

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»

А. В. Фомичев

# **КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА**

Учебное пособие

МОСКВА  
МФТИ  
2021

УДК 531.1(075)  
ББК 22.212я73  
Ф76

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, профессор *В. В. Александров*

Доктор физико-математических наук *А. А. Голован*

**Фомичев, Александр Владимирович**

Ф76 Кинематика точки и твердого тела : учеб. пособие /

А. В. Фомичев. – Москва : МФТИ, 2021. – 128 с.

ISBN 978-5-7417-0778-4

Пособие посвящено кинематике точки и твердого тела в объеме, несколько превышающем стандартную программу, предназначенную для студентов МФТИ, и написано с акцентом на наглядность и геометрическое содержание. Круг вопросов, входящих в обязательную программу, отделен от дополнительных порядком изложения.

Предназначено для студентов, изучающих аналитическую механику, и специалистов, использующих аппарат кинематики и ортогональных преобразований.

УДК 531.1(075)  
ББК 22.212я73

*Печатается по решению Редакционно-издательского совета Московского физико-технического института (национального исследовательского университета)*

ISBN 978-5-7417-0778-4

© Фомичев А. В., 2021

© Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», 2021

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1. Кинематика точки</b>	<b>7</b>
1.1. Описание в декартовых координатах . . . . .	7
1.2. Треугольник Френе и представления скорости и ускорения в нем . . . . .	9
1.3. Криволинейные координаты . . . . .	12
<b>2. Кинематика твердого тела</b>	<b>23</b>
2.1. Углы Эйлера и другие углы конечного вращения .	25
2.2. Ортогональные матрицы и их свойства . . . . .	28
2.3. Угловая скорость твердого тела, распределение скоростей и ускорений в твердом теле . . . . .	41
2.4. Сведение перемещения твердого тела к винтовому. Кинематический винт твердого тела	50
2.5. Сложение поворотов в матрицах. Кинематические уравнения Пуассона для ортогональных матриц . . . . .	64
2.6. Сложное движение точки и твердого тела . . . . .	75
2.7. Кватернионы и их применение в кинематике твердого тела . . . . .	87
2.8. Теорема Ишплинского о телесном угле . . . . .	108
2.9. Векторы конечного поворота и кинематические уравнения для них . . . . .	113
2.10. Параметры Кейли–Клейна . . . . .	117
<b>Литература</b>	<b>126</b>

# Введение

Кинематикой называется раздел теоретической механики, изучающий геометрию движений точек и твердых тел. Предполагается, что параметры движений описываются дифференцируемыми функциями времени, а причины движений, являющиеся предметом динамики, в кинематике не принимаются во внимание.

Математический аппарат кинематики связан с большинством разделов классической механики, многими разделами физики, инженерными задачами. Среди последних можно выделить, например, разработку и расчет различных механизмов, задачи управления и навигации, компьютерную визуализацию движений.

Вопросам кинематики посвящена обширная литература, в которой, безусловно, можно найти практически все, что вошло в пособие. Однако эти факты разрознены по разным источникам, обычно не совпадающим по содержанию, обозначениям и стилю изложения. Это послужило одним из мотивов написания пособия, отличающегося от большинства учебников и монографий следующими методическими деталями.

Активное использование теоремы Эйлера о конечном повороте твердого тела, заимствованное из книги [1] и несколько переработанное, с последующей инвариантной записью ортогональной матрицы через параметры эйлерова поворота, дает наглядную геометрическую интерпретацию движения твердого тела и позволяет компактно вывести большинство соотношений, в том числе – кватернионную формулу задания поворота.

Уделяется внимание взаимосвязям разных кинематических параметров между собой и обозначениям, удобным при решении сложных кинематических задач с большим количеством подвижных базисов. Некоторые утверждения, обычно вызывающие трудности, доказаны несколькими способами, что позволяет читателю выбрать наиболее понятный.

Пособие включает в себя фактически все разделы кинематики, существенные для практического применения. Первыми изложены кинематические разделы курса аналитической механики, читаемого студентам МФТИ. Дополнительные темы, представляющие интерес для углубленного изучения, начинаются с

теоремы Ишлинского. Список литературы включает книги, использованные при составлении, либо рекомендуемые для изучения вопросов, обозначенных в пособии, но не вошедших в него.

Теоретические результаты сопровождаются примерами и упражнениями для самостоятельного решения разной сложности.

Для удобства «навигации» по тексту приняты следующие обозначения.

**Жирным курсивом**, облегчающим поиск, выделяются новые понятия, впервые появляющиеся в тексте, где сразу же сопровождаются определениями.

**Замечания** служат для выделения важных утверждений или каких-то особых случаев.

Знаками ◀ и ▶ отмечаются начало и окончание разбора примера.

Дополнительные сведения, например, о возможных разночтениях в литературе или некоторые математические вопросы, органически связанные с материалом, но не обязательные для изучения, даны в сносках.

Сформулируем исходные категории кинематики. Часть из них входит в число аксиом классической механики, введенных И. Ньютоном [1]:

- аксиомы евклидова пространства  $\mathbb{R}^3$ ;
- понятие **движения точки** – отображения  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , где пространству  $\mathbb{R}$  принадлежит параметр  $t$ , называемый временем,  $\mathbb{R}^3$  – евклидово пространство, в котором может двигаться точка. Движение точки описывается зависимостью радиуса-вектора точки  $\mathbf{r}$  от времени:  $\mathbf{r}(t)$ . Пространство  $\mathbb{R}^3$  и время  $t \in \mathbb{R}$  считаются абсолютными и независимыми категориями.

Понятие твердого тела не входит в систему аксиом механики (см. [1]), но относится к исходным понятиям кинематики.

**Твердое тело** – совокупность точек, расстояния между которыми остаются неизменными. Твердые тела могут состоять из конечного числа или континуума точек.

Наряду с понятием *твердое тело*, в литературе встречается термин *абсолютно твердое тело*. Иногда для краткости будем называть твердое тело просто *телом*.

Материальная точка и твердое тело, естественно, служат идеализациями (моделями) реальных объектов. Однако эксперименты показывают, что во многих случаях эти модели описывают наблюдаемые явления исключительно точно.

Ниже рассматриваются традиционные способы описания движения точки и твердого тела. Движение точки описано в декартовых координатах, естественном трехграннике Френе и в криволинейных координатах. Движение твердого тела рассмотрено с использованием различных параметров, задающих его угловое положение (ориентацию): углов конечного вращения, ортогональных матриц, кватернионов в разных представлениях и векторов конечного поворота. Выведены кинематические уравнения, связывающие параметры ориентации и угловую скорость, получены распределения скоростей и ускорений в твердом теле, изложена теория сложного движения точки и твердого тела.

В заключительные разделы пособия включены темы, обычно не входящие в курс аналитической механики, традиционно читаемый студентам МФТИ. Они представляют интерес для специалистов, использующих численные алгоритмы интегрирования уравнений кинематики, и затрагивают более глубокие геометрические вопросы. В этих разделах доказана теорема Ишлинского о телесном угле, проиллюстрировано ее приложение к исследованию погрешностей численных алгоритмов определения параметров ориентации. Получен простейший вид кинематических уравнений и формул сложения поворотов для вектора конечного поворота. Показан изоморфизм нормированных кватернионов и комплексных матриц размера  $2 \times 2$ , состоящих из параметров Кейли–Клейна и образующих специальную унитарную группу  $SU(2)$ . Подробно выведена формула, устанавливающая связь параметров Кейли–Клейна и дробно-линейных преобразований комплексной плоскости.

Автор выражает благодарность А. А. Головану и Ю. В. Болотину за рецензирование пособия и О. А. Зориной, сделавшей ряд конструктивных замечаний.

# 1. Кинематика точки

В кинематике точки изучаются различные способы задания положения точки, ее скорости и ускорения. Эти понятия вводятся в декартовых координатах, однако такое представление бывает удобным не во всех задачах, и поэтому рассматриваются альтернативные способы описания движения в трехграннике Френе и криволинейных координатах.

## 1.1. Описание в декартовых координатах

Согласно аксиомам классической механики, движение точки происходит в пространстве  $\mathbb{R}^3$ , в котором можно ввести ортонормированный базис. Положение точки задается радиусом-вектором, отложенным от начала координат, а движение – его зависимостью от времени:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}.$$

где  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  – координаты вектора  $\mathbf{r}(t)$  в выбранном правом ортонормированном базисе в  $\mathbb{R}^3$ .

**Замечание.** Ортонормированные базисы в механике по договоренности всегда выбираются правыми, а положительные направления изменения любых параметров (времени, декартовых координат, расстояний, длин дуг, углов и т.п.) – в сторону их увеличения. Для ортонормированных базисов также используются названия *трехгранник*, *триэдр* и *репер*.

Кривая  $\gamma$ , описываемая радиусом-вектором  $\mathbf{r}(t)$  при изменении времени, называется *траекторией* точки (рис. 1).

*Скоростью*  $\mathbf{v}$  и *ускорением*  $\mathbf{w}$  точки называются первая и вторая производные радиуса-вектора по времени, по традиции, восходящей к Ньютону, обозначаемые точками сверху:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Векторы везде будут обозначаться жирными буквами, а их модули – одноименными строчными буквами. Например,  $v = |\mathbf{v}|$ ,  $w = |\mathbf{w}|$  – модули векторов скорости  $\mathbf{v}$  и ускорения  $\mathbf{w}$ .

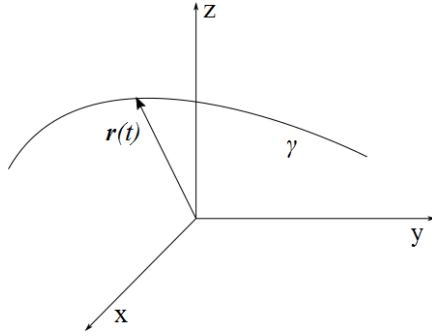


Рис. 1. Траектория в декартовых координатах

Функции, описывающие движения точек в механике, практически всегда гладкие и дифференцируемые. Это следует из намеренного использования гладких функций для задания положения механической системы, и того, что движение механической системы всегда описывается решениями дифференциальных уравнений динамики, обычно обладающих гладкими правыми частями. Для них гладкость решений гарантирует теорема Коши [2], [3].

Механические системы с ударами или сухим трением [1], [4] описываются уравнениями с разрывными правыми частями. Однако такие ситуации исследуются специальными методами и рассматриваются отдельно. Но и в этих особых случаях разрывы решений происходят в определенные моменты времени, между которыми решение гладкое.

При записи формул удобна разумная минимизация обозначений, не препятствующая ясности. Поэтому в равенствах (1) явно не указан аргумент функций  $t$ , а, например, для записи скалярного произведения векторов  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  будем писать

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum a_i b_i$$

вместо

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i,$$

поскольку в этой формуле сложно вообразить другие пределы суммирования.



Знак суммы можно вовсе опустить, если использовать соглашение о суммировании по повторяющимся (немым) индексам – так называемом правиле Эйнштейна, применяемом в тензорном счислении. В соответствии с ним записи  $a_i b_i$ ,  $a_{ij} x_j$  обозначают:  $a_i b_i = \sum_{i=1}^3 a_i b_i$ ,  $a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j$ . Однако в кинематике это не всегда удобно. Например, в некоторых формулах для криволинейных координат есть повторяющиеся индексы, а суммирование не подразумевается. Поэтому знак суммы оставлен.

В обозначениях скалярного  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  и векторного  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  произведений не будут использоваться скобки вроде  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ,  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$  или  $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$ , кроме тех соотношений, где они важны для выделения порядка сомножителей.

Декартовы координаты естественно отражают геометрию пространства  $\mathbb{R}^3$  и поэтому используются при введении первичных понятий. Однако во многих случаях они оказываются не столь удобными. Например, они не удобны для выяснения взаимного расположения векторов скорости, ускорения и траектории точки, и тех задачах, в которых не отражают имеющиеся симметрии. Поэтому в кинематике кроме декартовых координат рассматриваются следующие ниже способы описания движения точки.

## 1.2. Трехгранник Френе и представления скорости и ускорения в нем

Трехгранник Френе, называемый также естественным сопровождающим трехгранником, вводится в дифференциальной геометрии кривых [5],[6]. Он образован единичными векторами  $\{\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ , где  $\boldsymbol{\tau}$  – касательный вектор к гладкой кривой,  $\mathbf{n}$  – вектор внутренней нормали,  $\mathbf{b}$  – вектор бинормали, дополняющий  $\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}$  до правой тройки<sup>1</sup>.

Введем натуральную параметризацию – длину дуги  $s$  траектории  $\gamma$ , отсчитываемую от некоторой начальной точки. При движении точки  $s$  становится функцией времени  $s(t)$ . Пусть  $d\mathbf{r} = [dx, dy, dz]^T$  – дифференциал радиуса-вектора вдоль траектории  $\gamma$ . Тогда дифференциал длины дуги равен

---

<sup>1</sup>Иногда в литературе трехгранник Френе называют трехгранником Дарбу или трехгранником Френе–Серре.

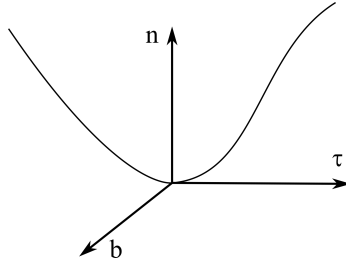


Рис. 2. Трехгранник Френе.

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \text{ и}$$

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = v.$$

Для вычисления скорости продифференцируем по времени  $\mathbf{r}(s(t))$ , используя правило дифференцирования сложной функции  $\mathbf{r}(s(t))$  и обозначая  $' = d/ds$ . Это дает

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{s}\mathbf{r}' = v\boldsymbol{\tau}. \quad (2)$$

Выражение  $\mathbf{r}' = \boldsymbol{\tau}$ , где  $\boldsymbol{\tau}$  – единичный касательный вектор к траектории  $\gamma$  в рассматриваемой точке, следует из формул для  $d\mathbf{r}$  и  $ds$ . Из формулы (2) видно, что скорость точки всегда направлена по касательной к ее траектории.

Продифференцируем выражение (2):

$$\mathbf{w} = \dot{v}\boldsymbol{\tau} + v^2\boldsymbol{\tau}'.$$

В дифференциальной геометрии кривых вектор внутренней нормали  $\mathbf{n}$  к траектории определяется из соотношения  $\boldsymbol{\tau}' = \mathbf{r}'' = k\mathbf{n}$ , причем ортогональность  $\boldsymbol{\tau}' \perp \boldsymbol{\tau}$  сразу же следует из дифференцирования формулы  $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} = 1$ :  $(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau})' = 2\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau}' = 0$ . Число  $k$  называется **кривизной траектории**,  $k\mathbf{n}$  – **вектором кривизны**, а величина  $\rho = 1/k$  – **радиусом кривизны** (см. ниже или [5], [6]). Таким образом, получаем:

$$\mathbf{w} = \dot{v}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{n} = \mathbf{w}_\tau + \mathbf{w}_n, \quad (3)$$

где  $\mathbf{w}_\tau = \dot{v}\boldsymbol{\tau}$  называется **тангенциальным ускорением**,  $\mathbf{w}_n = \frac{v^2}{\rho}\mathbf{n}$  – **нормальным ускорением** точки. Из (3) следует,

что ускорение точки всегда лежит в соприкасающейся плоскости траектории, построенной для текущего положения точки, и связано как с изменением модуля скорости (компонента  $\mathbf{w}_\tau$ ), так и ее направления (компонента  $\mathbf{w}_n$ ).

Следующие рассуждения напоминают об аппроксимации кривой окружностью в соприкасающейся плоскости и могут быть пропущены, если этот вопрос ясен. Пусть  $\mathbf{r}(s)$  – некоторая гладкая кривая,  $s$  – натуральный параметр. Рассмотрим ее аппроксимацию, получающуюся при разложении в ряд Тейлора в окрестности начальной точки  $s_0$ , для которой без ограничения общности можно считать, что  $s_0 = 0$ :

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(0) + \mathbf{r}'(0)s + \frac{1}{2}\mathbf{r}''(0)s^2 + \dots = \mathbf{r}(0) + \boldsymbol{\tau}s + \frac{s^2}{2\rho}\mathbf{n} + \dots$$

Таким образом, в окрестности начала координат базиса  $\{\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}\}$  траектория аппроксимируется параболой

$$y = \frac{x^2}{2\rho}$$

получаемой при отождествлении  $x$  с  $s$ . Теперь рассмотрим окружность радиуса  $\rho$  с началом координат в точке  $[0, \rho]^T$  в том же базисе  $\{\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}\}$ . Разрешая ее уравнение

$$x^2 + (y - \rho)^2 = \rho^2$$

относительно  $y$ , выберем знак «минус», поскольку нас интересует окрестность начала координат, и разложим получившееся выражение до первого члена:

$$y = \rho - \sqrt{\rho^2 - x^2} \simeq \frac{x^2}{2\rho}.$$

Отождествление  $x = s$  доказывает совпадение окружности радиуса  $\rho$  с центром на нормали к траектории и кривой  $\mathbf{r}(s)$  в окрестности точки их соприкосновения с точностью до членов разложения выше второго порядка и позволяет считать величину  $\rho$  радиусом кривизны траектории.

**Пример.** Получим выражения для скорости, ускорения и ортов трехгранника Френе при движении точки по винтовой линии:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} a \cos \omega t \\ a \sin \omega t \\ bt \end{bmatrix}.$$

◀ Вычисляя скорость и ускорение по определениям, получим

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} -a\omega \sin \omega t \\ a\omega \cos \omega t \\ b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}} = - \begin{bmatrix} a\omega^2 \cos \omega t \\ a\omega^2 \sin \omega t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$v = \sqrt{a^2\omega^2 + b^2} = \text{const}, \quad w = a\omega^2 = \text{const}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}_n = \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n},$$

$$\rho = \frac{v^2}{w} = \frac{a^2\omega^2 + b^2}{a\omega^2},$$

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{v}}{v} = \frac{1}{\sqrt{a^2\omega^2 + b^2}} \begin{bmatrix} -a\omega \sin \omega t \\ a\omega \cos \omega t \\ b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{w}}{w} = - \begin{bmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2\omega^2 + b^2}} \begin{bmatrix} b \sin \omega t \\ -b \cos \omega t \\ a\omega \end{bmatrix}. \quad \blacktriangleright$$

### 1.3. Криволинейные координаты

Выбор координат, отражающих симметрию или другие геометрические особенности задачи, обычно приводит к существенным упрощениям. Например, положение точки на окружности, естественнее параметризовать углом поворота радиус-вектора точки, проведенного к ней из центра окружности, а не набором декартовых координат. Декартовы координаты не удобны и для решения важнейшей задачи о движении точки в поле центральных сил, обладающим радиальной симметрией. Подобными соображениями диктуется необходимость замен координат и построения кинематики точки в этих «новых» координатах.

**Криволинейные координаты  $\mathbf{q}$**  представляют собой замену переменных  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{q}$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{q}), \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где  $r_i$  – декартовы координаты точки,  $\mathbf{r}(\mathbf{q})$  – гладкая взаимно однозначная функция криволинейных координат  $\mathbf{q}$ . В той части пространства  $\mathbb{R}^3$ , где вводятся координаты  $\mathbf{q}$ , должно выполняться условие невырожденности

$$\det \left[ \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right] \neq 0, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad (5)$$

гарантирующее локальное взаимно однозначное соответствие между  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{q}$  и разрешимость относительно  $\mathbf{q}$  уравнений замены (4) по теореме о неявной функции [6].

Криволинейные координаты могут быть глобальными, если находятся во взаимно однозначном соответствии с положениями точки во всем пространстве  $\mathbb{R}^3$ , или локальными, если  $\mathbf{r}(\mathbf{q})$  определены не всюду или вырождаются в отдельных точках.

Гладкость  $\mathbf{r}(\mathbf{q})$  должна быть достаточной для выполнения всех приводимых ниже дифференцирований.

В качестве примера криволинейных координат приведем часто используемые сферические координаты:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r \cos \lambda \cos \varphi \\ r \sin \lambda \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ \lambda \\ \varphi \end{bmatrix}.$$

На этом примере далее будут поясняться все новые понятия, связанные с криволинейными координатами.

Нетрудно видеть, что сферические координаты вырождаются на оси  $z$ , поскольку при  $\vartheta = \pm\pi/2$  якобиан (5) равен нулю, и одной точке на оси  $z$  соответствует произвольное значение  $\varphi$ . Поэтому сферические координаты локальны, и их нельзя использовать в окрестности оси  $z$ . Вырождения такого типа достаточно типичны для систем криволинейных координат. Вблизи точек вырождения и границ области определения функции  $\mathbf{r}(\mathbf{q})$ , если

она определена не всюду, использование криволинейных координат недопустимо.

**Координатной линией** называется кривая, получаемая при изменении одной из координат набора  $\mathbf{q}$  при фиксированных значениях двух других координат. Выбрав некоторое начальное положение точки и изменяя по очереди координаты  $q_1$ ,  $q_2$  и  $q_3$ , получаем три координатные линии  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$ , исходящие из начальной точки.

Из способа построения координатных линий следует, что единичные касательные векторы  $\mathbf{e}_k$  к ним вычисляются по формулам

$$\mathbf{e}_k = \frac{\partial \mathbf{r} / \partial q_k}{|\partial \mathbf{r} / \partial q_k|}.$$

В силу неравенства (5) они линейно независимы.

Итак, при введении криволинейных координат через каждую точку пространства  $\mathbb{R}^3$  проходят три координатные линии, а касательные векторы к ним образуют **локальный базис** в этой точке. Рисунок 3 иллюстрирует понятие координатных линий и локального базиса в общем случае и отдельно для сферических координат.

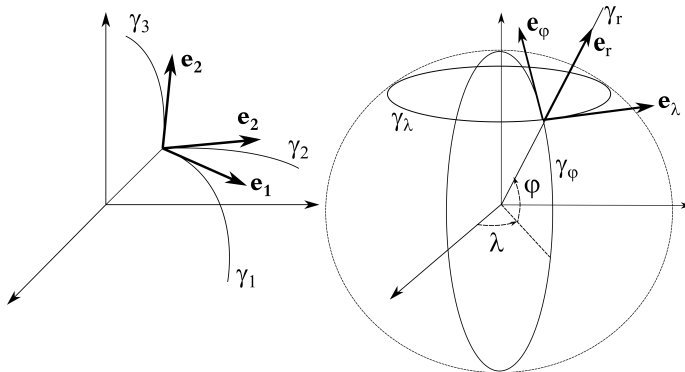


Рис. 3. Криволинейные координаты: координатные линии и локальный базис. Координатные линии сферической системы координат образованы «параллелью», «меридианом» и нормалью к поверхности

Величина

$$H_i = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right| = \sqrt{\left( \frac{\partial r_1}{\partial q_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial r_2}{\partial q_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial r_3}{\partial q_i} \right)^2} \quad (6)$$

называется *коэффициентом Ляме*. При изменении одной из криволинейных координат  $\Delta q_i$  соответствующее приращение радиуса-вектора  $\Delta \mathbf{r}_i$  в линейном приближении равно

$$\Delta \mathbf{r}_i \simeq \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \Delta q_i \quad \Rightarrow \quad |\Delta \mathbf{r}_i| \simeq H_i |\Delta q_i|,$$

откуда следует, что  $H_i$  – коэффициенты пропорциональности между модулями приращений криволинейной координаты и радиуса-вектора в линейном приближении. Эта интерпретация иногда позволяет найти  $H_i$  геометрически, не прибегая к формуле (6).

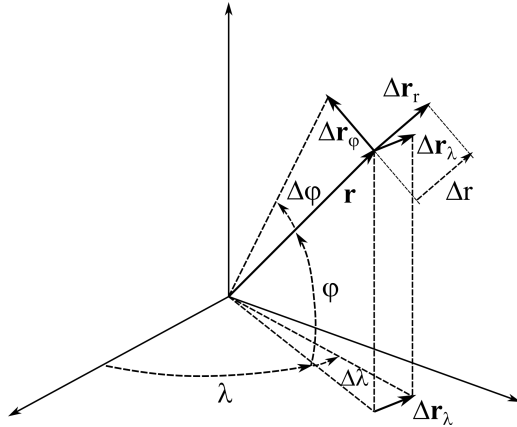


Рис. 4. Приращения криволинейных координат и соответствующие приращения радиуса-вектора точки для сферических координат

Рассмотрим, как это делается на примере сферических координат. Малые приращения радиуса-вектора, соответствующие приращениям криволинейных координат  $\Delta r$ ,  $\Delta \lambda$  и  $\Delta \varphi$ , представлены рис. 4, из которого видно, что в линейном приближении  $|\Delta \mathbf{r}_r| = |\Delta r|$ ,  $|\Delta \mathbf{r}_\lambda| \simeq r \cos \varphi |\Delta \lambda|$ ,  $|\Delta \mathbf{r}_\varphi| \simeq r |\Delta \varphi|$ , и поэтому

$$H_r = 1, \quad H_\lambda = r \cos \varphi, \quad H_\varphi = r. \quad (7)$$

Естественно, что воспользоваться геометрической интерпретацией для «устного» вычисления коэффициентов Ляме можно лишь в сравнительно простых случаях, тогда как формула (6) универсальна.

**Разложение вектора скорости по локальному базису.** Дифференцируя замену (4) по времени, получим

$$\mathbf{v} = \sum \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i = \sum H_i \dot{q}_i \mathbf{e}_i.$$

Следовательно, в локальном базисе

$$\mathbf{v} = \sum v^i \mathbf{e}_i, \quad v^i = H_i \dot{q}_i, \quad (8)$$

где  $v^i$  – составляющие вектора скорости в локальном базисе. Формула (8) позволяет вычислить квадрат модуля скорости:

$$v^2 = \sum v^i v^j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \sum H_i H_j \dot{q}_i \dot{q}_j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j. \quad (9)$$

Для ортонормированных локальных базисов

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases} \quad \delta_{ij} - \text{символ Кронекера}$$

и формула (9) существенно упрощается:

$$v^2 = \sum (v^i)^2 = \sum H_i^2 \dot{q}_i^2. \quad (10)$$

Для примера сферических координат выражения (7) и (8) дают следующие составляющие

$$v^r = \dot{r}, \quad v^\lambda = r \cos \varphi \dot{\lambda}, \quad v^\varphi = r \dot{\varphi}.$$

Локальный базис сферической системы координат является ортонормированным, что ясно из вида координатных линий и формально проверяется скалярным перемножением между собой векторов  $\partial \mathbf{r} / \partial r$ ,  $\partial \mathbf{r} / \partial \lambda$ ,  $\partial \mathbf{r} / \partial \varphi$ , коллинеарных  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\lambda$ ,  $\mathbf{e}_\varphi$ . Следовательно,  $v^2$  вычисляется по формуле (10):

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \cos^2 \varphi \dot{\lambda}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2. \quad (11)$$



**Проекция ускорения в локальном базисе.** Вначале обратим внимание на отличие проекций вектора от его составляющих, если базис не ортогонален. Составляющие  $a^i$  вектора  $\mathbf{a}$  получаются при его разложении по базису  $\{\mathbf{e}_i\}$ , т.е.

$$\mathbf{a} = \sum a^i \mathbf{e}_i,$$

тогда как проекции  $a_i$  того же вектора равны:

$$a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i.$$

Рисунок 5 иллюстрирует отличия проекций от составляющих вектора для базиса на плоскости.

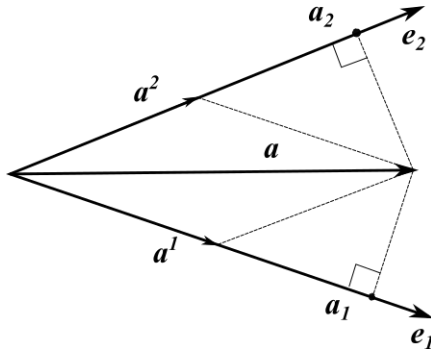


Рис. 5. Отличие составляющих и проекций вектора в неортогональном базисе

**Замечание.** Для ортонормированных базисов отличие между проекциями и составляющими исчезает, и можно везде писать нижние индексы.

Составляющие вектора ускорения в локальном базисе находятся с помощью достаточно неудобной процедуры, описанной в [1], и в силу ее громоздкости практически нигде не применяются. Вместо них используются проекции ускорения на орты локального базиса, вычисляемые по достаточно компактным формулам. Получим их:

$$w_i = \mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_i = \frac{1}{H_i} \mathbf{w} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}.$$

Используя правило Лейбница  $\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{dt}$ , выполним преобразования

$$w_i = \frac{1}{H_i} \left[ \frac{d}{dt} \left( \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) - \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i} \right], \quad (12)$$

которые легче понять, раскрывая производную скалярного произведения по времени и переставляя местами производные по времени и по координате:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i}.$$

Данная перестановка корректна ввиду предположения о гладкости  $\mathbf{r}(\mathbf{q})$ .

**Замечание.** Обратим внимание на существенное отличие операторов дифференцирования по времени  $d/dt$  и  $\partial/\partial t$ . Пусть  $f = f(\mathbf{q}, t)$  – некоторая функция. Тогда  $df/dt = \partial f/\partial t + \sum \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i$ , откуда и следует отличие этих производных.

Последний член формулы (12) допускает следующее преобразование:

$$\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{\partial q_i} = \frac{\partial (v^2/2)}{\partial q_i}.$$

Дифференцируя формулу

$$\mathbf{v} = \sum \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{q})}{\partial q_i} \dot{q}_i,$$

по  $\dot{q}_i$ , учитывая, что  $\dot{q}_i$  входит линейно как множитель, получим:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}.$$

Поэтому

$$\frac{d}{dt} \left( \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) = \frac{d}{dt} \left( \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial (v^2/2)}{\partial \dot{q}_i},$$

и выражение для проекций ускорения на орты локального базиса принимает вид

$$w_i = \frac{1}{H_i} \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial (v^2/2)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial (v^2/2)}{\partial q_i} \right], \quad (13)$$

где квадрат скорости  $v^2$  вычисляется по формулам (9) или (10).

Продемонстрируем соответствующие выкладки на примере вычисления проекции ускорения  $w_r$  на орт локального базиса  $e_r$  сферической системы координат:

$$\begin{aligned} v^2/2 &= \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \cos^2 \varphi \dot{\lambda}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2), \\ \frac{\partial(v^2/2)}{\partial \dot{r}} &= \dot{r}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial(v^2/2)}{\partial \dot{r}} = \ddot{r}, \quad \frac{\partial(v^2/2)}{\partial r} = r(\cos^2 \varphi \dot{\lambda}^2 + \dot{\varphi}^2), \\ w_r &= \ddot{r} - r(\cos^2 \varphi \dot{\lambda}^2 + \dot{\varphi}^2). \end{aligned}$$

Аналогичные действия приводят к следующим выражениям для остальных проекций ускорения:

$$\begin{aligned} w_\lambda &= r \cos \varphi \ddot{\lambda} + 2\dot{r}\dot{\lambda} \cos \varphi - 2r \sin \varphi \dot{\lambda} \dot{\varphi}, \\ w_\varphi &= r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} + r \sin \varphi \cos \varphi \dot{\lambda}^2. \end{aligned}$$

Криволинейные координаты вводятся в евклидовом пространстве любой размерности. В этом случае число координат равно размерности пространства, в частности, на плоскости  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{q}$  имеют две компоненты.

Во многих задачах на плоскости естественно использовать *полярную систему координат*. Переход к ней задается формулой

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{bmatrix}.$$

Ее координатные линии и ортонормированный локальный базис представлены на рис. 6, а выражения для коэффициентов Ляме, компонентов векторов скорости и ускорения следующие:

$$\begin{aligned} H_r &= 1, \quad H_\varphi = r, \\ v^r &= \dot{r}, \quad v^\varphi = r\dot{\varphi}, \quad v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2, \\ w_r &= \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad w_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}. \end{aligned} \tag{14}$$

**Замечание 1.** Выражения для коэффициентов Ляме, составляющих скорости и квадрата скорости в полярных и сферических координатах часто встречаются в различных задачах и поэтому рекомендуется их запомнить, либо уметь быстро вывести.

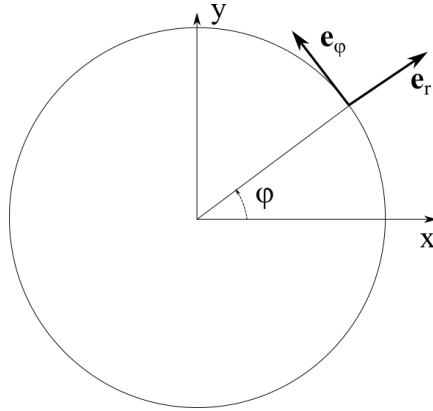


Рис. 6. Полярные координаты: координатные линии и локальный базис

**Замечание 2.** Вывод формулы (13) практически дословно повторяется при получении важнейших уравнений аналитической механики – уравнений Лагранжа второго рода. Частным случаем этих уравнений служит второй закон Ньютона для материальной точки, записанный в произвольных криволинейных координатах. Получим его.

Второй закон Ньютона для точки, движущейся под действием силы в инерциальной системе отсчета, является одной из аксиом механики. В декартовых координатах он имеет вид

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F},$$

где  $m$  – масса точки,  $\mathbf{w}$  – ее ускорение,  $\mathbf{F}$  – сила, действующая на точку. Введение криволинейных координат в пространстве порождает локальный базис. Проектирование второго закона Ньютона на его орты с учетом (13) сразу приводит к формуле

$$\frac{m}{H_i} \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial(v^2/2)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial(v^2/2)}{\partial q_i} \right] = F_i,$$

где  $F_i = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_i$ . Если ввести кинетическую энергию точки  $T = mv^2/2$ , то формулу можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = H_i F_i. \quad (15)$$

Эта форма записи уравнений Ньютона называется *ковариантной*. Термин *ковариантность* означает независимость правил составления уравнений от выбора координат. Однако сами уравнения, конечно, отличаются в разных координатах.

