МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Кафедра высшей математики

Специальная глава теории тригонометрических рядов. Третья теорема Юнга

Учебно-методическое пособие

Составители: Ковалёв Виталий Петрович,
Сизых Григорий Борисович

МОСКВА
МФТИ
2014

УДК 517

Специальная глава теории тригонометрических рядов. Третья теорема Юнга.: уч.-метод. пособие/ сост.: В. П. Ковалёв, Г. Б. Сизых. – М.: МФТИ, 2014. – 24 с.

Приведены формулировка и доказательство третьей теоремы Юнга, относящейся к специальным главам теории тригонометрических рядов. Доказательство опирается на программу математического анализа Московского физико-технического института. Пособие снабжено примером применения теоремы и вопросами для самопроверки.

Предназначено для повышения уровня математического образования студентов и выпускников физико-математических специальностей университетов.

Содержание

Введение

В третьем томе «Курса дифференциального и интегрального исчисления» Григория Михайловича Фихтенгольца [1] есть разделы, посвященные следующей проблеме. По заданному тригонометрическому ряду нужно установить, что он сходится к некоторой абсолютно интегрируемой на $[-\pi, \pi]$ функции и является её рядом Фурье.

Большой вклад в решение этой проблемы внес английский математик Юнг (W.H. Young, 1863–1942). Результаты его исследований изложены в упомянутом курсе в виде нескольких теорем. Здесь доказана теорема, которая в 692 разделе [1] обозначена как утверждение номер три. А поскольку все утверждения в разделе принадлежат Юнгу, назовем её третьей теоремой Юнга.

Доказательство третьей теоремы Юнга в [1] опирается на теоремы, отсутствующие в физтеховской программе математического анализа [2–8]. Здесь представлено это доказательство в измененном виде. Доказательство изменено так, чтобы можно было опираться на теоремы из физтеховской программы математического анализа. Идеи, применяемые при доказательстве теорем, зачастую позволяют решать такие задачи, которые не решаются применением самих этих теорем. В частности, к таким идеям относится преобразование Абеля, применяемое при доказательстве признака Дирихле сходимости рядов. Поэтому авторы сочли полезным повторить доказательства некоторых известных теорем. Кроме того, имея опыт преподавания в МФТИ, авторы знают моменты в доказательствах и определениях, на которые даже достаточно сильные студенты не обращают внимание. Настоящее пособие предназначено не для научного журнала. Поэтому некоторые места посвящены напоминаниям, обращению внимания на детали. Все это делает текст полезным для закрепления знания теории рядов Фурье.

1. Основные термины и формулировка теоремы

Если функция и её модуль интегрируемы по Риману на некотором отрезке (вообще говоря, в смысле несобственного интеграла Римана с конечным числом особенностей), то функция называется абсолютно интегрируемой на этом отрезке.

Напомним смысл выражения «ряд $\frac{q_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} q_k \cos kx + s_k \sin kx$ является рядом Фурье своей суммы». Это означает следующее.

Существует абсолютно интегрируемая на отрезке $[-\pi, \pi]$ *функция* $f(x)$ *такая, что во всех точках отрезка* $[-\pi, \pi]$ *(за исключением, может быть, конечного числа точек) ряд* $\frac{q_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} q_k \cos kx + s_k \sin kx$ *сходится к функции* $f(x)$.

При этом коэффициенты Фурье функции $f(x)$ *равны коэффициентам ряда, т.е.*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = q_0; \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = q_k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots;$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = s_k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Теперь сформулируем **третью теорему Юнга**.

Теорема. *Если коэффициенты ряда* $\frac{q_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} q_k \cos kx$

- *монотонно убывая, стремятся к нулю;*
- *разности соседних коэффициентов также монотонно убывают,*

т.е.

$$q_k \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty;$$

$$\Delta_k = q_k - q_{k+1} \geqslant 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots; \tag{1}$$

$$\lambda_k = \Delta_k - \Delta_{k+1} \geqslant 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots; \tag{2}$$

то

1) *ряд сходится при всех* $x \in [-\pi, \pi]$, *кроме, может быть, точки* $x = 0$;
2) *сумма ряда в точках сходимости неотрицательна;*
3) *ряд является рядом Фурье своей суммы.*

Доказательство третьей теоремы Юнга начинается с использования идей, принадлежащих другим математикам, в частности, Абелю и Дирихле. А заключительная часть предложена самим Юнгом. В соответствии с этим доказательство разбито на три этапа. В разделах «Сходимость ряда» и «Лемма» изложены результаты, которые были известны до работ Юнга. Вклад самого Юнга соответствует разделу «Доказательство Юнга».

Когда теорема будет доказана, в разделе «Пример применения третьей теоремы Юнга» покажем, что ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kx}{\ln k}$ является рядом Фурье своей суммы.

2. Сходимость ряда

В теории рядов Фурье важное место занимают формулы упрощения ядер Дирихле и Фейера. Понимание соответствующих выкладок занимает меньше времени, чем поиск места в учебнике, где описаны эти выкладки. Поэтому, с целью экономии времени читателя, мы повторим классические способы упрощения выражений для ядер Дирихле и Фейера.

