О ЗАМЕНЕ ПЕРЕМЕННЫХ В УРАВНЕНИЯХ ЛАГРАНЖА

А.П.Маркеев

1. Предварительные замечания. Рассмотрим материальную систему с n степенями свободы, движение которой описывается уравнениями Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad i = 1, 2, ..., n. \tag{1.1}$$

Здесь $q_i\,(i = 1, 2..., n)$ — обобщенные координаты, время t — независимая переменная, $\dot{q}_i = dq_i/dt\,(i = 1, 2..., n)$ — обобщенные скорости, L — функция Лагранжа,

$$L = L(q_1, ..., q_n, \dot{q}_1, ...\dot{q}_n, t). \tag{1.2}$$

Перейдем в уравнениях движения (1.1) от "старых" координат $q_1, ..., q_n$ и "старого" времени t к "новым" координатам $\tilde{q}_1, ..., \tilde{q}_n$ и "новому" времени $\tilde{t}$ по формулам

$$q_i = q_i(\tilde{q}_1, ..., \tilde{q}_n, \tilde{t}), \quad t = t(\tilde{q}_1, ..., \tilde{q}_n, \tilde{t}), \qquad i = 1, 2, ..., n. \tag{1.3}$$

Функции q_i и t из правых частей этих формул предполагаем дважды непрерывно дифференцируемыми по всем переменным $\tilde{q}_1, ..., \tilde{q}_n, \tilde{t}$, а их якобиан J считаем отличным от нуля,

$$J = \frac{D(q_1, ..., q_n, t)}{D(\tilde{q}_1, ..., \tilde{q}_n, \tilde{t})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial \tilde{q}_1} & ... & \frac{\partial q_1}{\partial \tilde{q}_n} & \frac{\partial q_1}{\partial \tilde{t}} \\ . & ... & . & . \\ \frac{\partial q_n}{\partial \tilde{q}_1} & ... & \frac{\partial q_n}{\partial \tilde{q}_n} & \frac{\partial q_n}{\partial \tilde{t}} \\ \frac{\partial t}{\partial \tilde{q}_1} & ... & \frac{\partial t}{\partial \tilde{q}_n} & \frac{\partial t}{\partial \tilde{t}} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1.4}$$

При выполнении условия (1.4) равенства (1.3) однозначно разрешимы относительно "новых" переменных, причем $\tilde{q}_1, ..., \tilde{q}_n, \tilde{t}$ будут дважды непрерывно дифференцируемы по "старым" переменным $q_1, ..., q_n, t$ [1].

Величины $d\tilde{q}_k/d\tilde{t}$ $(k = 1, 2, ..., n)$ назовем обобщенными скоростями, соответствующими новым переменным. Найдем выражение "старых" обобщенных скоростей $\dot{q}_i$ через "новые" обобщенные скорости $d\tilde{q}_k/d\tilde{t}$. Дифференцируя второе из равенств (1.3) по $\tilde{t}$, находим полную производную t по "новому" времени $\tilde{t}$:

$$\frac{dt}{d\tilde{t}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial t}{\partial \tilde{q}_k}\frac{d\tilde{q}_k}{d\tilde{t}} + \frac{\partial t}{\partial \tilde{t}}\ . \tag{1.5}$$

Аналогично, первое из равенств (1.3) дает соотношение

$$\frac{dq_i}{d\tilde{t}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial \tilde{q}_k}\frac{d\tilde{q}_k}{d\tilde{t}} + \frac{\partial q_i}{\partial \tilde{t}}\ , \qquad i = 1, 2, ..., n. \tag{1.6}$$

Из (1.5) и (1.6) следуют искомые выражения для обобщенных скоростей $\dot{q}_i$:

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} = \frac{\frac{dq_i}{d\tilde{t}}}{\frac{dt}{d\tilde{t}}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial \tilde{q}_k}\frac{d\tilde{q}_k}{d\tilde{t}} + \frac{\partial q_i}{\partial \tilde{t}}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial t}{\partial \tilde{q}_k}\frac{d\tilde{q}_k}{d\tilde{t}} + \frac{\partial t}{\partial \tilde{t}}}\ , \qquad i = 1, 2, ..., n. \tag{1.7}$$

