются при значениях  $\Omega$ , близких к собственным частотам колебаний консервативной системы  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

Примечательно, что наличие диссипативных элементов в системе не исключает "антирезонанса":  $W_{22}(i\Omega^*) = 0$ ,  $\Omega^* = \sqrt{\frac{2c}{m}}$ .

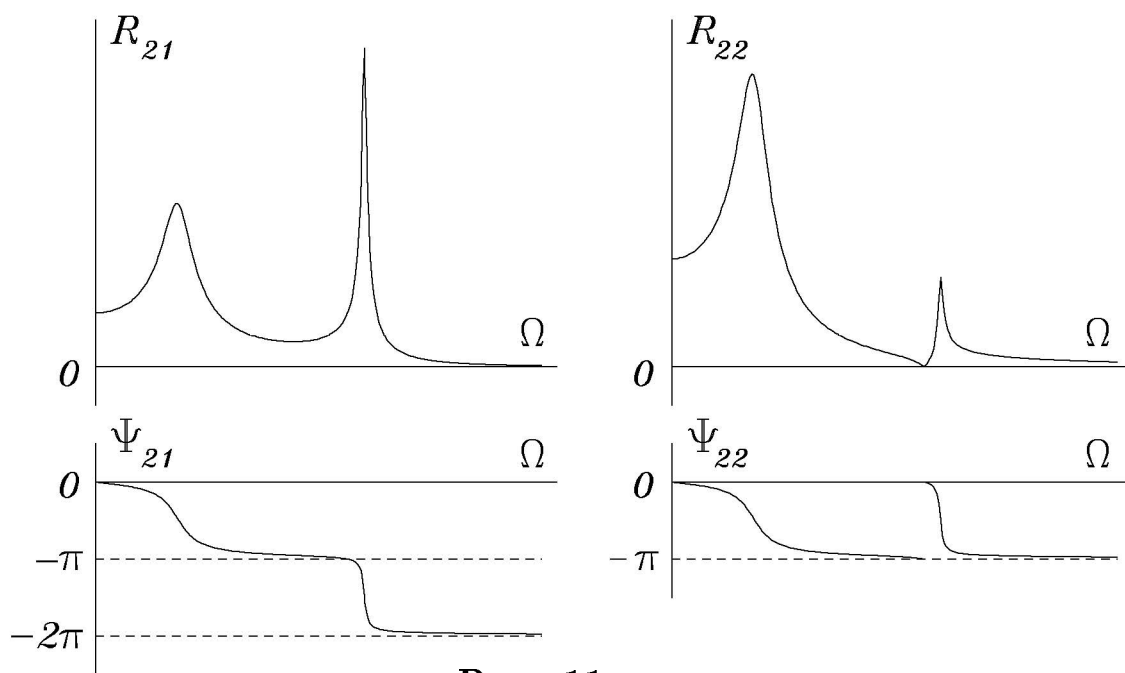


Рис. 11.