Криволинейные координаты и геодезические

С.С. Ефимов

1 Обозначения и определения

1.1 Криволинейные координаты. Локальный базис

Рассмотрим максимально общий вид задания положения точки в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$

$$\mathbf{r}(q^1, q^2, q^3, ...) = \mathbf{r}(q^i). \tag{1.1}$$

Параметры q^i $(i = 1, 2, 3, ...)$ называются *криволинейными координатами*. При этом предполагается, что набор q^i является функционально независимым, то есть не существует такой функции $F(q^i)$, что $F(q^i) \equiv 0$. Это условие эквивалентно тому, что ни один из параметров q^i не может быть вычислен по значениям остальных переменных. В противном случае такой параметр не добавляет никакой новой информации о положении точки и должен быть исключен из набора.

Каждой из криволинейных координат q^i соответствует набор *координатных линий* $\Gamma_i(q^j)_{j\neq i}$. Каждая линия представляет собой множество точек задаваемых вектором $\mathbf{r}(q^i)$ при фиксированных значениях всех координат кроме q^i. Дифференцирование $\mathbf{r}$ по q^i задаёт касательный вектор к координатной линии q^i в соответствующей точке пространства:

$$\boldsymbol{g}_i(\mathbf{r}) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}. \tag{1.2}$$

Для краткости будем называть $\boldsymbol{g}_i$ *координатными векторами*. Из функциональной независимости координат q^i следует линейная независимость $\boldsymbol{g}_i$. То есть набор координатных векторов образует базис. Поскольку производная $\partial\mathbf{r}/\partial q^i$ может принимать разные значения в разных точках пространства, этот базис носит локальный характер.

Иногда наряду с $\boldsymbol{g}_i$ используется нормированный локальный базис

$$\mathbf{e}_i = \boldsymbol{g}_i/h_i, \tag{1.3}$$

где нормировочные коэффициенты $h_i = |\boldsymbol{g}_i|$ носят название *коэффициентов Ламе́*. Вектора $\mathbf{e}_i$ $(|\mathbf{e}_i| = 1)$ называются *ортами криволинейных координат*.

1.2 Скорость и ускорение в криволинейных координатах

Дифференцирование (1.1) по времени как сложной функции даёт вектор скорости:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \sum_i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}\frac{dq^i}{dt} = \sum_i \boldsymbol{g}_i \dot{q}^i. \tag{1.4}$$

Точкой здесь обозначена производная по времени. Далее при записи подобных сумм будет применяться *правило Эйнштейна*, состоящие в том, что если суммирование производится по парным индексам, среди которых есть один нижний и один верхний, таким как индекс i в (1.4), то знак суммы на письме опускается:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{g}_i \dot{q}^i. \tag{1.5}$$

Из (1.3) следует также, что

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_i v^i, \tag{1.6}$$

где $v^i = h_i \dot{q}^i$ (здесь суммирования по i нет). Компоненты v^i разложения вектора скорости по нормированному локальному базису будем называть *криволинейными компонентами скорости.*

Криволинейными компонентами ускорения w_i будем называть проекции вектора ускорения на оси локального базиса:

$$w_i = (\mathbf{w}, \mathbf{e}_i)\,. \tag{1.7}$$

Используя дифференцирование по частям:

$$w_i = \frac{1}{h_i}(\mathbf{w}, \boldsymbol{g}_i) = \frac{1}{h_i}\left(\frac{d}{dt}\mathbf{v}, \boldsymbol{g}_i\right) = \frac{1}{h_i}\left[\frac{d}{dt}(\mathbf{v}, \boldsymbol{g}_i) - \left(\mathbf{v}, \frac{d}{dt}\boldsymbol{g}_i\right)\right].$$

Из (1.5) следует

$$\boldsymbol{g}_i = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}^i},$$

где при взятии частной производной принимается во внимание тот факт, что q^i и $\dot{q}^i$ являются независимыми величинами, определяющими состояние точки (положение в фазовом пространстве). Из дифференцирования (1.2) по времени:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{g}_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} = \frac{\partial}{\partial q^i}\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q^i}.$$

В итоге

$$w_i = \frac{1}{h_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}^i}\right) - \left(\mathbf{v}, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q^i}\right)\right].$$

Несложно заметить, что

$$\left(\mathbf{v}, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}^i}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\mathbf{v}, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}^i}\right) + \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}^i}, \mathbf{v}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\frac{(\mathbf{v}, \mathbf{v})}{2} = \frac{\partial v^2/2}{\partial \dot{q}^i},$$

и аналогичная выкладка справедлива для дифференцирования по q^i. Таким образом криволинейные компоненты ускорения определяются выражениями

$$w_i = \frac{1}{h_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial v^2/2}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial v^2/2}{\partial q^i}\right]. \tag{1.8}$$

Суммирования по i в формулах для w_i не подразумевается.