Уравнения Лагранжа обладают свойством *ковариантности* по отношению к преобразованиям вида (1.3). Это означает, что при таких преобразованиях *не изменяется форма* записи уравнений движения. Замены вида (1.3) изменяют только функцию Лагранжа: вместо "старой" функции Лагранжа (1.2) в преобразованных уравнениях будет "новая" функция

$$\tilde{L} = \tilde{L}(\tilde{q}_1, ..., \tilde{q}_n, \frac{d\tilde{q}_1}{d\tilde{t}}, ... \frac{d\tilde{q}_n}{d\tilde{t}}, \tilde{t}), \tag{1.8}$$

а преобразованные уравнения движения будут иметь такую же форму, как и исходные уравнения (1.1):

$$\frac{d}{d\tilde{t}}\ \frac{\partial \tilde{L}}{\partial\left(\frac{d\tilde{q}_j}{d\tilde{t}}\right)} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_j} = 0, \qquad j = 1, 2, ..., n. \tag{1.9}$$

Известно, что в преобразованных уравнениях движения (1.9) функция (1.8) м о ж е т быть задана равенством[1]

$$\tilde{L} = L(q_1, ..., q_n, \dot{q}_1, ... \dot{q}_n, t)\, \frac{dt}{d\tilde{t}}\ , \tag{1.10}$$

где в аргументах функции L величины q_i , t - правые части равенств (1.3), величины $\dot{q}_i$ вычисляются по формулам (1.7), а сомножитель $dt/d\tilde{t}$ в правой части равенства (1.10) задается соотношением (1.5).

Обоснование свойства ковариантности уравнений Лагранжа и вывод формулы (1.10) для функции Лагранжа преобразованных уравнений движения обычно делаются при помощи принципа Гамильтона (см., например, [3-5]). Соответствующие построения очень просты и изящны. Но представляет также интерес непосредственная проверка справедливости уравнений (1.9) с функцией $\tilde{L}$, вычисляемой по формуле (1.10). Соответствующее обоснование в случае, когда время t не преобразуется (т.е. в замене (1.3) $t = \tilde{t}$), можно найти в книгах $[6, 7]$.

[1] Набранное разрядкой слово "может" указывает, в частности, на то, что функция Лагранжа восстанавливается по уравнениям движения неоднозначно. Например, уравнения движения не изменятся, если к функции Лагранжа добавить полную производную по времени от произвольной дважды непрерывно дифференцируемой функции обобщенных координат и времени [2 - 4]

2. Вспомогательные соотношения. Справедливы следующие тождества:

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{q}_j}\ \frac{dq_i}{d\tilde{t}}=\frac{d}{d\tilde{t}}\ \frac{\partial q_i}{\partial\tilde{q}_j}\ ,\qquad \frac{\partial}{\partial\tilde{q}_j}\ \frac{dt}{d\tilde{t}}=\frac{d}{d\tilde{t}}\ \frac{\partial t}{\partial\tilde{q}_j}\ ,\qquad i,j=1,2,...,n. \tag{2.1}$$

Эти тождества сразу следуют из равенств (1.6) и (1.5), если при вычислении смешанных частных производных второго порядка функций q_i и t принять во внимание их непрерывность и , следовательно [1], перестановочность порядка дифференцирования по переменным $\tilde{q}_1,...,\tilde{q}_n,\tilde{t}$. Проверим, например, справедливость первого тождества из (2.1). Из равенств (1.6) имеем

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{q}_j}\ \frac{dq_i}{d\tilde{t}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 q_i}{\partial\tilde{q}_k\partial\tilde{q}_j}\frac{d\tilde{q}_k}{d\tilde{t}}+\frac{\partial^2 q_i}{\partial\tilde{t}\partial\tilde{q}_j}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 q_i}{\partial\tilde{q}_j\partial\tilde{q}_k}\frac{d\tilde{q}_k}{d\tilde{t}}+\frac{\partial^2 q_i}{\partial\tilde{q}_j\partial\tilde{t}}=\frac{d}{d\tilde{t}}\ \frac{\partial q_i}{\partial\tilde{q}_j}\,.$$