Упростим выражение для ядра Дирихле $D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \cos kx$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$ Воспользуемся формулой из тригонометрии

$$2\sin\alpha\cos\beta = -\sin(\beta-\alpha) + \sin(\alpha+\beta).$$

Пусть $0 < |x| \leqslant \pi$, тогда ($\sin\frac{x}{2} \neq 0$ и можно делить на $\sin\frac{x}{2}$)

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx =$$

$$= \left(\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\cos kx\right)\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \left(\sin\frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x + \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right]\right)\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} =$$

$$
\begin{aligned}
=\Bigg\{\sin\frac{x}{2}+\left(-\sin\left(1-\frac{1}{2}\right)x+\sin\left(1+\frac{1}{2}\right)x\right)+\\
+\left(-\sin\left(2-\frac{1}{2}\right)x+\sin\left(2+\frac{1}{2}\right)x\right)+\ \ldots+\\
+\left(-\sin\left(n-1-\frac{1}{2}\right)x+\sin\left(n-1+\frac{1}{2}\right)x\right)+\\
+\left(-\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x+\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\Bigg\}\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}=\\
=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}},\quad n=1,2,3,\ \ldots
\end{aligned}
$$

Положим $D_0(x)=\frac{1}{2}$, тогда только что полученная формула для $D_n(x)$ будет верна и при $n=0$:

$$
D_n(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}, \tag{3}
$$
$$
n=0,1,2,3,\ \ldots,\qquad 0<|x|\leqslant\pi
$$

(сумму $\sum\limits_{k=1}^{0}$ следует считать нулем). Заметим, что правая часть (3) не определена при $x=0$, а ядро Дирихле определено и непрерывно на всей числовой оси как сумма конечного числа непрерывных функций.

В классической теории рядов Фурье есть раздел, посвященный суммированию этих рядов методом средних арифметических. В нем доказывается теорема Фейера. Повторим первый этап доказательства этой теоремы, который состоит в упрощении выражения для ядра Фейера:

$$
\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}D_k(x).
$$

В разделе «Доказательство Юнга» нам потребуется выражение, равное ядру Фейера, умноженному на число $n+1$:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} D_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\,.$$

Преобразуем это выражение. Умножим и поделим на выражение $2\sin\frac{x}{2}$ (отличное от нуля при $0<|x|\leqslant\pi$) и воспользуемся формулой из тригонометрии

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\beta-\alpha) - \cos(\alpha+\beta).$$

Тогда

$$P_n(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right)\frac{1}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^2} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n}\cos\left(k+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)x\right)\frac{1}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^2} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n}\cos kx - \cos(k+1)x\right)\frac{1}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^2} =$$

$$= \Big\{(1-\cos x) + (\cos x - \cos 2x) + (\cos 2x - \cos 3x) + \ldots +$$

$$+(\cos(n)x - \cos(n+1)x)\Big\}\frac{1}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1-\cos(n+1)x}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^2}\,, \quad n = 0,1,2,3,\ \ldots \qquad (4)$$

Перейдем к оценкам. Известно, что $|\sin t| < |t|$ при любом $t \neq 0$. Получим оценку функции $|\sin t|$ снизу на отрезке $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Функция $\sin t$ выпукла вверх на отрезке $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Поэтому ее график проходит выше прямой, проходящей через крайние точки выпуклого участка, т.е. через точку $(0,0)$ и точку $\left(\frac{\pi}{2}\,,1\right)$. Эта прямая является графиком линейной функции $t\,\frac{2}{\pi}$. Поэтому

$$\frac{2}{\pi}\,|t| \leqslant |\sin t| \quad \text{при} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \tag{5}$$

Это — нижняя оценка функции $|\sin t|$.

Покажем, что ряд $\frac{q_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} q_k \cos kx$ сходится при $0 < |t| \leqslant \frac{\pi}{2}$. Это можно доказать используя признак Дирихле. Однако в разделе «Доказательство Юнга» нам потребуется выражение для частичных сумм рассматриваемого ряда, полученное с помощью преобразования Абеля. Как известно, признак Дирихле доказывается с помощью преобразования Абеля. Поэтому повторим доказательство признака Дирихле применительно к рассматриваемому ряду и "заодно" получим преобразование Абеля частичных сумм.

Для этого заметим, что $\frac{1}{2} = D_0(x)$ и $\cos nx = D_n(x) - D_{n-1}(x)$, $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ Преобразуем выражение для частичной суммы ряда. Для сокращения записи вместо $D_n(x)$ будем писать просто D_n. Имеем

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{q_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} q_k \cos kx = q_0 D_0 + \sum_{k=1}^{n} q_k (D_k - D_{k-1}) = \\ &= q_0 D_0 + q_1(D_1 - D_0) + q_2(D_2 - D_1) + q_3(D_3 - D_2) + \ldots + \\ &\quad + q_{n-1}(D_{n-1} - D_{n-2}) + q_n(D_n - D_{n-1}) = \\ &= (q_0 - q_1)D_0 + (q_1 - q_2)D_1 + (q_2 - q_3)D_2 + \ldots + \\ &\quad + (q_{n-1} - q_n)D_{n-1} + q_n D_n. \end{aligned} \tag{6}$$

Это равенство называется преобразованием Абеля суммы $\frac{q_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} q_k \cos kx$.