1.3 Скалярное произведение, метрический тензор, поднятие и опускание индексов

Разложение произвольного вектора в локальном базисе имеет вид:

$$\mathbf{a} = a^i \boldsymbol{g}_i. \tag{1.9}$$

Скалярное произведение двух векторов в таком представлении принимает вид

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left(a^i \boldsymbol{g}_i, b^j \boldsymbol{g}_j\right) = a^i \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j\right) b^j. \tag{1.10}$$

Скалярные произведения базисных векторов составляют матрицу Грамма. Соответствующую физическую величину

$$g_{ij} = \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j\right) \tag{1.11}$$

называют *метрическим тензором*. Из определения следует, что метрический тензор симметричен ($g_{ij} = g_{ji}$). Скалярное произведение, таким образом

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = g_{ij} a^i b^j.$$

Чтобы избавиться от множителя g_{ij} в координатных записях скалярных произведений для записи векторов вводят вспомогательные величины

$$a_j = g_{ij} a^i, \tag{1.12}$$

которые называются *ковариантными компонентами* вектора $\mathbf{a}$, и обозначаются на письме нижними индексами. Компоненты a^i с верхними индексами (1.9) называются *контравариантными*.

Примечание: Происхождение названий связано с тем, что при замене координат ковариантные компоненты преобразуются при помощи той же матрицы перехода J, что и базисные вектора:

$$\tilde{a}_k = J^i_k a_i, \quad \tilde{\boldsymbol{g}}_k = J^i_k \boldsymbol{g}_i,$$

в то время как контравариантные компоненты, как следует из (1.9), преобразуются при помощи обратной матрицы:

$$\tilde{a}^k = \left(J^{-1}\right)^k_i a^i.$$

То есть ковариантные компоненты меняются (варьируются) вместе с базисом, а контравариантные изменяются противоположным образом.

С использованием ковариантных компонент скалярное произведение можно записать любым из двух способов:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_j b^j = b_j a^j. \tag{1.13}$$

Контравариантные компоненты можно представлять как компоненты вектора, записанного в виде столбца, а ковариантные как компоненты вектора, записанного в строчку. Запись (1.13), таким образом, представляет скалярное произведение как произведение вектор-строки на вектор-столбец.

Формула (1.12), определяющая ковариантные компоненты вектора через контравариантные, задаёт так называемое *правило опускания индексов*. Для *поднятия индексов*, т.е. выражения контравариантных компонент через ковариантные, последние нужно соответственно умножить на матрицу обратную g_{ij}, обозначаемую как g^{ij}:

$$a^i = g^{ij} a_j.$$

В соответствии с определением $g_{ij} g^{jk} = \delta^k_i$, где δ^k_i – символ Кронекера (единичная матрица).

Примечание: Стоит отметить, что не любые величины с нижним или верхним индексами обозначают ковариантные или контравариантные компоненты какого-либо вектора. Так, например, не являются компонентами вектора коэффициенты Ламе. Они могут быть выражены через диагональные элементы метрического тензора ($h_i = \sqrt{g_{ii}}$) и при замене координат ведут себя отличным от компонент вектора образом.

Не являются также компонентами векторов в этом смысле криволинейные скорость и ускорение v^i и w_i, что связано с наличием коэффициентов Ламе в их определениях. Вместо этого контравариантные компоненты скорости и ковариантные компоненты ускорения задаются соотношениями $v^i/h_i = \dot{q}^i$ и $w_i h_i = (\mathbf{w}, \boldsymbol{g}_i)$ соответственно (суммирования по i в обоих выражениях нет).