Отметим также следующие, полезные для дальнейшего, тождества:

$$\frac{\partial\dot{q}_i}{\partial\left(\frac{d\tilde{q}_j}{d\tilde{t}}\right)}\ \frac{dt}{d\tilde{t}}=\frac{\partial q_i}{\partial\tilde{q}_j}-\dot{q}_i\frac{\partial t}{\partial\tilde{q}_j}\ ,\qquad i,j=1,2,...,n. \tag{2.2}$$

Эти тождества получаются дифференцированием величин $\dot{q}_i$, задаваемых равенствами (1.7), по переменной $d\tilde{q}_j/d\tilde{t}$.

3. Ковариантность уравнений Лагранжа Для обоснования свойства ковариантности уравнений Лагранжа составим выражение для левых частей равенств (1.9). Предварительно заметим, что из (1.10),(1.5) и (2.2) следуют равенства

$$\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\left(\frac{d\tilde{q}_j}{d\tilde{t}}\right)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\ \frac{\partial\dot{q}_i}{\partial\left(\frac{d\tilde{q}_j}{d\tilde{t}}\right)}\ \frac{dt}{d\tilde{t}}+L\frac{\partial t}{\partial\tilde{q}_j}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\left(\frac{\partial q_i}{\partial\tilde{q}_j}-\dot{q}_i\frac{\partial t}{\partial\tilde{q}_j}\right)+L\frac{\partial t}{\partial\tilde{q}_j}\,, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\tilde{q}_j}=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial\tilde{q}_j}+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\frac{\partial\dot{q}_i}{\partial\tilde{q}_j}+\frac{\partial L}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial\tilde{q}_j}\right)\frac{dt}{d\tilde{t}}+L\frac{\partial}{\partial\tilde{q}_j}\ \frac{dt}{d\tilde{t}}\ ;\ j=1,2,...,n, \tag{3.2}$$

причем последнее слагаемое в (3.2), согласно второй группе тождеств (2.1), может быть заменено на $L\,d(\partial t/\partial\tilde{q}_j)/d\tilde{t}$. Следовательно

$$\frac{d}{d\tilde{t}}\ \frac{\partial\tilde{L}}{\partial\left(\frac{d\tilde{q}_j}{d\tilde{t}}\right)}-\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\tilde{q}_j}=\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{d\tilde{t}}\ \left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)\left(\frac{\partial q_i}{\partial\tilde{q}_j}-\dot{q}_i\frac{\partial t}{\partial\tilde{q}_j}\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\ \frac{d}{d\tilde{t}}\left(\frac{\partial q_i}{\partial\tilde{q}_j}-\dot{q}_i\frac{\partial t}{\partial\tilde{q}_j}\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{dq_i}{d\tilde{t}}+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\frac{d\dot{q}_i}{d\tilde{t}}+\frac{\partial L}{\partial t}\frac{dt}{d\tilde{t}}\right)\frac{\partial t}{\partial\tilde{q}_j}+L\frac{d}{d\tilde{t}}\left(\frac{\partial t}{\partial\tilde{q}_j}\right)-$$

$$
-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial \tilde q_j}+\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\frac{\partial \dot q_i}{\partial \tilde q_j}+\frac{\partial L}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \tilde q_j}\right)\frac{dt}{d\tilde t}-L\frac{\partial}{\partial \tilde q_j}\frac{dt}{d\tilde t}=
$$

$$
=\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\,\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)\frac{dt}{d\tilde t}\left(\frac{\partial q_i}{\partial \tilde q_j}-\dot q_i\frac{\partial t}{\partial \tilde q_j}\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\left(\frac{dq_i}{dt}\,\frac{dt}{d\tilde t}\frac{\partial t}{\partial \tilde q_j}-\frac{\partial q_i}{\partial \tilde q_j}\,\frac{dt}{d\tilde t}\right)+
$$

$$
+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\left[\frac{d}{d\tilde t}\left(\frac{\partial q_i}{\partial \tilde q_j}-\dot q_i\frac{\partial t}{\partial \tilde q_j}\right)+\frac{d\dot q_i}{d\tilde t}\frac{\partial t}{\partial \tilde q_j}-\frac{\partial \dot q_i}{\partial \tilde q_j}\frac{dt}{d\tilde t}\right],\qquad j=1,2,...n. \tag{3.3}
$$