С целью применения критерия Коши оценим разность $S_{n+p}(x) - S_n(x)$, где n и p — произвольные натуральные числа. Используя (6), напишем выражение для частичной суммы порядка $n + p$:

$$\begin{aligned} S_{n+p}(x) &= (q_0 - q_1)D_0 + (q_1 - q_2)D_1 + (q_2 - q_3)D_2 + \ldots + \\ &+ (q_n - q_{n+1})D_n + (q_{n+1} - q_{n+2})D_{n+1} + (q_{n+2} - q_{n+3})D_{n+2} + \ldots + \end{aligned}$$

$$+(q_{n+p-2}-q_{n+p-1})D_{n+p-2}+(q_{n+p-1}-q_{n+p})D_{n+p-1}+q_{n+p}D_{n+p}.$$

Сравнивая выражения для $S_{n+p}(x)$ и $S_n(x)$, легко видеть, что

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)| =$$
$$= \Big| -q_nD_n+(q_n-q_{n+1})D_n+(q_{n+1}-q_{n+2})D_{n+1}+\ \ldots +$$
$$+(q_{n+p-2}-q_{n+p-1})D_{n+p-2}+(q_{n+p-1}-q_{n+p})D_{n+p-1}+q_{n+p}D_{n+p}\Big| \leqslant$$
$$\leqslant |-q_nD_n+(q_n-q_{n+1})D_n|+|(q_{n+1}-q_{n+2})D_{n+1}|+\ \ldots +$$
$$+|(q_{n+p-1}-q_{n+p})D_{n+p-1}|+|q_{n+p}D_{n+p}| \leqslant$$
$$\leqslant \Big\{ |q_{n+1}|+|q_{n+1}-q_{n+2}|+|q_{n+2}-q_{n+3}|+\ \ldots +$$
$$+|q_{n+p-2}-q_{n+p-1}|+|q_{n+p-1}-q_{n+p}|+|q_{n+p}|\Big\} \max_{n\leqslant k\leqslant n+p} |D_k| =$$
$$= \Big\{ q_{n+1}+(q_{n+1}-q_{n+2})+(q_{n+2}-q_{n+3})+\ \ldots +$$
$$+(q_{n+p-2}-q_{n+p-1})+(q_{n+p-1}-q_{n+p})+q_{n+p}\Big\} \max_{n\leqslant k\leqslant n+p} |D_k| =$$
$$= 2q_{n+1} \max_{n\leqslant k\leqslant n+p} |D_k|. \quad (7)$$

Все знаки модуля можно опустить, поскольку разности соседних коэффициентов неотрицательны по условию теоремы, а сами коэффициенты неотрицательны в силу их монотонного убывания и стремления к нулю.

Зафиксируем произвольное число $\delta \in (0,\pi]$. Оценка (7) получена при условии $0<|x|\leqslant\pi$. Продолжим процесс оценивания при $x\in[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$. Тогда

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)| \leqslant 2q_{n+1} \max_{n\leqslant k\leqslant n+p} |D_k| =$$
$$= 2q_{n+1} \max_{n\leqslant k\leqslant n+p} \left| \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} \right| \leqslant q_{n+1}\frac{1}{\left|2\sin\frac{x}{2}\right|} \leqslant$$
$$\leqslant q_{n+1}\frac{1}{2\sin\frac{\delta}{2}}. \quad (8)$$

Правая часть полученной оценки не зависит от x и от p. Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. Стремление коэффициентов q_n к нулю при $n \to \infty$ позволяет заключить, что для $\hat{\varepsilon} = \varepsilon 2 \sin \frac{\delta}{2} > 0$ существует $N_{\hat{\varepsilon}}$ такое, что для любого $n > N_{\hat{\varepsilon}}$ выполняется неравенство $|q_n| < \hat{\varepsilon}$. Поэтому оценка (8) для любого натурального $n > N_{\hat{\varepsilon}}$, для любого натурального p и для любого$x \in [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ дает

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| \leqslant \hat{\varepsilon} \, \frac{1}{2 \sin \frac{\delta}{2}} = \varepsilon.$$

По критерию Коши равномерной сходимости рядов это означает, что ряд сходится равномерно по $x \in [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$, где $\delta \in (0, \pi]$.

Из полученного результата не следует равномерная сходимость по $x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi]$. Однако, поскольку нет ограничения на близость к нулю числа

$$\delta \in (0, \pi],$$

ряд сходится в обычном смысле при любом (фиксированном) $x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi]$.

Поэтому можно ввести в рассмотрение функцию $f(x)$, которая при $x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi]$ является суммой рассматриваемого ряда:

$$f(x) = \frac{q_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} q_k \cos kx, \quad x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi].$$

Проведенные нами исследования не позволяют сделать никаких выводов о сходимости ряда в точке $x = 0$.

Следствием равномерной сходимости ряда из непрерывных функций является непрерывность $f(x)$ при $x \in [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$. Снова вспоминая, что нет ограничения на близость к нулю числа $\delta \in (0, \pi]$, приходим к выводу: функция $f(x)$ непрерывна во всех точках $x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi]$.

Напомним, что под сходимостью и равномерной сходимостью ряда понимается соответствующая сходимость последовательности его частичных сумм. Подытожим в этих терминах результаты раздела. (Обычная и равномерная сходимости имеют место на разных множествах!)