2 Геодезические на гиперболоиде

Рассмотрим координаты (φ, h), задающие координаты точки на гиперболоиде $x^2+y^2-z^2=1$ (Рис. 1), где h – высота над плоскостью xy, а φ – азимутальный угол. То есть радиус-вектор в декартовой системе выражается столбцом

$$\mathbf{r}(\varphi, h) = \begin{pmatrix} \sqrt{1+h^2}\cos\varphi \\ \sqrt{1+h^2}\sin\varphi \\ h \end{pmatrix}.$$

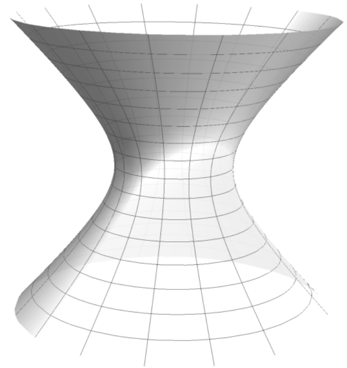

Рис. 1: Гиперболоид $x^2+y^2-z^2=1$

В соответствии с (1.2), координатные вектора равны

$$\boldsymbol{g}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sqrt{1+h^2}\sin\varphi \\ \sqrt{1+h^2}\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{g}_h = \begin{pmatrix} h\left(1+h^2\right)^{-1/2}\cos\varphi \\ h\left(1+h^2\right)^{-1/2}\sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix}.$$

И компоненты метрического тензора из определения (1.11):

$$g_{\varphi\varphi} = 1+h^2, \quad g_{\varphi h} = g_{h\varphi} = 0, \quad g_{hh} = \frac{1+2h^2}{1+h^2}.$$

Тогда из (1.5) и (1.10) квадрат скорости:

$$v^2 = (\mathbf{v}, \mathbf{v}) = g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j = \left(1+h^2\right)\dot{\varphi}^2 + \left(\frac{1+2h^2}{1+h^2}\right)\dot{h}^2. \tag{2.1}$$

Примечание: Домножение (2.1) на dt^2 даёт

$$ds^2 = g_{ij}dq^i dq^j = \left(1+h^2\right)d\varphi^2 + \left(\frac{1+2h^2}{1+h^2}\right)dh^2. \tag{2.2}$$

То есть метрический тензор показывает как измеряется расстояние в криволинейный координатах, с чем, в частности, и связано его название.

Компоненты ускорения в координатах (φ, h) из (1.8):

$$\begin{gathered} h_\varphi w_\varphi = \frac{d}{dt}\left[\left(1+h^2\right)\dot{\varphi}\right], \\ h_h w_h = \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{1+2h^2}{1+h^2}\right)\dot{h}\right] - h\dot{\varphi}^2 - \frac{h}{(1+h^2)^2}\dot{h}^2. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Линии на поверхностях, по которым возможно движение с нулевыми значениями всех криволинейных компонент ускорения, называются *геодезическими*. Эти кривые являются обобщением понятия прямой линии для искривлённых поверхностей и пространств. По ним, в частности, будут двигаться материальные точки, на которые не действуют никакие силы кроме нормальной реакции поверхности. Найдём геодезические линии на рассматриваемом гиперболоиде.

Из определения, геодезическая определяется уравнениями

$$\begin{cases} w_\varphi = 0, \\ w_h = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Отсюда также следует, что искомое движение является движением с постоянной по абсолютной величине скоростью. Значение скорости, при этом, может быть различным. Чтобы исключить данную неопределённость добавим условие $v^2 = 1$, что соответствует поиску геодезических в натуральной параметризации ($dt = ds/v = ds$). Но это условие делает одно из уравнений (2.4) избыточным, поскольку, например, из постоянства модуля скорости и $w_\varphi = 0$ следует, что и $w_h = 0$.[1] Система уравнений для поиска геодезических, таким образом, принимает вид:

$$\begin{cases} w_\varphi = 0, \\ v^2 = 1. \end{cases} \tag{2.5}$$

Первое уравнение, с учётом (2.3) даёт

$$\left(1 + h^2\right)\dot{\varphi} = C = const.$$

Из второго уравнения (2.5) и выражения для скорости (2.1):

$$\dot{h} = \sqrt{\frac{1+h^2}{1+2h^2}\left[1 - (1+h^2)\dot{\varphi}^2\right]} = \sqrt{\frac{1+h^2}{1+2h^2}\left[1 - \frac{C^2}{1+h^2}\right]} = \sqrt{\frac{(1-C^2)+h^2}{1+2h^2}}.$$