Но выражение в квадратных скобках тождественно равняется нулю. Действительно, производя необходимые дифференцирования и пользуясь тождествами (2.1), получаем такую цепочку равенств:

$$
\frac{d}{d\tilde t}\left(\frac{\partial q_i}{\partial \tilde q_j}-\dot q_i\frac{\partial t}{\partial \tilde q_j}\right)+\frac{d\dot q_i}{d\tilde t}\frac{\partial t}{\partial \tilde q_j}-\frac{\partial \dot q_i}{\partial \tilde q_j}\frac{dt}{d\tilde t}=\frac{d}{d\tilde t}\left(\frac{\partial q_i}{\partial \tilde q_j}\right)-\frac{d\dot q_i}{d\tilde t}\frac{\partial t}{\partial \tilde q_j}-\dot q_i\frac{d}{d\tilde t}\frac{\partial t}{\partial \tilde q_j}+
$$

$$
+\frac{d\dot q_i}{d\tilde t}\frac{\partial t}{\partial \tilde q_j}-\frac{\partial \dot q_i}{\partial \tilde q_j}\frac{dt}{d\tilde t}=\frac{\partial}{\partial \tilde q_j}\left(\frac{dq_i}{d\tilde t}\right)-\dot q_i\frac{\partial}{\partial \tilde q_j}\left(\frac{dt}{d\tilde t}\right)-\frac{\partial \dot q_i}{\partial \tilde q_j}\frac{dt}{d\tilde t}=
$$

$$
=\frac{\partial}{\partial \tilde q_j}\left(\frac{dq_i}{d\tilde t}\right)-\frac{\partial}{\partial \tilde q_j}\left(\dot q_i\frac{dt}{d\tilde t}\right)=\frac{\partial}{\partial \tilde q_j}\left(\frac{dq_i}{d\tilde t}\right)-\frac{\partial}{\partial \tilde q_j}\left(\frac{dq_i}{d\tilde t}\right)=0\,.
$$

Поэтому соотношения (3.3) можно переписать в виде

$$
\frac{d}{d\tilde t}\;\frac{\partial \tilde L}{\partial\left(\frac{d\tilde q_j}{d\tilde t}\right)}-\frac{\partial \tilde L}{\partial \tilde q_j}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\;\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)\frac{dt}{d\tilde t}\left(\frac{\partial q_i}{\partial \tilde q_j}-\dot q_i\frac{\partial t}{\partial \tilde q_j}\right),\quad j=1,2,...n. \tag{3.4}
$$

Рассмотрим квадратную матрицу $\mathbf{A}$, элементы которой определяются равенствами

$$
a_{ij}=\frac{\partial q_i}{\partial \tilde q_j}-\dot q_i\frac{\partial t}{\partial \tilde q_j}\,,\qquad i,j=1,2,...n
$$