При любом фиксированном $x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi]$ последовательность $S_n(x)$ сходится к $f(x)$, т.е. $f(x) = \frac{q_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} q_k \cos kx$.

Последовательность $S_n(x)$ равномерно по $x \in [-\pi, -\delta] \cup$ $\cup [\delta, \pi]$ сходится к $f(x)$, если $0 < \delta \leqslant \pi$.

Следствием равномерной сходимости ряда из непрерывных функций является непрерывность $f(x)$ при $x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi]$. Значит, если $f(x)$ и имеет особенность, то только в точке 0.

3. Лемма

Обратим внимание, что при формулировке этой леммы перечисляются те же свойства чисел q_k, которые сформулированы для коэффициентов q_k в условиях теоремы Юнга.

Лемма. *Если* q_k, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ *таковы, что*

$$q_k \to 0 \quad \textit{при} \quad k \to \infty$$

и

$$\Delta_k = q_k - q_{k+1} \geqslant 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$
$$\lambda_k = \Delta_k - \Delta_{k+1} \geqslant 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

то

$$k\,\Delta_k \to 0 \quad \textit{при} \quad k \to \infty. \tag{9}$$

Докажем эту лемму. Основной момент доказательства становится очевидным из рисунка, который предлагаем читателю сделать самостоятельно. Нужно отметить на числовой прямой точку 0 и (правее) точку q_0. Между этими точками отметить несколько точек q_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$ Они сгущаются к точке 0. Чем больше номер, тем левее точка. Расстояния между соседними точками — это Δ_k. Следующее рассуждение лучше понимать, сверяя выкладки с рисунком. Выберем произвольное натуральное число m и рассмотрим (неотрицательную) разность $q_m - q_{2m}$. Эта разность есть сумма соответствующих Δ_k. Их количество — m, а самым малым из них будет

$$\Delta_{2m-1} = q_{2m-1} - q_{2m}.$$

Поэтому $q_m - q_{2m} = (q_m - q_{m+1}) + (q_{m+1} - q_{m+2}) + (q_{m+2} - q_{m+3}) + \ldots + (q_{2m-1} - q_{2m}) =$

$$= \Delta_m + \Delta_{m+1} + \Delta_{m+2} + \ldots + \Delta_{2m-1} \geqslant m\Delta_{2m-1} \geqslant 0.$$

Левая часть $(q_m - q_{2m}) \to 0$ при $m \to \infty$, поскольку $q_k \to 0$ при $k \to \infty$. И по теореме о зажатой последовательности имеем

$$m\Delta_{2m-1} \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty. \tag{10}$$

Далее,

$$(2m-1)\Delta_{2m-1} = \frac{(2m-1)}{m} \cdot (m\Delta_{2m-1}) \to 2 \cdot 0 = 0 \text{ при } m \to \infty.$$

Итак, утверждение леммы доказано для нечетных номеров.

Воспользуемся (10) еще раз. В силу монотонности

$$\Delta_{2m} \leqslant \Delta_{2m-1}.$$

Поэтому для четных номеров имеем

$$(2m)\Delta_{2m} \leqslant 2m\Delta_{2m-1} =$$
$$= (2m-1)\Delta_{2m-1} + \Delta_{2m-1} \to 0 + 0 = 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Лемма доказана.

(Идея доказательства заимствована из [1].)

4. Доказательство Юнга

В этом разделе иногда для сокращения записи вместо $D_k(x)$ и $P_k(x)$ будем писать просто D_k и P_k.

В разделе «Сходимость ряда» с помощью преобразования Абеля была получена формула (6) для частичной суммы ряда. Перепишем ее, используя обозначение из формулировки теоремы $\Delta_k = q_k - q_{k+1}$:

$$S_n(x) = (q_0 - q_1)D_0 + (q_1 - q_2)D_1 + (q_2 - q_3)D_2 + \ldots +$$
$$+ (q_{n-1} - q_n)D_{n-1} + q_nD_n =$$
$$= \Delta_0D_0 + \Delta_1D_1 + \Delta_2D_2 + \ldots + \Delta_{n-1}D_{n-1} + q_nD_n.$$

Применим преобразование Абеля еще раз. Для этого вспомним определение P_k и заметим, что

$$D_0 = P_0 \quad \text{и} \quad D_k = \sum_{i=0}^{k} D_i - \sum_{i=0}^{k-1} D_i = P_k - P_{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \ \ldots$$

Преобразуем выражение

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \Delta_0 D_0 + \Delta_1 D_1 + \Delta_2 D_2 + \ \ldots + \\ &\qquad + \Delta_{n-2} D_{n-2} + \Delta_{n-1} D_{n-1} + q_n D_n = \\ &= \Delta_0 P_0 + \Delta_1 (P_1 - P_0) + \Delta_2 (P_2 - P_1) + \ \ldots + \\ &\qquad + \Delta_{n-2}(P_{n-2} - P_{n-3}) + \Delta_{n-1}(P_{n-1} - P_{n-2}) + q_n D_n = \\ &= P_0(\Delta_0 - \Delta_1) + P_1(\Delta_1 - \Delta_2) + P_2(\Delta_2 - \Delta_3) + \ \ldots + \\ &\qquad + P_{n-2}(\Delta_{n-2} - \Delta_{n-1}) + \Delta_{n-1} P_{n-1} + q_n D_n. \end{aligned}$$

Используя обозначение из формулировки теоремы $\lambda_k = \Delta_k - \Delta_{k+1}$, запишем

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-2} P_k \lambda_k + \Delta_{n-1} P_{n-1} + q_n D_n. \tag{11}$$

Рассмотрим отдельно два последних слагаемых в (11). (Заметим, что поскольку $q_n \to 0$ при $n \to \infty$, то и $\Delta_n = q_n - q_{n+1} \to 0$ при $n \to \infty$.)