Тогда зависимость $h(\varphi)$ будет определяться дифференциальным уравнением:

$$h' = \frac{dh}{d\varphi} = \frac{\dot{h}}{\dot{\varphi}} = \frac{(1+h^2)\dot{h}}{C} = \frac{(1+h^2)}{C}\sqrt{\frac{(1-C^2)+h^2}{1+2h^2}}. \tag{2.6}$$

Найденное соотношение полностью определяет семейство геодезических на гиперболоиде. Это семейство является двухпараметрическим, где первый параметр – константа C, а второй параметр – константа интегрирования, появляющаяся при решении дифференциального уравнения первого порядка.

В общем случае решение (2.6) имеет довольно сложный вид, поэтому дальше рассмотрим только пару частных случаев для геодезических выходящих из точки $h = 0, \varphi = 0$ (в терминах функции $h(\varphi)$ это соответствует начальному условию $h(0) = 0$) и отдельных значений константы C.

---

[1] Строго говоря, это не совсем так. Из постоянства модуля скорости следует, что тангенциальное ускорение $w_\tau \propto (\mathbf{w}, \mathbf{v}) = w_i v^i = 0$. Условия равенства нулю всех ускорений кроме одного приводят к $w_h v^h = 0$ и, следовательно, $w_h \dot{h} = 0$. Таким образом система (2.5) помимо геодезических ($w_h = 0$) в качестве решений может включать и движение вдоль координатных линий ($\dot{h} = 0$, $h = const$). Поэтому при получении ответа в виде $h = const$ его нужно дополнительно проверить на соответствие уравнению $w_h = 0$. Для (2.7) после подстановки в (2.3) легко видеть, что это условие действительно выполняется.

1) $C = 1$:

В этом случае уравнение (2.6) сводится к

$$h' = |h| \frac{(1+h^2)}{\sqrt{1+2h^2}}.$$

Решением для выбранных начальных условий будет траектория

$$h(\varphi) = 0, \tag{2.7}$$

представляющая собой окружность на пересечении гиперболоида и плоскости xy.

2) $C = 1/\sqrt{2}$:

Уравнение для $h(\varphi)$:

$$h' = (1+h^2). \tag{2.8}$$

После разделения переменных несложно найти, что $\varphi = \operatorname{arctg} h$, или

$$h = \operatorname{tg} \varphi. \tag{2.9}$$

В декартовой системе координат это соответствует траектории

$$x = 1, \quad y = z = \operatorname{tg} \varphi.$$

То есть найденная геодезическая является прямолинейной образующей гиперболоида.

Представление о других геодезических гиперболоида, выходящих из точки $(0,0)$, даёт рисунок 2.

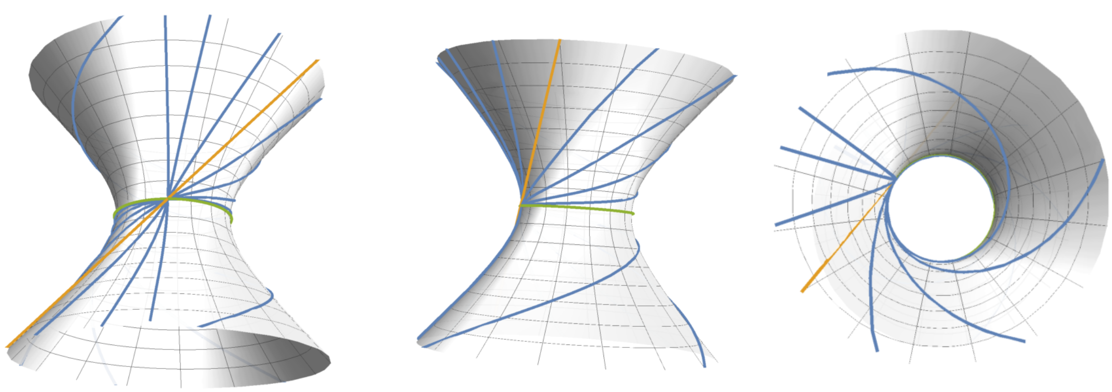

Рис. 2: Геодезические на гиперболоиде: прямолинейная образующая и круговая параллель выделены оранжевым и зелёным цветами соответственно