**Пример.** Записать уравнения движения точки массы  $m$  под действием силы  $\mathbf{F}$  в полярных координатах.

◀ Применение формул (14) и (15) дает:

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \frac{F_r}{m}, \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = \frac{F_\varphi}{m},$$

где  $F_r$ ,  $F_\varphi$  – проекции вектора  $\mathbf{F}$  на орты  $\mathbf{e}_r$  и  $\mathbf{e}_\varphi$  локального базиса. Эти соотношения играют важную роль в задачах динамики точки в центральном поле, в котором по определению  $F_\varphi = 0$ , и поэтому  $r^2\dot{\varphi} = \text{const}$ . ▶

**Упражнение.** Построить координатные линии и локальный базис для тороидальной системы координат

$$\begin{aligned} x &= R \cos \varphi + r \cos \varphi \cos \psi, \\ y &= R \sin \varphi + r \sin \varphi \cos \psi, \\ z &= r \sin \psi, \end{aligned}$$

$q_1 = r$ ,  $q_2 = \varphi$ ,  $q_3 = \psi$ ,  $R = \text{const}$ . Установить наличие точек вырождения и ортогональность осей локального базиса. Найти составляющие скорости и проекции ускорения в локальном базисе.

**Упражнение ([13] № 1.40).** Точка движется по координатной поверхности  $q_1 = \text{const}$  ортогональной системы криволинейных координат с постоянной по модулю скоростью  $v$ . Говорят, что точка движется по геодезической, если вектор кривизны траектории направлен по нормали к поверхности  $q_1 = \text{const}$ . Найти уравнения геодезической.

**Замечание.** Понятие геодезической линии [5] играет важную роль в геометрии римановых и псевдоримановых пространств и в общей теории относительности, тесно связанной с этими разделами математики.

Обсуждение общего понятия геодезической линии требует непозволительного отклонением от темы пособия. Однако в упражнении мы сталкиваемся с простейшим частным случаем

этого важного понятия. Длина кривой, лежащей на координатной поверхности  $q_1 = \text{const}$ , имеет геометрический смысл длины дуги в объемлющем евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$ , в котором расположена поверхность, и вычисляется по известным формулам математического анализа.

Геодезическая линия является кратчайшим путем, соединяющим две точки на координатной поверхности, если эти точки достаточно близки. Рассмотрим примеры. Геодезическими линиями на двумерной сфере являются дуги окружностей большого круга, на круговом цилиндре – винтовые линии, окружности, охватывающие цилиндр, и прямые, ориентированные вдоль образующей. Для плоскости геодезическими являются прямые линии.

Движения по геодезическим естественным образом возникают в ряде задач аналитической механики. Наиболее простой случай реализуется при движении массивной точки без отрыва по инерции по абсолютно гладкой поверхности, при котором модуль скорости точки постоянен по закону сохранения энергии. Единственной силой, действующей на точку, является реакция поверхности, направленная по нормали к ней. В силу второго закона Ньютона ускорение точки  $\boldsymbol{w}$  тоже направлено по нормали к поверхности. Из-за постоянства скорости ускорение будет нормальным  $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_n$  и потому коллинеарным вектору кривизны. Фактически, этот интуитивно понятный пример и рассматривается в последнем упражнении.

## 2. Кинематика твердого тела

Для математического описания движения твердого тела используется следующая конструкция. В пространстве, в котором движется тело, фиксируется правый ортонормированный базис, называемый *неподвижным*. В теле выбирается некоторая точка, называемая *полюсом*, и вводится правый ортонормированный базис, жестко связанный с телом и началом координат в полюсе, называемый *связанным* либо *подвижным трехгранником*.

Положение тела относительно неподвижного базиса полностью задается координатами полюса и угловым положением связанного трехгранника относительно неподвижного, иногда называемым для краткости ориентацией. При этом пространство, связанное с подвижным трехгранником, и тело обычно отождествляются. Описанная конструкция представлена на рис. 7.

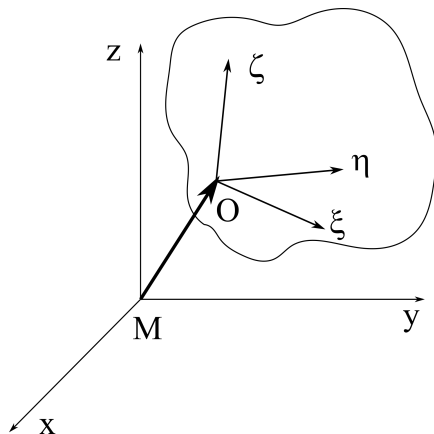


Рис. 7. Задание положения твердого тела:  $O$  – полюс,  $Mxyz$  – неподвижный трехгранник,  $O\xi\eta\zeta$  – связанный трехгранник

Выбор координатных трехгранников и полюса произвольны. Однако на практике за полюс обычно принимается точка, движение которой задано или легко находится. В задачах динамики твердого тела полюсом часто служит центр масс тела. Координатные трехгранники задаются, исходя из удобства представле-

ния движения тела и вычисления различных величин, описывающих это движение.

Произвольное движение твердого тела раскладывается на движение полюса и угловое движение тела относительно полюса, называемое *вращением*. Движение полюса полностью изучено в разделе 1, посвященном кинематике точки, и для задания движения тела остается описать вращение относительно полюса.

Для этого введем промежуточный базис с началом в полюсе тела  $O$  и осями, коллинеарными осям неподвижного базиса. В нем связанный трехгранник вращается относительно начала координат  $O$ , это движение и остается формализовать.

**Замечание.** Очень важно понимать, что угловое положение и параметры вращения тела полностью определяется направлениями осей связанного базиса и не зависит от выбора полюса в теле. В любом новом полюсе  $O'$  всегда можно построить связанный трехгранник с осями, коллинеарными осям связанного трехгранника в точке  $O$ . Угловое положение и движение связанных трехгранников в точках  $O$  и  $O'$  относительно неподвижного базиса (и коллинеарных ему промежуточных трехгранников) одинаковы, и построения, описывающие вращение тела относительно полюса, при смене полюса не меняются.

**Обозначения базисов и векторов.** Если в задаче используется несколько базисов, то вместо громоздких обозначений вроде «трехгранник  $Mxyz$ », где  $M$  – начало координат трехгранника,  $xyz$  – его оси, бывает удобно писать «трехгранник  $Mx$ », называя его по первой координатной оси, или даже «трехгранник  $x$ », если начало координат  $M$  выделять не существенно.

А при использовании достаточно большого количества систем координат, как правило, предпочтительно использовать индексные обозначения для осей, т.е.  $x_1x_2x_3$  вместо  $xyz$ , что «экономит буквы» и дает меньше простора для ошибок.

Векторы в задачах с несколькими базисами удобно снабжать нижним индексом, указывающим базис. Например,  $\mathbf{a}_x$  – вектор  $\mathbf{a}$  в трехграннике  $x$ ,  $\mathbf{a}_\xi$  – тот же вектор в трехграннике  $\xi$ .

Как будет видно из последующих построений, ключевую роль в кинематике углового движения играет поворот тела относительно некоторой фиксированной оси, проходящей через непо-



движный полюс. Направление поворота считается положительным, если он выполняется по правилу правого винта, т.е. против часовой стрелки, если смотреть со стороны направляющего орта оси.

Кинематика вращательного движения твердого тела существенно сложнее кинематики точки и также допускает разные способы описания. В настоящее время наиболее часто применяются углы конечного вращения, ортогональные матрицы, векторы конечных поворотов и кватернионы. Каждый из этих способов имеет свои особенности, делающие практически любой из способов удобным для одних задач и менее подходящим для других.

## 2.1. Углы Эйлера и другие углы конечного вращения

Исторически первым способом описания вращения была система углов, предложенная Л. Эйлером. Пусть  $Oxyz$  – неподвижный трехгранник,  $O\xi\eta\zeta$  – трехгранник, связанный с телом. Здесь указаны все оси, поскольку это существенно для дальнейших построений и соответствует классическим обозначениям, введенным Эйлером.

*Углами Эйлера* называется последовательность из трех поворотов базиса  $x$ , выполняемых в определенном ниже порядке и совмещающих базис  $x$  с  $\xi$ .

Будем считать, что оси  $z$  и  $\zeta$  не коллинеарны. Обозначим орты  $z$ ,  $\zeta$  этих осей и орт

$$e = \frac{z \times \zeta}{|z \times \zeta|},$$

лежащий в плоскости  $\{xy\}$ , поскольку  $e \perp z$  – см. рис. 8. Прямая, направленная вдоль  $e$ , называется *линией узлов*.

Выполним три поворота исходного базиса  $x$  в следующем порядке.

Первый – вокруг оси  $z$  на угол  $\psi$ , совмещающий ось  $x'$  получившегося в результате поворота базиса  $x'y'z'$  с линией узлов:  $x' \parallel e$ .

Второй – поворот базиса  $x'y'z'$  относительно оси  $x'$  на угол  $\vartheta$ , такой, чтобы ось  $z''$  получившегося в результате второго по-

ворота трехгранника  $x''y''z''$  совпала с осью  $\zeta$ , что возможно, поскольку  $x' \perp \{z\zeta\}$ .

Третий поворот относительно оси  $z'' = \zeta$  на угол  $\varphi$  совмещает оси  $x''$  и  $\xi$ , что возможно, поскольку  $\zeta \perp \{x''\xi\}$ . Иллюстрация к

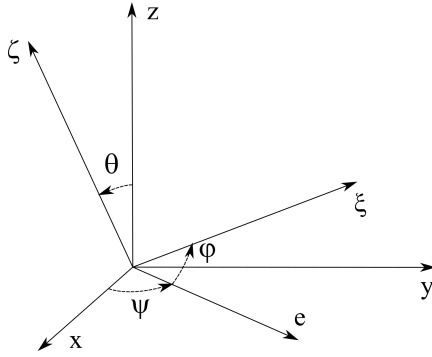


Рис. 8. Углы прецессии  $\psi$ , нутации  $\vartheta$  и собственного вращения  $\varphi$ , образующие систему углов Эйлера

этому построению приведена на рис. 8. Ось  $\eta$  традиционно не изображается, чтобы не загромождать рисунок, но однозначно восстанавливается по осям  $\xi$  и  $\zeta$ , поскольку орты  $\xi, \eta, \zeta$  образуют правую тройку.

Угол  $\psi$  называется *углом прецессии*,  $\vartheta$  – *углом нутации*,  $\varphi$  – *углом собственного вращения*.

Последовательность поворотов на углы Эйлера можно представить в виде компактной диаграммы

$$x \xrightarrow[\zeta]{\psi} x' \xrightarrow[x']{\vartheta} x'' \xrightarrow[z'']{\varphi} \xi,$$

на которой отражены все трехгранники, оси и углы поворотов, совмещающих эти трехгранники. Подобные диаграммы удобны для записей любых последовательностей поворотов координатных систем.

Из построений следует, что углы Эйлера однозначно определяются взаимным расположением базисов  $x$  и  $\xi$ , за исключением случая коллинеарности осей  $z \parallel \zeta$ , и любые два положения координатных трехгранников совмещаются последовательными поворотами на углы Эйлера.

При  $z \parallel \zeta$  угол  $\vartheta$  равен 0 или  $\pi$ , и положения трехгранников  $x$  и  $\xi$  совмещаются одним поворотом вокруг оси  $z$ . Однако линия узлов и связанные с ней углы  $\psi$  и  $\varphi$  вырождаются, что влечет недопустимость описания ориентации углами Эйлера, если оси  $z$  и  $\zeta$  близки к коллинеарным. Таким образом, углы Эйлера не могут быть глобальными координатами, описывающими любое положение твердого тела, хотя и находятся во взаимно однозначном соответствии с положениями тела всюду, кроме положения  $z \parallel \zeta$ .

В частности, углы Эйлера вырождаются при совпадении трехгранников  $x$  и  $\xi$  и, значит, не подходят для описания углового положения близких трехгранников, что вынуждает вводить другие системы углов конечного вращения для этого случая.

Одной из распространенных систем углов, не вырождающихся при совпадении координатных трехгранников, являются *самолетные углы*, используемые для описания ориентации самолетов и кораблей относительно географической системы координат.

Обозначим географический трехгранник через  $x$ . Его первая ось  $x$  направлена на восток и лежит в плоскости горизонта – касательной плоскости к эллипсоиду, задающему поверхность Земли. Вторая ось  $y$  также лежит в плоскости горизонта и направлена на север, ось  $z$  – по нормали к поверхности Земли. Трехгранник  $\xi$  связан с самолетом так, что ось  $\xi$  ориентирована по правому крылу,  $\eta$  – продольная ось самолета, ось  $\zeta$  – по килю самолета. Последовательность поворотов на самолетные углы с учетом принятых обозначений следующая:

$$x \xrightarrow[-z]{\psi} x' \xrightarrow[x']{\vartheta} x'' \xrightarrow[y'']{\gamma} \xi.$$

Угол  $\psi$  называется *углом курса* и по сложившейся традиции отсчитывается по часовой стрелке,  $\vartheta$  – *углом тангажа*,  $\gamma$  – *углом крена* – см. рис. 9. Самолетные углы вырождаются при  $\vartheta = \pm\pi/2$ .

**Особенности углов конечного вращения.** Любые системы углов конечного вращения образуются последовательностями из трех поворотов, совмещающих неподвижный трехгранник со связанным. Эти конструкции обладают наглядностью и удобны для визуализации углового положения. Например, самолет-

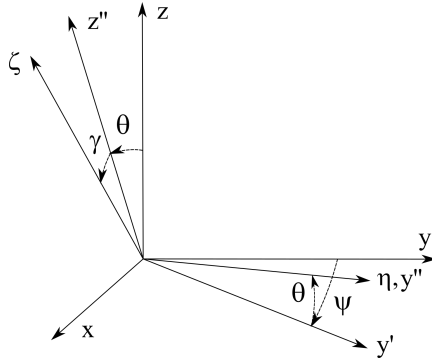


Рис. 9. Самолетные углы курса  $\psi$ , крена  $\vartheta$  и тангажа  $\gamma$

ные углы практически всегда выдаются на индикацию экипажу, а углы Эйлера весьма удобны при исследовании задач динамики твердого тела с неподвижной точкой.

Количество углов конечного вращения всегда равно трем и соответствует числу степеней свободы твердого тела, вращающегося относительно неподвижной точки.

Однако любая система углов всегда вырождается в некоторых положениях твердого тела. Через углы конечного вращения нельзя определить важнейшее понятие угловой скорости твердого тела, а кинематические уравнения, связывающие углы с угловой скоростью тела (для углов Эйлера они выведены ниже в разделе 2.6), всегда нелинейны и вырождаются в тех же положениях тела, где вырождается система углов. В углах трудно решить важную задачу вычисления результата композиции поворотов.

Рассматриваемые ниже способы описания поворотов ортогональными матрицами и кватернионами лишены перечисленных недостатков.

## 2.2. Ортогональные матрицы и их свойства

Рассмотрим некоторый базис  $x$  и произвольный вектор  $r$  в нем. Линейное преобразование  $r \rightarrow r'$  с матрицей  $A$  называется ортогональным, если оно сохраняет модуль любого вектора, т.е.

$$r' = Ar, \quad |r'| = |r|.$$

Представляя квадрат модуля вектора в матричном виде  $|\mathbf{r}'|^2 = \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = \mathbf{r}'^T \mathbf{r}'$ , где  $\mathbf{r}'^T$  – вектор-строка,  $\mathbf{r}'$  – вектор-столбец, получаем цепочку соотношений

$$|\mathbf{r}'|^2 = (\mathbf{A}\mathbf{r})^T \mathbf{A}\mathbf{r} = \mathbf{r}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{r} = \mathbf{r}^T \mathbf{r} = |\mathbf{r}|^2,$$

которые должны выполняться для любого  $\mathbf{r}$ , что возможно, только если

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{E}, \quad (16)$$

где  $\mathbf{E}$  – единичная матрица. *Равенство (16) является определением ортогонального преобразования.* Матрицы ортогональных преобразований называют *ортогональными матрицами*<sup>2</sup>.

Кроме (16), ортогональные матрицы обладают следующими свойствами.

1) Из линейной алгебры известно [10], что для любых квадратных матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  справедливо равенство  $\det(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$ . Тогда из этого, формулы  $\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$  и (16) следует, что  $\det(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = (\det \mathbf{A})^2 = \det \mathbf{E} = 1$ , или, в итоге,

$$\det \mathbf{A} = \pm 1.$$

2) Из выражений  $\forall \mathbf{A} : \det \mathbf{A} \neq 0 \exists! \mathbf{A}^{-1} : \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$  получается полезное свойство

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T,$$

весьма облегчающее обращение ортогональной матрицы.

3) Для любых двух ортогональных матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  произведение  $\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B}$  – ортогональная матрица. Это следует из проверки определения (16):

$$\mathbf{C}^T \mathbf{C} = (\mathbf{A}\mathbf{B})^T \mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{E}.$$

---

<sup>2</sup> Из (16) следует, что ортогональные матрицы образуют трехмерное многообразие в девятимерном пространстве матриц  $3 \times 3$ . Не вдаваясь в подробности, можно считать, что многообразие – многомерная поверхность, погруженная в евклидово пространство с размерностью, большей или равной размерности самой поверхности. Если матрица состоит из векторов-столбцов  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]$ , то условие ортогональности (16) равносильно шести уравнениям  $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_{ij}$ ,  $i \leq j$ , где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера. Следовательно, размерность многообразия ортогональных матриц равна  $9 - 6 = 3$ . Строгое определение и свойства многообразий рассматриваются в курсах дифференциальной геометрии и топологии, например, в книге [5], здесь же намеренно пропущены отдельные тонкости.

4) Множество объектов  $G$  с бинарной операцией  $\circ$ , удовлетворяющей свойствам

$$\begin{aligned} \forall A, B \in G \quad C &= A \circ B \in G; \\ \forall A, B, C \in G \quad A \circ (B \circ C) &= (A \circ B) \circ C; \\ \exists E \in G : A \circ E = E \circ A &= A \quad \forall A \in G; \\ \forall A \in G \quad \exists A^{-1} \in G : A^{-1} \circ A &= A \circ A^{-1} = E, \end{aligned}$$

называется группой. Для ортогональных матриц с операцией матричного умножения эти свойства выполнены, и, таким образом, ортогональные матрицы образуют группу, обозначаемую  $O(3)$ , что читается как «группа ортогональных преобразований  $\mathbb{R}^3$  в себя».

Матрицы с  $\det A = 1$  образуют подгруппу  $SO(3)$ , называемую «специальной ортогональной группой преобразований  $\mathbb{R}^3$  в себя».

**Замечание.** Часто оказывается, что математические объекты, играющие важную роль в точных науках, обладают групповыми свойствами. Ортогональные матрицы не являются исключением.

5) Элементы группы  $SO(3)$  и положения твердого тела находятся во взаимно однозначном соответствии. Для доказательства этого утверждения рассмотрим образ  $e'$  ортонормированного базиса  $e$  при отображении, задаваемом матрицей  $A$ . Для первого орта  $e_1$  базиса  $e$  получаем

$$e'_1 = Ae_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}.$$

Действуя аналогично для ортов  $e_2 = [0, 1, 0]^T$  и  $e_3 = [0, 0, 1]^T$ , нетрудно видеть, что столбцы  $a_i$  матрицы  $A = [a_1, a_2, a_3]$  также состоят из образов ортов «повернутого» базиса  $e'$  относительно исходного базиса  $e$ . отождествляя базис  $e'$  с твердым телом, получаем доказываемое утверждение.

Установленное естественное соответствие между матрицей ортогонального преобразования и угловым положением твердого тела позволяет считать группу  $SO(3)$  основной математической моделью твердого тела с неподвижной точкой, а матрицы ортогональных преобразований – естественным математическим ап-

паратом, описывающим угловое положение и движение твердого тела.

Группа  $O(3)$  включает в себя преобразования  $A \in O(3)$ :  $\det A = -1$ , являющиеся композицией поворота и зеркального отражения, переводящего правый базис в левый. Пример такого преобразования дает матрица  $A = \text{diag}[1, 1, -1]$ . Однако преобразования с отрицательным детерминантом в кинематике не используются.

Ортогональные матрицы также называют *матрицами направляющих косинусов*. Этот термин непосредственно вытекает из только что полученной интерпретации: столбцы ортогональной матрицы образованы координатами ортов «повернутого» базиса относительно «исходного», равными косинусам углов между ортами:

$$a_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_j = \cos \widehat{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}'_j},$$

·	$\mathbf{e}'_1$	$\mathbf{e}'_2$	$\mathbf{e}'_3$
$\mathbf{e}_1$	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$
$\mathbf{e}_2$	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$
$\mathbf{e}_3$	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$

Для наглядности этот результат представлен в виде таблицы из попарных скалярных произведений ортов двух базисов. Элементы таблицы равны соответствующим элементам ортогональной матрицы, а из ее структуры следует, что строки матрицы образованы координатами ортов «старого» базиса относительно «нового» и также попарно ортогональны.

Заметим, что при повороте координатного трехгранника правый базис (в котором  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3$ ) переходит в правый, и поэтому для матриц поворотов

$$\det A = \det[\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3] = \mathbf{e}'_1 \cdot (\mathbf{e}'_2 \times \mathbf{e}'_3) = 1.$$

Получим формулу, связывающую координаты *одного и того же вектора* в базисах  $\mathbf{e}'$  и  $\mathbf{e}$ . Пусть  $\boldsymbol{\rho}$  – некоторый вектор в базисе  $\mathbf{e}$ ,  $\boldsymbol{\rho}^{(')}$  – *тот же* вектор в базисе  $\mathbf{e}'$ . Тогда  $\boldsymbol{\rho}^{(')} = \sum \rho_k^{(')} \mathbf{e}'_k$ , но орты  $\mathbf{e}'_k$  в базисе  $\mathbf{e}$  выражаются формулами  $\mathbf{e}'_k = A\mathbf{e}_k$  и вектор  $\boldsymbol{\rho}$  в базисе  $\mathbf{e}$  равен

$$\boldsymbol{\rho} = A \sum \rho_k^{(')} \mathbf{e}_k = A\boldsymbol{\rho}^{(')}, \quad (17)$$

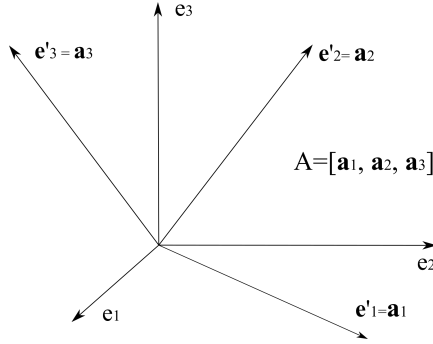


Рис. 10. Соответствие матрицы и ортов координатных систем. Столбцы матрицы образованы координатами ортов преобразованного базиса относительно исходного

поскольку в нем  $\mathbf{e}_1 = [1, 0, 0]^T$ ,  $\mathbf{e}_2 = [0, 1, 0]^T$ ,  $\mathbf{e}_3 = [0, 0, 1]^T$ .

Заметим, что координаты вектора, поворачивающегося вместе с базисом, преобразуются по тому же закону, что и орты базиса. Пусть  $\boldsymbol{\rho}$  – вектор в исходном базисе, который преобразуется ортогональной матрицей  $A$ :  $\mathbf{e}'_k = A\mathbf{e}_k$ . Если вектор поворачивается вместе с базисом, ее координаты в «новом» базисе останутся прежними, т. е. повернутый вектор  $\boldsymbol{\rho}' = \sum \rho_k \mathbf{e}'_k$ . Подставляя сюда выражения  $\mathbf{e}'_k = A\mathbf{e}_k$ , получаем, что

$$\boldsymbol{\rho}' = A\boldsymbol{\rho}. \quad (18)$$

**Замечание.** К приведенным формулам полезно обратиться при изучении композиции поворотов, когда будут рассматриваться так называемые активные и пассивные повороты.

б) Элементы  $a_{ij}$  ортогональной матрицы  $A$  совпадают с их алгебраическими дополнениями  $A_{ij}$  [10]. Это следует из способа вычисления обратной матрицы

$$A^{-1} = \frac{[A_{ij}]^T}{\det A},$$

справедливого для произвольной невырожденной матрицы, где  $[A_{ij}]^T$  – транспонированная матрица алгебраических дополнений. Для ортогональной матрицы  $A^{-1} = A^T$ ,  $\det A = 1$ , откуда немедленно следует доказываемое.



**Собственные векторы и собственные числа ортогонального преобразования.** Нахождение собственных значений и векторов ортогональной матрицы дает красивую и наглядную геометрическую интерпретацию задаваемого ей преобразования. Собственные векторы удовлетворяют равенству

$$Ar = \lambda r,$$

приводящему к характеристическому уравнению для нахождения собственных чисел

$$\det(\lambda E - A) = 0.$$

Вычисление детерминанта дает:

$$\begin{aligned} \lambda^3 &+ c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0 = 0, \\ c_2 &= -a_{11} - a_{22} - a_{33} = -\text{tr}A, \\ c_1 &= A_{11} + A_{22} + A_{33}, \\ c_0 &= -\det A, \end{aligned}$$

где  $A_{ii}$  – алгебраическое дополнение элемента  $a_{ii}$ ,  $\text{tr}A$  – след матрицы  $A$ . Формулы  $A_{ij} = a_{ij}$  и  $\det A = 1$  приводят характеристическое уравнение к виду

$$\lambda^3 - \text{tr}A\lambda^2 + \text{tr}A\lambda - 1 = 0. \quad (19)$$

Одним из корней (19) всегда будет  $\lambda_1 = 1$ , что показывает его подстановка в (19). Следовательно,

$$\forall A \in SO(3) \exists \mathbf{r}_1 : A\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1,$$

что доказывает следующее важное утверждение <sup>3</sup>.

**Теорема.** *У любой ортогональной матрицы  $A \in SO(3)$  всегда существует инвариантный вектор.*

---

<sup>3</sup> В книге [14] этот же факт доказан так. Вычисляя детерминант левой и правой частей тождества  $(A-E)A^T = E-A^T$  с учетом того, что  $\det A = 1$  и  $\det(E-A^T) = \det(E-A)^T = \det(E-A)$ , получим равенство  $\det(A-E) = \det(E-A)$ . Но для любой квадратной матрицы  $\det(-B) = (-1)^n \det B$ , где  $n$  – число строк матрицы, и поэтому  $\det(E-A) = -\det(A-E)$ , поскольку  $n = 3$ , следовательно  $\det(E-A) = 0$ , что и завершает доказательство. Очевидно, оно обладает большей общностью, т. к. распространяется на любые ортогональные матрицы нечетной размерности.

Поделив (19) на  $\lambda - 1$  и решив получившееся квадратное уравнение, находим еще два корня (19):

$$\lambda_{2,3} = \frac{\operatorname{tr}A - 1}{2} \pm \sqrt{\frac{(\operatorname{tr}A - 1)^2}{4} - 1}. \quad (20)$$

Покажем теперь, что  $|\lambda_k| = 1 \forall k$ . Ниже доказано, что собственные числа  $\lambda_1, \lambda_2$  и соответствующие им векторы оказываются комплексными, т. е.

$$\mathbf{r} = \mathbf{p} + i\mathbf{q} \in \mathbb{C}^3, \quad \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3.$$

Напомним, что вектор  $\mathbf{r}^+ = \overline{\mathbf{r}^T} = \mathbf{p}^T - i\mathbf{q}^T$  называется *эрмитово сопряженным*, а модулем вектора  $\mathbf{r} \in \mathbb{C}^3$  называется неотрицательное число  $|\mathbf{r}| = \sqrt{\mathbf{r}^+\mathbf{r}} = \sqrt{\mathbf{p}^T\mathbf{p} + \mathbf{q}^T\mathbf{q}}$ . Из определения  $|\mathbf{r}|$  следует, что ортогональное преобразование сохраняет модуль комплексного вектора:  $\forall A \in SO(3) \quad A\mathbf{r} = A\mathbf{p} + iA\mathbf{q}$ ,

$$|A\mathbf{r}| = \sqrt{\mathbf{p}^T A^T A \mathbf{p} + \mathbf{q}^T A^T A \mathbf{q}} = \sqrt{\mathbf{p}^T \mathbf{p} + \mathbf{q}^T \mathbf{q}} = |\mathbf{r}|.$$

Запишем уравнение на собственные векторы

$$A\mathbf{r}_k = \lambda_k \mathbf{r}_k$$

и вычислим квадраты модулей левой и правой частей

$$\begin{aligned} (A\mathbf{r}_k)^+ A\mathbf{r}_k &= \mathbf{r}_k^+ \mathbf{r}_k = |\mathbf{r}_k|^2, \\ (\lambda_k \mathbf{r}_k)^+ \lambda_k \mathbf{r}_k &= \overline{\lambda_k} \lambda_k \mathbf{r}_k^+ \mathbf{r}_k = |\lambda_k|^2 |\mathbf{r}_k|^2, \end{aligned}$$

сравнивая которые, получим  $|\lambda_k| = 1$ . Но комплексные числа с единичным модулем представимы в виде:

$$\begin{aligned} \lambda_{2,3} &= \cos \varphi \pm i \sin \varphi, \quad \cos \varphi = \frac{\operatorname{tr}A - 1}{2}, \\ \sin \varphi &= \sqrt{1 - \frac{(\operatorname{tr}A - 1)^2}{4}}. \end{aligned} \quad (21)$$

Ниже показано (см. (25)), что  $|\frac{\operatorname{tr}A - 1}{2}| < 1$ , и под корнем будет положительное число, меньшее единицы.

В книге [1] доказывается, что если  $\mathbf{r}_{2,3} = \mathbf{p} \mp i\mathbf{q}$  – собственные векторы, соответствующие  $\lambda_{2,3}$ , то векторы  $\{\mathbf{r}_1 \mathbf{p} \mathbf{q}\}$  после предварительной нормировки  $|\mathbf{r}_1| = |\mathbf{p}| = |\mathbf{q}| = 1$  образуют правый ортонормированный базис (обратите внимание на расстановку знаков  $\pm$  и  $\mp$ ). Однако для дальнейшего изложения этот факт не существенен и оставлен без доказательства.

**Теорема Эйлера о конечном повороте.** В предыдущем разделе доказано, что любая ортогональная матрица имеет инвариантный вектор:

$$\forall A \in SO(3) \exists \mathbf{r}_1 : A\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1,$$

и пространство, натянутое на этот собственный вектор, инвариантно относительно ортогонального преобразования. Из этого следует, что плоскость  $P \perp \mathbf{r}_1$  тоже будет инвариантным пространством:

$$\forall \mathbf{r} \in P \quad (A\mathbf{r})^T \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}^T A^T \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}^T \mathbf{r}_1 = 0,$$

и  $\forall \mathbf{r} \perp \mathbf{r}_1 \quad A\mathbf{r} \perp \mathbf{r}_1$ , что доказывает инвариантность  $P$  относительно преобразования  $A$ .

Из полученных результатов следует важнейшая для всех последующих рассуждений теорема.

**Теорема Эйлера о конечном повороте.** *Для любых двух положений твердого тела с неподвижной точкой существует плоский поворот, совмещающий эти два положения.*

Доказательство теоремы сразу же вытекает из взаимной однозначности положений твердого тела и ортогональных матриц, инвариантности собственного вектора  $\mathbf{r}_1$  и ортогонального дополнения к нему. Вектор  $\mathbf{r}_1$  задает направление оси эйлера поворота, и его удобно считать единичным, не ограничивая общности.

Из теоремы Эйлера следует, что для любого поворота тела существует базис, в котором он сводится к повороту вокруг одной из координатных осей базиса. В [1] приводится наглядный способ, позволяющий записать матрицу этого преобразования и избежать типичных ошибок в знаках элементов матрицы. Будем считать, что поворот вектора  $\mathbf{r} = [x, y, z]^T$  выполняется относительно оси  $x$  на угол  $\varphi$  против часовой стрелки. Составляющие вектора  $\mathbf{r}$  в плоскости  $\{y, z\}$  образуют треугольник с катетами  $y$  и  $z$ , занимающий после поворота на угол  $\varphi$  положение, изображенное на рис. 11. Из рис. 11 и неизменности координаты  $x$  немедленно следует выражение для координат повернутого век-

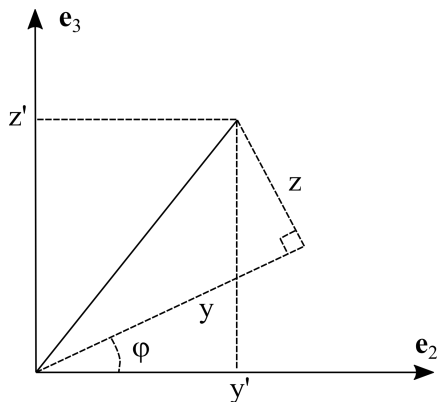


Рис. 11. Поворот в плоскости, ортогональной оси поворота

тора  $\mathbf{r}' = [x', y', z']^T$ :

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y \cos \varphi - z \sin \varphi, \\ z' &= y \sin \varphi + z \cos \varphi, \end{aligned}$$

и матрица  $A$  преобразования  $\mathbf{r}' = A\mathbf{r}$  равна

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

Аналогичным образом легко получить повороты относительно любых координатных осей базиса. Естественно, что это же выражение матрицы элементарного поворота относительно оси можно записать, вспомнив, что столбцы матрицы образованы координатами ортов «повернутого» базиса относительно «исходного».