Зафиксируем произвольное число $\delta \in (0, \pi]$. Для любого $x \in [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ верны оценки ($n \geqslant 1$)

$$\begin{aligned} 0 \leqslant |\Delta_{n-1} P_{n-1}| &= \Delta_{n-1} \frac{1 - \cos((n-1)+1)x}{\left(2 \sin \frac{x}{2}\right)^2} \leqslant \\ &\leqslant \Delta_{n-1} \frac{2}{\left(2 \sin \frac{x}{2}\right)^2} \leqslant \Delta_{n-1} \frac{2}{\left(2 \sin \frac{\delta}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

и

$$0 \leqslant |q_n D_n| = q_n \left| \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x}{2 \sin \frac{x}{2}} \right| \leqslant q_n \left| \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \right| \leqslant q_n \frac{1}{2 \sin \frac{\delta}{2}} \,.$$

Правые части этих оценок не зависят от x и стремятся к нулю при $n \to \infty$. Это значит, что два последних слагаемых в (11) равномерно по $x \in [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ стремятся к нулю при $n \to \infty$.

В разделе «Сходимость ряда» было доказано, что и левая часть (11) равномерно по $x \in [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ стремится к $f(x)$ при $n \to \infty$.

Основываясь на равномерной сходимости трех из четырех членов равенства (11), заключим, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} P_k \lambda_k$ также равномерно по $x \in [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ сходится и сходится к $f(x)$.

Поскольку нет ограничения на близость к нулю числа $\delta \in$ $\in (0, \pi]$, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} P_k \lambda_k$ сходится к функции $f(x)$ в обычном смысле при любом (фиксированном) $x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi]$.

Частичные суммы n-го порядка у рядов $\frac{q_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} q_k \cos kx$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} P_k \lambda_k$ могут не совпадать, но суммы рядов при $x \in [-\pi, 0) \cup$ $\cup (0, \pi]$ совпадают и равны $f(x)$, т.е.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k \lambda_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 - \cos(k+1)x}{\left(2 \sin \frac{x}{2}\right)^2} \lambda_k. \tag{12}$$

Дальнейшее исследование $f(x)$ будем проводить, используя это представление. Поскольку все члены ряда (12) неотрицательны, то $f(x) \geqslant 0$ при $x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi]$.

Поэтому обычная и абсолютная сходимости несобственного интеграла

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

совпадают. В силу четности достаточно установить сходимость несобственного интеграла

$$\int_{0}^{\pi} f(x)\, dx.$$

Существование интеграла Римана $I(\delta) = \int_{\delta}^{\pi} f(x)\, dx$ для $\delta \in$ $\in (0, \pi]$ следует из непрерывности $f(x)$ на отрезке $[\delta; \pi]$ (см. конец раздела «Сходимость ряда»). Функция $f(x)$ может иметь особенность только в точке $x = 0$. Поэтому (по определению), чтобы доказать сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^\pi f(x)\,dx,$$

нужно доказать существование конечного предела функции $I(\delta) = \int_\delta^\pi f(x)\,dx$ при $\delta \to +0$. Докажем, что такой предел существует.

Зафиксируем произвольное число $\delta \in (0, \pi]$. Воспользуемся равномерной сходимостью ряда (12) на отрезке $[\delta; \pi]$. Для $\varepsilon =$ $= 1$ существует такое $N_1 (= N_\varepsilon)$, что при всех $x \in [\delta, \pi]$ и для всех $n > N_1$ частичные суммы ряда (12) порядка n будут отличаться от $f(x)$ менее чем на $\varepsilon = 1$. Для каждого такого $n > N_1$ будет верна оценка

$$f(x) < 1 + \sum_{k=0}^{n} P_k \lambda_k, \quad x \in [\delta, \pi].$$

Далее,

$$I(\delta) = \int_\delta^\pi f(x)\,dx \leqslant \int_\delta^\pi \left(1 + \sum_{k=0}^{n} P_k \lambda_k\right) dx =$$

$$= (\pi - \delta) + \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot \int_\delta^\pi P_k\,dx \leqslant \pi + \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot \int_\delta^\pi P_k(x)\,dx.$$

Выражения для функций $P_k(x)$ преобразуем, вспомнив определения $P_n(x)$ и $D_n(x)$:

$$P_k(x) = \sum_{i=0}^{k} D_i(x) = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{k} D_i(x) =$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{i} \cos jx\right) \qquad (13)$$

(сумму $\sum\limits_{i=1}^{0}()$ следует считать нулем).