3 Траектории в метрике Шварцшильда

Одним из основополагающих принципов общей теории относительности является интерпретация гравитации не как силы притяжения, а как искривления пространства-времени. Если на материальную точку не действует никаких сил (а притяжение не сила), то криволинейные компоненты ускорения точки в этом пространстве-времени равны нулю – то есть точка движется по геодезической. Это утверждение полностью аналогично первому закону Ньютона, учитывая сказанное ранее, что геодезическая является обобщением понятия прямой для искривлённых пространств.

Искривление пространства-времени точечным телом массы M (или сферически симметричным телом за его пределами) описывается метрикой Шварцшильда, в которой расстояние между точками задаётся выражением

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) d\tau^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} dr^2 - (r \sin\theta)^2 \, d\varphi^2 - r^2 d\theta^2.$$

Здесь τ – временная координата, (r, φ, θ) – сферические координаты в пространстве, параметр $a = 2GM$, а скорость света c положена равной единице. Как можно видеть, метрический тензор в данном случае диагональный.

Перейдём к нахождению геодезических в этой метрике, то есть траекторий, по которым тела движутся в центральном поле тяжести. Как и для гиперболоида составим систему уравнений из равенства нулю всех компонент ускорения, заменив одно из них условием постоянства скорости:

$$\begin{cases} v^2 = 1, \\ w_\tau = 0, \\ w_\varphi = 0, \\ w_\theta = 0. \end{cases}$$

Важно отметить, что переменная t, использовавшаяся ранее в формулах для скорости и ускорения, например в (1.4) и (1.8), здесь теряет смысл времени и является просто некоторым параметром, изменяющимся вдоль траекторий[2]. В свою очередь физическое время τ представляет собой четвёртую "пространственную" координату.

Из третьего уравнения $w_\theta = -r\ddot{\theta} - 2\dot{r}\dot{\theta} + r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 = 0$ следует, что при $\dot{\theta} = 0$ и $\cos\theta = 0$ вторая производная $\ddot{\theta} = 0$. Таким образом, если начальное положение точки и начальное направление движения лежат в плоскости $\theta = \pi/2$ (то есть $\theta(0) = \pi/2$ и $\dot{\theta}(0) = 0$), то и вся дальнейшая траектория лежит в плоскости $\theta = \pi/2$. Выполнения этих условий всегда можно добиться выбором соответствующей ориентации сферических координат, поэтому, как и в классической задаче двух тел, в метрике Шварцшильда все траектории являются плоскими. Система уравнений, таким образом, сводится к следующей:

$$\begin{cases} v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \left(1 - \frac{a}{r}\right)\dot{\tau}^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r^2\dot{\varphi}^2 = 1, \\ w_\tau = \frac{1}{h_\tau}\frac{d}{dt}\left[\left(1 - \frac{a}{r}\right)\dot{\tau}\right] = 0, \\ w_\varphi = -\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right) = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Из второго и третьего уравнений сразу следует, что

$$\begin{gathered} r^2\dot{\varphi} = C = const, \\ \left(1 - \frac{a}{r}\right)\dot{\tau} = D = const. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Подстановка в первое уравнение даёт

$$\left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} D^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - C^2/r^2 = 1.$$

Используя замену Бине

$$r = 1/u, \quad \dot{r} = r'\dot{\varphi} = (1/u)'Cu^2 = -u'C,$$

[2]использование условия $v^2 = 1$ означает, что для искомых кривых t будет натуральным параметром

где штрихом обозначены производные по φ, задачу можно свести к поиску функции $u(\varphi)$:

$$(1-au)^{-1}D^2-(1-au)^{-1}C^2\left(u'\right)^2-C^2u^2=1.$$

Умножая на $(au-1)$ и дифференцируя по φ, находим

$$2C^2u''u'+C^2\left(2u-3au^2\right)u'=au'.$$

Поделив на $2C^2u'$ и перенеся одно из слагаемых в правую часть, получаем окончательное уравнение траекторий:

$$u''+u=\frac{a}{2C^2}+\frac{3}{2}au^2. \tag{3.3}$$

Сравнивая полученную формулу с уравнением Бине для движения в центральном поле, можно заметить, что траектории в пространстве с метрикой Шварцшильда эквивалентны траекториям при движении точки единичной массы в центральном поле с силой

$$F(r)=-\frac{a}{2r^2}+\frac{3aC^2}{2r^4}=-\frac{GM}{r^2}\left(1+\frac{3C^2}{r^2}\right). \tag{3.4}$$