Теорема Эйлера гарантирует, что любое ортогональное преобразование есть поворот вокруг некоторого единичного орта  $\mathbf{e}$  на некоторый угол  $\varphi$ . Рассмотрим обратную задачу восстановления ортогональной матрицы по орту оси и углу поворота. Пусть  $\mathbf{r}$  – произвольный вектор, неколлинеарный направляющему орту оси поворота  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{r}'$  – его образ после поворота. Введем ортонормированный базис так, чтобы орт первой оси  $\mathbf{e}_1$  совпадал с ортом

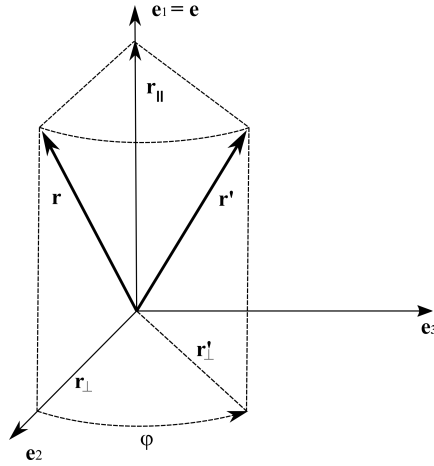


Рис. 12. Поворот вектора относительно орта

$e$ , второй  $e_2$  лежал в плоскости векторов  $\{e, r\}$ , а третий  $e_3$  дополнял их до правой тройки (рис. 12):

$$e_1 = e, \quad e_2 = \frac{r_{\perp}}{r_{\perp}} = \frac{r - (e \cdot r)e}{r_{\perp}}, \quad e_3 = e_1 \times e_2 = \frac{e \times r}{r_{\perp}}.$$

Векторы  $r$  и  $r'$  представим в виде  $r = r_{\parallel} + r_{\perp}$ ,  $r' = r'_{\parallel} + r'_{\perp}$ , где индексом  $\parallel$  обозначены составляющие векторов вдоль  $e$ , а индексом  $\perp$  — ортогональные  $e$ . Тогда (см. рис. 12):

$$r'_{\parallel} = r_{\parallel} = (e \cdot r)e, \quad r'_{\perp} = r_{\perp} \cos \varphi e_2 + r_{\perp} \sin \varphi e_3,$$

и в итоге

$$r' = r'_{\parallel} + r'_{\perp} = r \cos \varphi + e \times r \sin \varphi + (e \cdot r)e(1 - \cos \varphi). \quad (22)$$

**Замечание.** Полученная формула имеет инвариантный геометрический характер и может быть выписана в проекциях на оси любой системы координат, а не только в базисе, использованном при ее выводе.

Для записи матрицы этого ортогонального преобразования вводится кососимметрический оператор:

$$\hat{e} = \begin{bmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

образованный компонентами вектора  $\mathbf{e} = [e_1, e_2, e_3]^T$  и соответствующий векторному произведению на  $\mathbf{e}$ . В том, что  $\hat{\mathbf{e}}\mathbf{r} = \mathbf{e} \times \mathbf{r}$ , нетрудно убедиться прямой проверкой.

С учетом этого обозначения и равенств  $(\mathbf{e} \cdot \mathbf{r})\mathbf{e} = \mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{e}\mathbf{e}^T\mathbf{r}$  формула (22) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= (E \cos \varphi + \hat{\mathbf{e}} \sin \varphi + \mathbf{e}\mathbf{e}^T(1 - \cos \varphi)) \mathbf{r}, \\ \mathbf{e}\mathbf{e}^T &= \begin{bmatrix} e_1^2 & e_1 e_2 & e_1 e_3 \\ e_1 e_2 & e_2^2 & e_2 e_3 \\ e_1 e_3 & e_2 e_3 & e_3^2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

откуда следует выражение ортогональной матрицы через параметры Эйлера поворота:

$$A = E \cos \varphi + \hat{\mathbf{e}} \sin \varphi + \mathbf{e}\mathbf{e}^T(1 - \cos \varphi). \quad (24)$$

**Замечание.** Кососимметрический оператор, соответствующий векторному произведению, и формула (24) будут неоднократно применяться в дальнейшем. Поэтому необходимо четко усвоить конструкцию этих объектов.

Из (24) следуют выражения параметров эйлера поворота через элементы ортогональной матрицы. Из вычисления следа матрицы (24), с использованием нормировки  $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$  получаем, что

$$\text{tr} A = 2 \cos \varphi + 1.$$

Координаты орта оси выражаются через разности элементов, стоящих на симметричных позициях относительно главной диагонали в левой и правой частях (24). При их вычислении члены в правой части, пропорциональные элементам симметрической матрицы  $\mathbf{e}\mathbf{e}^T$ , сокращаются, а члены, пропорциональные элементам кососимметрической матрицы  $\hat{\mathbf{e}}$ , удваиваются:

$$\begin{aligned} a_{32} - a_{23} &= 2e_1 \sin \varphi, \\ a_{13} - a_{31} &= 2e_2 \sin \varphi, \\ a_{21} - a_{12} &= 2e_3 \sin \varphi, \end{aligned}$$

и, в итоге:

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{\operatorname{tr} A - 1}{2}, \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2 \sin \varphi} \begin{bmatrix} a_{32} - a_{23} \\ a_{13} - a_{31} \\ a_{21} - a_{12} \end{bmatrix}, \quad (25) \\ \sin \varphi &= \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}.\end{aligned}$$

Из совпадения формулы (21) для  $\cos \varphi$  с выражением (25) получается, что  $|\frac{\operatorname{tr} A - 1}{2}| < 1$ , а пара собственных чисел ортогональной матрицы при  $\varphi \neq 0$  всегда будет комплексной. Угол  $\varphi$  в тригонометрической форме записи комплексных собственных чисел совпадает с углом эйлера поворота.

Обратим внимание на то, что выражение (25) получено в предположении о положительности направления поворота (против часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси), а угол  $\varphi \in [0, \pi]$ .

Формула (24) задает взаимно однозначное соответствие между матрицей и параметрами эйлера поворота.

**Пример.** Матрица ортогонального преобразования имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Определить направление оси и угол конечного поворота, задаваемого матрицей  $A$ .

◀ Применим формулы (25) к матрице  $A$ :

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 120^\circ, \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \mathbf{e} &= \frac{1}{\sqrt{3}}[1, 1, 1]^T. \quad \blacktriangleright\end{aligned}$$

Рассмотрим разложение формулы (24) до линейного члена для малых углов, когда  $|\varphi| \ll 1$  (в радианах):

$$A \simeq E + \hat{\mathbf{e}}\varphi.$$

Введем вектор  $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{e}\varphi = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]^T$ , называемый **вектором Эйлера**<sup>4</sup> или **вектором конечного поворота**, и сопо-

<sup>4</sup> Использование термина «вектор» сильно зависит от контекста. В большинстве случаев вектором удобно называть любой набор чисел, записанных в виде

ставим ему по правилу (23) кососимметрический оператор:

$$\hat{\varphi} = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_3 & \varphi_2 \\ \varphi_3 & 0 & -\varphi_1 \\ -\varphi_2 & \varphi_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда приближенное выражение для ортогональной матрицы малого поворота переписывается в виде

$$A \simeq E + \hat{\varphi} \quad (26)$$

Это выражение называется *оператором малого поворота*.

**Замечание.** Понятие оператора малого поворота должно быть четко усвоено. Оно нужно для дальнейших построений и полезно для приближенного вычисления матриц взаимной ориентации базисов с близким угловым положением, встречающихся во многих практических задачах.

Следующее утверждение дальше нигде не используется, однако представляется достаточно интересным. *Экспонентой матрицы*  $X$  называется сходящийся (см., например, [3]) ряд

$$e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} = E + X + \frac{X^2}{2} + \dots \quad (27)$$

Домножая слева на  $\hat{e}$  формулы

$$\hat{e}\mathbf{r} = \mathbf{e} \times \mathbf{r}, \quad \hat{e}^2\mathbf{r} = \mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{r}) = \mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}$$

нетрудно установить, что  $\hat{e}^{2k+1} = (-1)^k \hat{e}$ ,  $\hat{e}^{2k} = (-1)^{k+1} \hat{e}^2$ . Разложение в ряд Маклорена по  $\varphi$  выражения (24) с учетом этих

---

матрицы-столбца или строки. Однако с точки зрения геометрии векторы – это элементы линейного пространства, для которых определены операции сложения и умножения на число и закон преобразования при замене базиса по формуле вида (17). С подробностями можно ознакомиться, изучив основы тензорного исчисления, например, по книгам [5] или [7].

Линейной комбинации двух неколлинеарных векторов Эйлера не соответствует композиция поворотов (с пропорционально измененными углами), что не позволяет считать вектор Эйлера «обычным» геометрическим вектором. Ниже показано, что правилам «обычной» векторной алгебры удовлетворяют лишь векторы Эйлера бесконечно малых поворотов. Однако при замене базиса вектор Эйлера преобразуется как обычный трехмерный вектор. Набор криволинейных координат точки также нельзя считать геометрическим вектором: для них не определены все векторные операции.



равенств и тождества  $\varphi \hat{e} = \hat{\varphi}$  показывает, что ортогональная матрица  $A$  связана с оператором  $\hat{\varphi}$  формулой

$$A = e^{\hat{\varphi}}, \quad (28)$$

существенной для исследования групповых свойств ортогональных матриц.

**Упражнение.** Доказать формулу (28).

### 2.3. Угловая скорость твердого тела, распределение скоростей и ускорений в твердом теле

Из Теоремы Эйлера о конечном повороте следует, что положения тела с неподвижной точкой в моменты времени  $t$  и  $t + \Delta t$  совмещаются некоторым вектором конечного поворота  $\Delta\varphi$ .

**Определение.** Угловой скоростью твердого тела называется вектор

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Происхождение этого термина следует из его определения.

Во введении к разделу 2 показана независимость углового движения тела от выбора полюса. Поэтому угловая скорость тела характеризует движение тела в целом и не относится к какой-либо точке тела. Этим угловая скорость тела существенно отличается, например, от линейной скорости точки, которая по своему смыслу «привязана» к этой точке.

В разделе 2.4 доказывается, что угловая скорость определенным образом локализована относительно тела. Этот факт полезен для качественного представления о движении твердого тела и совершенно не имеет значения для вычислений параметров углового движения.

Из формулы (26) следует, что производная ортогональной матрицы по времени, вычисленная в точке, соответствующей тождественному преобразованию, всегда будет кососимметрической матрицей. Пусть  $A(t)$  – ортогональная матрица, зависящая от времени, и  $A(0) = E$ . Тогда комбинируя (26) с определением угловой скорости, получаем, что

$$\dot{A}|_{t=0} = \hat{\omega},$$

где  $\hat{\omega}$  – кососимметрический оператор, соответствующий угловой скорости. Косая симметрия  $\dot{A}|_{t=0}$  следует из дифференцирования тождества  $A^T A = E$ :  $\dot{A}^T A + A^T \dot{A} = 0$  и  $A|_{t=0} = E$ <sup>5</sup>.

Производная вектора угловой скорости по времени

$$\varepsilon = \dot{\omega}$$

называется *угловым ускорением*. Для понимания геометрического смысла этого вектора и для решения ряда задач полезно следующее представление. Запишем угловую скорость в виде  $\omega = \omega e$ , где  $\omega$  – модуль угловой скорости,  $e$  – единичный орт, задающий направление вектора  $\omega$ . Тогда, дифференцируя это выражение, получим

$$\varepsilon = \dot{\omega} e + \omega \dot{e},$$

откуда следует, что угловое ускорение связано с изменением модуля угловой скорости и ее направления. Это напоминает формулу для ускорения точки в сопровождающем трехграннике

$$\mathbf{w} = \dot{v}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{n},$$

в которой тоже выделяются компоненты ускорения, обусловленные изменением модуля и направления вектора линейной скорости.

Выведем формулы распределения скоростей и ускорений точек твердого тела. Выберем неподвижный базис  $x$ , зафиксируем полюс  $O$  в твердом теле и отложим следующие радиусы-векторы.

$\mathbf{R}$  – радиус-вектор полюса  $O$  от начала координат базиса  $x$ ,

$\boldsymbol{\rho}$  – радиус-вектор некоторой фиксированной точки твердого тела относительно полюса  $O$ ,

---

<sup>5</sup> Отметим следующую аналогию. Поверхность в пространстве  $\mathbb{R}^3$  задается параметрическим уравнением  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ . Кривая на поверхности – зависимостями  $u(t), v(t)$ , где  $t$  – некоторый параметр, например, время или длина дуги. Касательный вектор к поверхности вдоль кривой равен  $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_u \dot{u} + \mathbf{r}_v \dot{v}$ . Множество всевозможных касательных векторов в некоторой точке поверхности образует касательное пространство (плоскость) к поверхности в точке.

Подобно этому любая матрица  $A(t) \in SO(3)$  аналогична кривой на многообразии  $SO(3)$ , а множество всевозможных кососимметрических операторов  $\hat{\omega} = \dot{A}|_{t=0}$  задает касательное пространство в любой точке группы  $SO(3)$  ортогональных матриц. Под матрицей  $A$  здесь подразумевается ортогональное преобразование, близкое к тождественному, т. е.  $A|_{t=0} = E$ , описывающее отклонение от некоторого элемента  $SO(3)$ .

$\mathbf{r}$  – радиус-вектор этой же точки тела относительно неподвижного базиса (рис. 13). Из определений этих векторов сле-

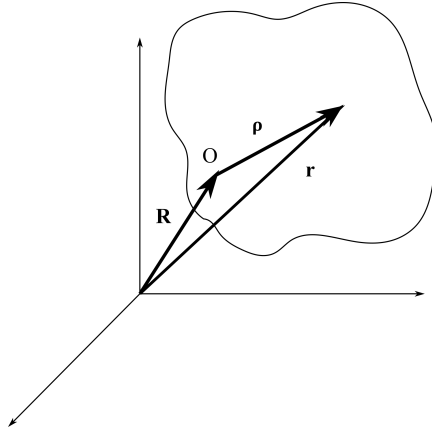


Рис. 13. Радиусы-векторы полюса и точки тела

дует, что

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \boldsymbol{\rho},$$

а скорость выбранной точки тела равна  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}$ . Но  $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{v}_O$ , т.е. является скоростью полюса  $O$ .

Для вычисления  $\dot{\boldsymbol{\rho}}$  заметим, что вектор  $\boldsymbol{\rho}$  жестко связан с телом и поэтому постоянен в базисе, связанном с телом. Относительно неподвижного базиса за малое время  $\Delta t$  вектор  $\boldsymbol{\rho}$  совершает вместе с телом малый поворот, задаваемый вектором Эйлера  $\Delta\varphi$ . Причем поступательное перемещение, обусловленное смещением полюса  $O$  за время  $\Delta t$ , не влияет на его приращение.

Для записи поворота в базисе  $x$  свяжем с телом базис  $\xi$  так, что его оси в момент времени  $t$  сонаправлены с одноименными осями базиса  $x$ . Тогда формула (17) в главном приближении сводится к оператору малого поворота (26):

$$\boldsymbol{\rho}(t + \Delta t) = (E + \Delta\hat{\varphi})\boldsymbol{\rho}(t) + O(|\Delta\varphi|^2),$$

и, следовательно,

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\hat{\varphi}}{\Delta t} \boldsymbol{\rho}.$$

Но  $\boldsymbol{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \hat{\varphi}}{\Delta t}$ , а оператор  $\Delta \hat{\varphi}$  соответствует вектору  $\Delta \varphi$  по правилу (23), и поэтому

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \hat{\varphi}}{\Delta t} = \hat{\boldsymbol{\omega}}, \quad \dot{\boldsymbol{\rho}} = \hat{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}. \quad (29)$$

Из формулы (29) следует, что производные ортов  $\mathbf{e}_k$  связанного с телом базиса равны

$$\dot{\mathbf{e}}_k = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_k. \quad (30)$$

Эти выражения полезны при дифференцировании по времени векторов, заданных в подвижных базисах (см. ниже разделы о сложном движении).

Из выведенных равенств следует формула

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}, \quad (31)$$

выражающая распределение скоростей точек твердого тела, называемая **формулой Эйлера**.

Продифференцируем ее по времени с учетом равенств  $\dot{\boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$ ,  $\dot{\mathbf{v}}_O = \mathbf{w}_O$ , где  $\mathbf{w}_O$  – ускорение полюса  $O$ , и  $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\varepsilon}$ :

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}). \quad (32)$$

Полученная **формула Ривальса** выражает распределение ускорений точек твердого тела. Компонента  $\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho}$  называется **вращательным ускорением**,  $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})$  – **осеостремительным ускорением**.

Разберем классический пример, иллюстрирующий применение выведенных формул.

**Пример.** Прямой круговой конус с радиусом основания  $r$  катится без проскальзывания по неподвижной плоскости так, что скорость центра основания  $C$  постоянна по модулю и равна  $v$  (см. рис. 14).

Определить угловую скорость  $\boldsymbol{\omega}$ , угловое ускорение  $\boldsymbol{\varepsilon}$  конуса, а также скорость  $\mathbf{v}_M$ , ускорение  $\mathbf{w}_M$  и радиус кривизны  $\rho$  точки конуса, занимающей в данный момент верхнее положение  $M$ , изображенное на рис. 14.

◀ Вначале обсудим понятие **качения без проскальзывания**. Говорят, что тело 1 катится без проскальзывания по телу 2,

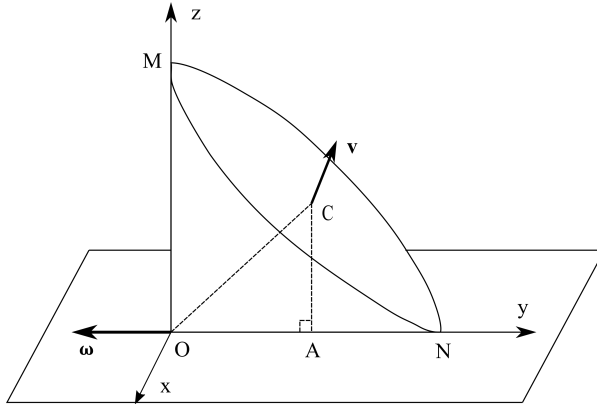


Рис. 14. Равномерное качение конуса по плоскости

если скорости всех соприкасающихся точек тел совпадают. Для рассматриваемой задачи это означает, что точки на образующей конуса  $ON$ , касающейся плоскости, равны нулю.

В качестве полюса всегда выбирается точка тела, параметры движения (или неподвижность) которой ясны из условия задачи, а система координат вводится из соображений удобства записи векторов, фигурирующих в задаче. Из этих соображений введена неподвижная система координат, изображенная на рис. 14, а вершина конуса  $O$  взята за полюс.

Выпишем формулу Эйлера для точек на образующей  $ON$ :

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = 0.$$

Следовательно, на образующей  $\mathbf{r} \parallel \boldsymbol{\omega}$ , и угловая скорость конуса всегда направлена вдоль  $ON$ . Из формул

$$\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OC}, \quad \mathbf{v}_C = \begin{bmatrix} -v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{OC} = \begin{bmatrix} 0 \\ r/\sqrt{2} \\ r/\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

получается, что  $\boldsymbol{\omega} = [0, -\sqrt{2}v/r, 0]^T$ .

Однако иногда параметры движения можно определить не только из формул, но и геометрических соображений. Например, в рассматриваемой задаче  $\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{AC}$ , где  $\mathbf{AC} \perp \boldsymbol{\omega}$  —

перпендикуляр к образующей  $ON$ , проходящий через точку  $C$  (см. рис. 14). Поэтому  $v_c = \omega AC$ ,  $v_C = v$ ,  $AC = r/\sqrt{2}$ . Следовательно,  $\omega = \sqrt{2}v/r$ , а направление вектора  $\omega$  находится по правилу правого винта.

Теперь вычислим угловое ускорение, воспользовавшись формулами

$$\omega = \omega e, \quad \varepsilon = \dot{\omega} e + \omega \dot{e}.$$

Из условия задачи следует, что  $\omega = \sqrt{2}v/r = \text{const}$  и  $\varepsilon = \omega \dot{e}$ . Для вычисления  $\dot{e}$  введем плоскость, проходящую через координатную ось  $z$  и центр основания конуса  $C$ .

Плоскость можно считать твердым телом, вращающимся вокруг  $z$  с угловой скоростью  $\Omega = [0, 0, \Omega]^T$ . Точка  $C$  и орт  $e$  по построению принадлежат этому телу, и поэтому  $\dot{e} = \Omega \times e$ . Таким образом,

$$\varepsilon = \omega \Omega \times e = \Omega \times \omega.$$

Из формулы  $v_C = \Omega \times \mathbf{OC}$  следует, что  $\Omega = [0, 0, \sqrt{2}v/r]^T$ ,

$$\varepsilon = [2v^2/r^2, 0, 0]^T.$$

Зная  $\omega$  и  $\varepsilon$ , вычислим скорость и ускорение интересующей нас точки  $M$  по формулам Эйлера и Ривальса:

$$v_M = \omega \times \mathbf{OM} = [-2v, 0, 0]^T,$$

$$w_M = \varepsilon \times \mathbf{OM} + \omega \times (\omega \times \mathbf{OM}) = \frac{2\sqrt{2}v^2}{r} [0, -1, -1]^T.$$

Из ортогональности  $w_M \perp v_M$ , представления ускорения в естественном трехграннике  $w = w_\tau + w_n$ ,  $w_\tau \parallel v$ ,  $w_n \perp v$  получается, что  $w = w_n = (v^2/\rho)n$ , откуда  $\rho = v^2/w = r$ . ►

Следующий пример может показаться несколько искусственным, однако интересен тем, что связывает кинематику твердого тела и движение трехгранника Френе, являющегося объектом дифференциальной геометрии кривых.

**Пример.** Найти угловую скорость трехгранника Френе для точки, движущейся по произвольной гладкой кривой. Вычислить эту угловую скорость для движения точки по винтовой линии

$$r(t) = \begin{bmatrix} a \cos \omega t \\ a \sin \omega t \\ bt \end{bmatrix}.$$

◀ Введем натуральную параметризацию  $\mathbf{r}(s)$  и будем считать векторы  $\{\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ , образующие трехгранник Френе, функциями  $s$ . Дифференцируя тождества  $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} = 1$ ,  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ ,  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 1$  по  $s$ , получим, что  $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau}' = 0$ ,  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' = 0$ ,  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}' = 0$ , где  $' = d/ds$ , т.е. производные ортов трехгранника Френе ортогональны самим ортам и поэтому

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}' &= \alpha_\tau \mathbf{n} + \beta_\tau \mathbf{b}, \\ \mathbf{n}' &= \alpha_n \boldsymbol{\tau} + \beta_n \mathbf{b}, \\ \mathbf{b}' &= \alpha_b \boldsymbol{\tau} + \beta_b \mathbf{n}.\end{aligned}\tag{33}$$

Для вычисления коэффициентов продифференцируем по  $s$  равенства

$$\mathbf{b} = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}, \quad \boldsymbol{\tau} = \mathbf{n} \times \mathbf{b}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{b} \times \boldsymbol{\tau}\tag{34}$$

и подставим в них (33) и (34). Для вектора  $\mathbf{b}$  это дает

$$\begin{aligned}\mathbf{b}' &= \boldsymbol{\tau}' \times \mathbf{n} + \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}', \\ \alpha_b \boldsymbol{\tau} + \beta_b \mathbf{n} &= (\alpha_\tau \mathbf{n} + \beta_\tau \mathbf{b}) \times \mathbf{n} + \boldsymbol{\tau} \times (\alpha_n \boldsymbol{\tau} + \beta_n \mathbf{b}) = \\ &= -\beta_\tau \boldsymbol{\tau} - \beta_n \mathbf{n} \quad \Rightarrow \quad \alpha_b = -\beta_\tau, \quad \beta_b = -\beta_n.\end{aligned}$$

Аналогичные выкладки, проведенные для остальных векторов, дают лишь одну новую формулу  $\alpha_\tau = -\alpha_n$  и выражения

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}' &= \alpha_\tau \mathbf{n} + \beta_\tau \mathbf{b}, \\ \mathbf{n}' &= -\alpha_\tau \boldsymbol{\tau} + \beta_n \mathbf{b}, \\ \mathbf{b}' &= -\beta_\tau \boldsymbol{\tau} - \beta_n \mathbf{n}.\end{aligned}$$

Из раздела 1.2 известно, что  $\boldsymbol{\tau}' = k\mathbf{n}$ , где  $k$  – кривизна кривой, следовательно,  $\beta_\tau = 0$  и  $\mathbf{b}' = -\beta_n \mathbf{n}$ . В дифференциальной геометрии принято обозначение  $\mathbf{b}' = -\varkappa \mathbf{n}$ , где параметр  $\varkappa$  называется *кручением кривой*<sup>6</sup>. С учетом этих традиционных обозначений окончательно получаем выражения

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}' &= k\mathbf{n}, \\ \mathbf{n}' &= -k\boldsymbol{\tau} + \varkappa \mathbf{b}, \\ \mathbf{b}' &= -\varkappa \mathbf{n},\end{aligned}\tag{35}$$

---

<sup>6</sup> Знак кручения может отличаться в разных книгах.

называемые *формулами Френе*.

С точки зрения кинематики трехгранник Френе, перемещающийся вдоль кривой, является твердым телом, поскольку при движении он остается ортогональным, а его орты не меняют длины. Но для любых векторов, жестко связанных с телом, включая орты связанного базиса (см. (30)), справедливы формулы

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\tau}, \quad \dot{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{n}, \quad \dot{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{b}, \quad (36)$$

где  $\boldsymbol{\Omega}$  – искомая угловая скорость базиса. Переходя в (35) от дифференцирования по дуге к дифференцированию по времени согласно правилу  $d/ds = (ds/dt)^{-1}d/dt$ , получим

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\tau}} &= \dot{s}k\boldsymbol{n}, \\ \dot{\boldsymbol{n}} &= \dot{s}(-k\boldsymbol{\tau} + \varkappa\boldsymbol{b}), \\ \dot{\boldsymbol{b}} &= -\dot{s}\varkappa\boldsymbol{n}. \end{aligned} \quad (37)$$

В базисе  $\{\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}\}$  орты имеют координаты  $\boldsymbol{\tau} = [1, 0, 0]^T$ ,  $\boldsymbol{n} = [0, 1, 0]^T$ ,  $\boldsymbol{b} = [0, 0, 1]^T$ , и (37) переписывается в виде

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} = \hat{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{\tau}, \quad \dot{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{n}, \quad \dot{\boldsymbol{b}} = \hat{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{b}, \quad \hat{\boldsymbol{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{s}k & 0 \\ \dot{s}k & 0 & -\dot{s}\varkappa \\ 0 & \dot{s}\varkappa & 0 \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Записывая (36) в базисе  $\{\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}\}$ , обозначив

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_b & \Omega_n \\ \Omega_b & 0 & -\Omega_\tau \\ -\Omega_n & \Omega_\tau & 0 \end{bmatrix}, \quad (39)$$

и сопоставляя формулы (38) и (39), получаем, что

$$\begin{bmatrix} \Omega_\tau \\ \Omega_n \\ \Omega_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{s}\varkappa \\ 0 \\ \dot{s}k \end{bmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{\Omega} = \dot{s}\varkappa\boldsymbol{\tau} + \dot{s}k\boldsymbol{b}. \quad (40)$$

Из (40) следует, что кривизна  $k$  характеризует вращение трехгранника Френе при его перемещении вдоль траектории относительно вектора бинормали  $\boldsymbol{b}$ , а кручение  $\varkappa$  – относительно касательного вектора  $\boldsymbol{\tau}$ .



Применим (40) к движению по винтовой линии, заимствуя полученные в разделе 1.2 выражения для ортов трехгранника Френе винтовой линии в неподвижном базисе, скорости  $\dot{s}$  и радиуса кривизны:

$$\begin{aligned}\dot{s} &= v = \sqrt{a^2\omega^2 + b^2} \\ \rho &= \frac{v^2}{w} = \frac{a^2\omega^2 + b^2}{a\omega^2}, \quad \boldsymbol{\tau} = \frac{1}{\sqrt{a^2\omega^2 + b^2}} \begin{bmatrix} -a\omega \sin \omega t \\ a\omega \cos \omega t \\ b \end{bmatrix}, \\ \mathbf{n} &= - \begin{bmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{a^2\omega^2 + b^2}} \begin{bmatrix} b \sin \omega t \\ -b \cos \omega t \\ a\omega \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Из этих формул следует, что  $k = \rho^{-1} = \frac{a\omega^2}{a^2\omega^2 + b^2}$  и для вычисления  $\boldsymbol{\omega}$  осталось найти кручение. Из формул

$$\dot{\mathbf{b}} = \frac{b\omega}{\sqrt{a^2\omega^2 + b^2}} \begin{bmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}' = -\varkappa \mathbf{n}, \quad \dot{\mathbf{b}} = \mathbf{b}' \dot{s},$$

получается, что  $\varkappa = \frac{b\omega}{a^2\omega^2 + b^2}$  и

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{b\omega}{\sqrt{a^2\omega^2 + b^2}} \boldsymbol{\tau} + \frac{a\omega^2}{\sqrt{a^2\omega^2 + b^2}} \mathbf{b}.$$

Интересно заметить, что в неподвижном базисе эта же угловая скорость имеет вид

$$\boldsymbol{\Omega} = [0, 0, \omega]^T,$$

что получается при подстановке в выражение для  $\boldsymbol{\Omega}$  координат ортов  $\boldsymbol{\tau}$  и  $\mathbf{b}$  в неподвижном базисе. ►

**Пример.** Выразить угловую скорость твердого тела через орты жестко связанного с телом ортонормированного базиса и их производные.

◀ Пусть  $\mathbf{e}_k$ ,  $k = \overline{1, 3}$  – орты связанного базиса, тогда по формуле (30)

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_1, \quad \dot{\mathbf{e}}_2 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_2, \quad \dot{\mathbf{e}}_3 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3.$$

Умножим первое равенство векторно на  $\mathbf{e}_1$  и раскроем получившееся двойное векторное произведение:

$$\mathbf{e}_1 \times \dot{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_1 \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_1) = \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1.$$

Те же выкладки для ортов  $\mathbf{e}_2$  и  $\mathbf{e}_3$  приводят к аналогичным равенствам с индексами 2 и 3. Их суммирование дает

$$\sum \mathbf{e}_k \times \dot{\mathbf{e}}_k = 2\boldsymbol{\omega} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \sum \mathbf{e}_k \times \dot{\mathbf{e}}_k. \quad (41)$$

Здесь учтено, что  $(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_k)\mathbf{e}_k$  – компонента разложения вектора  $\boldsymbol{\omega}$  вдоль базисного вектора  $\mathbf{e}_k$ , и поэтому  $\sum (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_k)\mathbf{e}_k = \boldsymbol{\omega}$ . ►

**Упражнение.** Получить из (41) и (37) формулу (40).

## 2.4. Сведение перемещения твердого тела к винтовому. Кинематический винт твердого тела

В разделе показано, что произвольное перемещение твердого тела практически всегда представимо в виде винтового перемещения – композиции эйлерова поворота и перемещения вдоль оси этого поворота. Параллельный переноса либо поворот тела относительно некоторой оси можно трактовать как частные случаи винтового перемещения. Этот результат называется *теоремой Шаля*.

Из нее следует винтовая картина мгновенного движения твердого тела, состоящего из одновременного вращения относительно некоторой прямой, коллинеарной вектору угловой скорости, и перемещения вдоль нее. Такое движение напоминающее закручивание винта в неподвижную гайку, принято называть *кинематическим винтом*. Частными случаями этого движения являются мгновенно поступательное движение или мгновенное вращение.

Случай поступательного перемещения твердого тела тривиален. Все точки тела движутся одинаково, и перемещение  $\mathbf{OO}'$  любого полюса  $O$  тела совпадает с перемещениями остальных точек. Скорость произвольной точки тела равна скорости полюса  $\mathbf{v}_O$ .

Далее будем считать, что перемещение тела не является поступательным. Зафиксируем в теле полюс  $O$  и рассмотрим новое положение тела, в котором  $O$  перейдет в точку  $O'$ . По теореме

Эйлера, в новом положении тело повернется относительно  $O'$  на некоторый вектор Эйлера  $e\varphi$ . Для доказательства существования винтового перемещения тела остается показать, что орт  $e$  можно расположить в пространстве так, что композиция поворота относительно этого орта на угол  $\varphi$  и параллельного переноса вдоль него на  $\Delta l$  совмещает полюсы  $O$  и  $O'$ . При этом перемещении параметры эйлера поворота тела (направление орта и угол) не меняются, и из совмещения полюсов следует и совмещение исходного положения тела с конечным.

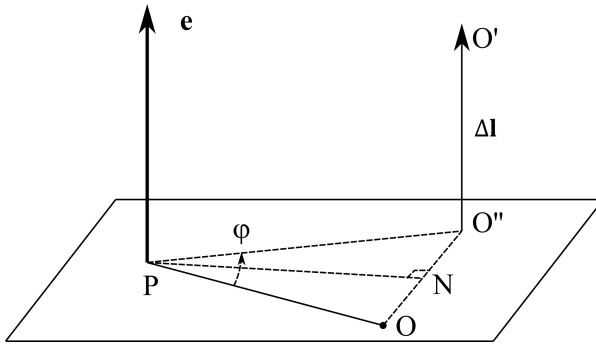


Рис. 15. Винтовое перемещение. Угол  $\varphi$  равен углу эйлера поворота тела, орт  $e$  задает направление эйлера поворота. Полюс  $O$  тела переходит в положение  $O'$  после поворота относительно  $e$  на угол  $\varphi$  и параллельного переноса на  $\Delta l$  вдоль направления  $e$ . При построении учитывается, что поворот относительно орта выполняется против часовой стрелки

Проведем через полюс  $O$  плоскость, ортогональную орту  $e$ , спроектируем на нее вдоль орта  $e$  точку  $O'$  и обозначим эту проекцию через  $O''$  (рис. 15). Из построения следует, что  $\mathbf{OO}'' = \mathbf{OO}' - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{OO}')\mathbf{e}$ . Если выбрать точку  $P$  на серединном перпендикуляре к  $OO''$  так, что  $\angle OPO'' = \varphi$ , то поворот плоскости вокруг точки  $P$  на угол  $\varphi$  совмещает точки  $O$  и  $O''$ .

Переместив точку  $O''$  вдоль  $e$  на вектор  $\Delta l = \mathbf{O}''\mathbf{O}' = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{OO}')\mathbf{e}$ , получим линейную (поступательную) часть винтового перемещения, совмещающего  $O$  и  $O'$ , что и завершает доказательство его существования.