Заметим, что формула (13) получена по определению и верна при любых x, а не только при $x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi]$. Поэтому при всех $k = 0, 1, 2, \ldots$ функции $P_k(x)$ непрерывны и, следовательно, интегрируемы на $[0,\pi]$; в силу неотрицательности функций $P_k(x)=\dfrac{1-\cos(k+1)x}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^2}$ верны неравенства

$$\int_\delta^\pi P_k(x)\,dx \leqslant \int_0^\pi P_k(x)\,dx, \quad k=0,1,2,\,\ldots;$$

поскольку все интегралы $\int_0^\pi$ от косинусов в (13) равны нулю, то

$$\int_0^\pi P_k(x)\,dx = \left(\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2}\right)\int_0^\pi 1\,dx = \frac{k+1}{2}\,\pi, \quad k=0,1,2,\,\ldots$$

Продолжим оценивание $I(\delta)$

$$I(\delta)\leqslant \pi+\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\cdot\int_\delta^\pi P_k(x)\,dx \leqslant \pi+\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\cdot\int_0^\pi P_k(x)\,dx =$$

$$=\pi+\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\,\frac{k+1}{2}\,\pi=\frac{\pi}{2}\left\{2+\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\cdot(k+1)\right\}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big\{2+\lambda_0\cdot(0+1)+\lambda_1\cdot(1+1)+\lambda_2\cdot(2+1)+\,\ldots+$$

$$+\lambda_{n-1}\cdot(n-1+1)+\lambda_n\cdot(n+1)\Big\}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big\{2+(\Delta_0-\Delta_1)\cdot(0+1)+(\Delta_1-\Delta_2)\cdot(1+1)+$$

$$+(\Delta_2-\Delta_3)\cdot(2+1)+\,\ldots+(\Delta_{n-1}-\Delta_n)\cdot(n-1+1)+$$

$$+(\Delta_n-\Delta_{n+1})\cdot(n+1)\Big\}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big\{2+(\Delta_0+\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+\,\ldots+\Delta_n)-\Delta_{n+1}\cdot(n+1)\Big\}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big\{2+(q_0-q_{n+1})-\Delta_{n+1}\cdot(n+1)\Big\}.$$

Таким образом,

$$I(\delta)\leqslant\frac{\pi}{2}\left\{2+(q_0-q_{n+1})-\Delta_{n+1}\cdot(n+1)\right\}. \tag{14}$$

Это выражение не зависит от δ. В разделе «Лемма» доказано, что последнее слагаемое в фигурных скобках стремится к нулю при $n\to\infty$. Последовательность q_{n+1} стремится к нулю согласно условиям теоремы. При этом интеграл $I(\delta)$ не зависит от n. Следовательно, он ограничен сверху пределом правой части (14) при $n \to \infty$, который равен $\frac{\pi}{2}(2+q_0)$. Для дальнейшего важно лишь то, что $I(\delta)$ ограничен сверху конечным числом для всех $\delta \in (0,\pi]$.

Поскольку $f(x) \geqslant 0$, определенный интеграл

$$I(\delta) = \int_\delta^\pi f(x)\,dx, \quad 0 < \delta \leqslant \pi$$

может только увеличиваться по мере приближения δ к нулю. В этой ситуации из ограниченности сверху $I(\delta)$ для всех $\delta \in (0,\pi]$ следует существование конечного предела функции $I(\delta)$ при $\delta \to +0$, что по определению и есть сходимость интеграла $\int_0^\pi f(x)\,dx$ в несобственном смысле.

Поскольку $f(x) \geqslant 0$, это означает абсолютную сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^\pi f(x)\,dx,$$

а в силу четности — абсолютную сходимость несобственного интеграла

$$\int_{-\pi}^\pi f(x)\,dx.$$

Итак, $f(x)$ — абсолютно интегрируема на $[-\pi,\pi]$ и ей можно поставить в соответствие ряд Фурье. Осталось доказать, что коэффициенты Фурье этой функции равны соответствующим коэффициентам ряда $\frac{q_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} q_k \cos kx$.

Приступим к вычислению коэффициентов Фурье функции $f(x)$. Эта функция не определена в нуле. Ее можно доопределить в нуле любым числом и при этом значения коэффициентов Фурье не поменяются. Положим $f(0)=0$.

В силу четности $f(x)$ имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)\sin kx\,dx = 0, \quad k = 1,2,3,\ \ldots$$

В разделе «Сходимость ряда» показано, что при $x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi]$ исследуемый нами ряд сходится и

$$f(x) = \frac{q_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} q_k \cos kx.$$

Напомним, что при суммировании такого ряда переменную x следует считать зафиксированной. Выберем произвольное натуральное число l, которое также не будем менять в процессе суммирования ряда. Умножение всех членов сходящегося ряда на $(1 - \cos lx)$, т.е. на величину, не меняющуюся в процессе суммирования, оставляет ряд сходящимся. При этом сумма ряда умножается на $(1 - \cos lx)$, т.е.

$$f(x) \cdot (1 - \cos lx) = \frac{q_0}{2} \cdot (1 - \cos lx) + \sum_{k=1}^{\infty} q_k \cdot \cos kx \cdot (1 - \cos lx).$$

При $x = 0$ множитель $(1 - \cos lx)$ обращается в ноль. А ряд $\frac{q_0}{2}(1 - \cos lx) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} q_k \cdot \cos kx \cdot (1 - \cos lx)$ сходится и равен нулю (т.к. состоит из нулей). Поэтому ряд

$$\frac{q_0}{2}(1 - \cos lx) + \sum_{k=1}^{\infty} q_k \cdot \cos kx \cdot (1 - \cos lx)$$