В отличие от обычного центрального поля, сила F здесь зависит также и от орбитального момента импульса (секторной скорости), определяемого константой C. При движении на достаточном удалении от центра притяжения ($r\gg a$) со скоростями много меньшими скорости света ($\mathrm{C}/r=rd\varphi/dt\approx rd\varphi/d\tau\ll 1$) вторым слагаемым в (3.4) и правой части (3.3) можно пренебречь. Тогда сила $F(r)$ тождественна силе Ньютоновского притяжения, и траекториями будут привычные эллипсы, параболы и гиперболы.

Влияние релятивистского слагаемого приводит к тому, что тела в поле тяжести движутся по траекториям отличным от предсказываемых первым законом Кеплера. И хотя отклонения от точных кеплеровских траекторий, как правило, очень малы, их можно наблюдать в движении реальных объектов. Одним из известных примеров этого является прецессия орбиты Меркурия.

4 Прецессия орбиты Меркурия

Запишем уравнение (3.3) в виде

$$u''+u=A+Bu^2, \tag{4.1}$$

где $A=a/(2C^2)$, $B=3a/2$, и рассмотрим, как релятивистское слагаемое Bu^2 влияет на траектории небесных тел. Точное решение (4.1) требует использования специальных функций (эллиптических интегралов), поэтому для простоты положим $Bu^2\ll A$ (случай слабо релятивистский) и будем считать, что u меняется мало (тело движется по орбите близкой к круговой). Таким образом $u=u_0+\delta$, где $u_0=const$, а δ – малая величина. Уравнение траектории приобретает следующий вид:

$$\delta''+u_0+\delta=A+B(u_0+\delta)^2\approx A+Bu_0^2+2Bu_0\delta.$$

Для круговой орбиты из (4.1) следует

$$u_0=A+Bu_0^2\approx A.$$

Поэтому

$$\delta''=(2Bu_0-1)\delta=-(1-2AB)\delta.$$

Решение этого уравнения

$$\delta = \delta_0 \cos\left(\omega(\varphi - \varphi_0)\right), \quad \omega = \sqrt{1 - 2AB} \approx 1 - AB. \tag{4.2}$$

Последнее равенство справедливо, поскольку из $Bu^2 \ll A$ и $u_0 = A$ следует $AB \ll 1$. Минимальное расстояние до центра притяжение достигается, когда u и δ максимальны, то есть когда аргумент косинуса в (4.2) кратен 2π. Изменение угла φ между двумя последовательными прохождениями такого положения

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\omega} \approx 2\pi\left(1 + AB\right). \tag{4.3}$$

Поскольку для эллиптических орбит $\Delta\varphi = 2\pi$ (тело на каждом обороте приближается к центру притяжения всегда в одной и той же точке), поправку $2\pi AB$ в (4.3) можно интерпретировать как небольшой поворот орбиты, который происходит на каждом обороте тела вокруг центра притяжения. Такое плавное вращение орбиты, называемое прецессией, наблюдается у Меркурия (Рис. 3). Поскольку Меркурий является ближайшей планетой к Солнцу, он обладает наибольшей орбитальной скоростью и релятивистские эффекты в его движении проявляются наиболее явным образом. Хотя даже с учётом этого, скорость прецессии его орбиты довольно мала и составляет всего 0.4 угловых секунды в год.