Для полноты получим формулу, позволяющую находить точку  $P$  пересечения винтовой оси и плоскости, проходящей через начальное положение полюса тела и ортогональной винтовой оси. Орт серединного перпендикуляра к  $OO''$  равен

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{OO}''}{|\mathbf{e} \times \mathbf{OO}''|} = \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{OO}'}{|\mathbf{e} \times \mathbf{OO}'|},$$

и из треугольника  $OPPO''$  (рис. 15) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{OP} &= \mathbf{ON} + \mathbf{NP} = \frac{1}{2}\mathbf{OO}'' + \frac{1}{2}OO'' \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \mathbf{n} = \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{OO}' - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{OO}')\mathbf{e}) + \frac{1}{2}\mathbf{e} \times \mathbf{OO}' \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}. \end{aligned} \quad (42)$$

Угол эйлера поворота не зависит от выбора полюса в теле. Покажем, что и поступательная часть винтового перемещения обладает тем же свойством. Выберем в теле некоторую точку  $M$ , радиус-вектор которой относительно полюса  $O$  равен  $\boldsymbol{\rho}$ , и будем считать ее новым полюсом. В новом положении тела эта точка займет положение  $M'$  с радиусом-вектором  $\boldsymbol{\rho}' = A\boldsymbol{\rho}$  относительно полюса  $O'$ , где  $A$  – матрица, соответствующая повороту тела. По только что доказанному, линейная часть винтового перемещения точки  $M$  равна  $\Delta l' = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{MM}')\mathbf{e}$ .

Пусть  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{R}'$  – радиус-векторы точек  $O$  и  $O'$  в некоторой системе координат, а  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  – радиус-векторы точек  $M$  и  $M'$ . Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{R}' + \boldsymbol{\rho}' = \mathbf{R}' + A\boldsymbol{\rho}, \\ \mathbf{OO}' &= \mathbf{R}' - \mathbf{R}, \quad \mathbf{MM}' = \mathbf{r}' - \mathbf{r} = \mathbf{OO}' + A\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}, \\ \Delta l' &= (\mathbf{e} \cdot \mathbf{MM}')\mathbf{e} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{OO}')\mathbf{e} + (\mathbf{e} \cdot (A\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}))\mathbf{e}. \end{aligned}$$

Но  $(\mathbf{e} \cdot \mathbf{OO}')\mathbf{e} = \Delta l$ ,  $\mathbf{e} \cdot (A\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}) = (A\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho})^T \mathbf{e} = \boldsymbol{\rho}^T A^T \mathbf{e} - \boldsymbol{\rho}^T \mathbf{e} = 0$ , поскольку  $\mathbf{e}$  – собственный вектор матрицы  $A$ , с единичным собственным значением:  $A\mathbf{e} = \mathbf{e} \Rightarrow \mathbf{e} = A^T \mathbf{e}$ . Равенство  $\Delta l' = \Delta l$  доказывает независимость линейной части винтового перемещения от полюса.

Таким образом, для определения параметров винтового перемещения достаточно найти вектор эйлера поворота и проекцию перемещения любой точки твердого тела на орт оси эйлера поворота. Начальную точку винтовой оси можно найти из

формулы (42). Если при этом линейное перемещение отсутствует, т.е.  $\Delta l = 0$ , то положения тела совмещаются только поворотом. Если полюс  $O$  лежит на оси винта, его перемещение сразу дает линейную составляющую винтового перемещения.

Прямая, проходящая через точку  $P$  вдоль  $e$ , называется **винтовой осью**. Винтовая ось, как и ось эйлера поворота, может не пересекать геометрических границ тела. Уравнение винтовой оси, угол эйлера поворота и вектор линейного перемещения вдоль винтовой оси образуют **винт конечного перемещения**.

**Кинематический винт твердого тела.** Из винтовой картины конечного перемещения твердого тела следует наглядная интерпретация мгновенного движения твердого тела, называемая **кинематическим винтом**.

Рассмотрим два близких положения тела, отделенных малым интервалом времени  $\Delta t$ . По доказанному, они совмещаются некоторым винтовым перемещением. Выберем начальный полюс  $O$  на винтовой оси. Тогда конечное положение полюса  $O'$  останется на винтовой оси. Обозначим  $r$  – радиус-вектор произвольной точки тела относительно выбранной системы координат,  $R$  – радиус-вектор полюса  $O$ ,  $\rho$  – радиус-вектор точки относительно полюса  $O$ . Одноименными буквами со штрихами обозначим эти же векторы через время  $\Delta t$  и запишем следующие равенства:

$$\begin{aligned} r &= R + \rho, \quad r' = R' + \rho', \quad \rho' = A\rho \simeq (E + \Delta\hat{\varphi})\rho, \\ \Delta r &= r' - r = R' - R + \rho' - \rho \simeq \Delta R + \Delta\hat{\varphi}\rho, \\ v &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\hat{\varphi}}{\Delta t}\rho = v_O + \omega \times \rho. \end{aligned} \quad (43)$$

По построению  $\Delta R \parallel \Delta\varphi$ , что в пределе дает  $v_O \parallel \omega$ .

Ось, получающаяся из винтовой оси винта конечного перемещения в пределе  $\Delta t \rightarrow 0$ , называется **мгновенной винтовой осью** или **осью кинематического винта**. По доказанному, скорости точек на оси винта коллинеарны угловой скорости, и в любой момент времени тело совершает мгновенное винтовое движение, состоящее из вращения с угловой скоростью  $\omega$  относительно оси, коллинеарной угловой скорости тела  $\omega$ , и одновременного поступательного движения вдоль этой оси.

Винтовая картина не выполняется только для частных случаев мгновенно поступательного движения, для которого  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ , или мгновенного вращения, когда  $\mathbf{v}_O = \mathbf{0}$ .

Скорости точек на мгновенной винтовой оси одинаковы и минимальны по модулю по сравнению с точками вне оси. Равенство скоростей следует из совпадения перемещений за время  $\Delta t$  для всех точек на оси винта. Если полюс  $O$  принадлежит мгновенной винтовой оси, то возводя в квадрат выражение (43) для скорости произвольной точки тела  $v$ , получим

$$v^2 = v_O^2 + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})^2 \geq v_O^2.$$

Выражение  $2\mathbf{v}_O \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) = 0$ , поскольку  $\mathbf{v}_O \parallel \boldsymbol{\omega}$ . Отсюда следует минимальность  $v_O$ , дающая основание обозначить скорости точек оси винта через  $\mathbf{v}_{\min}$ .

Скорость  $\mathbf{v}_{\min}$  находится проектированием скорости любой точки тела  $\mathbf{v}$  на орт  $\mathbf{e} = \boldsymbol{\omega}/\omega$  вектора угловой скорости:

$$\mathbf{v}_{\min} = \frac{(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}}{\omega^2}.$$

Инвариантность  $\mathbf{v}_{\min}$  относительно выбора точки в теле для подстановки в последнюю формулу следует из совпадения линейной части винтового перемещения за время  $dt$  для любой точки тела, либо показывается из формулы Эйлера. Рассмотрим две произвольные точки тела и выберем одну из них в качестве полюса  $O$ . Тогда

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} \Rightarrow \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}_O.$$

Угловая скорость  $\boldsymbol{\omega}$  не зависит от выбора точки в теле, что влечет инвариантность  $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}_{\min}$ .

Найти *кинематический винт* твердого тела – значит найти угловую скорость тела  $\boldsymbol{\omega}$ , скорость линейного перемещения вдоль мгновенной винтовой оси  $\mathbf{v}_{\min}$  и выписать уравнение самой оси.

Выведем уравнение винтовой оси. Скорости точек на ней коллинеарны вектору угловой скорости, т. е.

$$\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} = \mathbf{v}_{\min} = \lambda \boldsymbol{\omega}.$$

Здесь  $\lambda = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}_O / \omega^2$  – коэффициент пропорциональности между  $\mathbf{v}_{\min}$  и  $\boldsymbol{\omega}$ , одинаковый для всех точек винтовой оси,  $O$  – некоторый полюс в теле. Зафиксируем систему координат и распишем это векторное соотношение покомпонентно, обозначив  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$ ,  $\boldsymbol{\rho} = [x, y, z]^T$ . Затем поделим каждое уравнение на соответствующую составляющую угловой скорости из правой части. Это приводит уравнение прямой к виду

$$\frac{v_{Ox} + \omega_y z - \omega_z y}{\omega_x} = \frac{v_{Oy} + \omega_z x - \omega_x z}{\omega_y} = \frac{v_{Oz} + \omega_x y - \omega_y x}{\omega_z}. \quad (44)$$

Напомним, что величины  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ , стоящие в знаменателях, составляют направляющий вектор прямой, а если какая-то из этих величин равна нулю, то приравнивается нулю соответствующий числитель, что следует из вывода уравнения (44). Если  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ , то тело совершает мгновенно поступательное движение и (44) вырождается.

**Замечание 1.** Записывая уравнение оси винта (44), необходимо учитывать, что координаты  $x, y, z$  отсчитываются от полюса  $O$ , а не от начала используемой системы координат.

**Замечание 2.** Из винтовой интерпретации движения следует, что вектор угловой скорости твердого тела естественно считать лежащим на мгновенной винтовой оси или мгновенной оси вращения. При этом положение начала вектора на оси не влияет на картину движения, что позволяет перемещать вектор  $\boldsymbol{\omega}$  вдоль оси произвольным образом. Векторы, обладающие таким свойством, называются *скользящими векторами*, а прямые, на которых лежат векторы – *линиями действия*. В динамике твердого тела скользящим является вектор силы, приложенной к точке твердого тела, поскольку перенос силы вдоль линии действия никак не изменяет результат ее действия.

Заметим, что не все векторы относятся к скользящим. Например, вектор скорости точки «привязан» к этой точке и потому относится к классу *связанных векторов*, а вектор однородного силового поля одинаков в любой точке пространства и называется *свободным вектором*. Эта классификация полезна для понимания физического содержания векторов и преобразований систем векторов, например, преобразований системы сил, приложенных к твердому телу, к простейшему виду за счет пе-

ремещения этих сил вдоль линий действия (подробнее об этом см. заключительную часть книги [1]).

Однако при выполнении стандартных математических действий с векторами типа вычисления линейных комбинаций, скалярных и векторных произведений, дифференцирования и т. п. существенны лишь координаты векторов без привязки к каким-либо точкам или линиям действия, а потому приведенная классификация векторов для вычислений не существенна.

**Пример.** Угловая скорость диска радиуса  $r$  равна  $\omega$  и образует с плоскостью диска угол  $\alpha$  (рис. 16). Скорость точки  $O$ , лежащей на краю диска, ортогональна плоскости диска и равна  $v$ . Найти кинематический винт диска, если  $\omega$  компланарна плоскости, проходящей через центр диска, точку  $O$  и вектор скорости точки  $O$ .

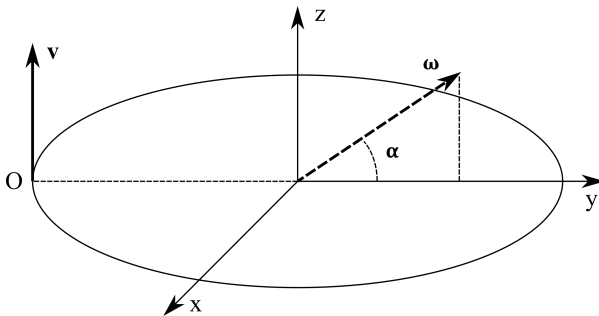


Рис. 16. Скорость полюса и угловая скорость диска

◀ Введем систему координат с началом в центре диска так, чтобы ось  $z$  была ортогональна плоскости диска, а ось  $y$  проходила через точку  $O$ . Вектор угловой скорости диска по условию задачи компланарен плоскости  $yz$ ,  $\mathbf{v}_O \parallel z$ , поэтому  $\boldsymbol{\omega} = \omega[0, \cos \alpha, \sin \alpha]^T$ ,  $\mathbf{v}_O = [0, 0, v]^T$ . Для наглядности отложим вектор  $\boldsymbol{\omega}$  на рисунке от начала координат, однако отметим его пунктиром, поскольку пока не установлено положение винтовой оси, и она может не проходить через начало координат.



Подставляя компоненты векторов в уравнения винтовой оси (44), получим

$$\begin{aligned} v_{Ox} + \omega_y z - \omega_z y &= 0 \Leftrightarrow z \cos \alpha - y \sin \alpha = 0 \\ \frac{v_{Oy} + \omega_z x - \omega_x z}{\omega_y} &= \frac{v_{Oz} + \omega_x y - \omega_y x}{\omega_z} \Leftrightarrow x = \frac{v}{\omega} \cos \alpha. \end{aligned}$$

Найдем линейную скорость перемещения вдоль оси винта:  $v_{\min} = \mathbf{v}_O \cdot \boldsymbol{\omega} / \omega = v \sin \alpha$ .

Координаты  $x$ ,  $y$  и  $z$  откладываются от полюса  $O$ , и ось кинематического винта  $l$  занимает положение, представленное на рис. 17. ►

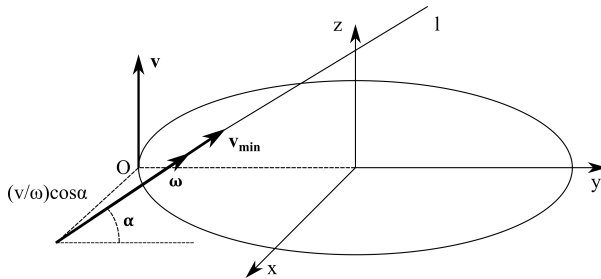


Рис. 17. Кинематический винт диска

При произвольном движении твердого тела ось кинематического винта не сохраняет положение как в неподвижном пространстве, так и относительно базиса, жестко связанного с телом. При движении тела ось описывает поверхности, называемые *неподвижным аксоидом* (в пространстве) и *подвижным аксоидом* (в базисе, связанном с телом). Подвижный аксоид обкатывает неподвижный относительно оси винта и одновременно перемещается вдоль этой оси со скоростью  $v_{\min}$ . При мгновенном вращении тела подвижный аксоид обкатывает неподвижный без проскальзывания.

**Замечание.** Винтовая интерпретация движения твердого тела показывает, что и мгновенная картина движения, и перемещение, совмещающее любое начальное положение тела с любым конечным, весьма просты. Однако движение тела «в промежутке» между начальным и конечным положениями может быть устрое-

но сколь угодно сложно. В частности, весьма сложные движения реализуются при решении задач динамики твердого тела.

**Упражнение.** Найти кинематический винт сопровождающего трехгранника Френе для точки, перемещающейся по винтовой линии

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt.$$

**Плоскопараллельное движение твердого тела. Мгновенные центры скоростей и ускорений.** В ряде задач механики перемещения всех точек системы компланарны некоторой фиксированной плоскости. Так движутся устройства с цилиндрическими шарнирами с коллинеарными осями, тела, скользящие по плоскости, модельные системы, состоящие из плоских либо одномерных твердых тел типа стержневых конструкций, движущихся в плоскости.

Во всех этих случаях движение системы отождествляется с движением системы плоских твердых тел в неподвижной плоскости, содержащей эти тела, и называется *плоскопараллельным движением*. Для краткости его можно называть плоским движением.

Системы координат в плоских задачах принято вводить так, чтобы оси  $x$  и  $y$  лежали в плоскости движения системы, а ось  $z$  дополняла оси  $x$  и  $y$  до правого ортогонального трехгранника. Положение плоского тела характеризуется координатами полюса и единственным углом поворота в плоскости, который считается положительным при повороте против часовой стрелки, если смотреть на плоскость со стороны положительного направления оси  $z$  (рис. 18).

Эта договоренность позволяет избежать путаницы в знаках и обозначениях.

Угловая скорость и угловое ускорение тела в плоских задачах всегда ортогональны плоскости движения и направлены по оси  $z$ . Выход в это «третье измерение» позволяет использовать установленные ранее «трехмерные» формулы Эйлера и Ривальса с векторными произведениями, определенными в трехмерном пространстве.

При иллюстрациях плоских задач оси  $x$  и  $y$  координатой системы, механическая система, скорости и ускорения ее точек изображаются «в плоскости рисунка». Ось  $z$  на рисунке не отме-

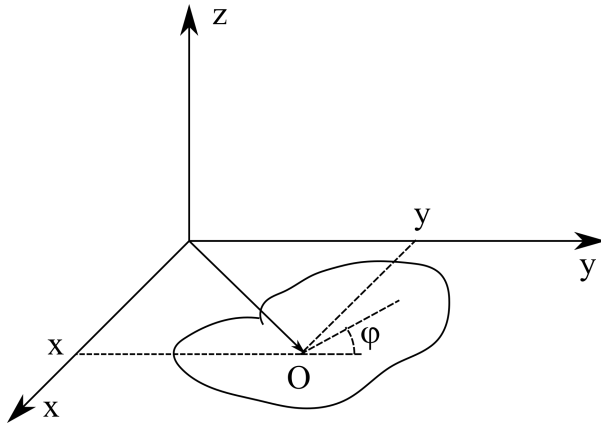


Рис. 18. Задание положения плоского тела

чается, но считается направленной «на читателя» ортогонально рисунку.

Картина плоскопараллельного движения тела существенно проще, чем в пространственном случае. Это сразу же следует из винтовой интерпретации: угловая скорость ортогональна плоскости движения и соответственно линейной скорости любой точки системы. Поэтому  $v_{\min} = 0$ , и движение представляет собой мгновенное вращение относительно некоторой точки в плоскости, называемой *мгновенным центром скоростей*, или просто «центром скоростей». При мгновенном поступательном движении центр скоростей не определен.

Получим выражение для радиуса-вектора центра скоростей, обозначив соответствующую точку через  $P$ . Выразим нулевую скорость центра скоростей через скорость  $\mathbf{v}_O$  некоторого полюса  $O$  и угловую скорость тела  $\boldsymbol{\omega}$  :

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_P = 0.$$

Умножим эту формулу слева векторно на  $\boldsymbol{\omega}$  и преобразуем  $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_P) = -\omega^2 \boldsymbol{\rho}_P$ , что справедливо ввиду известного тождества  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$  и ортогональности  $\boldsymbol{\omega} \perp \boldsymbol{\rho}_P$ . Это дает

$$\boldsymbol{\rho}_P = \frac{\mathbf{v}_O \times \boldsymbol{\omega}}{\omega^2}. \quad (45)$$

Из вывода формулы следует, что  $\rho_P$  – радиус-вектор мгновенного центра скоростей, отложенный от полюса  $O$ . Мгновенное

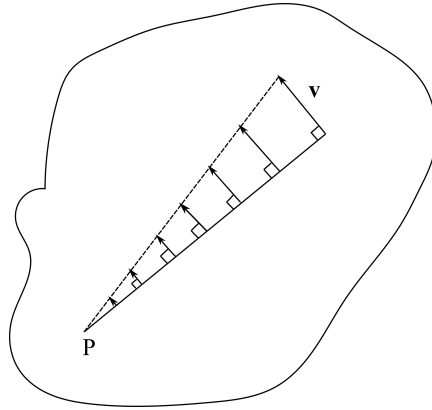


Рис. 19. Распределение скоростей точек тела при плоскопараллельном движении

распределение скоростей плоского твердого тела представлено на рис. 19 и реализуется во всех случаях, кроме мгновенного поступательного движения. Из формулы (45) видно, что при  $\omega \rightarrow 0$ , положение центра скоростей стремится к бесконечно удаленной точке.

При движении тела мгновенный центр скоростей перемещается как в плоскости, так и относительно тела и вычерчивает кривые, называемые *неподвижной центроидой* (на плоскости) и *подвижной центроидой* (в теле). Подвижная центроида катится по неподвижной без проскальзывания.

Интересно, что при плоскопараллельном движении тела кроме центра скоростей существует и *мгновенный центр ускорений* или просто центр ускорений – точка, ускорение которой в данный момент равно нулю. Для доказательства этого факта вначале преобразуем формулу Ривальса:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}).$$

В плоском случае  $\boldsymbol{\omega} \perp \boldsymbol{\rho} \Rightarrow \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) = -\omega^2 \boldsymbol{\rho}$  и

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} - \omega^2 \boldsymbol{\rho}. \quad (46)$$

**Замечание.** Эту формулу удобно применять во всех плоских задачах вместо формулы Ривальса общего вида.

Перейдем к выражению для мгновенного центра ускорений. Снова выберем некоторый полюс  $O$  в теле, обозначим центр ускорений через  $Q$  и приравняем его ускорение нулю:

$$\mathbf{w}_Q = \mathbf{w}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho}_Q - \omega^2 \boldsymbol{\rho}_Q = 0.$$

Домножая эту формулу векторно на  $\boldsymbol{\varepsilon}$  слева и раскрывая двойное произведение  $\boldsymbol{\varepsilon} \times (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho}_Q) = -\varepsilon^2 \boldsymbol{\rho}_Q$ , получим

$$\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{w}_O - \varepsilon^2 \boldsymbol{\rho}_Q - \omega^2 \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho}_Q = 0,$$

а выразив произведение  $\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho}_Q$  из предыдущего равенства и разрешив полученное уравнение относительно  $\boldsymbol{\rho}_Q$ , получим следующий окончательный результат:

$$\boldsymbol{\rho}_Q = \frac{\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{w}_O + \omega^2 \mathbf{w}_O}{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (47)$$

Выбрав центр ускорений в качестве полюса, нетрудно убедиться в том, что распределение ускорений будет иметь вид, представленный на рис. 20 Из выведенной формулы (47) следует, что

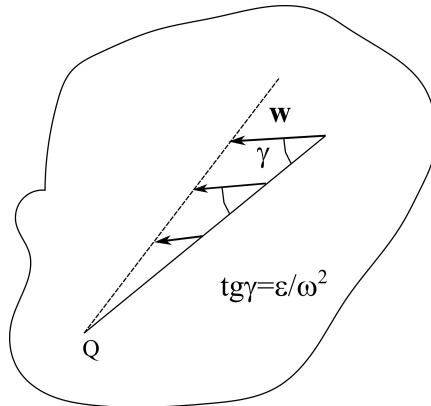


Рис. 20. Распределение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении

центр ускорений не определен, если тело движется поступательно и при этом одновременно  $\omega = 0$ ,  $\varepsilon = 0$ . Также отметим, что

в трехмерном случае аналогом центра скоростей является мгновенная винтовая ось, а аналог центра ускорений отсутствует.

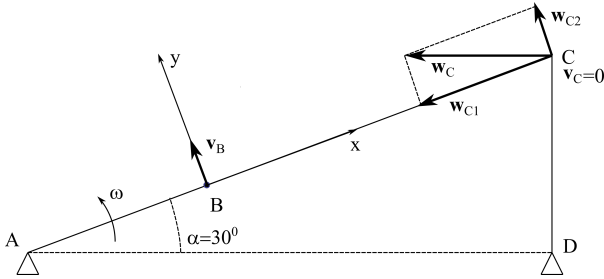


Рис. 21. Плоский механизм

**Пример.** Плоский механизм состоит из трех стержней длины  $AB = r$ ,  $BC = 3r$ ,  $CD = 2r$ , соединенных шарнирами, и занимает положение, изображенное на рис. 21. Стержень  $AB$  вращается относительно неподвижной точки  $A$  с постоянной угловой скоростью  $\omega$ .

Найти: угловые скорости и угловые ускорения стержней, скорости и ускорения шарниров в точках  $B$  и  $C$ , мгновенные центры скоростей и ускорений стержней.

◀ Начнем с вычисления скоростей. Продемонстрируем один способ, иногда позволяющий быстро находить скорости точек твердых тел. Пусть  $M$  и  $N$  – точки, принадлежащие твердому телу (не обязательно плоскому). Тогда

$$\mathbf{v}_N = \mathbf{v}_M + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{MN}.$$

Умножая скалярно на  $\mathbf{MN}$ , получим:  $\mathbf{v}_N \cdot \mathbf{MN} = \mathbf{v}_M \cdot \mathbf{MN}$ , или

$$\mathbf{v}_N \cdot \mathbf{e} = \mathbf{v}_M \cdot \mathbf{e}, \quad \mathbf{e} = \frac{\mathbf{MN}}{MN},$$

т. е. проекции скоростей точек твердого тела на соединяющую их прямую равны, что объясняется постоянством расстояния между точками тела.

Применим это соображение к рассматриваемой задаче. По формуле Эйлера  $\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{AB}$ , и  $\mathbf{v}_B \perp \mathbf{AB}$ ,  $v_B = \omega r$ . Точка  $C \in DC$  и  $\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{DC} \perp \mathbf{DC}$ , где  $\boldsymbol{\omega}'$  – угловая скорость стержня

$DC$ . Следовательно,  $\mathbf{v}_B \cdot \mathbf{BC} = 0 = \mathbf{v}_C \cdot \mathbf{BC} = -v_C BC \cos \alpha$  (см. рис. 21), значит  $v_C = 0$ ,  $\omega' = 0$ .

Из этого следует, что мгновенным центром скоростей стержня  $AB$  будет неподвижная точка  $A$ , стержня  $BC$  – точка  $C$ , поскольку  $v_C = 0$ , а для стержня  $CD$  центр скоростей не определен из-за неподвижности стержня в рассматриваемый момент времени.

Из неподвижности точки  $C$  следует, что  $\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega}'' \times \mathbf{CB}$ , где  $\boldsymbol{\omega}''$  – угловая скорость стержня  $\mathbf{CB}$ . Принимая во внимание, что  $\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{AB}$ , а также модули и направления векторов, входящих в эти равенства, получим, что  $\boldsymbol{\omega}'' = \boldsymbol{\omega}/3$ . Вращение стержня  $BC$  происходит по часовой стрелке, т. е.  $\boldsymbol{\omega}''$  направлена относительно плоскости рис. 21 «от читателя», и по принятому соглашению отрицательна.

Отметим также, что при плоскопараллельном движении всегда можно найти угловую скорость тела, если известны линейные скорости двух его точек. Пусть  $A$  и  $B$  – две точки некоторого тела, тогда

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{AB} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{AB} \times (\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A)}{AB^2}, \quad \omega = \frac{|\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A|}{AB}.$$

Перейдем к вычислению ускорений. Ускорение точки  $B$  равно  $\mathbf{w}_B = -\omega^2 \mathbf{AB}$  или  $w_B = \omega^2 r$ . Рассматривая точку  $C$  как точку стержня  $DC$ , получим  $\mathbf{w}_C = \boldsymbol{\varepsilon}' \times \mathbf{DC}$ , где  $\boldsymbol{\varepsilon}'$  – угловое ускорение стержня  $DC$ , что следует из (46) и равенства  $\omega' = 0$ . Поэтому  $\mathbf{w}_C \perp \mathbf{DC}$ .

Рассмотрим теперь  $C$  как точку стержня  $BC$  и запишем формулу  $\mathbf{w}_C = \mathbf{w}_B + \boldsymbol{\varepsilon}'' \times \mathbf{BC} - \omega''^2 \mathbf{BC}$ . Она позволяет найти составляющую ускорения точки  $\mathbf{w}_C$  вдоль стержня  $BC$ , обозначенную на рис. 21 через  $w_{C1}$ . Вычислим модуль этой составляющей с учетом данных задачи и найденной угловой скорости  $\omega''$ :  $w_{C1} = \omega^2 r + (\frac{\omega}{3})^2 \cdot 3r = \frac{4}{3}\omega^2 r$ , откуда (см. рис. 21) находится и

$$w_C = \frac{w_{C1}}{\cos \alpha} = \frac{8}{3\sqrt{3}}\omega^2 r.$$

Из последней формулы и разложения  $\mathbf{w}_C$  по составляющим  $w_{C1}$  и  $w_{C2}$  получаем, что  $w_{C2} = w_C \sin \alpha = \frac{4}{3\sqrt{3}}\omega^2 r$ . Но  $\mathbf{w}_{C2} = \boldsymbol{\varepsilon}'' \times \mathbf{BC}$ , поскольку  $\mathbf{w}_C = \mathbf{w}_B + \boldsymbol{\varepsilon}'' \times \mathbf{BC} - \omega''^2 \mathbf{BC}$  и  $\mathbf{w}_B \parallel \mathbf{BC}$ , откуда следует, что  $\varepsilon'' = w_{C2}/BC = \frac{4}{9\sqrt{3}}\omega^2$ , вектор  $\boldsymbol{\varepsilon}''$  направлен от плоскости рис. 21 «к читателю».

Из  $\mathbf{w}_C = \boldsymbol{\varepsilon}' \times \mathbf{DC}$  следует, что  $\boldsymbol{\varepsilon}' = \frac{\mathbf{w}_C}{DC} = \frac{4}{3\sqrt{3}}\omega^2$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}'$  направлено «к читателю».

Осталось найти центры ускорений стержней. Стержни  $AB$  и  $DC$  имеют неподвижные точки  $A$  и  $D$ , и, следовательно, они являются центрами ускорений этих стержней. Осталось найти центр ускорений стержня  $BC$ . Воспользуемся формулой (47), выбрав в качестве полюса  $O = B$ :

$$\boldsymbol{\rho}_Q = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}'' \times \mathbf{w}_B + \omega''^2 \mathbf{w}_B}{\varepsilon''^2 + \omega''^4}.$$

Для записи компонент вектора  $\boldsymbol{\rho}_Q$  удобно ввести систему координат с полюсом в точке  $B$  и осями  $x$  вдоль  $BC$ ,  $y$  – ортогонально  $BC$ . Подстановка всех компонент в последнюю формулу приводит к результату

$$\boldsymbol{\rho}_Q = -\frac{9r}{19} \begin{bmatrix} 3 \\ 4\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix}. \blacktriangleright$$

**Замечание.** При решении этой задачи активно использовались соображения о модулях и направлениях векторов, позволившие обойтись практически без выкладок. Естественно, что все выкладки можно было провести и формально, например, в системе координат, использованной для вычисления центра ускорений стержня  $BC$ .

## 2.5. Сложение поворотов в матрицах. Кинематические уравнения Пуассона для ортогональных матриц

В предыдущих разделах рассматривался единственный поворот твердого тела относительно фиксированной системы координат. Однако не во всех задачах удастся ограничиться лишь одним поворотом, что следует из самих постановок задач либо диктуется удобством представления ортогонального преобразования в виде композиции элементарных поворотов, например, как при описании ориентации твердого тела углами Эйлера.

Вычисление матрицы композиции поворотов называется **сложением поворотов**. Результат сложения существенно зависит от так называемой точки зрения на элементарные повороты, составляющие композицию. Если ими преобразуется пространство



и его элементы относительно некоторого фиксированного базиса и при этом все элементарные повороты заданы в этом базисе, то повороты называются *активными*, или говорят, что повороты рассматриваются с *активной точки зрения*.

Если пространство и его элементы неподвижны, а элементарным поворотам подвергается базис, то такие повороты называются *пассивными*, и говорят о *пассивной точке зрения на поворот*. Элементарные повороты при этой точке зрения совмещают положения промежуточных базисов, первый из которых – исходный базис,  $k$ -й элементарный поворот задается в базисе, повернутом всеми  $k - 1$  предыдущими поворотами. Базис, в котором задается очередное элементарное преобразование, называется *собственным базисом* этого преобразования.

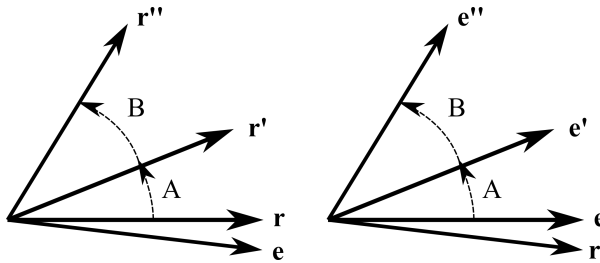


Рис. 22. Повороты пространства (активный) и базиса (пассивный) и результат их композиции. Здесь  $r$  символизирует вектор пространства,  $e$  – базис, штрихи обозначают вектор или базис после поворотов

**Сложение активных поворотов.** Пусть  $r$  – произвольный вектор,  $A$  и  $B$  – матрицы двух последовательно выполняемых поворотов в выбранном базисе. Тогда справедлива цепочка преобразований

$$r' = Ar, \quad r'' = Br', \quad r'' = BAr,$$

т. е. матрица результирующего поворота равна  $C = BA$ . Для последовательности из  $n$  поворотов с матрицами  $A_1, \dots, A_n$  по индукции получается выражение

$$C = A_n \cdot \dots \cdot A_1, \quad r^n = Cr,$$

т.е. матрица результирующего поворота равна произведению матриц элементарных поворотов в обратном порядке.

**Сложение пассивных поворотов.** Пусть  $A$  и  $B$  – матрицы двух последовательных поворотов базиса,  $e_k$  – орты исходного базиса,  $e'_k$  – орты базиса после первого поворота,  $e''_k$  – орты базиса после второго поворота, заданные в базисе, повернутым первым поворотом:

$$e'_k = Ae_k, \quad e''_k = Be'_k.$$

При пассивном повороте пространство и его векторы остаются неподвижными. Для обозначения того же самого вектора в новых базисах  $\{e'_k\}$  и  $\{e''_k\}$  используются обозначения  $r^{(')}$  и  $r^{(')}$ , отличные от обозначений преобразованного вектора при активном повороте.

Закон преобразования вектора при пассивном повороте следует из теоремы Эйлера. Поворот, отображающий базис  $\{e_k\}$  в  $\{e'_k\}$ , есть плоский поворот вокруг некоторого орта, имеющего поэтому одинаковые координаты (направляющие косинусы) в обоих базисах. Следовательно, неподвижный в абсолютном пространстве вектор  $r$  повернется относительно базиса  $\{e'_k\}$  вокруг того же орта, но в противоположном направлении, чему соответствует преобразование транспонированной матрицей:

$$r^{(')} = A^T r.$$

Заметим, что этот же результат был получен в разделе 2.2 формально – см. (17). Аналогичные рассуждения для второго преобразования дают  $r^{(')} = B^T r^{(')}$ , что в композиции приводит к формуле

$$r^{(')} = (AB)^T r = C^T r \quad \Rightarrow \quad C = AB,$$

обобщаемую на случай произвольного числа  $n$  поворотов по индукции. Если  $A_1, \dots, A_n$  – матрицы последовательных пассивных поворотов базисов, то матрица результирующего поворота  $C$  вычисляется по формуле

$$C = A_1 \cdot \dots \cdot A_n,$$

где каждая матрица рассматривается в базисе, преобразуемом этим поворотом и называемом *собственным базисом*. Неподвижный вектор преобразуется в конечный базис транспонированной матрицей:

$$r^{(n)} = C^T r.$$

**Замечание.** Матрица композиции поворотов, вычисленная с использованием пассивной точки зрения, может рассматриваться как матрица активного поворота, если некоторый вектор последовательно поворачивается вместе с промежуточными базами, включая конечный, а требуется найти координаты этого вектора в исходном базисе. В этом случае закон преобразования вектора совпадает с законом преобразования ортов базиса, т. е.

$$\mathbf{r}^n = C\mathbf{r},$$

где  $\mathbf{r}$  – координаты исходного вектора в исходном базисе,  $\mathbf{r}^n$  – координаты повернутого вектора в исходном же базисе.