сходится не только при $x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi]$, но и при $x = 0$, и равенство

$$f(x) \cdot (1 - \cos lx) = \frac{q_0}{2}(1 - \cos lx) + \sum_{k=1}^{\infty} q_k \cdot \cos kx \cdot (1 - \cos lx)$$

является верным при всех $x \in [-\pi, \pi]$ и $l = 1, 2, 3, \ldots$

Если обозначить частичные суммы этого ряда $\hat{S}_n(x)$, то при $x \in [-pi, 0) \cup (0, \pi]$ формула (7) дает

$$|\hat{S}_{n+p}(x) - \hat{S}_n(x)| \leqslant 2q_{n+1} \max_{n \leqslant k \leqslant n+p} |D_k(x) \cdot (1 - \cos lx)|.$$

Но

$$|D_k(x) \cdot (1 - \cos lx)| \leqslant \frac{1}{2\left|\sin \frac{x}{2}\right|}(1 - \cos lx) =$$

$$= \frac{\sin^2\left(\frac{lx}{2}\right)}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \overset{(5)}{\leqslant} \frac{\sin^2\left(\frac{lx}{2}\right)}{\frac{|x|}{\pi}} \leqslant \frac{\left(\frac{lx}{2}\right)^2}{\frac{|x|}{\pi}} = \frac{l^2\pi|x|}{4} \leqslant \frac{l^2\pi^2}{4},$$

поэтому

$$|\hat{S}_{n+p}(x) - \hat{S}_n(x)| \leqslant 2q_{n+1}\,\frac{l^2\pi^2}{4}\,.$$

Поскольку $\hat{S}_{n+p}(0) = \hat{S}_n(0) = 0$, последняя оценка верна и при $x = 0$. Т.е. верна для всех $x \in [-\pi, \pi]$. Повторив рассуждения, которые приведены после формулы (8), сделаем следующее заключение. При фиксированном l ряд $\frac{q_0}{2}(1-\cos lx) + {} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} q_k \cdot \cos kx(1-\cos lx)$ равномерно по $x \in [-\pi, \pi]$ сходится (по критерию Коши). Значит, его можно почленно интегрировать на отрезке $[-\pi, \pi]$. Учитывая четность подынтегральной функции, имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot(1-\cos lx)\,dx = 2\int_0^{\pi} f(x)\cdot(1-\cos lx)\,dx =$$
$$= 2\int_0^{\pi}\frac{q_0}{2}(1-\cos lx)\,dx + 2\sum_{k=1}^{\infty} q_k \cdot \int_0^{\pi}\cos kx(1-\cos lx)\,dx =$$
$$= 2\int_0^{\pi}\frac{q_0}{2}\,dx - 2q_l\int_0^{\pi}\cos^2 lx\,dx = q_0\pi - q_l\pi.$$

С другой стороны,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot(1-\cos lx)\,dx =$$
$$= 2\int_0^{\pi} f(x)\,dx - 2\int_0^{\pi} f(x)\cos lx\,dx = \pi a_0 - \pi a_l,$$

где a_0, a_l — коэффициенты Фурье нашей функции при косинусах с номерами 0 и l соответственно. Поэтому

$$q_0\pi - q_l\pi = \pi a_0 - \pi a_l. \tag{15}$$

Коэффициенты q_l по условию теоремы, а коэффициенты a_l по теореме Римана стремятся к нулю при $l \to \infty$. Значит, $q_0 = a_0$. После этого формула (15) дает $q_l = a_l$.

Третья теорема Юнга доказана.

5. Пример применения третьей теоремы Юнга

Докажем, что ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kx}{\ln k}$ является рядом Фурье своей суммы. Неравенства в условиях (1) и (2) выполнены для $k = 2, 3, 4 \ldots$ В этом можно убедиться, проверив знаки первой и второй производных у функции $\frac{1}{\ln t}$ при $t \geqslant 2$. Однако при $k = 0, 1$ эти неравенства нарушены (соответствующие коэффициенты равны нулю).

Изменим эти два коэффициента, сделав линейную экстраполяцию. Расположим точки $(0, q_0)$ и $(1, q_1)$ на одной прямой с точками $(2, q_2)$ и $(3, q_3)$. Тогда

$$\Delta_0 = \Delta_1 = \Delta_2 = q_0 - q_1 = q_1 - q_2 = q_2 - q_3 = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3}$$

(здесь учтено, что $q_2 = \frac{1}{\ln 2}$ и $q_3 = \frac{1}{\ln 3}$).