и покажем,что для якобиана (1.4) справедливо представление

$$
J=\frac{dt}{d\tilde t}\,\det\mathbf{A}\,. \tag{3.5}
$$

Для этого умножим каждый j - й столбец определителя (1.4) на производную $d\tilde q_j/d\tilde t$ $(j=1,2,...,n)$ и прибавим к $(n+1)$ - му его столбцу, а затем последнюю строку полученного определителя умножим на $\dot q_i$ и вычтем из i - й строки $(i=1,2,...,n)$ и, учтя соотношения $dq_i/d\tilde t=\dot q_i\,dt/d\tilde t$, упростим элементы последнего столбца. Эти преобразования приводят к таким равенствам:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial \tilde{q}_1} & \dots & \frac{\partial q_1}{\partial \tilde{q}_n} & \frac{dq_1}{d\tilde{t}} \\ . & \dots & . & . \\ \frac{\partial q_n}{\partial \tilde{q}_1} & \dots & \frac{\partial q_n}{\partial \tilde{q}_n} & \frac{dq_n}{d\tilde{t}} \\ \frac{\partial t}{\partial \tilde{q}_1} & \dots & \frac{\partial t}{\partial \tilde{q}_n} & \frac{dt}{d\tilde{t}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial \tilde{q}_1} - \dot{q}_1 \frac{\partial t}{\partial \tilde{q}_1} & \dots & \frac{\partial q_1}{\partial \tilde{q}_n} - \dot{q}_1 \frac{\partial t}{\partial \tilde{q}_n} & \frac{dq_1}{d\tilde{t}} - \dot{q}_1 \frac{dt}{d\tilde{t}} \\ . & \dots & . & . \\ \frac{\partial q_n}{\partial \tilde{q}_1} - \dot{q}_n \frac{\partial t}{\partial \tilde{q}_1} & \dots & \frac{\partial q_n}{\partial \tilde{q}_n} - \dot{q}_n \frac{\partial t}{\partial \tilde{q}_n} & \frac{dq_n}{d\tilde{t}} - \dot{q}_n \frac{dt}{d\tilde{t}} \\ \frac{\partial t}{\partial \tilde{q}_1} & \dots & \frac{\partial t}{\partial \tilde{q}_n} & \frac{dt}{d\tilde{t}} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial \tilde{q}_1} - \dot{q}_1 \frac{\partial t}{\partial \tilde{q}_1} & \dots & \frac{\partial q_1}{\partial \tilde{q}_n} - \dot{q}_1 \frac{\partial t}{\partial \tilde{q}_n} & 0 \\ . & \dots & . & . \\ \frac{\partial q_n}{\partial \tilde{q}_1} - \dot{q}_n \frac{\partial t}{\partial \tilde{q}_1} & \dots & \frac{\partial q_n}{\partial \tilde{q}_n} - \dot{q}_n \frac{\partial t}{\partial \tilde{q}_n} & 0 \\ \frac{\partial t}{\partial \tilde{q}_1} & \dots & \frac{\partial t}{\partial \tilde{q}_n} & \frac{dt}{d\tilde{t}} \end{vmatrix} .$$

Разложение последнего определителя по элементам $(n+1)$ - го столбца показывает справедливость представления (3.5) и поэтому условие (1.4) может быть записано в виде неравенства

$$\frac{dt}{d\tilde{t}} \det \mathbf{A} \neq 0.$$

Из соотношений (3.4) теперь сразу следует эквивалентность старых уравнений (1.1) и новых уравнений (1.9) (с функцией Лагранжа (1.10)).

4. Примеры

1. В уравнениях (1.1) с функцией Лагранжа $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ сделаем замену переменных (1.3) вида

$$q_i = \alpha_i \tilde{q}_i \,, \qquad t = \beta \tilde{t} \,, \qquad i = 1, 2, ..., n, \tag{4.1}$$

где $\alpha_i \,, \beta$ — постоянные величины. Такая замена связана с изменением масштаба длины, времени и т. д. и часто используется для записи уравнений движения в безразмерных переменных.

Из (1.5), (1.7) и (4.1) имеем

$$\frac{dt}{d\tilde{t}} = \beta \,, \qquad \dot{q}_i = \frac{\alpha_i}{\beta} \frac{d\tilde{q}_i}{d\tilde{t}} \,, \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

Уравнения (1.1) преобразуются в уравнения (1.9) с новой функцией Лагранжа $\tilde{L}$, вычисляемой по формуле

$$\tilde{L} = \beta \, L \left(\alpha_i \tilde{q}_i \,, \frac{\alpha_i}{\beta} \frac{d\tilde{q}_i}{d\tilde{t}} \,, \beta \tilde{t} \right) . \tag{4.2}$$

Впрочем, постоянный множитель β перед L можно было бы здесь опустить, так как две функции Лагранжа, отличающиеся постоянным множителем, порождают одинаковые уравнения движения.