Обычно из условия задачи сразу следует, какая точка зрения на элементарные повороты удобна для вычисления их композиции.

**Пример.** Тело поворачивают вокруг первой оси неподвижного базиса на угол  $\pi/2$ , а затем на угол  $\pi/2$  вокруг второй оси неподвижного базиса. Найти матрицу результирующего поворота.

◀ Все матрицы заданы в одном базисе и повороты удобно считать активными. Приведем соответствующие выкладки:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}_{\varphi=\pi/2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix}_{\varphi=\pi/2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \blacktriangleright$$

**Пример.** Ориентация твердого тела относительно некоторого базиса задана набором углов Эйлера  $\psi, \vartheta, \varphi$ . Найти ортогональную матрицу, задающую положение тела.

◀ Задача интересна тем, что устанавливает связь между двумя разными способами описания ориентации твердого тела. Последовательность поворотов на углы Эйлера задается диаграммой

$$x \xrightarrow[z]{\psi} x' \xrightarrow[x']{\vartheta} x'' \xrightarrow[z'']{\varphi} \xi,$$

где каждый элементарный поворот имеет простейший вид в собственном базисе. Поэтому более естественна пассивная точка зрения на повороты:

$$A_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_\vartheta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix},$$

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A = A_\psi A_\vartheta A_\varphi = \begin{bmatrix} c_\psi c_\varphi - s_\psi c_\vartheta s_\varphi & -c_\psi s_\varphi - s_\psi c_\vartheta c_\varphi & s_\psi s_\vartheta \\ s_\psi c_\varphi + c_\psi c_\vartheta s_\varphi & -s_\psi s_\varphi + c_\psi c_\vartheta c_\varphi & -c_\psi s_\vartheta \\ s_\vartheta s_\varphi & s_\vartheta c_\varphi & c_\vartheta \end{bmatrix}. \blacktriangleright$$

**Замечание 1.** В последнем выражении использованы сокращенные обозначения  $s$  и  $c$  для синуса и косинуса, аргументы этих функций указаны как нижние индексы. Такие обозначения весьма удобны в громоздких выражениях, содержащих тригонометрические функции.

**Замечание 2.** Повороты не коммутативны при рассмотрении с любой точки зрения, за исключением случая коллинеарных осей поворотов:  $AB \neq BA$ . Например, для приведенных выше ортогональных матриц  $A$  и  $B$  получаем

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Некоммутативность поворотов в  $\mathbb{R}^3$  является важным геометрическим свойством вращений и позволяет легко решить следующую, достаточно любопытную, задачу.

**Пример.** При вращении тела относительно неподвижной оси поворот тела задается углом  $\delta = \int_0^t \omega(\tau) d\tau$ , где  $\omega$  – проекция угловой скорости вращения на направляющий орт оси. Почему для задания пространственного положения тела нельзя использовать величину  $\delta = \int_0^t \boldsymbol{\omega}(\tau) d\tau$ , где  $\boldsymbol{\omega}$  – вектор угловой скорости тела?

◀ Рассмотрим повороты твердого тела относительно первой связанной оси на угол  $\pi/2$ , затем – вокруг второй связанной оси на тот же угол. Затем выполним эти повороты в обратной последовательности из того же начального положения – сначала вокруг второй связанной оси, а затем вокруг первой. Матрицы этих поворотов выписаны в предыдущем примере и не коммутируют между собой. Поэтому конечные положения тела для этих двух последовательностей поворотов будут разными. Но для обоих случаев  $\delta = [\pi/2, \pi/2, 0]^T$  и разным положениям тела соответствуют одинаковые значения величины  $\delta$ . Это рассуждение работает для пары любых неколлинеарных связанных с телом осей и доказывает непригодность использования  $\delta$  для задания углового положения тела. ▶

Заметим, что для вычисления положения точки в трехмерном пространстве вычисление подобного интеграла от вектора линейной скорости приводит к нужному результату.

**Замечание.** Матрицы (операторы) бесконечно малых поворотов (26) коммутативны с точностью до малых второго порядка. Пусть  $A = E + \hat{\varphi}$ ,  $B = E + \hat{\psi}$  – операторы малых поворотов. Перемножение показывает, что  $AB = BA = E + \hat{\varphi} + \hat{\psi}$ . Линейная комбинация векторов Эйлера малых поворотов дает вектор Эйлера композиции поворотов, образующих комбинацию.

**Преобразование матрицы поворота при замене базиса.** Пусть  $A$  – матрица активного поворота в базисе  $\{e_k\}$ ,  $B$  – матрица, задающая преобразование базиса:  $e'_k = Be_k$ . Требуется найти матрицу  $A'$  того же активного поворота в новом базисе  $\{e'_k\}$ .

Пусть  $r_e$  – некоторый исходный вектор,  $r'_e$  – этот же вектор после поворота матрицей  $A$  в базисе  $\{e_k\}$ ,  $r_{e'}$ ,  $r'_{e'}$  – те же векторы в базисе  $\{e'_k\}$ . С учетом предыдущих результатов получаем <sup>7</sup>:

$$\begin{aligned} r'_e &= Ar_e, & r_{e'} &= B^T r_e, & r'_{e'} &= B^T r'_e, \\ r'_{e'} &= B^T AB r_{e'} = A' r_{e'} & \Rightarrow & & A' &= B^T AB. \end{aligned} \quad (48)$$

<sup>7</sup> Из закона преобразования матрицы при смене базиса можно получить выражение угла эйлера поворота через след ортогональной матрицы [14], минуя непосредственный анализ характеристического многочлена. Характеристический многочлен инвариантен относительно преобразования базиса, поскольку  $\det(\lambda E - A') = \det(\lambda E - B^T AB) = \det(\lambda E - A)$ , т.к.  $\det B = 1$ , но коэффициент характеристического многочлена при  $\lambda^2$  равен  $\text{tr} A$  и, следовательно, также инвариантен. Поэтому выбирая матрицу  $B$  так, чтобы ось эйлера поворота совпадала

Перечислим выводы из формулы (48).

1. Если матрица поворота совмещает базисы  $\{\mathbf{e}_k\}$  и  $\{\mathbf{e}'_k\}$ , то ее компоненты одинаковы в обоих базисах. Это сразу следует из (48), если положить  $A = B$ . Полезно обратить внимание, что тот же вывод вытекает и из выражения матрицы через параметры эйлера поворота:

$$A = E \cos \varphi + \hat{e} \sin \varphi + \mathbf{e}\mathbf{e}^T(1 - \cos \varphi),$$

т.к. орт оси поворота будет иметь одинаковые координаты в базисах, совмещаемых этим поворотом, а угол поворота – скаляр, не зависящий от базиса.

2. Пусть  $A \simeq E + \hat{\varphi}$  – матрица малого поворота. Тогда из (48) следует, что

$$A' = E + \hat{\varphi}' = B^T A B = B^T (E + \hat{\varphi}) B \Rightarrow \hat{\varphi}' = B^T \hat{\varphi} B,$$

т. е. закон преобразования кососимметрической составляющей оператора малого поворота совпадает с законом преобразования ортогональной матрицы. Кососимметричность оператора  $\hat{\varphi}'$  следует из соотношений  $(\hat{\varphi}')^T = B^T \hat{\varphi}^T B = -B^T \hat{\varphi} B = -\hat{\varphi}'$ .

3. Пусть  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \hat{\mathbf{a}}\mathbf{b}$  – некоторые векторы. Тогда дословное повторение шагов, выполненных при выводе (48), дает тот же самый закон преобразования кососимметрического оператора  $\hat{\mathbf{a}}$ , соответствующего векторному умножению  $\mathbf{a} \times$ :

$$\hat{\mathbf{a}}' = B^T \hat{\mathbf{a}} B. \quad (49)$$

Формула преобразования матрицы при смене базиса позволяет получить правило сложения пассивных поворотов. Пусть  $A$  – матрица, отображающая базис  $\{\mathbf{e}_k\}$  в  $\{\mathbf{e}'_k\}$ ,  $B$  – базис  $\{\mathbf{e}'_k\}$  в  $\{\mathbf{e}''_k\}$ . Тогда, чтобы получить выражение для композиции поворотов в базисе  $\{\mathbf{e}_k\}$ , нужно пересчитать матрицу второго поворота в первый базис:

$$B_e = A B A^T.$$

с первой осью «нового» базиса, получим

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix},$$

откуда  $\text{tr} A' = \text{tr} A = 1 + 2 \cos \varphi$ .

Теперь обе матрицы  $A$  и  $B_e$  задают повороты в одном базисе, и композиции поворотов соответствует матрица

$$C = B_e A = A B A^T A = AB,$$

равная произведению матриц элементарных поворотов в собственных базисах в прямом порядке.

**Еще немного об обозначениях.** В задачах с несколькими базисами многие сложности и ошибки связаны с необходимостью держать в памяти принадлежность векторов и матриц преобразований тем или иным базисам. Следующие обозначения избавляют от этой необходимости.

Допустим, что задан базис  $x$  и произвольный вектор  $\mathbf{a}_x$  в нем. Нижним индексом у вектора обозначен базис, в котором он задан. При введении второго базиса  $\xi$  вектор  $\mathbf{a}_x$  преобразуется в вектор  $\mathbf{a}_\xi$  некоторой ортогональной матрицей  $A$ , которую удобно снабдить парой индексов, показывающих «откуда» и «куда» эта матрица отображает вектор:

$$\mathbf{a}_\xi = A_{\xi x} \mathbf{a}_x.$$

Рассмотрим композицию двух преобразований базиса, добавив, например, базис  $\eta$  и записав  $\mathbf{r}_\eta = A_{\eta \xi} \mathbf{r}_\xi$ . Подставляя сюда предыдущую формулу, получим, что  $\mathbf{r}_x = A_{x\eta} = A_{x\xi} A_{\xi\eta} \mathbf{r}_\eta$  и, следовательно:

$$A_{x\eta} = A_{x\xi} A_{\xi\eta}.$$

То есть «прилегающие» индексы в соседних матрицах совпадают, что нетрудно обобщить на произвольное число базисов. Транспонированная матрица задает обратное преобразование, и для обращения матрицы работает правило  $A_{x\xi}^T = A_{\xi x}$ , записанное для примера в паре базисов  $x$  и  $\xi$ .

Введенная индексация практически исключает ошибки, связанные с обозначениями, и позволяет «экономить буквы»: разные матрицы можно обозначать одной буквой, снабжая разными индексами.

**Кинематические уравнения Пуассона для ортогональных матриц.** При движении тела матрица  $A(t)$ , задающая ориентацию связанного с телом базиса  $\xi$  относительно неподвижной системы координат  $x$ , становится функцией времени. Значение

этой матрицы в момент времени  $A(t + \Delta t)$  мало отличается от  $A(t)$  и описывается оператором малого поворота  $E + \Delta\hat{\varphi}$ , который можно задать в базисе  $x$  или  $\xi$ . Из формул сложения поворотов следует, что

$$A(t + \Delta t) \simeq \begin{cases} (E + \Delta\hat{\varphi}_x)A(t), \\ A(t)(E + \Delta\hat{\varphi}_\xi), \end{cases}$$

где  $\Delta\hat{\varphi}_x$  и  $\Delta\hat{\varphi}_\xi$  – составляющие оператора малого поворота за время  $\Delta t$  в базисе  $x$  или  $\xi$ . Из формул

$$\dot{A} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t}, \quad \hat{\omega}_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\hat{\varphi}_x}{\Delta t}, \quad \hat{\omega}_\xi = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\hat{\varphi}_\xi}{\Delta t},$$

получаем:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \hat{\omega}_x A, \\ \dot{A} &= A \hat{\omega}_\xi. \end{aligned} \tag{50}$$

Данные уравнения называются *кинематическими уравнениями Пуассона*. Они применяются для решения двух взаимно обратных задач. Если известно начальное значение матрицы  $A(t_0)$  и угловая скорость как функция времени в неподвижных или связанных осях, т.е.  $\hat{\omega}_x(t)$  или  $\hat{\omega}_\xi(t)$ , то интегрированием (50) при начальных условиях  $A(t_0)$  получается текущее значение матрицы  $A(t)$ . И наоборот, если задана матрица  $A(t)$ , то из уравнений Пуассона находится угловая скорость в неподвижном, либо связанном базисе <sup>8</sup>:

$$\hat{\omega}_x = \dot{A}A^T, \quad \hat{\omega}_\xi = A^T \dot{A}.$$

В практических задачах определения ориентации и навигации обычно известна угловая скорость в связанных осях, измеряемая датчиками угловой скорости различной физической природы. В

---

<sup>8</sup> Во многих книгах полученные выражения служат определением угловой скорости. В этом случае непосредственно показывается, что матрицы  $\dot{A}A^T$  и  $A^T \dot{A}$  являются кососимметрическими, что следует из дифференцирования по  $t$  тождеств  $A^T A = E$  и  $AA^T = E$ , а затем используется взаимно однозначное соответствие между кососимметрической матрицей  $\hat{\omega}$  и векторным умножением  $\omega \times$ , из которого и определяется вектор  $\omega$ .



соответствующих устройствах показания датчиков конструктивно или алгоритмически проектируются в некоторый ортогональный (приборный) трехгранник, а уравнения Пуассона для матрицы или кватерниона (они выведены ниже) интегрируются численно для определения параметров ориентации в реальном времени.

Уравнения Пуассона линейны, т.е. приводятся к системе вида  $\dot{\mathbf{x}} = F(t)\mathbf{x}$ , где  $\mathbf{x}$  – фазовый вектор,  $F(t)$  – квадратная матрица системы, в общем случае зависящая от времени. Это нетрудно показать, расписывая уравнения Пуассона покомпонентно в виде системы из девяти уравнений. Тогда  $\mathbf{x}$  образован элементами матрицы  $a_{ij}$ ,  $\dim \mathbf{x} = 9$ , размерность матрицы  $F(t) – 9 \times 9$ , а ее элементы – проекции вектора угловой скорости с соответствующими знаками.

Из теории дифференциальных уравнений известно, что линейные уравнения по ряду причин существенно проще нелинейных. Это делает уравнения Пуассона удобным инструментом описания вращения твердого тела. Однако из-за достаточно большой размерности и переменности коэффициентов уравнения Пуассона не имеют общих аналитических решений, однако успешно решаются численно. Если угловая скорость тела – гладкая функция времени, то уравнения Пуассона нигде не имеют особенностей.

Рассмотрим прием, понижающий порядок системы уравнений Пуассона на три единицы. Запишем матрицу в виде набора векторов-столбцов  $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]$ . Тогда из уравнений Пуассона, в которых  $\hat{\omega}_x$  задана в неподвижном базисе, следует, что

$$\dot{\mathbf{a}}_1 = \hat{\omega}_x \mathbf{a}_1, \quad \dot{\mathbf{a}}_2 = \hat{\omega}_x \mathbf{a}_2.$$

Эти уравнения можно интегрировать независимо. Если  $\mathbf{a}_1(t), \mathbf{a}_2(t)$  – решения этих уравнений, то недостающий столбец  $\mathbf{a}_3(t)$  находится как их ортогональное дополнение  $\mathbf{a}_3(t) = \mathbf{a}_1(t) \times \mathbf{a}_2(t)$  без интегрирования уравнений для  $\mathbf{a}_3(t)$ .

Аналогичные рассуждения работают и для уравнения Пуассона, в которых  $\hat{\omega}_\varepsilon$  задана в базисе, связанном с телом, но тогда отделяются уравнения для двух строк матрицы. Строки ортогональной матрицы также образуют правый ортонормированный

базис, и недостающая строка достраивается как ортогональное дополнение двух других.

**Пример.** Показать, что попарные скалярные произведения столбцов матрицы, удовлетворяющей уравнениям Пуассона, включая произведения на себя, являются первыми интегралами уравнений Пуассона.

◀ Напомним, что первыми интегралами системы дифференциальных уравнений  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$  называются функции  $G(t, \mathbf{x})$ , сохраняющие значения на решениях системы, т.е.  $G(t, \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)) = G(t_0, \mathbf{x}_0) = \text{const}$ , где  $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$  – решение, соответствующее начальному условию  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ . Функция  $G(t, \mathbf{x})$  является первым интегралом тогда и только тогда, когда ее производная в силу системы равна нулю [2], [3]:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \sum \frac{\partial G}{\partial x_i} F_i = 0.$$

Например, законы сохранения физических величин типа импульса или энергии – это первые интегралы дифференциальных уравнений динамики.

Вернемся к решению задачи. Всевозможные попарные скалярные произведения столбцов матрицы можно записать в виде матрицы  $P = A^T A$ , элементами которой являются  $p_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j$ , в чем можно убедиться непосредственной проверкой.

Продифференцируем матрицу  $P$ :  $\dot{P} = \dot{A}^T A + A^T \dot{A}$  и заменим производные матрицы  $A$  на правую часть уравнений Пуассона:

$$\dot{P} = (\hat{\omega}_x A)^T A + A^T \hat{\omega}_x A = A^T \hat{\omega}_x^T A + A^T \hat{\omega}_x A = 0,$$

где последнее равенство следует из кососимметричности оператора  $\hat{\omega}_x$ . Таким образом, матрица  $P$  составлена из первых интегралов уравнений Пуассона. Заметим, что для любой ортогональной матрицы  $P = E$  и сохранение матрицы  $P$  означает, что на решениях уравнений Пуассона при любой угловой скорости сохраняется нормировка и ортогональность столбцов матрицы  $A$ , что обеспечивает ортогональность матрицы. ►

**Упражнение.** Доказать аналогичный результат, используя уравнения Пуассона в подвижном базисе.

Сохранение ортонормированности можно использовать для проверки точности численных методов интегрирования уравнений Пуассона. Если  $A(t)$  – численное решение, то отклонение

$A^T(t)A(t) - E$  позволяет оценить погрешности численного метода.

## 2.6. Сложное движение точки и твердого тела

В подавляющем большинстве практических задач движение механических систем рассматривается в подвижных системах отсчета. Например, подвижной будет система координат, жестко связанная с Землей, или с подвижным объектом, перемещающимся относительно Земли. Движение системы в некоторой подвижной системе координат называется *относительным*.

Однако фундамент классической механики строится для инерциальной – абсолютной – системы отсчета, которую без ограничения общности удобно считать неподвижной. Раздел кинематики, устанавливающий взаимосвязь абсолютных и относительных параметров движения, называется *теорией сложного движения*.

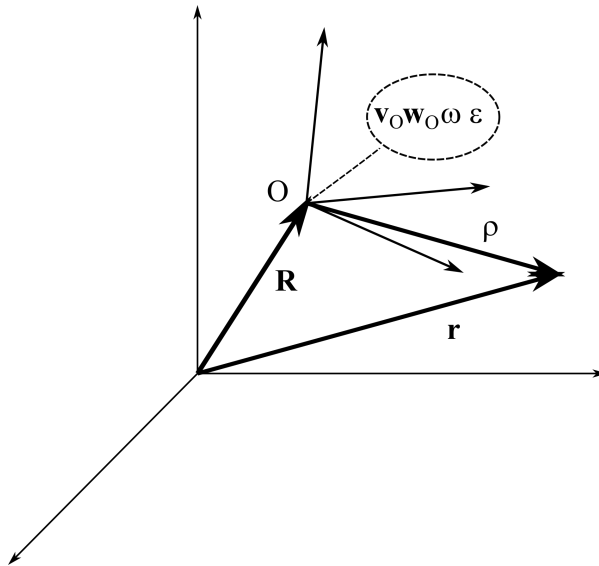


Рис. 23. Сложное движение точки:  $\mathbf{R}$  – радиус-вектор полюса, в неподвижном базисе,  $\boldsymbol{\rho}$  – радиус-вектор точки в подвижном базисе,  $\mathbf{r}$  – радиус вектор точки в неподвижном базисе,  $v_O$ ,  $w_O$ ,  $\omega$ ,  $\epsilon$  – параметры движения подвижного базиса

**Сложное движение точки.** В этой задаче известно положение, скорость и ускорение точки относительно подвижного базиса, положение и параметры движения подвижного базиса относительно неподвижного. Требуется определить положение, скорость и ускорение точки относительно неподвижного базиса.

Пусть  $\rho$  – радиус-вектор точки относительно подвижного базиса,  $\mathbf{v}^r$  – относительная скорость и  $\mathbf{w}^r$  – относительное ускорение точки. Положение и движение подвижного базиса задается радиусом-вектором полюса подвижного базиса относительно неподвижной системы координат  $\mathbf{R}$ , скоростью полюса  $\mathbf{v}_O$ , ускорением  $\mathbf{w}_O$ . Ориентация осей подвижного базиса задается координатами ортов  $\mathbf{e}_k$  подвижного базиса относительно неподвижного,  $\boldsymbol{\omega}$  – абсолютная угловая скорость подвижного базиса, абсолютное угловое ускорение равно  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Требуется найти положение  $\mathbf{r}$ , абсолютные скорость  $\mathbf{v}$  и ускорение  $\mathbf{w}$  точки (рис. 23).

Для решения этой задачи используется выражение абсолютной производной по времени вектора, заданного в подвижном базисе  $\{\mathbf{e}_k\}$ . Разложим некоторый вектор  $\mathbf{a}$  по ортам подвижного базиса:

$$\mathbf{a} = \sum a_k \mathbf{e}_k.$$

Продифференцируем это выражение по времени и учтем формулу (30)  $\dot{\mathbf{e}}_k = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_k$ , полученную в разд. 2.3:

$$\dot{\mathbf{a}} = \sum \dot{a}_k \mathbf{e}_k + a_k \dot{\mathbf{e}}_k = \sum \dot{a}_k \mathbf{e}_k + a_k \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_k.$$

Первая часть суммы дает величину  $d'\mathbf{a}/dt = [\dot{a}_1, \dot{a}_2, \dot{a}_3]^T$ , называемую *локальной производной* вектора  $\mathbf{a}$  и выражающую скорость изменения  $\mathbf{a}$  относительно подвижного базиса. Штрих в обозначении выделяет отличие локальной производной от абсолютной. Иногда вместо штриха используется тильда:  $\tilde{d}/dt$ .

Вторая часть суммы  $\sum a_k \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_k = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}$  называется *переносной производной*, выражающей скорость изменения вектора за счет вращения подвижного базиса.

Суммируя локальную и переносные производные, получим

$$\dot{\mathbf{a}} = \frac{d'\mathbf{a}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}. \quad (51)$$

**Замечание 1.** Важно понимать, что хотя последняя формула и выведена в конкретном подвижном базисе, но записана в

инвариантной (векторной) форме. Для записи (51) в произвольном базисе векторы, входящие в (51), просто проектируются на оси выбранного базиса.

Это замечание об инвариантности относится к любым векторным выражениям. Однако вычислять абсолютные производные по времени от векторных равенств, записанных в проекциях на подвижный базис, нужно уже с учетом (51), куда подставляется угловая скорость базиса.

**Замечание 2.** Из формулы (51) следует, что абсолютная производная угловой скорости подвижного базиса совпадает с локальной:

$$\dot{\omega} = \varepsilon = \frac{d'\omega}{dt} + \omega \times \omega = \frac{d'\omega}{dt}.$$

Таким образом,  $\varepsilon = d'\omega/dt$ , и из постоянства угловой скорости подвижного базиса в собственных осях следует ее постоянство в неподвижном базисе.

Применим формулу (51) к выводу формул для абсолютной скорости и ускорения при сложном движении. Скорость интересующей нас точки находится из равенств

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}, \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{R}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}.$$

Но  $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{v}_O$ , а вектор  $\boldsymbol{\rho}$  по постановке задачи задан в подвижном базисе и поэтому  $\dot{\boldsymbol{\rho}} = \frac{d'\boldsymbol{\rho}}{dt} + \omega \times \boldsymbol{\rho}$ . По определению *относительная скорость* точки равна  $\mathbf{v}^r = \frac{d'\boldsymbol{\rho}}{dt}$  и, следовательно,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \omega \times \boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}^r. \quad (52)$$

Полученная формула допускает представление  $\mathbf{v} = \mathbf{v}^e + \mathbf{v}^r$ , где составляющая  $\mathbf{v}^e = \mathbf{v}_O + \omega \times \boldsymbol{\rho}$  называется *переносной скоростью*. Она равна скорости точки подвижной системы координат, в которой в данный момент расположена рассматриваемая точка.

Дифференцируя (52) по времени, получим формулу для ускорения точки при сложном движении:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}}_O + \dot{\omega} \times \boldsymbol{\rho} + \omega \times \dot{\boldsymbol{\rho}} + \dot{\mathbf{v}}^r = \\ &= \mathbf{w}_O + \varepsilon \times \boldsymbol{\rho} + \omega \times \left( \frac{d'\boldsymbol{\rho}}{dt} + \omega \times \boldsymbol{\rho} \right) + \frac{d'\mathbf{v}^r}{dt} + \omega \times \mathbf{v}^r. \end{aligned}$$

Здесь снова использовано, что по постановке задачи относительная скорость  $\mathbf{v}^r$  задана в подвижном базисе и при дифференцировании этого вектора применяется (51). Приводя подобные слагаемые и учитывая, что по определению  $\frac{d'\mathbf{v}^r}{dt} = \mathbf{w}^r$  — *относительное ускорение*, получаем формулу

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}^r + \mathbf{w}^r, \quad (53)$$

называемую *формулой Кориолиса*. В ней выделяют следующие слагаемые:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{w}^e + \mathbf{w}^c + \mathbf{w}^r, \\ \mathbf{w}^e &= \mathbf{w}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}), \\ \mathbf{w}^c &= 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}^r, \end{aligned}$$

$\mathbf{w}^e$  называется *переносным ускорением* и равно ускорению точки подвижного базиса, в которой в данный момент расположена рассматриваемая точка. Компонента  $\mathbf{w}^c$  называется *кориолисовым ускорением*, отражающим изменение вектора относительной скорости за счет вращения подвижной системы координат («половина»  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}^r$  кориолисова ускорения) и за счет изменения расстояния от точки до мгновенной винтовой оси или оси вращения подвижного базиса (вторая «половина»  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}^r$ ).

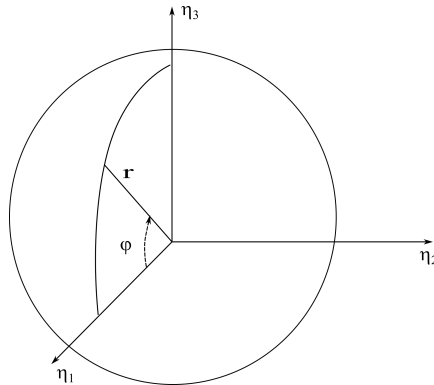


Рис. 24. Гринвичский трехгранник

Одной из часто используемых неинерциальных систем отсчета является Гринвичский трехгранник, жестко связанный с Землей. Его начало координат совпадает с центром Земли, первая

ось проходит через нулевой меридиан, третья ось направлена вдоль вектора угловой скорости Земли. Вторая ось дополняет до правой тройки векторов. Угловая скорость считается постоянной и равной  $u \approx 15.041^\circ/\text{ч}$ . В зависимости от решаемой задачи фигура Земли аппроксимируется шаром или эллипсоидом вращения.

**Пример.** Найти абсолютную скорость, абсолютное, переносное и кориолисово ускорения точки, движущейся вдоль поверхности Земли по меридиану с постоянной скоростью  $v$ . Землю считать шаром радиуса  $a \approx 6378$  км.

◀ Без ограничения общности можно считать, что движение происходит по Гринвичскому (нулевому) меридиану. Тогда в Гринвичском трехграннике (рис. 24)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho} &= a \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ 0 \\ \sin \varphi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_O = 0, \quad \mathbf{w}_O = 0, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= 0, \quad \mathbf{v}^r = v \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ 0 \\ \cos \varphi \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где  $\varphi$  – текущая широта точки. Применяя формулу (52), получим

$$\mathbf{v}^e = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} = ua \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}^e + \mathbf{v}^r = \begin{bmatrix} -v \sin \varphi \\ ua \cos \varphi \\ v \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

Максимальная величина переносной (и абсолютной) скорости достигается на экваторе и составляет примерно 465 м/с или 1674 км/ч. Эта достаточно большая переносная скорость объясняет целесообразность размещения стартовых площадок, предназначенных для вывода космических аппаратов на орбиту в зоне экватора.

Для вычисления составляющих вектора ускорения по формуле (53) не хватает только относительного ускорения, которое при движении по окружности направлено к ее центру и равно  $\mathbf{w}^r = -\frac{v^2}{a} [\cos \varphi, 0, \sin \varphi]^T$ . Выпишем переносное, кориолисово и

абсолютное ускорения:

$$\mathbf{w}^e = - \begin{bmatrix} u^2 a \cos \varphi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}^c = - \begin{bmatrix} 0 \\ 2uv \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{w} = - \begin{bmatrix} \frac{v^2}{a} \cos \varphi + u^2 a \cos \varphi \\ 2wv \sin \varphi \\ \frac{v^2}{a} \sin \varphi \end{bmatrix}.$$

Максимальная величина модуля переносного ускорения достигается на экваторе и составляет  $u^2 a \approx 0.034 \text{ м/с}^2$ , максимум модуля кориолисова ускорения достигается на полюсе и составляет  $2uv \approx 1.46 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}^2$  при движении со скоростью  $v = 1 \text{ м/с}$ . Для быстро движущихся объектов кориолисово ускорение может существенно влиять на траекторию, например, для артиллерийских снарядов, которые способны лететь достаточно продолжительное время со скоростью несколько сотен или даже порядка тысячи м/с. ►

**Сложное движение твердого тела.** В этой задаче заданы положение и параметры движения подвижной системы отсчета относительно неподвижной системы координат, положение и параметры движения твердого тела относительно подвижной системы отсчета. Требуется определить положение и параметры движения тела относительно неподвижной системы отсчета.

Произвольное движение тела разбивается на движение полюса, выбранного в теле, и вращение относительно полюса. Параметры абсолютного движения полюса (скорость и ускорение) находятся по формулам сложного движения точки и повторно не рассматриваются. Остается найти параметры абсолютного углового движения тела.

Пусть  $\omega^e$  – абсолютная угловая скорость подвижной системы координат, называемая *переносной угловой скоростью*. Ее абсолютное угловое ускорение  $\epsilon^e$  называется *переносным угловым ускорением*, угловая скорость твердого тела относительно подвижной системы координат  $\omega^r$  – *относительной угловой скоростью*, а угловое ускорение тела относительно подвижной системы координат  $\epsilon^r$  – *относительным угловым ускорением*. Найдем абсолютную угловую скорость  $\omega$  и абсолютное угловое  $\epsilon$  ускорение тела.



Начнем с вычисления абсолютной угловой скорости. Введем системы координат, связанные с подвижным базисом и телом, так чтобы ориентация их осей совпадала с ориентацией осей неподвижного базиса в момент времени  $t$ . Тогда в близкий момент времени  $t + \Delta t$  ориентация подвижного базиса относительно неподвижного будет описываться оператором малого поворота  $A \simeq E + \Delta \hat{\varphi}^e$ , а ориентация базиса, связанного с телом, относительно подвижного базиса – оператором  $B \simeq E + \Delta \hat{\varphi}^r$ . Матрица, задающая ориентацию базиса, связанного с телом, относительно неподвижного базиса равна

$$C = AB \simeq (E + \Delta \hat{\varphi}^e)(E + \Delta \hat{\varphi}^r) \simeq E + \Delta \hat{\varphi}^e + \Delta \hat{\varphi}^r = E + \Delta \hat{\varphi}.$$

Но

$$\hat{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \hat{\varphi}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \hat{\varphi}^e}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \hat{\varphi}^r}{\Delta t} = \hat{\omega}^e + \hat{\omega}^r, \quad (54)$$

и, ввиду взаимной однозначности между векторами и кососимметрическими операторами,

$$\omega = \omega^e + \omega^r. \quad (55)$$

При  $\Delta t \rightarrow 0$  ориентация всех введенных базисов совпадает с неподвижным базисом, и результат вычисления пределов в (54) относится к исходному неподвижному базису. Полученное равенство называется *теоремой о сложении угловых скоростей*.

Рассматривая  $n$  базисов, движущихся друг относительно друга с заданными относительными угловыми скоростями  $\omega_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , нетрудно обобщить данную формулу по индукции и записать выражение абсолютной угловой скорости «последнего» базиса  $\omega = \sum \omega_i$ .

Теперь получим выражение для абсолютного углового ускорения. Из постановки задачи следует, что  $\omega^e$  задана в неподвижном базисе, а  $\omega^r$  – в подвижном. Применяя правило дифференцирования (51) к  $\omega^r$ , получим

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \dot{\omega}^e + \dot{\omega}^r = \dot{\omega}^e + \frac{d\omega^r}{dt} + \omega^e \times \omega^r,$$

но  $\dot{\omega}^e = \varepsilon^e$ , и по определению относительного углового ускорения  $\frac{d'\omega^r}{dt} = \varepsilon^r$ , что приводит к следующей формуле:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^r + \omega^e \times \omega^r. \quad (56)$$

Выведенная формула по индукции обобщается на произвольное количество базисов, если считать, что известно движение каждого следующего базиса относительно предыдущего. Соотношения для сложного движения точки и тела используются для решения «комбинированных» задач, когда точка движется относительно базиса, в свою очередь, участвующего в сложном движении.