Т.е. положим

$$q_1 = \frac{1}{\ln 2} + \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3}\right) = \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3},$$
$$q_0 = q_1 + \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3}\right) = \frac{3}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 3}.$$

Неравенства в условиях (1), (2) при таком выборе q_0 и q_1 оказываются выполненными для $k = 0, 1$. Действительно,

$$\Delta_0 = q_0 - q_1 = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} > 0,$$
$$\Delta_1 = q_1 - q_2 = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} > 0$$

и

$$\lambda_0 = \Delta_0 - \Delta_1 = 0,$$
$$\lambda_1 = \Delta_1 - \Delta_2 = 0.$$

Итак, условия (1), (2) выполнены. По третьей теореме Юнга ряд

$$\frac{q_0}{2} + q_1 \cos x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kx}{\ln k} = \frac{q_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} q_k \cos kx \qquad (16)$$

сходится при $x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi]$ и является рядом Фурье своей суммы $f(x)$. Ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kx}{\ln k}$ также сходится при $x \in [-\pi, 0) \cup \cup (0, \pi]$ как остаток ряда (16). Суммы этих рядов при $x \in \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi]$ отличаются на непрерывную функцию

$$\frac{q_0}{2} + q_1 \cos x.$$

Значит, сумма ряда $g(x) = \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kx}{\ln k}$ также абсолютно интегрируема на $[-\pi, \pi]$ и

$$g(x) = f(x) - \frac{q_0}{2} - q_1 \cos x.$$

Вычислим коэффициенты Фурье функции $g(x)$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Big(f(x) - \frac{q_0}{2} - q_1 \cos x\Big)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{q_0}{2}\,dx - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} q_1 \cos x\,dx =$$

$$= q_0 - \frac{1}{\pi}\,\frac{q_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx - \frac{1}{\pi}\,q_1\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,dx = q_0 - q_0 - 0 = 0;$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos 1x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Big(f(x) - \frac{q_0}{2} - q_1 \cos x\Big)\cos x\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\,dx - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{q_0}{2}\cos x\,dx - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} q_1 \cos x \cos x\,dx =$$

$$= q_1 - 0 - q_1 = 0;$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Big(f(x) - \frac{q_0}{2} - q_1 \cos x\Big)\cos kx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{q_0}{2}\cos kx\,dx - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} q_1 \cos x \cos kx\,dx =$$

$$= q_k - 0 - 0 = q_k = \frac{1}{\ln k}, \quad k = 2, 3, 4, \ \ldots$$

Т.е. нулевой и первый коэффициенты Фурье при косинусах у функции $g(x)$ равны нулю, а при $k = 2, 3, 4 \ldots$ — равны $\frac{1}{\ln k}$. Коэффициенты при синусах равны нулю в силу четности $g(x)$.

Таким образом, проверены все условия того, что ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kx}{\ln k}$ является рядом Фурье своей суммы.

6. Вопросы и задачи для самопроверки

1. Найти места в доказательстве, в которых используется условие $\lambda_k = \Delta_k - \Delta_{k+1} \geqslant 0$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

   Ответ. При доказательстве леммы. А именно, предложение: «Их количество — m, а самым малым из них будет $\Delta_{2m-1} = q_{2m-1} - q_{2m}$». А также в конце доказательства леммы неравенство $\Delta_{2m} \leqslant \Delta_{2m-1}$.

   В «Доказательстве Юнга». При выводе о том, что $f(x) \geqslant 0$ (после формулы (12)).

   При обосновании неравенства $\pi + \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot \int_{\delta}^{\pi} P_k(x)\,dx \leqslant \pi +$ $+ \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot \int_{0}^{\pi} P_k(x)\,dx$.

2. Найти места в доказательстве, в которых используется условие

$$\Delta_k = q_k - q_{k+1} \geqslant 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

   Ответ. В разделе сходимость ряда. При опускании знаков модуля в формуле (7).

   При доказательстве леммы. Для обоснования неравенства

$$\Delta_m + \Delta_{m+1} + \Delta_{m+2} + \ldots + \Delta_{2m-1} \geqslant m\Delta_{2m-1} \geqslant 0.$$

3. Пусть коэффициенты q_k удовлетворяют условиям теоремы. Доказать, что ряд $\frac{q_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} q_k \cos kx$ сходится к неотрицательной функции на всей числовой оси, кроме, может быть, точек вида $x = 2\pi i$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

   Указание. Воспользоваться 2π-периодичностью косинусов, составляющих ряд.

4. Пусть коэффициенты q_k удовлетворяют условиям теоремы. Изменим все коэффициенты с нечетными номерами — положим их равными нулю. (При этом усло-

вия (1) и (2), вообще говоря, нарушатся.) Доказать, что "новый" ряд $\frac{q_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} q_{2k} \cos 2kx$ сходится к неотрицательной функции на всей числовой оси, кроме, может быть, точек вида $x = \pi i$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ \ldots$

У к а з а н и е. Сделать замену $t = 2x$ и воспользоваться результатом предыдущей задачи.

Литература

1. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. – М.: Физматлит, 2002.
2. *Бесов О.В.* Лекции по математическому анализу. – М.: МФТИ, 2005.
3. *Иванов Г.Е.* Лекции по математическому анализу. – М.: МФТИ, 2000.
4. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. В 3 т. – М.: Высш. шк., 1989.
5. *Никольский С.М.* Курс математического анализа. – М.: Наука, 1983.
6. *Петрович А.Ю.* Лекции по математическому анализу. – М.: МФТИ, 2013.
7. *Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И.* Курс математического анализа. – М.: МФТИ, 1997; М.: Физматлит, 1988.
8. *Яковлев Г.Н.* Лекции по математическому анализу. – М.: Физматлит, 2001.

Тираж 200 экз. Заказ № 97