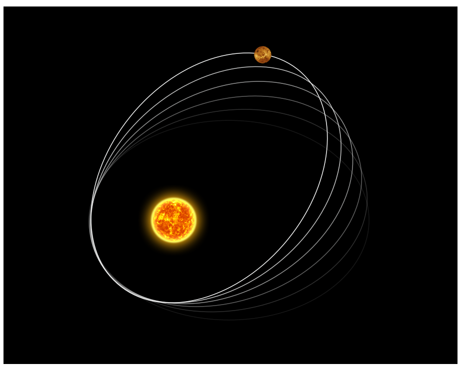

Рис. 3: Прецессия орбиты Меркурия

Примечание: Приближение почти круговой орбиты, использовавшееся при выводе, к Меркурию применяется не очень хорошо – минимальное и максимальное расстояния от Меркурия до Солнца отличаются примерно в полтора раза ($\delta \sim u_0/6$). Тем не менее, описанный эффект прецессии орбиты присутствует и в точном решении уравнения (4.1). Скорость прецессии, получаемая из такого решения, очень хорошо согласуется с наблюдательными данными.

5* Общее уравнение геодезических

Метод нахождения геодезических, использовавшийся в пунктах 2 и 3, несложно обобщить на случай с произвольной метрикой. Условие равенства нулю криволинейных компонент ускорений можно домножить на коэффициент Ламе ($\sqrt{g_{kk}}$), получив:

$$\sqrt{g_{kk}}w_k = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial v^2/2}{\partial \dot{q}^k}\right) - \frac{\partial v^2/2}{\partial q^k} = 0.$$

Подстановка выражения $v^2 = g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j$ для квадрата скорости, полученного в (2.1), даёт

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\left(g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j\right)}{\partial \dot{q}^k}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial\left(g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j\right)}{\partial q^k} = 0.$$

Учитывая, что g_{ij} зависит только от координат, в то время как скорости и координаты являются независимыми величинами, получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(g_{kj}\dot{q}^j + g_{ik}\dot{q}^i\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\dot{q}^i\dot{q}^j = 0.$$

Продифференцировав произведения в первой скобке, найдём

$$\frac{1}{2}\left(g_{kj}\ddot{q}^j + g_{ik}\ddot{q}^i\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}g_{kj}\right)\dot{q}^j + \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}g_{ik}\right)\dot{q}^i - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\dot{q}^i\dot{q}^j = 0$$

Используя симметрию метрического тензора, и меняя обозначение для индекса суммирования в первой скобке:

$$g_{ik}\ddot{q}^i = g_{ki}\ddot{q}^i = g_{kj}\ddot{q}^j.$$

Вторую и третью скобки можно раскрыть как производные сложной функции:

$$\frac{d}{dt}g_{kj} = \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i}\dot{q}^i, \quad \frac{d}{dt}g_{ik} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j}\dot{q}^j.$$

В итоге

$$\frac{1}{2}\cdot 2g_{kj}\ddot{q}^j + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i}\dot{q}^i\dot{q}^j + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j}\dot{q}^i\dot{q}^j - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\dot{q}^i\dot{q}^j = g_{kj}\ddot{q}^j + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\right]\dot{q}^i\dot{q}^j = 0.$$

Умножая всё уравнение на контравариантную компоненту метрического тензора g^{mk} и принимая во внимание, что согласно определению $g^{mk}g_{kj} = \delta^m_j$, а также $\delta^m_j\ddot{q}^j = \ddot{q}^m$ (δ^m_j – единичная матрица), получаем окончательное выражение

$$\ddot{q}^m + \frac{1}{2}g^{mk}\left[\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\right]\dot{q}^i\dot{q}^j = 0.$$

Коэффициент перед вторым слагаемым называется *символом Кристоффеля* и обозначается как

$$\Gamma^m{}_{ij} = \frac{1}{2}g^{mk}\left[\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\right].$$

С его помощью общее уравнение геодезических можно записать в виде

$$\ddot{q}^m + \Gamma^m{}_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j = 0.$$

Полученное уравнение имеет векторный вид (равенство должно быть справедливо для всех значений индекса $m = 1, .., M$, где M – размерность пространства). Решение системы из M дифференциальных уравнений второго порядка содержит $2M$ констант интегрирования. Значения двух констант можно зафиксировать выбором скорости движения (например $v^2 = 1$ в (2.5)) и выбором начала момента отсчёта времени (выбором точки на геодезической, для которой заданы начальные условия). Поэтому семейство геодезических линий является $2(M-1)$-параметрическим. Так для задания прямых на плоскости нужно всего два параметра (таких как угол наклона и минимальное расстояние до фиксированной точки).