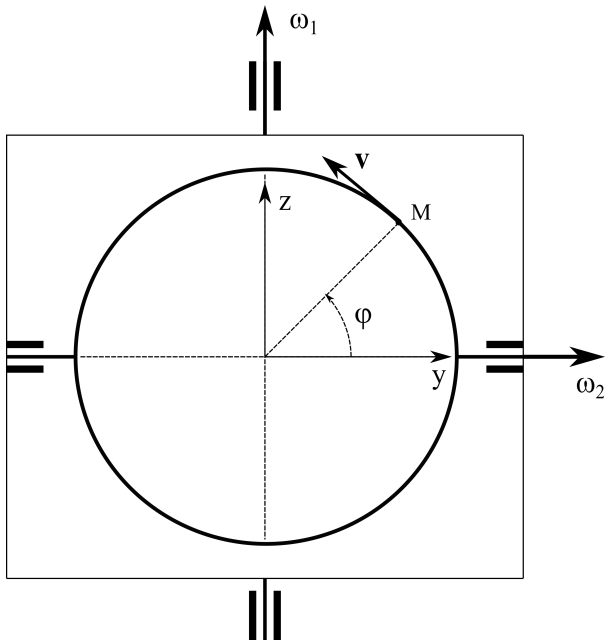


Рис. 25. Механическая система

Рассмотрим одну из типичных задач на применение теории сложного движения точки и твердого тела.

**Пример.** Рамка вращается относительно неподвижной оси с постоянной угловой скоростью  $\omega_1$  (рис. 25). Относительно рамки вращается гладкая окружность радиуса  $r$  с постоянной по

модулю угловой скоростью  $\omega_2$ , ортогональной  $\omega_1$ . Материальная точка  $M$  движется по окружности с постоянной по модулю относительной скоростью  $v$ . В некоторый момент времени плоскости рамки и окружности совпадают, а точка занимает положение, изображенное на рисунке. Найти абсолютные скорость и ускорение точки в этот момент времени.

◀ Выбор неинерциальной системы отсчета для вычисления параметров движения точки обычно диктуется простотой относительного движения точки. Поэтому здесь систему отсчета естественно связать с окружностью, поместив начало координат в ее центр.

Параметры движения выбранной системы отсчета определяются с помощью теории сложного движения твердого тела: абсолютное движение окружности состоит из равномерного вращения относительно оси, связанной с рамкой (относительное движение), и вращения рамки относительно вертикальной оси (переносное движение). По теореме о сложении угловых скоростей абсолютная угловая скорость окружности равна  $\omega = \omega_1 + \omega_2 = [0, \omega_2, \omega_1]^T$ , а для вычисления углового ускорения окружности применим формулу (56), отождествляя  $\omega^e = \omega_1$ ,  $\omega^r = \omega_2$ :  $\varepsilon = \omega_1 \times \omega_2 = [-\omega_1\omega_2, 0, 0]^T$ . Скорость точки равна

$$\mathbf{v} = \omega \times \rho + \mathbf{v}^r.$$

Подставляя  $\rho = r[0, \cos \varphi, \sin \varphi]^T$ ,  $\mathbf{v}^r = v[0, -\sin \varphi, \cos \varphi]^T$  и  $\omega$ , получим

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} (\omega_2 \sin \varphi - \omega_1 \cos \varphi)r \\ -v \sin \varphi \\ v \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

Вычисление ускорения точки по формуле Кориолиса приводит к выражению

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2v(\omega_2 \cos \varphi + \omega_1 \sin \varphi) \\ 2\omega_1\omega_2 r \sin \varphi - \omega_1^2 r \cos \varphi \\ -\omega_2^2 r \sin \varphi \end{bmatrix}. \blacktriangleright$$

**Замечание.** В задачах на вычисление скоростей и ускорений точек твердых тел, совершающих сложное движение, методически более грамотно использовать формулы Эйлера и Ривальса, предварительно вычислив параметры абсолютного движения тел.

Для пояснения модифицируем предыдущую задачу. Остановим точку на окружности, обнулив относительную скорость  $v = 0$ , и найдем ее абсолютные скорость и ускорение. Методически грамотное решение сводится к вычислениям по формулам

$$\omega = \omega_1 + \omega_2, \quad \varepsilon = \omega_1 \times \omega_2, \quad v = \omega \times \rho, \quad w = \varepsilon \times \rho + \omega \times (\omega \times \rho).$$

Альтернативный способ решения основан на теории сложного движения точки. Вводится система координат, связанная с рамкой, и в ней рассматривается движение интересующей нас точки – вращение по окружности. Естественно, что результат вычислений будет тем же, однако в этом способе приходится считать «лишнее» кориолисово ускорение, отсутствующее при первом способе решения.

**Упражнение.** Доказать теорему о сложении угловых скоростей при сложном движении твердого тела, используя теорию сложного движения точки.

Указание. Использовать формулу Эйлера для абсолютного, переносного и относительного движений двух произвольных точек тела (в случае затруднений см. [9]).

**Кинематические уравнения Эйлера.** Теория сложного движения твердого тела и сравнительно простые геометрические соображения дают уравнения, связывающие угловую скорость твердого тела с углами Эйлера и скоростями их изменения. Последовательность поворотов на углы Эйлера определяет положения двух промежуточных базисов и базиса, связанного с твердым телом. При движении тела базисы вращаются с угловыми скоростями  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\vartheta}$  и  $\dot{\varphi}$ , представленными на рис. 26, что позволяет представить движение тела как сложное, состоящее из этих трех вращений. Угловые скорости  $\dot{\vartheta}$  и  $\dot{\varphi}$  являются относительными угловыми скоростями, поскольку  $\dot{\vartheta}$  – угловая скорость второго промежуточного базиса относительно первого, а  $\dot{\varphi}$  – угловая скорость тела относительно второго промежуточного базиса.

Согласно теореме о сложении угловых скоростей в сумме они дают абсолютную угловую скорость тела:

$$\omega = \dot{\psi} + \dot{\vartheta} + \dot{\varphi}.$$

Спроектируем вектор  $\omega$  на оси связанного с телом базиса, используя обозначение компонент угловой скорости

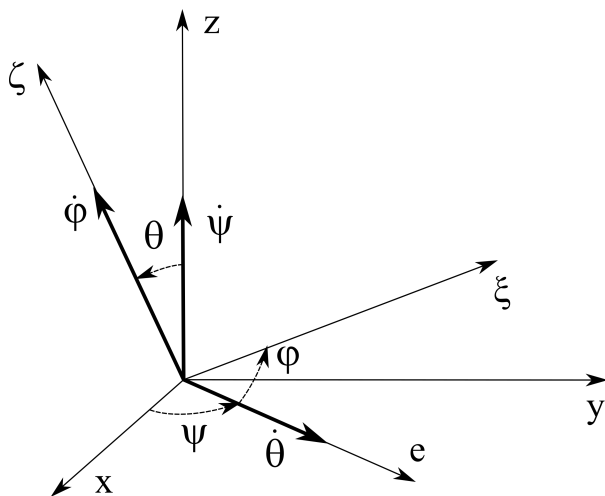


Рис. 26. Углы Эйлера и угловые скорости их изменения

$\omega = [p, q, r]^T$ , введенное Эйлером. Для этого можно обойтись геометрическими соображениями<sup>9</sup>. Проще всего находится проекция  $r$  на ось  $\zeta$ . Из рис. 26 видно, что  $r = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta$ , а угловая скорость  $\dot{\vartheta}$  не дает вклада в  $r$ , поскольку  $\dot{\vartheta} \perp \zeta$ .

Для вычисления остальных компонент вектора  $\omega$  рассмотрим проекции на оси  $\xi$  и  $\eta$  угловой скорости  $\dot{\vartheta}$  и составляющей угловой скорости  $\dot{\psi}$ , лежащей в плоскости  $\{\xi\eta\}$ , и равной по модулю  $\dot{\psi} \sin \vartheta$ . Расположение этих векторов приводится на рис. 27, откуда следуют уравнения

$$\begin{aligned}
 p &= \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} \cos \varphi, \\
 q &= \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta} \sin \varphi, \\
 r &= \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}.
 \end{aligned}
 \tag{57}$$

<sup>9</sup> В формальном выводе используются матрицы, задающие ориентацию промежуточных базисов относительно связанного базиса. Угловые скорости изменения углов Эйлера направлены по координатным осям промежуточных базисов – см. [1].

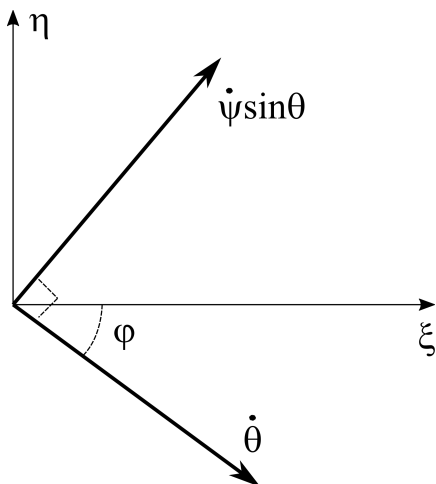


Рис. 27. Проекции угловых скоростей изменения углов Эйлера в плоскости  $\{\xi\eta\}$

Их разрешение относительно производных углов Эйлера приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{p \sin \varphi + q \cos \varphi}{\sin \vartheta}, \\ \dot{\vartheta} &= p \cos \varphi - q \sin \varphi \\ \dot{\varphi} &= r - (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \vartheta, \end{aligned} \quad (58)$$

называемым *кинематическими уравнениями Эйлера*.

Формулы (57) позволяют найти проекции абсолютной угловой скорости твердого тела на собственные оси, если задана зависимость углов Эйлера от времени. Выражения (58) служат для решения обратной задачи: если известны начальные значения углов Эйлера  $\psi(t_0)$ ,  $\vartheta(t_0)$ ,  $\varphi(t_0)$  и проекции абсолютной угловой скорости тела на собственные оси как функции времени, т.е.  $p(t)$ ,  $q(t)$ ,  $r(t)$ , то, интегрируя (58) с начальными условиями  $\psi(t_0)$ ,  $\vartheta(t_0)$ ,  $\varphi(t_0)$ , получаем текущие значения углов Эйлера  $\psi(t)$ ,  $\vartheta(t)$ ,  $\varphi(t)$ .

Уравнения Эйлера имеют минимальный порядок, равный трем и совпадающий с числом вращательных степеней свободы тела. Но на этом их преимущества заканчиваются. В отли-

чие от линейных кинематических уравнений Пуассона (50) система уравнений (58) нелинейна по компонентам фазового вектора  $\psi$ ,  $\vartheta$ ,  $\varphi$  и вырождается в окрестности точек  $\vartheta = \{0, \pi\}$ , а потому непригодна для описания ориентации твердого тела в окрестности этих точек. Уравнения Эйлера не интегрируются аналитически для произвольной зависимости от времени вектора угловой скорости  $\omega(t)$ .

Аналогично составляются кинематические уравнения для любых других углов конечного вращения. Все такие уравнения нелинейны и вырождаются в отдельных положениях твердого тела. Это делает их непригодными для решения задач, в которых заранее нельзя гарантировать отсутствие положений тела, соответствующих вырождениям. Напротив, уравнения Пуассона для ортогональных матриц и кватернионов (выведены ниже) линейны и определены для любых положений тела.

Однако углы конечного вращения удобны для наглядного представления углового положения тела и в качестве угловых координат тела при составлении динамических уравнений.

## 2.7. Кватернионы и их применение в кинематике твердого тела

Развитие комплексного анализа во многом определило расцвет математики XIX в., что наводило на мысли о перспективах использования гиперкомплексных чисел, получающихся при добавлении новых мнимых единиц и правил действий с ними. Но путь к полезным результатам оказался не столь простым. Отчасти это объяснялось концентрацией усилий на множестве трехмерных гиперкомплексных чисел с еще одной мнимой единицей, которое, казалось бы, должно быть полезным в трехмерных задачах. Дальнейшие исследования показали, что алгебраические свойства гиперкомплексных чисел существенно зависят от их размерности, а плодотворные результаты надо было искать среди гиперкомплексных чисел большей размерности.

В 1843 г. ирландский математик и механик У. Р. Гамильтон открыл четырехмерную *алгебру кватернионов*. Она сразу же нашла применение в кинематике и послужила основой для развития многих алгебраических и общематематических конструкций, например, векторного анализа, построенного Гиббсом и Хевисайдом.

дом, и теории линейных операторов. Интересно, что отдельные соотношения, полученные Гамильтоном, имелись в более ранних работах Эйлера, Гаусса и Родрига, однако формализм кватернионов был построен во всей полноте именно Гамильтоном.

Довольно продолжительное время после открытия кватернионы и другие похожие многомерные алгебры привлекали исследователей, но постепенно интерес к ним ослабевал.

Примерно с середины XX в. начинается интенсивная разработка систем ориентации и навигации различных объектов. Эти задачи снова привлекли внимание к кватернионам, позволявшим построить высокоточные алгоритмы вычисления ориентации, экономичные по вычислительным ресурсам и свободные от вырождений. В этих областях кватернионы и сейчас служат основным рабочим аппаратом и, несомненно, будут применяться в будущем.

Перейдем к описанию алгебры кватернионов. Векторное пространство над полем действительных чисел (т. е. векторов с действительными компонентами)  $V$  становится *алгеброй*, если на нем определена бинарная операция  $\circ$ , ставящая в соответствие двум элементам  $A, B \in V$  элемент  $C = A \circ B \in V$  и удовлетворяющая свойствам ассоциативности, дистрибутивности и билинейности:

$$\begin{aligned} A \circ (B \circ C) &= (A \circ B) \circ C, & (59) \\ (A + B) \circ (C + D) &= A \circ C + A \circ D + B \circ C + B \circ D, \\ (\alpha A) \circ (\beta B) &= \alpha\beta(A \circ B), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Из этих свойств следует, что операция  $\circ$  полностью определяется таблицей умножения ортов  $\{i_k\}$  базиса пространства, по которым раскладывается любой вектор:  $A = \sum a_k i_k$ .

Например, алгебру комплексных чисел  $\mathbb{C}$  можно ввести как множество двумерных векторов  $z = xi_1 + yi_2$  с таблицей умножения ортов  $i_1 \circ i_1 = i_1$ ,  $i_1 \circ i_2 = i_2 \circ i_1 = i_2$ ,  $i_2 \circ i_2 = -i_1$ .

Зачастую к содержательным результатам приводят и разные интерпретации одного и того же объекта. Так, разложение комплексного числа по базису естественно приводит к его интерпретации как вектора на плоскости. А представление комплексного числа в виде  $z = x + iy$  при отождествлении  $i_1 = 1$ ,  $i_2 = i$  и определении  $i^2 = -1$  дает ту же алгебру, что и приведенное выше



формальное определение. Ту же алгебру дает матричная интерпретация

$$z = xi_1 + yi_2, \quad i_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

при обычном определении сложения, умножения матриц на число и между собой. Результат, установленный для одного из представлений, сразу же переносится на все остальные.

Кватернионы – элементы алгебры  $\mathbb{H}$  четырехмерных гиперкомплексных чисел вида  $\Lambda = \lambda_0 i_0 + \lambda_1 i_2 + \lambda_2 i_2 + \lambda_3 i_3$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  с таблицей умножения базисных ортов:

$$\begin{aligned} i_0 \circ i_k &= i_k \circ i_0 = i_k, & k = \overline{0, 3}, \\ i_k \circ i_k &= -i_0, & k = \overline{1, 3}, \\ i_1 \circ i_2 &= i_3, & i_2 \circ i_3 = i_1, & i_3 \circ i_1 = i_2, \\ i_2 \circ i_1 &= -i_3, & i_3 \circ i_2 = -i_1, & i_1 \circ i_3 = -i_2. \end{aligned} \tag{60}$$

Непосредственная проверка показывает ассоциативность введенного таким образом умножения<sup>10</sup> и справедливость следующей *геометро-числовой интерпретации* кватернионов, чрезвычайно удобной для кинематических приложений. В этой интерпретации базисный орт  $i_0$  отождествляется с единицей,  $\{i_k\}$ ,  $k = \overline{1, 3}$  – с ортами  $\{i_k\}$ ,  $k = \overline{1, 3}$  ортонормированного базиса в  $\mathbb{R}^3$ , и кватернион записывается в виде

$$\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \lambda_3 i_3 = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda},$$

где множитель  $1 = i_0$  после  $\lambda_0$  в явном виде не указывается.

Число  $\lambda_0$  называется *скалярной частью кватерниона* и обозначается  $\lambda_0 = \text{sqal}\Lambda$ , вектор  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^3$ , обозначаемый  $\boldsymbol{\lambda} = \text{vect}\Lambda$ , называется *векторной частью кватерниона*.

Правило умножения векторных ортов можно переписать в виде [11]:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_k \circ \mathbf{i}_m &= -\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_m + \mathbf{i}_k \times \mathbf{i}_m, & k, m = \overline{1, 3}, \\ 1 \circ \mathbf{i}_k &= \mathbf{i}_k \circ 1 = \mathbf{i}_k, \end{aligned} \tag{61}$$

<sup>10</sup> Другим более изящным способом это можно доказать, используя матричную интерпретацию кватернионов – см. раздел, посвященный параметрам Кейли-Клейна.

где  $\cdot$  – скалярное произведение трехмерных векторов, а  $\times$  – векторное произведение. Нетрудно проверить, что это умножение соответствует таблице (60).

Геометро-числовая интерпретация кватернионов не является единственной (см. [1] и ниже), однако в кинематике твердого тела именно она наиболее естественна.

Раскрытие произведения кватернионов  $\Lambda = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}$  и  $M = \mu_0 + \boldsymbol{\mu}$  по правилам (59) и (61) приводит к следующей **формуле умножения кватернионов**:

$$\Lambda \circ M = \lambda_0 \mu_0 - \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\mu} + \lambda_0 \boldsymbol{\mu} + \mu_0 \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\mu}. \quad (62)$$

**Замечание.** С кватернионами можно оперировать и как с четырехмерными векторами. Например, кватернионам  $\Lambda = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}$ ,  $M = \mu_0 + \boldsymbol{\mu}$  и их произведению соответствуют векторы-столбцы

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} \mu_0 \\ \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix}, \quad N = \Lambda \circ M = \begin{bmatrix} \lambda_0 \mu_0 - \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\mu} \\ \lambda_0 \boldsymbol{\mu} + \mu_0 \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix},$$

или в покомпонентной форме:

$$N = \begin{bmatrix} \lambda_0 \mu_0 - \lambda_1 \mu_1 - \lambda_2 \mu_2 - \lambda_3 \mu_3 \\ \lambda_0 \mu_1 + \mu_0 \lambda_1 + \lambda_2 \mu_3 - \lambda_3 \mu_2 \\ \lambda_0 \mu_2 + \mu_0 \lambda_2 + \lambda_3 \mu_1 - \lambda_1 \mu_3 \\ \lambda_0 \mu_3 + \mu_0 \lambda_3 + \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 \end{bmatrix}.$$

Развернутая запись формулы умножения кватернионов требуется для численных или символьных вычислений<sup>11</sup>.

Величина

$$\tilde{\Lambda} = \lambda_0 - \boldsymbol{\lambda}$$

называется **сопряженным кватернионом**, а неотрицательное число

$$\|\Lambda\| = \Lambda \circ \tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda} \circ \Lambda = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$

– **нормой кватерниона**. Выражение  $|\Lambda| = \sqrt{\|\Lambda\|}$  называется **модулем кватерниона**.

<sup>11</sup> Кроме этой интерпретации существуют матричные представления кватернионов в виде комплексных матриц размера  $2 \times 2$  (см. ниже и [1]) или действительных матриц размера  $4 \times 4$  (см. [12])

## Основные свойства умножения, сопряжения и вычисления нормы кватернионов.

1. Умножение кватернионов некоммутативно:

$$\Lambda \circ M \neq M \circ \Lambda,$$

что сразу следует из наличия векторного произведения в формуле (62).

2. Сопряжение произведения кватернионов обладает свойством

$$\widetilde{\Lambda \circ M} = \tilde{M} \circ \tilde{\Lambda},$$

напоминающим правило транспонирования произведения матриц. Оно проверяется непосредственно:

$$\begin{aligned} \widetilde{\Lambda \circ M} &= \lambda_0 \mu_0 - \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\mu} - \lambda_0 \boldsymbol{\mu} - \mu_0 \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\mu}, \\ \tilde{M} \circ \tilde{\Lambda} &= \lambda_0 \mu_0 - \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\mu} - \lambda_0 \boldsymbol{\mu} - \mu_0 \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\lambda}. \end{aligned}$$

3. Норма произведения кватернионов равна произведению норм:

$$\|\Lambda \circ M\| = \widetilde{\Lambda \circ M} \circ \Lambda \circ M = \tilde{M} \circ \tilde{\Lambda} \circ \Lambda \circ M = \|\Lambda\| \|M\|.$$

4. Ортогональное преобразование векторных частей кватернионов коммутативно с умножением кватернионов. Пусть  $\Lambda = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}$ ,  $M = \mu_0 + \boldsymbol{\mu}$ ,  $\Lambda' = \lambda_0 + A\boldsymbol{\lambda}$ ,  $M' = \mu_0 + A\boldsymbol{\mu}$ ,  $A \in SO(3)$ , тогда если

$$N = \Lambda \circ M = n_0 + \boldsymbol{n},$$

то

$$N' = \Lambda' \circ M' = n_0 + A\boldsymbol{n}.$$

Это утверждение следует из правила умножения кватернионов (62): скалярные части кватернионов не изменяются, скалярное произведение инвариантно относительно ортогональных преобразований, а для векторного произведения справедливо свойство  $(A\boldsymbol{\lambda}) \times (A\boldsymbol{\mu}) = A(\boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\mu})$  которое полезно доказать в качестве упражнения. Геометрический смысл этого свойства состоит в том, что векторное произведение ортогонально сомножителям, и равно по модулю площади параллелограмма, образованного

этими сомножителями, а при ортогональном преобразовании эта конструкция поворачивается как твердое тело.

5. Для любого ненулевого кватерниона существует обратный:

$$\forall \Lambda \neq 0 \quad \exists \Lambda^{-1} = \frac{\tilde{\Lambda}}{\|\Lambda\|} : \quad \Lambda^{-1} \circ \Lambda = \Lambda \circ \Lambda^{-1} = 1,$$

и, таким образом,  $\mathbb{H}$  оказывается *алгеброй с делением*. Интересно, что в четырехмерном случае это, на первый взгляд тривиальное, свойство обеспечивается только таблицей умножения базисных ортов (60). Но еще более интересен следующий общий факт, называемый теоремой Фробениуса: в конечномерном пространстве алгебру с делением можно ввести только для трех случаев – действительных чисел  $\mathbb{R}$ , комплексных чисел  $\mathbb{C}$  и кватернионов  $\mathbb{H}$ . Поэтому делимость кватернионов вовсе не тривиальное, а исключительное свойство.

**Замечание.** Отказавшись от требования делимости всех ненулевых элементов, можно построить еще одну – восьмимерную алгебру бикватернионов, введенных английским математиком У. Клиффордом. Она также применяется в механике для описания винтовых перемещений твердого тела, однако не получила большого распространения из-за громоздкости аппарата и отсутствия делимости всюду. Геометрически отсутствие делимости соответствует тому, что поступательное перемещение тела не задается единственным винтом, ввиду неопределенностью положения винтовой оси, следующей из вырождения (42) при  $\varphi = 0$ . Ознакомиться с винтовым счислением можно, например, по книге [12].

**Применение кватернионов в кинематике.** Для описания вращений твердого тела используются кватернионы с единичной нормой  $\|\Lambda\| = 1$ , называемые *нормированными кватернионами*, и *присоединенное отображение*  $R' = \text{Ad}R$ , определяемое формулой

$$R' = \text{Ad}R = \Lambda \circ R \circ \tilde{\Lambda},$$

в которой  $R$  и  $R'$  – исходный и преобразованный кватернионы. Раскроем это преобразование:

$$R' = r'_0 + \mathbf{r}' = \Lambda \circ (r_0 + \mathbf{r}) \circ \tilde{\Lambda} = r_0 + \Lambda \circ \mathbf{r} \circ \tilde{\Lambda}$$

и заметим, что для кватерниона  $\Lambda \circ \mathbf{r} \circ \tilde{\Lambda}$  справедливо равенство

$$\widetilde{\Lambda \circ \mathbf{r} \circ \tilde{\Lambda}} = \Lambda \circ \tilde{\mathbf{r}} \circ \tilde{\Lambda} = -\Lambda \circ \mathbf{r} \circ \tilde{\Lambda},$$

равносильное отсутствию скалярной части и возможности отождествления  $\Lambda \circ \mathbf{r} \circ \tilde{\Lambda}$  с вектором. Отсюда следует, что скалярная часть не изменяется при действии присоединенного отображения, т.е.  $r_0 = r'_0$ , а формула

$$\mathbf{r}' = \Lambda \circ \mathbf{r} \circ \tilde{\Lambda} \quad (63)$$

задает линейное преобразование вектора  $\mathbf{r}$ .

Преобразование (63) ортогонально, поскольку оно линейно и сохраняет норму вектора:

$$\|\mathbf{r}'\| = \|\Lambda \circ \mathbf{r} \circ \tilde{\Lambda}\| = \|\Lambda\| \cdot \|\mathbf{r}\| \cdot \|\tilde{\Lambda}\| = \|\mathbf{r}\|,$$

таким образом:

$$\exists A \in O(3) : \mathbf{r}' = \Lambda \circ \mathbf{r} \circ \tilde{\Lambda} = A\mathbf{r}.$$

Покажем, что  $A \in SO(3)$ , и заодно установим взаимосвязь кватерниона, ортогональной матрицы и соответствующего вектора эйлера поворота. Для этого понадобится представление

$$\Lambda = \cos \frac{\varphi}{2} + \mathbf{e} \sin \frac{\varphi}{2}, \quad |\mathbf{e}| = 1, \quad (64)$$

всегда существующее для произвольного нормированного кватерниона, подобно тригонометрической форме представления комплексного числа  $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$  единичного модуля. Докажем следующую теорему.

**Теорема.** *Кватернион (64) при действии присоединенного отображения (63) задает поворот вектора  $\mathbf{r}$  вокруг орта  $\mathbf{e}$  на угол  $\varphi$ .*

Из формулы (62) следует, что  $\Lambda \circ \mathbf{r} - \mathbf{r} \circ \Lambda = 2\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{r}$ ,  $\Lambda \circ \mathbf{r} = \mathbf{r} \circ \Lambda + 2\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{r}$ . Воспользовавшись условием  $\Lambda \circ \tilde{\Lambda} = 1$ , получаем

$$\mathbf{r}' = \Lambda \circ \mathbf{r} \circ \tilde{\Lambda} = \mathbf{r} + 2(\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{r}) \circ \tilde{\Lambda}. \quad (65)$$

Снова применяя (62) для раскрытия последнего кватернионного произведения, имеем

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + 2\lambda_0 \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\lambda} \times (\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{r}).$$

Но  $\boldsymbol{\lambda} \times (\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\lambda})$ , следовательно,

$$\mathbf{r}' = (1 - 2\lambda^2)\mathbf{r} + 2\lambda_0\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{r} + 2(\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\lambda}, \quad \lambda^2 = \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\lambda}, \quad (66)$$

что с формулами

$$\lambda_0 = \cos \frac{\varphi}{2}, \quad \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{e} \sin \frac{\varphi}{2}, \quad \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1 - \cos \varphi}{2}, \quad 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = \sin \varphi,$$

и тождеством  $(\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{r}$  дает

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} \cos \varphi + \sin \varphi \mathbf{e} \times \mathbf{r} + (1 - \cos \varphi)\mathbf{e}\mathbf{e}^T \mathbf{r},$$

т.е.

$$\mathbf{r}' = [E \cos \varphi + \hat{\mathbf{e}} \sin \varphi + \mathbf{e}\mathbf{e}^T(1 - \cos \varphi)]\mathbf{r}. \quad (67)$$

Эта формула совпадает с выражением (24) ортогональной матрицы и доказывает теорему <sup>12</sup>.

Промежуточная формула (66) и выражение  $\mathbf{r}' = A\mathbf{r}$ , где  $A$  — матрица соответствующего поворота, позволяют выразить ортогональную матрицу через кватернион:

$$A = (1 - 2\lambda^2)E + 2\lambda_0\hat{\boldsymbol{\lambda}} + 2\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}^T.$$

Использование равенства  $\lambda_0^2 + \lambda^2 = 1$  дает более компактную запись:

$$A = (2\lambda_0^2 - 1)E + 2\lambda_0\hat{\boldsymbol{\lambda}} + 2\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}^T. \quad (68)$$

В развернутом виде:

$$A = \begin{bmatrix} 2(\lambda_0^2 + \lambda_1^2) - 1 & 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3) & 2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2) \\ 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3) & 2(\lambda_0^2 + \lambda_2^2) - 1 & 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1) \\ 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2) & 2(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_0\lambda_1) & 2(\lambda_0^2 + \lambda_3^2) - 1 \end{bmatrix}. \quad (69)$$

Пусть  $\Lambda = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda} = \cos \frac{\varphi}{2} + \mathbf{e} \sin \frac{\varphi}{2}$  — нормированный кватернион, а координаты орта имеют вид  $\mathbf{e} = [x, y, z]^T$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Тогда компоненты  $\lambda_k$  нормированного кватерниона

$$\lambda_0 = \cos \frac{\varphi}{2}, \quad \lambda_1 = x \sin \frac{\varphi}{2}, \quad \lambda_2 = y \sin \frac{\varphi}{2}, \quad \lambda_3 = z \sin \frac{\varphi}{2}$$

<sup>12</sup> В [11] приведен другой способ доказательства, не использующий выражение матрицы через эйлеров поворот.

называются *параметрами Родрига–Гамильтона*. Таким образом, формула (69) связывает компоненты ортогональной матрицы с параметрами Родрига–Гамильтона соответствующего ей кватерниона поворота.

**Замечание.** Более коротко формула, связывающая кватернион и матрицу, получается «в обратную сторону» из выражения  $A \in SO(3)$  через параметры эйлера поворота

$$A = \left(2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - 1\right) E + 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \hat{e} + 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \mathbf{e} \mathbf{e}^T$$

после подстановки в него равенств

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \lambda_0, \quad \mathbf{e} \sin \frac{\varphi}{2} = \boldsymbol{\lambda}, \quad \hat{e} \sin \frac{\varphi}{2} = \hat{\boldsymbol{\lambda}}.$$

**Замечание.** В литературе параметрами Родрига–Гамильтона иногда называют *только* компоненты кватерниона в собственном базисе, преобразуемом этим кватернионом при рассмотрении пассивных поворотов. Это возможное разночтение надо иметь в виду при чтении литературы и подготовке к экзамену.

Кватернионное описание ортогональных преобразований обладает несколькими преимуществами в сравнении с другими способами. Преобразование (63) линейно по  $\mathbf{r}$ , и кватернион имеет четыре параметра вместо девяти (минимум – шести) параметров ортогональной матрицы. Кватернион сразу выражается через вектор конечного поворота, обладающий несомненной наглядностью. Кватернионное описание поворотов лишено особых точек, вроде вырождений систем углов конечного вращения, а выведенные ниже кинематические уравнения Пуассона в кватернионах линейны и не имеют особенностей в любом положении твердого тела.

Отметим, что кватернионы не находятся во взаимно однозначном соответствии с положениями твердого тела. Как видно из формулы (63), кватернионы  $\Lambda$  и  $(-\Lambda)$  соответствуют одному преобразованию. Однако любой нормированный кватернион задает единственный поворот, и отмеченная неоднозначность не создает никаких проблем при кватернионном описании поворотов. Более подробный анализ этого вопроса связан с топологическими свойствами группы  $SO(3)$  и ее соответствием множеству кватернионов единичной нормы, тождественному трехмерной сфере

$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$ , который можно найти, например, в книге [1].

**Сложение поворотов в кватернионах.** Напомним, что повороты подразделяются на активные (преобразования пространства) и пассивные (преобразования базиса) – см. раздел 2.5. Формулы преобразований вектора и вычисления кватерниона композиции нескольких поворотов в этих двух случаях отличаются, напоминая формулы, установленные для ортогональных матриц.

**Сложение активных поворотов.** Все повороты выполняются в одном фиксированном базисе. Рассмотрим два последовательных поворота, при которых вектор  $\mathbf{r}$  отображается в  $\mathbf{r}'$ , а  $\mathbf{r}'$  – в  $\mathbf{r}''$ :

$$\mathbf{r}' = \Lambda \circ \mathbf{r} \circ \tilde{\Lambda}, \quad \mathbf{r}'' = M \circ \mathbf{r}' \circ \tilde{M}.$$

Подставляя первую из этих формул во вторую, получим

$$\mathbf{r}'' = M \circ \Lambda \circ \mathbf{r} \circ \widetilde{M \circ \Lambda},$$

т. е. кватернион результирующего поворота равен произведению кватернионов элементарных поворотов в обратном порядке:

$$N = M \circ \Lambda.$$

По индукции доказывается, что кватернион композиции последовательных поворотов, задаваемых кватернионами  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ , также равен их произведению в обратном порядке:

$$N = \Lambda_n \circ \dots \circ \Lambda_1. \quad (70)$$

**Сложение пассивных поворотов.** В этом случае поворачивается базис, а пространство и его элементы неподвижны. Для рассмотрения композиции пассивных поворотов важно понять, как преобразуется вектор и нормированный кватернион при смене базиса.

Пусть  $\Lambda = \cos \frac{\psi}{2} + \epsilon \sin \frac{\psi}{2}$  – кватернион поворота, отображающий базис  $\{\mathbf{i}_k\}$  в базис  $\{\mathbf{i}'_k\}$  по формулам  $\mathbf{i}'_k = \Lambda \circ \mathbf{i}_k \circ \tilde{\Lambda}$ . Направляющие косинусы орта оси поворота  $\epsilon$  одинаковы в обоих базисах, а угол  $\psi$  – скаляр и от базиса не зависит. Поэтому кватернион  $\Lambda$  имеет одинаковые компоненты в базисах  $\{\mathbf{i}_k\}$  и  $\{\mathbf{i}'_k\}$ , т.е.  $\Lambda^{(\prime)} = \Lambda$ .