2. Основываясь на замечании, сделанном в конце предыдущего примера, иногда можно получить важные заключения о некоторых свойствах движения материальной системы, не прибегая к интегрированию ее уравнений движения.

Для примера рассмотрим свободную материальную точку массы m, движущуюся относительно неподвижной системы координат в потенциальном поле сил. Положение точки задается ее декартовыми координатами x, y, z. Пусть потенциальная энергия $\Pi(x, y, z)$ точки — однородная функция степени k, т. е. при любых x, y, z имеет место равенство

$$\Pi\ (\alpha x, \alpha y, \alpha z) = \alpha^k\ \Pi\ (x, y, z). \tag{4.3}$$

Функция Лагранжа имеет вид

$$L = \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - \Pi\ (x, y, z). \tag{4.4}$$

Сделаем преобразование подобия

$$x = \alpha\tilde{x}, \qquad y = \alpha\tilde{y}, \qquad z = \alpha\tilde{z}, \qquad t = \beta\tilde{t}. \tag{4.5}$$

Из равенств (4.2),(4.3) получаем такое выражение для новой функции Лагранжа

$$\tilde{L} = \tfrac{\alpha^2}{\beta}\,\tfrac{1}{2}\,m\Big[\Big(\tfrac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}}\Big)^2 + \Big(\tfrac{d\tilde{y}}{d\tilde{t}}\Big)^2 + \Big(\tfrac{d\tilde{z}}{d\tilde{t}}\Big)^2\Big] - \beta\,\alpha^k\ \Pi(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}). \tag{4.6}$$

Если

$$\frac{\alpha^2}{\beta} = \beta\,\alpha^k\,, \tag{4.7}$$

то уравнения движения в новых переменных $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t}$ выглядят точно так же, как и в старых переменных x, y, z, t (см. замечание в конце примера 1).

Умножение координат на постоянный множитель α означает преобразование одной кривой в другую, геометрически подобную первой (вторая кривая гомотетична первой). И, следовательно, *если γ — траектория материальной точки, то существует (при соответствующих начальных условиях) и гомотетичная ей траектория $\tilde{\gamma}$.*

Пусть t и $\tilde{t}$ — времена движения материальной точки по дуге AB кривой γ и дуге $\tilde{A}\tilde{B}$ кривой $\tilde{\gamma}$ соответственно. Обозначим через d и $\tilde{d}$ расстояния точек A и $\tilde{A}$ от начала координат. В силу (4.5) имеем

$$\frac{t}{\tilde{t}} = \beta\,, \qquad \frac{d}{\tilde{d}} = \alpha\,.$$

Но из (4.7) следует, что

$$\beta = \alpha^{\frac{2-k}{2}}\,.$$

Поэтому *отношение времен движения материальной точки по соответствующим участкам траекторий γ и $\tilde{\gamma}$ определяется равенством*

$$\frac{t}{\tilde{t}} = \left(\frac{d}{\tilde{d}}\right)^{\frac{2-k}{2}} . \tag{4.8}$$

Для иллюстрации рассмотрим конкретные примеры использования соотношения (4.8).

1. Если силовое поле отсутствует, то можно считать, что П равняется произвольной постоянной и, следовательно, не изменяется при заменах (4.5). Поэтому величину k надо считать равной нулю. Из соотношения (4.8) тогда видно, что за равные промежутки времени материальная точка проходит равные пути. Это и следовало ожидать, так как при отсутствии силового поля точка движется равномерно и прямолинейно.

2. Пусть точка падает в однородном поле тяжести сначала с одной высоты, а затем с другой. Здесь $k = 1$ и из (4.8) следует, что отношение высот, с которых падает материальная точка, равно отношению квадратов соответствующих им времен падения.

3. Для малых линейных колебаний $k = 2$ и, согласно (4.8), период колебаний не зависит от амплитуды.