Вектор  $\mathbf{r}$ , неподвижный в пространстве, при повороте базиса  $\{\mathbf{i}_k\} \rightarrow \{\mathbf{i}'_k\}$  с «точки зрения» базиса  $\{\mathbf{i}'_k\}$  поворачивается вокруг оси  $(-\varepsilon)$  на угол  $\psi$ , чему соответствует кватернион  $\tilde{\Lambda}$  и преобразование

$$\mathbf{r}^{(\prime)} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{r} \circ \Lambda. \quad (71)$$

Из этих рассуждений следует, что все компоненты формулы (71) записываются в базисе  $\{\mathbf{i}'_k\}$ , т.е.  $\mathbf{r}^{(\prime)} = x^{(\prime)}\mathbf{i}'_1 + y^{(\prime)}\mathbf{i}'_2 + z^{(\prime)}\mathbf{i}'_3$ , причем вектор  $\mathbf{r}$  состоит из исходных компонент  $\mathbf{r} = x\mathbf{i}_1 + y\mathbf{i}_2 + z\mathbf{i}_3$ , формально разложенных по базису  $\{\mathbf{i}'_k\}$ , т.е.  $\mathbf{r} = x\mathbf{i}'_1 + y\mathbf{i}'_2 + z\mathbf{i}'_3$ . Поскольку  $\Lambda^{(\prime)} = \Lambda$ , то кватернион  $\Lambda$  в (71) также расписывается «старыми» компонентами по «новому» базису.

Преобразование вектора сопряженным кватернионом при пассивном повороте можно объяснить и так. Допустим мысленно, что некоторый произвольный вектор повернулся вместе с «новым» базисом. Тогда координаты вектора в этом «новом» базисе останутся прежними. Но при пассивном повороте вектор должен оставаться постоянным в абсолютном пространстве, т.е. «исходном» базисе, для чего требуется наш «мысленный» вектор повернуть из «нового» базиса в «исходный». Этому обратному повороту соответствует сопряженный кватернион.

Установленная формула обобщается на закон преобразования кватерниона поворота при смене базиса. Пусть  $M = \cos \frac{\varphi}{2} + \mathbf{e} \sin \frac{\varphi}{2}$  – кватернион некоторого поворота в базисе  $\{\mathbf{i}_k\}$ . Рассмотрим, как изменятся координаты этого кватерниона при переходе к новому базису  $\{\mathbf{i}'_k\}$ . Векторная часть  $\mathbf{e}$  при смене базиса преобразуется согласно (71):  $\mathbf{e}^{(\prime)} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{e} \circ \Lambda$ , а  $\varphi$  – скаляр, не зависящий от базиса, и (71) распространяется на преобразование кватерниона:

$$M^{(\prime)} = \tilde{\Lambda} \circ M \circ \Lambda. \quad (72)$$

В частности, эта формула согласуется с утверждением о совпадении координат кватерниона поворота, совмещающего два положения базиса, поскольку в этом случае  $\Lambda = M = M^{(\prime)}$ .

Получим формулу для кватерниона композиции двух поворотов, преобразующих базисные орты по формулам  $\mathbf{i}'_k = \Lambda \circ \mathbf{i}_k \circ \tilde{\Lambda}$ ,  $\mathbf{i}''_k = M \circ \mathbf{i}'_k \circ \tilde{M}$ . При этом кватернионы элементарных поворотов задаются своими координатами в преобразуемых ими *собственных базисах*.

Пусть  $\mathbf{r}$  – некоторый вектор в базисе  $\{\mathbf{i}_k\}$ ,  $\mathbf{r}^{(\prime)}$ ,  $\mathbf{r}^{(\prime\prime)}$  – этот же вектор в базисах  $\{\mathbf{i}'_k\}$ ,  $\{\mathbf{i}''_k\}$ . Согласно вышеизложенному, справедливы следующие преобразования:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}^{(\prime)} &= \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{r} \circ \Lambda, \quad \mathbf{r}^{(\prime\prime)} = \tilde{M} \circ \mathbf{r}^{(\prime)} \circ M \\ \mathbf{r}^{(\prime\prime)} &= \tilde{M} \circ \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{r} \circ \Lambda \circ M = \widetilde{\Lambda \circ M} \circ \mathbf{r} \circ \Lambda \circ M,\end{aligned}\tag{73}$$

причем все векторы и кватернионы в выражении для  $\mathbf{r}^{(\prime\prime)}$  формально расписываются по «последнему» базису  $\{\mathbf{i}''_k\}$  своими координатами в собственных базисах.

Таким образом, кватернион композиции двух поворотов  $N$  равен произведению кватернионов, составляющих композицию, в прямом порядке:

$$N = \Lambda \circ M,$$

где координаты кватернионов  $\Lambda$  и  $M$  в собственных базисах формально раскладываются по «последнему» базису<sup>13</sup>. При этом компоненты кватерниона  $N$  будут одинаковыми в «первом»  $\{\mathbf{i}_k\}$  и «последнем»  $\{\mathbf{i}''_k\}$  базисах, поскольку  $N$  совмещает базисы  $\{\mathbf{i}_k\}$  и  $\{\mathbf{i}''_k\}$ .

Это же правило композиции можно получить и другим способом. Обозначим через  $\Lambda$  кватернион поворота  $\{\mathbf{i}_k\} \rightarrow \{\mathbf{i}'_k\}$  в базисе  $\{\mathbf{i}_k\}$ ,  $M^{(\prime)}$  – кватернион поворота  $\{\mathbf{i}'_k\} \rightarrow \{\mathbf{i}''_k\}$  в базисе  $\{\mathbf{i}'_k\}$ . Обращение формулы (72) позволяет перепроектировать  $M^{(\prime)}$  в базис  $\{\mathbf{i}_k\}$ :

$$M = \Lambda \circ M^{(\prime)} \circ \tilde{\Lambda},$$

и затем сложить повороты в исходном базисе  $\{\mathbf{i}_k\}$  по формуле (70):

$$N = M \circ \Lambda = \Lambda \circ M^{(\prime)} \circ \tilde{\Lambda} \circ \Lambda = \Lambda \circ M^{(\prime)}.$$

Рассуждение по индукции приводит к обобщению полученного правила на произвольное количество последовательных поворотов, задаваемых кватернионами  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ . Кватернион композиции поворотов  $\Lambda$  вычисляется по формуле

$$\Lambda = \Lambda_1 \circ \Lambda_2 \circ \dots \circ \Lambda_n,$$

<sup>13</sup> В литературе иногда используется обозначение  $N = \Lambda * M^*$ , служащее для выделения этого формального разложения всех кватернионов по одному базису. Поскольку это несколько громоздкая запись, в пособии оно не используется.

в которой все кватернионы формально записаны своими координатами в собственных базисах в «последнем» или в «первом» базисе.

Формула преобразования вектора в случае  $n$  элементарных поворотов, как и для двух элементарных поворотов, имеет вид  $\mathbf{r}^{(n)} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{r} \circ \Lambda$ .

**Еще одно удобное обозначение.** При использовании нескольких базисов для кватернионов, отображающих вектор из одного базиса в другой, как и для ортогональных матриц, можно ввести удобные индексные обозначения. Для матрицы, связывающей один и тот же вектор  $\mathbf{a}$  в паре базисов  $x$  и  $\xi$ , вводилось обозначение

$$\mathbf{a}_\xi = A_{\xi x} \mathbf{a}_x.$$

Аналогичным образом формула  $\mathbf{r}^{(1)} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{r} \circ \Lambda$  переписывается в виде

$$\mathbf{a}_\xi = \tilde{\Lambda}_{x\xi} \circ \mathbf{a}_x \circ \Lambda_{x\xi}.$$

Как и при использовании матричного аппарата здесь имеет место «примыкание» одноименных индексов, позволяющее практически исключить ошибки. Последняя формула с учетом того, что  $\tilde{\Lambda}_{x\xi} = \Lambda_{\xi x}$  переписывается в виде  $\mathbf{a}_\xi = \Lambda_{\xi x} \circ \mathbf{a}_x \circ \Lambda_{x\xi}$ , в котором индексы «нового» базиса остаются снаружи, а «старого» – внутри. Также справедливо равенство  $\mathbf{a}_\xi = \Lambda_{\xi x} \circ \mathbf{a}_x \circ \tilde{\Lambda}_{\xi x}$ .

Одноименные индексы примыкают и при вычислении кватерниона композиции поворотов. Пусть  $\mathbf{a}_\eta = \tilde{\Lambda}_{\xi\eta} \circ \mathbf{a}_\xi \circ \Lambda_{\xi\eta}$ . Подставим сюда формулу для  $\mathbf{a}_\xi$ :

$$\mathbf{a}_\eta = \tilde{\Lambda}_{\xi\eta} \circ \tilde{\Lambda}_{x\xi} \circ \mathbf{a}_x \circ \Lambda_{x\xi} \circ \Lambda_{\xi\eta} = \widetilde{\Lambda_{x\xi} \circ \Lambda_{\xi\eta}} \circ \mathbf{a}_x \circ \Lambda_{x\xi} \circ \Lambda_{\xi\eta},$$

откуда следует выражение

$$\Lambda_{x\eta} = \Lambda_{x\xi} \circ \Lambda_{\xi\eta},$$

легко обобщаемое на произвольное число поворотов по индукции.

Следующие примеры иллюстрируют использование активной, либо пассивной точки зрения на композицию поворотов.

**Пример.** Твердое тело поворачивается относительно оси с направляющим ортом  $\mathbf{e}_1$  на угол  $\varphi_1$  и затем вокруг оси с направляющим ортом  $\mathbf{e}_2$  на угол  $\varphi_2$ . Орты осей поворотов заданы

в некотором неподвижном базисе. Найти угол и орт оси результирующего поворота.

◀ Поскольку все повороты заданы в одном базисе, используем активную точку зрения. Кватернионы элементарных поворотов равны  $\Lambda_1 = \cos \frac{\varphi_1}{2} + \mathbf{e}_1 \sin \frac{\varphi_1}{2}$  и  $\Lambda_2 = \cos \frac{\varphi_2}{2} + \mathbf{e}_2 \sin \frac{\varphi_2}{2}$ . Вычислим кватернион результирующего поворота:

$$\Lambda = \Lambda_2 \circ \Lambda_1 = \cos \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2}{2} - \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2}{2} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + \quad (74)$$

$$+ \sin \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2}{2} \mathbf{e}_1 + \cos \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2}{2} \mathbf{e}_2 + \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2}{2} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2.$$

С другой стороны, этот кватернион равен  $\Lambda = \cos \frac{\varphi}{2} + \mathbf{e} \sin \frac{\varphi}{2}$ , где  $\mathbf{e}$  и  $\varphi$  – орт оси и угол результирующего поворота соответственно. Сопоставляя скалярные и векторные части, находим, что

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \cos \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2}{2} - \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2}{2} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2,$$

а орт оси получается после нормировки векторной части выражения (74):

$$\mathbf{e} = \frac{\text{vect} \Lambda}{|\text{vect} \Lambda|}.$$

Например, для поворотов относительно координатных осей базиса  $\mathbf{e}_1 = [1, 0, 0]^T$  и  $\mathbf{e}_2 = [0, 1, 0]^T$  на одинаковые углы  $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$  получаем, что  $\Lambda = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} [1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}]^T$ , откуда следует, что  $\varphi = 120^\circ$  и  $\mathbf{e} = [1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}]^T$ . ▶

Разобранный пример показывает, что аппарат кватернионов сразу приводит к выражениям угла и орта оси композиции двух поворотов, чего нельзя сказать о других представлениях ортогональных преобразований.

**Пример.** Выразить кватернион поворота твердого тела через углы Эйлера.

◀ Выше мы выразили кватернион и матрицу через параметры эйлера поворота, и матрицу через кватернион. Этот пример устанавливает связь кватерниона и углов Эйлера, замыкая цикл соответствий между перечисленными параметрами ориентации тела.

По постановке задачи кватернионы поворотов задаются в разных (собственных) базисах, и поэтому задачу естественно решать

с пассивной точки зрения. По правилу сложения пассивных поворотов, кватернионы элементарных поворотов формально раскладываются по исходному или конечному базису. Выпишем их в исходном базисе:

$$\begin{aligned}\Lambda_\psi &= \cos \frac{\psi}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\psi}{2}, \\ \Lambda_\vartheta &= \cos \frac{\vartheta}{2} + \mathbf{i}_1 \sin \frac{\vartheta}{2}, \\ \Lambda_\varphi &= \cos \frac{\varphi}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi}{2}.\end{aligned}$$

Кватернион результирующего поворота равен  $\Lambda = \Lambda_\psi \circ \Lambda_\vartheta \circ \Lambda_\varphi$ . Вычисления приводят к следующему результату:

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\psi + \varphi}{2}, & \lambda_1 &= \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\psi - \varphi}{2}, \\ \lambda_2 &= \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\psi - \varphi}{2}, & \lambda_3 &= \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\psi + \varphi}{2}. \blacktriangleright\end{aligned}$$

**Кинематические уравнения Пуассона в кватернионах.** Вывод кватернионных кинематических уравнений Пуассона практически дословно повторяет соответствующие выкладки для ортогональных матриц. Пусть  $\Lambda(t)$  – нормированный кватернион, описывающий изменение ориентации твердого тела со временем. За малое время  $\Delta t$  поворот тела описывается вектором Эйлера  $\Delta\varphi$  и кватернионом

$$\Delta\Lambda = \cos \frac{\Delta\varphi}{2} + \mathbf{e} \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \simeq 1 + \frac{\Delta\varphi}{2}.$$

Последнее линеаризованное соотношение называется *кватернионом малого поворота*. Для момента времени  $t + \Delta t$  справедливы следующие выражения:

$$\Lambda(t + \Delta t) \simeq \begin{cases} (1 + \frac{1}{2}\Delta\varphi_x) \circ \Lambda(t), \\ \Lambda(t) \circ (1 + \frac{1}{2}\Delta\varphi_\xi), \end{cases} \quad (75)$$

зависящие от того, в каком базисе рассматривается кватернион малого поворота – в неподвижном (верхнее равенство) или связанном с телом (нижнее). Производная кватерниона по времени вычисляется покомпонентно, подобно локальной производной

вектора:

$$\dot{\Lambda} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Lambda(t + \Delta t) - \Lambda(t)}{\Delta t} = \dot{\lambda}_0 + \dot{\lambda}_0 \mathbf{i}_1 + \dot{\lambda}_0 \mathbf{i}_2 + \dot{\lambda}_3 \mathbf{i}_3.$$

Перенесем  $\Lambda(t)$  в левую часть (75), разделим получившееся равенство на  $\Delta t$  и перейдем к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ . По определению угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}_* = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi_*}{\Delta t}$ , где \* обозначает один из базисов ( $x$  или  $\xi$ ), и переход к пределу приводит к следующей паре уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda} &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_x \circ \Lambda, \\ \dot{\Lambda} &= \frac{1}{2} \Lambda \circ \boldsymbol{\omega}_\xi, \end{aligned} \quad (76)$$

называемых *кинематическими уравнениями Пуассона в кватернионах*.

Подобно матричным уравнениям Пуассона, они позволяют решить две взаимно обратные задачи: найти зависимость  $\Lambda(t)$ , если задано начальное значение  $\Lambda(t_0)$  и известна угловая скорость  $\boldsymbol{\omega}_x(t)$  или  $\boldsymbol{\omega}_\xi(t)$  как функция времени, либо наоборот вычислить угловую скорость  $\boldsymbol{\omega}_x(t)$  или  $\boldsymbol{\omega}_\xi(t)$ , если известна зависимость  $\Lambda(t)$ , разрешая (76) относительно угловой скорости:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_x &= 2\dot{\Lambda} \circ \tilde{\Lambda}, \\ \boldsymbol{\omega}_\xi &= 2\tilde{\Lambda} \circ \dot{\Lambda}. \end{aligned} \quad (77)$$

Кватернионные уравнения Пуассона линейны, и не вырождаются ни в каких положениях тела, что делает их самым удобным аппаратом для численного интегрирования кинематических уравнений движения твердого тела. Общие аналитические решения уравнений Пуассона для произвольной угловой скорости найти не удается.

**Упражнение.** Доказать, что норма кватерниона  $\|\Lambda\|$  является первым интегралом уравнений Пуассона.

Это свойство позволяет контролировать погрешности вычислений кватерниона ориентации по отклонению  $\|\Lambda\| - 1$ , поскольку при точном решении  $\|\Lambda\| \equiv 1$ .

Интересным свойством уравнений Пуассона является конгруэнтность всех решений любому частному решению. А имен-

но, пусть  $\Lambda^*$  – некоторое частное решение уравнений Пуассона  $\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\Lambda \circ \omega_\xi$ , т.е.  $\dot{\Lambda}^* \equiv \frac{1}{2}\Lambda^* \circ \omega_\xi$ . Умножая последнее равенство слева на кватернион  $\Lambda_0 = \text{const}$ , нетрудно видеть, что и кватернион  $\Lambda = \Lambda_0 \circ \Lambda^*$  также будет решением уравнений Пуассона. Для доказательства утверждения осталось показать, что найденное решение является общим, т.е. кватернион  $\Lambda_0$  можно подобрать так, чтобы удовлетворить произвольному начальному условию  $\Lambda(t_0)$  в задаче Коши для уравнений Пуассона:  $\Lambda(t_0) = \Lambda_0 \circ \Lambda^*(t_0)$ . Это сразу следует из выражения  $\Lambda_0 = \Lambda(t_0) \circ \tilde{\Lambda}^*(t_0)$ .

Доказательство для уравнений Пуассона, в которых угловая скорость задана в неподвижных осях, повторяется практически дословно.

**Упражнение.** Доказать справедливость аналогичного утверждения для кинематических уравнений Пуассона в ортогональных матрицах.

Из конгруэнтности решений уравнений Пуассона следует, что частное решение для некоторого связанного с телом базиса автоматически дает решения для любого другого связанного базиса. Решения отличаются умножением частного решения на постоянный кватернион или матрицу взаимной ориентации двух связанных с телом базисов.

Общих аналитических решений кинематических уравнений, записанных в любой форме, не существует. Поэтому представляют интерес частные случаи точной интегрируемости. Важным классом таких движений являются так называемые конические движения, реализуемые при качении без проскальзывания конуса по другому неподвижному конусу. В следующем примере эта задача рассмотрена в достаточно общей постановке.

**Пример.** По неподвижному круговому конусу с углом  $2\alpha$  при вершине катится без проскальзывания круговой конус с углом при вершине  $2\beta$ , совпадающей с вершиной неподвижного конуса. Угловая скорость постоянна по модулю, равна  $\omega$  и направлена согласно рис. 28.

Ввести неподвижный базис и базис, связанный с подвижным конусом. Найти кватернион, описывающий взаимную ориентацию введенных базисов, и проекции угловой скорости подвижного конуса в этих базисах.

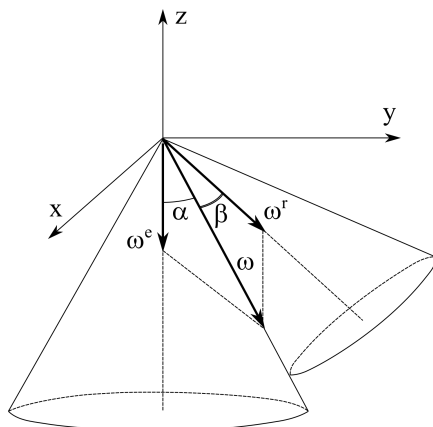


Рис. 28. Качение конуса по конусу

◀ Решение задачи существенно зависит от выбора систем координат. Из соображений симметрии неподвижный базис естественно ввести так, чтобы его ось  $z$  совпала с осью симметрии неподвижного конуса, а оси  $y$  и  $z$  лежали, например, в одной плоскости с осью симметрии подвижного конуса в его начальном положении. На рис. 28 изображено начальное положение конусов и неподвижный базис.

Систему координат, жестко связанную с подвижным конусом, можно выбрать совпадающей в начальный момент с неподвижным базисом.

Абсолютная угловая скорость подвижного конуса  $\omega$  раскладывается на составляющие  $\omega^e$  и  $\omega^r$  вдоль осей симметрии неподвижного и подвижного конусов соответственно:  $\omega = \omega^e + \omega^r$ , трактуемые как переносная и относительная угловые скорости конуса для системы координат, вращающейся относительно оси симметрии неподвижного конуса.

На рис. 28 изображено разложение вектора абсолютной угловой скорости по указанным составляющим, из которого видно, что  $\omega \cos \alpha = \omega^e + \omega^r \cos(\alpha + \beta)$ ,  $\omega \sin \alpha = \omega^r \sin(\alpha + \beta)$  (это следует из проектирования векторов на направления вдоль  $\omega^e$  и ортогональное дополнение к нему в плоскости векторов  $\omega^e$  и  $\omega^r$ ).



Разрешая эти равенства относительно  $\omega^e$  и  $\omega^r$ , получим:

$$\omega^r = \frac{\omega \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad \omega^e = \omega(\cos \alpha - \sin \alpha \operatorname{ctg}(\alpha + \beta)). \quad (78)$$

Введем промежуточный базис, вращающийся относительно оси  $z$  с угловой скоростью  $\omega^e$ , совпадающей с угловой скоростью линии касания двух конусов. Движение конуса в этом промежуточном базисе представляет собой вращение с постоянной угловой скоростью  $\omega^r$  относительно оси симметрии с направляющим ортом  $\mathbf{e}_2 = [0, \sin(\alpha + \beta), -\cos(\alpha + \beta)]^T$ .

Из этого следует, что поворот конуса относительно начального положения представим в виде композиции двух поворотов: промежуточного базиса на угол  $\omega^e t$  относительно оси  $(-z)$  с направляющим вектором  $\mathbf{e}_1 = [0, 0, -1]^T$  и на угол  $\omega^r t$  относительно оси с направляющим вектором  $\mathbf{e}_2 = [0, \sin(\alpha + \beta), -\cos(\alpha + \beta)]^T$  промежуточного базиса (рис. 28).

Поскольку в задаче использовано два базиса, элементарные повороты интерпретируем как пассивные и вычисляем кватернион результирующего поворота  $\Lambda$  как произведение кватернионов элементарных поворотов в прямом порядке:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \cos \frac{\omega^e t}{2} + \mathbf{e}_1 \sin \frac{\omega^e t}{2}, \\ \Lambda_2 &= \cos \frac{\omega^r t}{2} + \mathbf{e}_2 \sin \frac{\omega^r t}{2}, \\ \Lambda &= \Lambda_1 \circ \Lambda_2. \end{aligned}$$

**Замечание 1.** Эту задачу можно решить и через активные повороты. Для этого в неподвижном базисе следует сначала повернуть подвижный конус относительно собственной оси симметрии, а затем повернуть его относительно оси симметрии неподвижного конуса. Углы этих поворотов те же, что и в решении с пассивной точкой зрения. В этом случае цепочка выкладок, выражающих кватернион результирующего поворота, следующая:

$$\begin{aligned} \Lambda'_1 &= \cos \frac{\omega^r t}{2} + \mathbf{e}_2 \sin \frac{\omega^r t}{2}, \\ \Lambda'_2 &= \cos \frac{\omega^e t}{2} + \mathbf{e}_1 \sin \frac{\omega^e t}{2}, \\ \Lambda &= \Lambda'_2 \circ \Lambda'_1 = \Lambda_1 \circ \Lambda_2. \end{aligned}$$

Здесь во избежание путаницы кватернионы элементарных поворотов в неподвижном базисе помечены штрихами. В результате перемножения получается тот же самый кватернион, как и должно быть при любом корректном решении.

Вычисление  $\Lambda$  приводит к следующему результату:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \cos \frac{\omega^e t}{2} \cos \frac{\omega^r t}{2} - \cos(\alpha + \beta) \sin \frac{\omega^e t}{2} \sin \frac{\omega^r t}{2} \\ \sin(\alpha + \beta) \sin \frac{\omega^e t}{2} \sin \frac{\omega^r t}{2} \\ \sin(\alpha + \beta) \cos \frac{\omega^e t}{2} \sin \frac{\omega^r t}{2} \\ -\sin \frac{\omega^e t}{2} \cos \frac{\omega^r t}{2} - \cos(\alpha + \beta) \cos \frac{\omega^e t}{2} \sin \frac{\omega^r t}{2} \end{bmatrix}. \quad (79)$$

Угловая скорость в проекциях на неподвижные оси проще всего находится из геометрических соображений, поскольку вектор абсолютной угловой скорости подвижного конуса вращается относительно оси  $z$  с постоянной угловой скоростью  $\omega^e$ . Из этого следует, что

$$\omega_x = \omega \begin{bmatrix} \sin \alpha \sin \omega^e t \\ \sin \alpha \cos \omega^e t \\ -\cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Вектор угловой скорости в связанном базисе можно найти двумя способами: перепроектированием вектора  $\omega_x$  с использованием кватерниона  $\Lambda$  по формуле  $\omega_\xi = \tilde{\Lambda} \circ \omega_x \circ \Lambda$  либо из кинематических уравнений Пуассона:

$$\omega_\xi = 2\tilde{\Lambda} \circ \dot{\Lambda}.$$

К сожалению, оба способа достаточно громоздки и при выполнении выкладок целесообразно использовать пакеты символьных вычислений, такие как Maple, Mathematica, Matlab и т. п. Выкладки приводят к следующему выражению (получено из уравнений Пуассона):

$$\omega_\xi = \begin{bmatrix} \omega^e \sin(\alpha + \beta) \sin \omega^r t \\ \omega^e \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta)(1 - \cos \omega^r t) + \omega^r \\ -\omega^r \cos(\alpha + \beta) - \omega^e [\sin^2(\alpha + \beta) \cos \omega^r t - \cos^2(\alpha + \beta)] \end{bmatrix}.$$

**Замечание 2.** Более простой вид имеют проекции угловой скорости на связанный базис, симметрично расположенный относительно подвижного конуса. Последовательность поворотов

к этому базису описывается кватернионами

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} \cos \frac{\omega^e t}{2} \\ 0 \\ 0 \\ -\sin \frac{\omega^e t}{2} \end{bmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha+\beta}{2}) \\ -\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha+\beta}{2}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (80)$$

$$\Lambda_3 = \begin{bmatrix} \cos \frac{\omega^r t}{2} \\ 0 \\ \sin \frac{\omega^r t}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \Lambda_1 \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_3,$$

где второй поворот совмещает вторую ось базиса с осью симметрии подвижного конуса. Вычисление угловой скорости по формуле  $\omega_\xi = 2\tilde{\Lambda} \circ \dot{\Lambda}$  приводит к достаточно компактному выражению:

$$\omega_\xi = \begin{bmatrix} -\omega^e \sin(\alpha + \beta) \sin \omega^r t \\ \omega^r + \omega^e \cos(\alpha + \beta) \\ \omega^e \sin(\alpha + \beta) \cos \omega^r t \end{bmatrix}. \quad (81)$$

**Замечание 3.** Полученные кватернионы  $\Lambda(t)$  являются точными решениями кинематических уравнений Пуассона при начальном значении  $\Lambda(0)$  и приведенных зависимостях векторов угловой скорости от времени  $\omega_x(t)$ ,  $\omega_\xi(t)$ . Поэтому конические движения используются при отладке различных численных методов интегрирования уравнений Пуассона. ►

Точные решения уравнений Пуассона строятся и для композиций конических движений, когда по поверхностям подвижных конусов катятся другие подвижные конусы. Это также находит применение для исследования точности численных методов и аналитического задания движений.

В примере разобран общий случай качения конуса по конусу с постоянной по модулю угловой скоростью, включающий все частные примеры типа качения конуса по плоскости, диска по конусу, конусов с прямым углом раствора, часто встречающиеся в задачах.

**Упражнение.** Угловая скорость в осях, связанных с твердым телом, постоянная и равна  $\omega_\xi$ . Выписать общее решение кинематических уравнений Пуассона для этого случая.

## 2.8. Теорема Ишлинского о телесном угле

Одно из интересных отличий линейного перемещения точки от углового перемещения твердого тела состоит в следующем. Если проекция скорости точки на некоторое направление равна нулю, то перемещения вдоль этого направления не происходит. Это же утверждение справедливо для угла поворота тела относительно фиксированной оси, если угловая скорость имеет на нее нулевую проекцию, и при плоскопараллельном движении тела.

В случае пространственного углового движения тела этот факт уже не верен, что связано с неевклидовостью многообразия вращений твердого тела  $SO(3)$  [1].

В 1952 г. А. Ю. Ишлинским была доказана следующая теорема.

**Теорема.** *Если при движении твердого тела ось  $\mathbf{l}$ , жестко связанная с телом, описывает замкнутую коническую поверхность и при этом движении проекция угловой скорости тела на указанную ось равна нулю  $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{l} = 0$ , то при возвращении оси в исходное положение тело окажется развернутым относительно оси  $\mathbf{l}$  на угол, равный телесному углу описанного конуса.*

Вначале опишем, что подразумевается под замкнутой конической поверхностью. Для ее построения на оси  $\mathbf{l}$  фиксируется некоторая точка и рассматривается вращение оси  $\mathbf{l}$  вместе с телом относительно этой точки. Именно при таком вращении ось  $\mathbf{l}$  описывает замкнутую коническую поверхность в системе координат с полюсом в выбранной точке и движущейся поступательно вместе с полюсом. Однако в абсолютном пространстве прямая  $\mathbf{l}$ , вообще говоря, может не описывать замкнутый конус, если полюс подвижен. Поскольку угловое движение тела не зависит от выбора полюса в теле, построенная коническая поверхность будет одной и той же для любого полюса и для любой оси, коллинеарной  $\mathbf{l}$  и жестко связанной с телом.

Перейдем к доказательству теоремы. Параметризуем положение твердого тела углами Эйлера, выбрав в качестве третьей связанной оси тела ось  $\mathbf{l}$ , фигурирующую в формулировке теоремы. По условию теоремы третья составляющая угловой скорости тела  $r = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta = 0$ , и, следовательно, дифференциалы углов вдоль траектории движения тела связаны условием  $d\varphi = -\cos \vartheta d\psi$ . При движении тела ось  $\mathbf{l}$  вычерчивает на еди-

ничной сфере замкнутый контур, и после возвращения оси  $l$  в исходное положение угол  $\varphi$  описывает поворот тела относительно этой оси.

Допустим, что контур обходится осью  $l$  в положительном направлении, т.е. против часовой стрелки, если смотреть с внешней стороны единичной сферы, на которой  $l$  вырезает контур. Ему соответствует контур  $\gamma_-$  на плоскости параметров  $\{\psi, \vartheta\}$ , обходимый по часовой стрелке. Если это утверждение не ясно, рекомендуется изобразить углы Эйлера на рисунке и рассмотреть их изменение, когда третья связанная ось  $l$  описывает, например, окружность или замкнутый контур, образованный «параллелями» и «меридианами»  $\psi = \text{const}$ ,  $\vartheta = \text{const}$  на сфере.

Обозначив через  $\gamma$  тот же контур  $\gamma_-$  на плоскости  $\{\psi, \vartheta\}$ , но обходимый против часовой стрелке, получаем

$$\varphi = - \oint_{\gamma_-} \cos \vartheta d\psi = \oint_{\gamma} \cos \vartheta d\psi. \quad (82)$$

Из математического анализа известна теорема Грина [6], согласно которой для интеграла по замкнутому контуру  $\gamma$ , обходимого против часовой стрелке при стандартной ориентации осей  $x$  и  $y$  базиса, справедливо равенство

$$\oint_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_{\sigma} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

где  $\sigma$  – площадь, охватываемая контуром  $\gamma$ .

Заменим  $x = \psi$ ,  $y = \vartheta$  и  $P = \cos \vartheta$  и преобразуем интеграл (82) по теореме Грина:

$$\varphi = \oint_{\gamma} \cos \vartheta d\psi = \iint_{\sigma} \sin \vartheta d\psi d\vartheta.$$

Рассматривая дифференциалы  $\sin \vartheta d\psi$  и  $d\vartheta$  на единичной сфере, нетрудно видеть, что  $\sin \vartheta d\psi d\vartheta$  – элемент площади сферы  $dS$ , соответствующий  $d\psi$ ,  $d\vartheta$ , поэтому в итоге имеем

$$\varphi = \iint_{\sigma} dS = \Omega,$$

где  $\Omega$  – телесный угол, равный площади участка единичной сферы, охваченной контуром  $\gamma$ . Теорема доказана.

**Замечание.** Знак угла поворота зависит от направления обхода контура, вычерчиваемого осью  $l$  на единичной сфере. Это следует из зависимости от направления обхода контура знака криволинейного интеграла второго рода, использованного в промежуточных выкладках при доказательстве теоремы.

**Пример.** В навигационных задачах используется географический сопровождающий трехгранник, образованный ортами направлений, лежащими в плоскости местного горизонта, и местной вертикали, отложенными от точки, перемещающейся по поверхности Земли, которая для простоты может считаться сферой. Пусть траектория точки состоит из дуги экватора, соответствующего изменению долготы от  $0^\circ$  до  $90^\circ$ , дуги меридиана при изменении широты от  $0^\circ$  до  $90^\circ$  и дуги нулевого меридиана, соответствующей изменению широты от  $90^\circ$  до  $0^\circ$  и возврату точки в исходное положение (рис. 29).

Определить угол поворота географического трехгранника относительно вертикальной оси при возвращении точки в исходное положение, если при перемещениях проекция угловой скорости на вертикальную ось равна нулю.

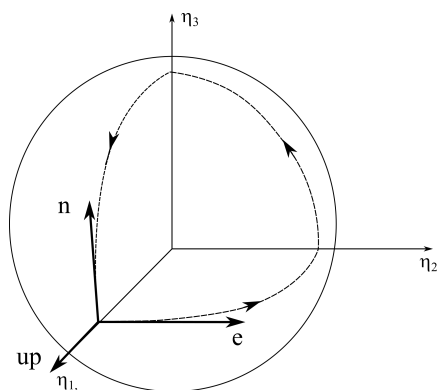


Рис. 29. Траектория движения

◀ Рассматривая непосредственно изменение ориентации осей трехгранника при перемещении по каждой дуге, нетрудно понять, что при возврате в исходную точку он окажется разверну-

тым по курсу (относительно вертикальной оси) на  $90^\circ$ , равный  $1/8$  телесного угла всей сферы  $(4\pi)^{14}$ .

При движении по любой из трех дуг проекция угловой скорости относительно Земли на третью ось равна нулю, и для описанного движения выполняются условия теоремы Ишлинского. Телесный угол поверхности, описанной третьей осью, равен  $90^\circ$ , что совпадает с результатом непосредственного вычисления. ►

Примечательна история теоремы [15]. Для стабилизации торпедных аппаратов катеров предлагалось установить его на гиросtabilизатор, обеспечивающий равенство нулю угловой скорости гиросtabilизатора относительно вертикальной оси корабля. Однако в условиях качки прибор давал существенные уходы по курсу, поскольку при качке по двум осям «вертикаль» корабля описывала нечто близкое к поверхности конуса, что и послужило отправной точкой к исследованию проблемы.

**Обобщение теоремы Ишлинского.** Если выполнены условия теоремы Ишлинского, но при этом  $\omega_l = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{l}$  отлична от нуля и является известной функцией времени  $\omega_l(t)$ , то при возвращении тела в исходное положение угол поворота тела относительно оси  $\boldsymbol{l}$  составит

$$\varphi = \Omega + \int_0^T \omega_l(t) dt,$$

где  $T$  – время, за которое ось  $\boldsymbol{l}$  описывает конус в пространстве. Это утверждение сразу следует из доказательства теоремы Ишлинского, если учесть, что  $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{l} = r = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta$ .

**Иллюстрация.** Выше была рассмотрена задача о качении конуса по конусу и выписаны выражения для кватернионов ориентации подвижного конуса относительно неподвижного при различном выборе базисов. Рассмотрим частный случай одина-

---

<sup>14</sup> Здесь мы имеем дело с параллельным переносом вектора вдоль геодезических линий (см. заключительное упражнение в разд. 1.3). По определению касательный вектор к поверхности переносится параллельно вдоль геодезической линии, если угол между ним и касательной к геодезической линии остается постоянным. Геодезической линией на сфере будет любая дуга большого круга. Если поверхность представляет собой евклидово пространство (плоскость), то геодезической линией будет прямая, и вектор при параллельном переносе «привычно» сохраняет ориентацию относительно плоскости. Если пространство не евклидово, то это уже не так, и разобранный пример дает простейшую иллюстрацию этого эффекта. Свойства «евклидовости» определяются инвариантами поверхностей, с которыми можно ознакомиться в курсах дифференциальной геометрии [5].

ковых конусов, когда  $\alpha = \beta$ . В этом случае формулы (78) и (81) упрощаются:

$$\omega^r = \omega^e = \frac{\omega}{2 \cos \alpha}, \quad \omega_\xi = \omega^e \begin{bmatrix} -\sin 2\alpha \sin \omega^e t \\ 1 + \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha \cos \omega^e t \end{bmatrix}. \quad (83)$$

Из формулы (80) следует, что конус будет возвращаться в исходное положение с периодом  $T = 2\pi/\omega^e$ . Хотя из (83) видно, что проекция угловой скорости на ось симметрии подвижного конуса  $\omega^e(1 + \cos 2\alpha)$  постоянна, что, казалось бы, должно приводить к монотонному «уходу» конуса относительно этой оси. Теорема Ишлинского объясняет механизм «компенсации» вращения конуса относительно оси симметрии и возникающее периодическое движение.

Этот пример представляет интерес для моделирования угловых вибраций – угловых колебаний тела вблизи некоторого положения равновесия, как правило, имеющих малую амплитуду и высокую частоту. В простейшем случае колебания являются периодическими, когда тело занимает исходное положение, через одинаковые промежутки времени, что и реализуется в рассмотренной задаче.

Если считать, что конусы имеют большие углы раствора, т.е.  $|\pi - 2\alpha| = \varepsilon \ll 1$ , то ось симметрии конуса описывает узкий конус с углом раствора  $\varepsilon$ . Формула (79) описывает изменение кватерниона ориентации подвижного конуса относительно исходного положения со временем. В случае  $\varepsilon \ll 1$  этот кватернион мало отличается от единичного, что полезно проверить в качестве упражнения, и подвижный конус всегда будет находиться в малой окрестности начального положения. Это позволяет использовать рассмотренную систему как простейшую аналитическую модель конической вибрации малой амплитуды с частотой  $\omega^e$ .

Теорема Ишлинского и простейшая модель конической вибрации позволяют понять причину вычислительных уходов (дрейфов) алгоритмов численного интегрирования уравнений Пуассона, если частота работы алгоритма (т.е. частота, с которой поступает и обрабатывается информация об угловой скорости) соизмерима с частотой вибрации. В этом случае искажается информация о «высокочастотных» первой и третьей компонентах



вектора угловой скорости (83), а вторая компонента угловой скорости постоянна и поэтому не чувствительна к частоте получения информации о ней. Искажение первой и третьей компонент не позволяет «отследить» движение второй оси по конусу, что и приводит к линейному росту угловой погрешности – «уходу» относительно второй оси со временем. Скорость накопления угловой ошибки по порядку величины совпадает с

$$\omega^e \int_0^t (1 - \cos 2\alpha) d\tau,$$

хотя и зависит от способа интегрирования и соотношения частот интегрирования и вибрации.

Моделирование и опыт разработки систем ориентации показывают, что линейный характер накопления ошибок ориентации сохраняется и для более сложных вибраций, не всегда допускающих аналитическое описание. Данный эффект всегда необходимо учитывать при проектировании любых систем вычисления ориентации и навигации подвижных объектов, обеспечивая достаточно высокие частоты работы алгоритмов либо принимая меры по защите датчиков от воздействия высокочастотных вибраций.

## 2.9. Векторы конечного поворота и кинематические уравнения для них

Выше описаны способы задания ориентации твердого тела углами конечного вращения, ортогональными матрицами, кватернионами и вектором конечного поворота Эйлера. Для всех величин, кроме вектора Эйлера, получены кинематические уравнения и описаны свойственные им особенности.

В разделе выводятся кинематическими уравнения для вектора Эйлера  $\varphi = \varphi e$  и уравнения для вектора конечного поворота общего вида  $\psi = \psi(\varphi)e$ , после чего функция  $\psi(\varphi)$  выбирается для максимального упрощения уравнений. Интересно, что уравнения для вектора Эйлера  $\varphi = \varphi e$  оказываются не самыми простыми.

Задача содержательна по следующим причинам. Любой вектор конечного поворота имеет минимальную размерность, равную размерности  $SO(3)$ . Поэтому интересно вывести кинемати-

ческие уравнения, описывающие изменение вектора конечного поворота со временем, и максимально упростить эти уравнения. Кинематические уравнения для векторов конечного поворота используются при выводе численных алгоритмов определения параметров ориентации. Поэтому далее считается, что проекции угловой скорости заданы в подвижном базисе, что соответствует информации от датчиков угловой скорости, установленных на подвижный объект.

Итак, приступим к выводу. Запишем кинематические уравнения Пуассона в кватернионах

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2} \Lambda \circ \omega,$$

где у вектора угловой скорости для краткости опущен индекс, указывающий связанный базис ( $\omega = \omega_\xi$ ). Подставляя в уравнения Пуассона кватернион  $\Lambda = \cos \frac{\varphi}{2} + e \sin \frac{\varphi}{2}$  и разделяя скалярные и векторные части, получим следующие уравнения для угла и орта оси поворота:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= e \cdot \omega, \\ \dot{e} &= \frac{1}{2} e \times \omega + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} e \times (\omega \times e). \end{aligned} \quad (84)$$

Теперь вычислим производную  $\psi = \psi(\varphi)e$  по времени:  $\dot{\psi} = \psi' \dot{\varphi} e + \psi \dot{e}$ ,  $\psi' = d\psi/d\varphi$ . Подставим в данное выражение вместо  $\dot{\varphi}$  и  $\dot{e}$  правые части (84) и равенство  $e = \psi/\psi$ . После преобразований это дает следующее уравнение:

$$\dot{\psi} = \frac{1}{2} \psi \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \omega + \frac{1}{2} \psi \times \omega + \left( \frac{\psi'}{\psi^2} - \frac{\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}}{2\psi} \right) (\psi \cdot \omega) \psi, \quad (85)$$

описывающее эволюцию произвольного вектора конечного поворота во времени. Полученные уравнения нелинейны и содержат функцию  $\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$ , вырождающуюся в нуле.

В частности, из (85) при подстановке  $\psi = \varphi$  и выражении  $(\varphi \cdot \omega)\varphi$  через  $\varphi \times (\varphi \times \omega)$  из равенства  $\varphi \times (\varphi \times \omega) = \varphi(\varphi \cdot \omega) - \omega\varphi^2$  следует кинематическое уравнение для вектора Эйлера:

$$\dot{\varphi} = \omega + \frac{1}{2} \varphi \times \omega + \frac{1}{\varphi^2} \left( 1 - \frac{\varphi \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}}{2} \right) \varphi \times (\varphi \times \omega). \quad (86)$$

Данное уравнение получается достаточно сложным и обладает устранимыми особенностями (т.е. существует предел правой части при  $\varphi \rightarrow 0$ ) в окрестности нулевого вектора.

Попробуем подобрать функцию  $\psi(\varphi)$ , максимально упрощающую правую часть (85). Первый член в правой части (85) наводит на мысль положить  $\psi = 2\text{tg}\frac{\varphi}{2}$ , что сразу уберет множитель  $\frac{1}{2}\text{ctg}\frac{\varphi}{2}$  с особенностью в нуле. Однако оказывается, что эта функция упрощает и выражение в скобке из правой части (85), превращая его в константу!:

$$\psi = 2\text{tg}\frac{\varphi}{2}\mathbf{e}, \quad (87)$$

$$\dot{\psi} = \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\psi \times \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{4}(\psi \cdot \boldsymbol{\omega})\psi.$$

**Замечание.** Это одно из простейших кинематических уравнений для трехмерного объекта, задающего ориентацию твердого тела. Оно не имеет особенностей в окрестности малых углов, содержит только полиномы не выше второй степени, однако нелинейно и не интегрируется аналитически. Замена  $\psi = 2\text{tg}\frac{\varphi}{2}$  имеет особенность при  $\varphi = \pm\pi$ . В терминах вектора Эйлера множество положений твердого тела с неподвижной точкой тождественно шару радиуса  $\pi$ , образованного всевозможными векторами Эйлера, с отождествленными диаметрально противоположными точками [1], поскольку повороты на угол  $\pi$  относительно  $\mathbf{e}$  и  $(-\mathbf{e})$  дают одинаковое положение тела. Замена  $\psi = 2\text{tg}\frac{\varphi}{2}$  отображает точки  $\varphi = \pi$  этого многообразия на бесконечность.

В системах ориентации и навигации кватернионы, матрицы или векторы конечных поворотов обычно вычисляются путем численного интегрирования соответствующих кинематических уравнений по информации от датчиков угловой скорости. Интегрирование производится за такт времени малой длительности с единичными (для кватерниона и матрицы) или нулевыми (для вектора поворота) начальными условиями. Затем вычисленные кватернионы или матрицы поворотов за такт умножаются на кватернионы или матрицы «большого» поворота, накопленного за прошедшее время, после чего описанный процесс интегрирования и перемножения циклически повторяется.

За счет этого вырождение кинематического уравнения (87), возникающее при  $\varphi = \pi$  и  $\psi \rightarrow \infty$  при малых тактах интегриро-

вания, никогда не достигается и оказывается не существенным для практического использования.

Построение точных численных методов интегрирования уравнений Пуассона или кинематических уравнений для векторов конечного поворота требует довольно сложных выкладок и детально описано в книге [16], содержащей многочисленные алгоритмы, пригодные для непосредственного использования.

**Упражнение.** Вывести формулы (84) – (87).

Кроме кинематических уравнений простейшего вида через векторы конечного поворота  $\psi = 2\text{tg}\frac{\varphi}{2}\mathbf{e}$  записывается весьма компактная формула сложения конечных поворотов. Получим ее. В разделе 2.7 выведена формула сложения активных поворотов (88):

$$\begin{aligned} \Lambda = \Lambda_2 \circ \Lambda_1 = & \cos \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2}{2} - \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2}{2} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + \quad (88) \\ & + \sin \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2}{2} \mathbf{e}_1 + \cos \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2}{2} \mathbf{e}_2 + \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2}{2} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2, \end{aligned}$$

задаваемых кватернионами

$$\Lambda_1 = \cos \frac{\varphi_1}{2} + \mathbf{e}_1 \sin \frac{\varphi_1}{2}, \quad \Lambda_2 = \cos \frac{\varphi_2}{2} + \mathbf{e}_2 \sin \frac{\varphi_2}{2}.$$

Но кватернион результирующего поворота преобразуется к виду

$$\Lambda = \cos \frac{\varphi}{2} + \mathbf{e} \sin \frac{\varphi}{2} = \cos \frac{\varphi}{2} \left( 1 + \text{tg} \frac{\varphi}{2} \mathbf{e} \right) = \cos \frac{\varphi}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} \psi \right),$$

где  $\varphi$ ,  $\mathbf{e}$ ,  $\psi$  – угол, орт и вектор результирующего конечного поворота. Таким образом,

$$\psi = 2 \frac{\text{vect} \Lambda}{\text{sqa} \Lambda}.$$

Подставляя сюда из (88) скалярную и векторную части, получаем выражение вектора  $\psi$  через векторы двух промежуточных

поворотов  $\psi_1$  и  $\psi_2$ :

$$\begin{aligned}
 \psi &= \frac{2}{\cos \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2}{2} - \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2}{2} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2} \times \\
 &\times \left( \sin \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2}{2} \mathbf{e}_1 + \cos \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2}{2} \mathbf{e}_2 + \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2}{2} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \right) = \\
 &= \frac{2}{\cos \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2}{2} (1 - \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2)} \times \\
 &\times \left( \sin \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2}{2} \mathbf{e}_1 + \cos \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2}{2} \mathbf{e}_2 + \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2}{2} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \right) = \\
 &= \frac{2}{1 - \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2} \left( \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} \mathbf{e}_1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2} \mathbf{e}_2 + \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \right).
 \end{aligned}$$

С учетом равенств  $\psi_1 = 2\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} \mathbf{e}_1$ ,  $\psi_2 = 2\operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2} \mathbf{e}_2$  отсюда получаем **формулу сложения векторов конечных поворотов**:

$$\psi = \frac{1}{1 - \frac{1}{4} \psi_1 \cdot \psi_2} \left( \psi_1 + \psi_2 + \frac{1}{2} \psi_1 \times \psi_2 \right). \quad (89)$$

Существенное упрощение вывода этой формулы, например, в сравнении с доказательством через геометрию сферических треугольников из [17], достигается за счет применения кватернионов.

Приведем компактное выражение кватерниона через вектор  $\psi$ , следующее из элементарных преобразований:

$$\Lambda = \frac{2 + \psi}{\sqrt{4 + \psi^2}}.$$

В свою очередь, о связи кватернионов и геометрии сферических многоугольников можно прочесть, например, в [12], где показано, что нормированный кватернион  $\Lambda = \cos \varphi + \mathbf{e} \sin \varphi$  можно интерпретировать как дугу большого круга сферы, лежащей в плоскости, ортогональной  $\mathbf{e}$ . Угол дуги равен  $\varphi$ , а двум кватернионам и их произведению соответствует сферический треугольник, образованный дугами кватернионов-сомножителей и самого произведения.

## 2.10. Параметры Кейли–Клейна

Рассмотрим способ описания поворотов твердого тела с неподвижной точкой парой комплексных чисел, образованных ком-

понентами кватерниона и называемых параметрами Кейли-Клейна. Этот формализм не очень распространен в кинематике и ее приложениях, однако интересен по следующим причинам.

Это изоморфизм алгебр кватернионов и унитарных матриц размера  $2 \times 2$ , связь кватернионов с матрицами Паули, применяемыми в квантовой механике, локальный изоморфизм групп  $SO(3)$  и  $SU(2)$  и красивая геометрическая интерпретация поворота как дробно-линейного преобразования комплексной плоскости, коэффициенты которой образованы параметрами Кейли-Клейна.

Начнем с некоторых напоминаний об унитарных и эрмитовых матрицах. Если  $A$  – комплексная матрица, то матрица  $A^+ = \bar{A}^T$  называется *эрмитово сопряженной* (черта сверху обозначает комплексное сопряжение). Матрица, удовлетворяющая условию  $A^+A = AA^+ = E$ , называется *унитарной*. Векторное пространство над полем комплексных чисел с *эрмитовым скалярным произведением*

$$a \cdot b = \sum a_i \bar{b}_i = b^+ a$$

называется *унитарным пространством*.

Унитарные матрицы в унитарном пространстве сохраняют эрмитово скалярное произведение, отображают ортонормированный базис в ортонормированный базис и поэтому служат аналогом ортогональным матрицам в евклидовом пространстве. Из условия  $A^+A = E$  и теоремы о детерминанте произведения матриц следует, что для любой унитарной матрицы  $|\det A| = 1$ . Унитарные матрицы размера  $n \times n$  образуют группу по умножению, обозначаемую  $U(n)$  и называемую *унитарной группой*.

Унитарные матрицы с  $\det A = 1$  образуют подгруппу  $SU(n)$ , называемую *специальной унитарной группой*. Группы  $SU(2)$  и  $SU(3)$  используются в квантовой механике ( $SU(2)$ ) и физике элементарных частиц ( $SU(3)$ ).

Матрица, удовлетворяющая условию  $A^+ = A$ , называется *эрмитовой*, а если  $A^+ = -A$ , то такая матрица называется *антиэрмитовой* или *косоэрмитовой*.

**Спиновые матрицы Паули и матричная интерпретация кватернионов.** Прямая проверка показывает, что таблица

перемножения матриц

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & \sigma_1 &= \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \\ \sigma_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, & \sigma_3 &= \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix},\end{aligned}\tag{90}$$

где  $i$  – мнимая единица, в точности совпадает с таблицей умножения ортов базиса кватернионов (60). При умножении матриц выполняются свойства ассоциативности<sup>15</sup>, дистрибутивности и билинейности, что позволяет отождествить кватернион с комплексной матрицей

$$\Lambda = \sum_{i=0}^3 \lambda_i \sigma_i = \begin{bmatrix} \lambda_0 + i\lambda_3 & -\lambda_2 + i\lambda_1 \\ \lambda_2 + i\lambda_1 & \lambda_0 - i\lambda_3 \end{bmatrix}.$$

Линейной комбинации с действительными коэффициентами или умножению кватернионов соответствует та же линейная комбинация или перемножение матриц по известным правилам линейной алгебры.

**Замечание.** В литературе матрицы Паули  $\sigma_i$ ,  $i = \overline{1, 3}$  иногда отличаются от приведенных множителем  $i$ .

Комплексные комбинации компонент кватерниона  $a = \lambda_0 + i\lambda_3$  и  $b = \lambda_2 + i\lambda_1$  называются *параметрами Кейли–Клейна*. Кватернион в матричном представлении выражается через них так:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{bmatrix}.\tag{91}$$

Из условий  $A^+A = AA^+ = E$  и  $\det A = 1$  следует, что формула (91) дает общий вид матрицы специальной унитарной группы  $SU(2)$ . Это можно показать непосредственной проверкой, расписывая для комплексных матриц размера  $2 \times 2$  вышеприведенные условия.

---

<sup>15</sup> Изоморфизм (взаимно однозначное соответствие, сохраняющее умножение) кватернионов и матриц дает изящный способ проверки ассоциативности кватернионного умножения. Оно сводится к ассоциативности умножения матриц и комплексных чисел. Нетрудно убедиться, что прямая проверка ассоциативности по формуле перемножения трех кватернионов весьма громоздка.

**Упражнение.** Доказать это утверждение.

Указание. Использовать представление элементов матрицы в виде  $a_{jk} = r_{jk}e^{i\varphi_{jk}}$ ,  $r_{jk} > 0$ .

Отсюда следует изоморфизм групп нормированных кватернионов и  $SU(2)$ , т.е. взаимно однозначное соответствие, сохраняющее групповые операции. Действительно, условие  $a\bar{a} + b\bar{b} = 1$  равносильно тому, что  $\|\Lambda\| = 1$ , а кватернионное умножение при изоморфизме переходит в матричное.

Между кватернионами и группой вращений твердого тела  $SO(3)$  взаимно однозначного соответствия (биекции) нет, поскольку одинаковому положению твердого тела соответствуют кватернионы  $\Lambda$  и  $(-\Lambda)$ . Однако если рассматривать окрестность некоторого элемента группы нормированных кватернионов, то локально биекция обеспечивается. Из этого следует и локальный изоморфизм (биекция) групп  $SO(3)$  и  $SU(2)$ .

Теперь построим сопряженный кватернион и норму, используя матричные операции. Сопряженному кватерниону с компонентами  $\lambda_0$  и  $-\lambda_i$ ,  $i = \overline{1, 3}$  соответствует матрица

$$\Lambda^+ = \begin{bmatrix} \lambda_0 - i\lambda_3 & \lambda_2 - i\lambda_1 \\ -\lambda_2 - i\lambda_1 & \lambda_0 + i\lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ -b & a \end{bmatrix},$$

получающаяся из (91) обращением знаков перед компонентами  $\lambda_i$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , и оказывающаяся эрмитово сопряженной к  $\Lambda$ .

Элементарное вычисление показывает, что  $\Lambda^+\Lambda = \|\Lambda\|E = \|\Lambda\|\sigma_0$  и

$$\det \Lambda = a\bar{a} + b\bar{b} = \sum \lambda_i^2 = \|\Lambda\|.$$

Вектору  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$  соответствует косоэрмитова ( $R^+ = -R$ ) матрица

$$R = \begin{bmatrix} i\lambda_3 & -\lambda_2 + i\lambda_1 \\ \lambda_2 + i\lambda_1 & -i\lambda_3 \end{bmatrix}.$$

Изоморфизм алгебры нормированных кватернионов и группы  $SU(2)$  позволяет переписать правила вычисления и сложения поворотов, кинематические уравнения Пуассона и т. п. в матричном представлении с посимвольной заменой сопряженного кватерниона на соответствующую эрмитово сопряженную матрицу. Например, поворот задается преобразованием

$$R' = \Lambda R \Lambda^+, \quad (92)$$



а уравнения Пуассона примут вид

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2} \Omega_x \Lambda \quad \dot{\Lambda} = \frac{1}{2} \Lambda \Omega_\xi,$$

где  $\Omega_*$  – матрица, соответствующая вектору угловой скорости  $\omega$  в базисе  $* = \{x, \xi\}$ .

**Связь параметров Кейли–Клейна и стереографической проекции.** Стереографическая проекция устанавливает взаимно однозначное соответствие между расширенной комплексной плоскостью  $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$  и единичной сферой в пространстве  $\mathbb{R}^3$  с центром в начале координат (рис. 30), называемой *сферой Римана*. Поворот твердого тела относительно неподвижной точки можно трактовать как преобразование единичной сферы в себя. Ниже доказывается, что этому преобразованию сферы при стереографической проекции соответствует дробно-линейное преобразование плоскости  $\overline{\mathbb{C}}$ , а параметры Кейли–Клейна – коэффициенты этого преобразования.

Для задания стереографической проекции из верхнего полюса сферы проводится луч, пересекающий координатную плоскость  $\{xy\}$  и сферу в еще одной точке. Тогда точки «южного полушария» сферы соответствуют внутренности круга  $x^2 + y^2 < 1$ , «экватор» – окружности  $x^2 + y^2 = 1$ , «северное полушарие» – множеству  $x^2 + y^2 > 1$ , а «северный полюс» сферы отображается в бесконечно удаленную точку плоскости  $\overline{\mathbb{C}}$ .

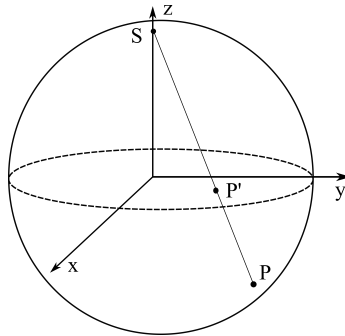


Рис. 30. Стереографическая проекция:  $S$  – полюс сферы Римана,  $P$  и  $P'$  – точки, связанные стереографической проекцией

Интересным свойством стереографической проекции является отображение любых окружностей на сфере в окружности на  $\bar{S}$  либо прямые, если окружность на сфере проходит через верхний полюс.

Для окружности, проходящей через верхний полюс сферы, луч, задающий стереографическую проекцию, лежит в плоскости окружности. Плоскость окружности пересекает координатную плоскость  $\{xy\}$  по прямой, которая и будет образом окружности при проектировании.

Рассмотрим менее тривиальный случай, когда окружность на сфере не проходит через верхний полюс сферы. Луч, задающий

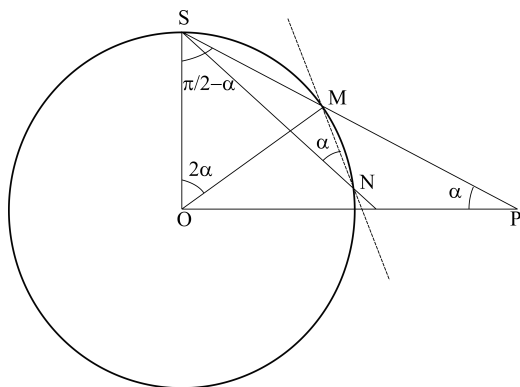


Рис. 31. Стереографическая проекция окружности

проекцию при обходе окружности, описывает конус с вершиной в верхнем полюсе сферы. Плоскость  $\{xy\}$  пересекает конус по некоторой замкнутой кривой. Для выяснения вида этой кривой рассмотрим сечение нашей конструкции, проходящее через ось конуса и вертикальную ось  $OS$  сферы, представленное на рис. 31.

Окружность лежит в плоскости, ортогональной плоскости рис. 31. Линия пересечения этих плоскостей отмечена пунктиром. Углы  $SOM$  и  $SNM$  опираются на одну дугу и по теореме о вписанном угле отличаются вдвое. Треугольник  $SOM$  – равнобедренный и поэтому  $\angle OSM = \pi/2 - \alpha$ . Треугольник  $OSP$  – прямоугольный, откуда следует, что  $\angle OPS = \alpha$ , а координатная плоскость  $\{xy\}$  пересекает конус под тем же углом, что и плос-

кость окружности. Значит, в сечении конуса координатной плоскостью также будет окружность.

Нетрудно проверить, что ничего не изменится, если окружность охватывает верхний полюс сферы.

Перейдем к преобразованию поворота относительно центра сферы. Окружности на сфере при этом преобразовании переходят в окружности на сфере того же радиуса. Как показано выше, им соответствуют некоторые окружности или прямые на координатной плоскости  $\{xy\}$  и, следовательно, повороту соответствует стереографическая проекция, переводящая окружность или прямую на плоскости в окружность или прямую. Из теории функций комплексного переменного (ТФКП) известно, что таким свойством обладают дробно-линейные преобразования. Однако покажем это непосредственно, не ссылаясь на результаты ТФКП.

Используем следующие обозначения. Пусть  $\mathbf{r} = [x, y, z]^T$  – радиус-вектор некоторой точки на сфере,  $\mathbf{r}' = [u, v, w]^T$  – радиус-вектор этой же точки на сфере после поворота,  $X, Y$  – координаты стереографического образа точки  $\mathbf{r}$  на плоскости,  $U, V$  – координаты стереографического образа точки  $\mathbf{r}'$  на плоскости,  $a, b$  – параметры Кейли–Клейна рассматриваемого поворота.

Введем комплексные числа  $\xi = x + iy$ ,  $\zeta = u + iv$ ,  $Z = X + iY$ ,  $W = U + iV$ . Фактически, нам предстоит показать, что  $W(Z)$  – дробно-линейное преобразование, и выразить его коэффициенты через  $a, b$ .

Векторам  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  соответствуют матрицы

$$\begin{aligned} R &= \begin{bmatrix} iz & -y + ix \\ y + ix & -iz \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} z & x + iy \\ x - iy & -z \end{bmatrix} = \\ &= i \begin{bmatrix} z & \xi \\ \bar{\xi} & -z \end{bmatrix}, \quad R' = i \begin{bmatrix} w & \zeta \\ \bar{\zeta} & -w \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (93)$$

Из выражений (91), (93) и (92) следует, что

$$\begin{bmatrix} w & \zeta \\ \bar{\zeta} & -w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z & \xi \\ \bar{\xi} & -z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Раскрывая произведения, получим

$$\begin{aligned} \zeta &= 2a\bar{b}z + a^2\xi - \bar{b}^2\bar{\xi}, \\ w &= a\bar{a}z - ab\xi - \bar{a}\bar{b}\bar{\xi} - b\bar{b}z. \end{aligned}$$

Получим из этих формул связь величин  $W$  и  $Z$ . Из построения стереографической проекции следует, что  $x/X = y/Y = 1 - z$ , и поэтому

$$Z = X + iY = \frac{x + iy}{1 - z} = \frac{\xi}{1 - z}, \quad W = \frac{\zeta}{1 - w},$$

следовательно

$$W = \frac{2a\bar{b}z + a^2\xi - \bar{b}^2\bar{\xi}}{1 - a\bar{a}z + ab\xi + \bar{a}\bar{b}\bar{\xi} + b\bar{b}z}.$$

Теперь выразим правую часть через  $Z$ . Для этого заметим, что

$$Z\bar{Z} = \frac{\xi\bar{\xi}}{(1 - z)^2}, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Leftrightarrow \xi\bar{\xi} + z^2 = 1,$$

$$Z\bar{Z} = \frac{1 - z^2}{(1 - z)^2} = \frac{1 + z}{1 - z} \Leftrightarrow z = \frac{Z\bar{Z} - 1}{Z\bar{Z} + 1}$$

и

$$\xi = Z(1 - z) = \frac{2Z}{Z\bar{Z} + 1}.$$

Подстановка выражений для  $\xi$  и  $z$  в формулу для  $W$  дает:

$$W = \frac{a\bar{b}(Z\bar{Z} - 1) + a^2Z - \bar{b}^2\bar{Z}}{a\bar{a} + b\bar{b}Z\bar{Z} + abZ + \bar{a}\bar{b}\bar{Z}}.$$

На первый взгляд, числитель и знаменатель квадратичны по  $Z$ , однако непосредственная проверка показывает, что числитель раскладывается на множители

$$(a + \bar{b}\bar{Z})(aZ - \bar{b}),$$

знаменатель равен

$$(a + \bar{b}\bar{Z})(bZ + \bar{a}),$$

и выражение для  $W$  упрощается до дробно-линейной функции

$$W = \frac{aZ - \bar{b}}{bZ + \bar{a}}, \quad (94)$$

т. е. ортогональному преобразованию пространства  $\mathbb{R}^3$  соответствует дробно-линейное преобразование расширенной комплексной плоскости, коэффициентами которого являются параметры Кейли–Клейна и сопряженные им комплексные числа.

## Заключение

Теоретическая механика – наука о движении систем материальных точек и твердых тел, подчиняющихся аксиоматике Ньютона. Геометрической основой механики служит кинематика. Ее предмет составляют различные способы математического описания движений материальных точек и твердых тел. Кинематика тесно связана с различными разделами математики и физики и весьма насыщена интересными геометрическими фактами.

Кинематика является рабочим аппаратом при расчете различных машин и механизмов, в системах управления и навигации подвижными объектами, различных имитаторах и моделях таких систем. В этих задачах оказывается востребованным практически весь арсенал методов описания движений, развитый в кинематике.

В пособии содержатся практически все разделы кинематики точки и твердого тела, существенные как для изучения курса аналитической механики, читаемого студентам МФТИ на большинстве потоков, так и для типичных приложений. Материал, выходящий за рамки стандартной программы МФТИ, начинается с раздела 2.8. Этот и последующие разделы могут быть полезны при углубленном изучении механики, ее связи с другими разделами математики и физики, а также специалистам, использующим численные методы определения параметров ориентации. При изложении материала делается акцент на геометрическом и наглядном содержании понятий.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. Москва: Физматлит. 2008. 304 с.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва: Наука. 1974. 331 с.
3. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ижевск: Удм. ГУ. 2000. 368 с.
4. Журавлев В.Ф., Розенблат Г.М. Парадоксы, контрпримеры и ошибки в механике. Москва. Ленанд. 240 с.
5. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. Изд. 4-е перераб. и доп. Москва: ЛЕНАНД, 2020.–504 с.
6. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 2. Москва: Дрофа, 2004, 720 с.
7. Корнев Г.В. Тензорное исчисление. М.: Издательство МФТИ, 2000. – 240 с.
8. Маркеев А.П. Теоретическая механика. М.: ЧеРо. 1999. 572 с.
9. Болотин С.В., Карапетян А.В., Кугушев Е.И., Трещев Д.В. Теоретическая механика. Москва: Изд. центр "Академия 2010.-432 с.
10. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. Москва: Высшая школа. 1998. 320 с.
11. Амелькин Н.И. Динамика твердого тела. М.: МФТИ, 2010, 80 с.
12. Челноков Ю.Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006, 512 с.
13. Пятницкий Е.С., Трухан Н.М., Ханукаев Ю.И., Яковенко Г.Н. Сборник задач по аналитической механике.– 4-е изд. перераб. и доп. Москва: МФТИ, 2018, 572 с.
14. Голдстейн Г., Пул Ч., Сафко Дж. Классическая механика. М.: Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». Ижевский институт компьютерных исследований. 2012. 828 с.
15. Журавлев В.Ф. Научная и организационная деятельность академика А.Ю. Ишлинского. Четвертый международный аэрокосмический конгресс IAS'2003. с. 85-90.
16. Панов А.П. Математические основы теории инерциальной ориентации. Киев. Наукова думка. 1995. 278 с.
17. Лурье А.И. Аналитическая механика. Москва. Государственное издательство физико-математической литературы. 1961. 824 с.

Учебное издание

**Фомичев Александр Владимирович**

## **КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА**

Редактор *И. А. Волкова*. Корректор *Н. Е. Кобзева*  
Компьютерная верстка *Н. Е. Кобзева*. Дизайн обложки *Е. А. Казёнова*  
Подписано в печать 11.08.2021. Формат 60 × 84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Усл. печ. л. 8,0.  
Уч.-изд. л. 7,5. Тираж 100 экз. Заказ № 151.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»  
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9  
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: [rio@mipt.ru](mailto:rio@mipt.ru)

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»  
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9  
Тел. (495) 408 84 30. E-mail: [polygraph@mipt.ru](mailto:polygraph@mipt.ru)

**Для заметок**