4. В случае движения в центральном ньютоновском гравитационном поле $k = -1$. И равенство (4.8) показывает, что квадраты периодов обращения материальной точки по орбитам γ и $\tilde{\gamma}$ относятся как кубы линейных размеров этих орбит (третий закон Кеплера).

3. Может случиться, что при некоторых, специальным образом выбранных, заменах переменных (1.3) функция Лагранжа $L(q_i, dq_i/dt, t)$ не изменяется. Это означает, что новая функция Лагранжа вычисляется по формуле

$$\tilde{L}\big(\tilde{q}_i, \frac{d\tilde{q}_i}{d\tilde{t}}, \tilde{t}\big) = L\big(\tilde{q}_i, \frac{d\tilde{q}_i}{d\tilde{t}}, \tilde{t}\big) ,$$

т.е. она получается из старой функции Лагранжа, приписыванием всем переменным значка "тильда". В этих случаях уравнения Лагранжа не только ковариантны, но и *инвариантны* по отношению к выбранным заменам переменных. Такие случаи представляют большой интерес в аналитической динамике и теоретической физике.

В качестве примера рассмотрим функцию Лагранжа вида

$$L = \frac{1}{2}\, t^2 \left(\big(\frac{dq}{dt}\big)^2 - \frac{1}{3}\, q^6 \right) .$$

Соответствующее этой функции уравнение (уравнение Эмдена [8]) возникает в задаче о равновесии сферы из политропного газа, между частицами которого действуют силы взаимного гравитационного притяжения.

Выберем замену (1.3) в виде

$$q = \alpha\, \tilde{q}\,, \qquad t = \frac{1}{\alpha^2}\, \tilde{t}\,, \tag{4.9}$$

где α — произвольная, отличная от нуля, постоянная. Вычисления по формулам (1.7), (1.10) показывают, что замена переменных (4.9) не изменяет функцию Лагранжа и при любом рассматриваемом значении α имеем

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}\, \tilde{t}^2 \left(\Big(\frac{d\tilde{q}}{d\tilde{t}}\Big)^2 - \frac{1}{3}\, \tilde{q}^6 \right).$$

4. Продолжим анализ системы из примера 2. Ответим на вопрос, существует ли такая степень однородности потенциальной энергии $\Pi(x, y, z)$, что преобразование подобия (4.5) не изменяет функцию Лагранжа (4.4).

Ответ на этот вопрос сразу следует из выражения (4.6) для новой функции Лагранжа: должны выполняться равенства

$$\frac{\alpha^2}{\beta} = \beta\, \alpha^k = 1$$

и, следовательно,

$$k = -2\,, \qquad \beta = \alpha^2\,. \tag{4.10}$$

В качестве конкретного примера рассмотрим задачу о движении заряженной частицы в плоскости Oxy в силовом поле диполя. В этом случае потенциальная энергия задается формулой [9]

$$\Pi = \frac{\mu x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\,,$$

где μ — постоянная величина. Здесь $k = -2$ и замена

$$x = \alpha \tilde{x}\,, \quad y = \alpha \tilde{y}\,, \quad t = \alpha^2 \tilde{t}\,,$$

где α — отличная от нуля постоянная, не изменяет функцию Лагранжа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1. М.: Физматлит, 1966, 607 с.

2. Маркеев А.П. Теоретическая механика.М.- Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2007, 592 с.

3. Айзерман М.А. Классическая механика. М.:Физматлит,1980, 368 с.

4. Яковенко Г.Н. Краткий курс аналитической динамики. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004, 238 с.

5. Коткин Г.Л., Сербо В.Г., Черных А.И. Лекции по аналитической механике. М.- Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2010, 236 с.

6. Беленький И.М. Введение в аналитическую механику. М.: Изд - во Высшая школа, 1964, 323 с.

7. Парс Л.А. Аналитическая динамика. М.: Физматлит, 1971, 635 с.

8. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Том 2. М.: Изд - во иностр. лит., 1954, 415 с.

9. Тамм И.Е. Основы теории электричества.М.: Гостехиздат, 1956, 620 с.