

**Московский физико-технический институт**

**В.В.Сидоренко**

**Ветвление положений равновесия  
и стационарных движений**

**Учебно-методическое пособие**

**Москва, 2014**

**УДК 531**

**Составитель:**

Сидоренко Владислав Викторович

### **Аннотация**

В механических системах, зависящих от параметров, при определенных условиях могут происходить бифуркации положений равновесия или стационарных движений. На примере учебных задач обсуждаются картины ветвления решений и изучается устойчивость движения.

Пособие предназначено для студентов, изучающих аналитическую механику.

## **1. БИФУРКАЦИИ РАВНОВЕСИЙ**

# В КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМАХ

## 1.1. Бифуркации равновесий в системах с одной степенью свободы

Рассмотрим консервативную механическую систему с одной степенью свободы и предположим, что потенциальная энергия  $\Pi$  этой системы зависит не только от обобщенной координаты  $q$ , но и от вещественного параметра  $\lambda$ :  $\Pi = \Pi(q, \lambda)$ .

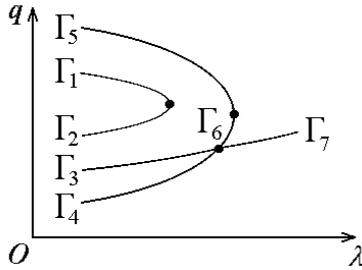


Рис. 1. Кривая равновесия  $\Gamma = \bigcup_{i=1}^7 \Gamma_i$ .

Условие равновесия

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0 \quad (1)$$

определяет на плоскости  $(\lambda, q)$  семейство линий – ветви  $\Gamma_i$  кривой равновесия  $\Gamma$  (рис. 1). В общем случае на кривой  $\Gamma$  будут точки, в которых какие-то ветви сливаются или пересекаются. Принято называть такие точки *точками бифуркации*.

Пусть точка  $P$  является точкой бифуркации. Так как в окрестности точки  $P$  решение уравнения (1) неоднозначно, то в этой точке

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} = 0. \quad (2)$$

В самом деле, если в некоторой точке кривой  $\Gamma$  выполнено условие

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} \neq 0, \quad (3)$$

то соотношение (1) по теореме о неявной функции [3, пп. 206, 207] задает  $q$  как однозначную функцию  $\lambda$ :  $q = \varphi_i(\lambda)$  (индекс  $i$  указывает на соответствующую ветвь кривой равновесия  $\Gamma$ ).

Зафиксируем какое-либо значение параметра  $\lambda$  и будем увеличивать  $q$ . Если при прохождении значения  $q = \varphi_i(\lambda)$

функция  $\chi(q, \lambda) = \frac{\partial \Pi}{\partial q}$  изменяет свое значение с отрицательно-

го на положительное, то в общем случае

$$\left. \frac{\partial \chi}{\partial q} \right|_{q=\varphi_i(\lambda)} = \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} \right|_{q=\varphi_i(\lambda)} > 0. \quad (4)$$

По теореме Лагранжа–Дирихле [2] неравенство (4) является достаточным условием устойчивости положения равновесия  $q = \varphi_i(\lambda)$ .

*Примечание.* Выражение «в общем случае» является стандартным для современных математических текстов и подразумевает наличие у функции  $\Pi$  свойств, исчезающих при малых изменениях этой функции. Ситуация, когда одновременно равны нулю первая и вторая производные, является вырожденной, «необщей» и поэтому не рассматривается.

При изменении знака  $\chi(q, \lambda) = \frac{\partial \Pi}{\partial q}$  в противоположном направлении положение равновесия неустойчиво (это устанавливается, например, с помощью теоремы Ляпунова о неустойчивости [2]).

Для того чтобы понять, какие куски кривой  $\Gamma$  соответствуют устойчивым положениям равновесия и какие неустойчивым, можно заштриховать участки плоскости  $(\lambda, q)$ , где функ-

ция  $\chi(q, \lambda) = \frac{\partial \Pi}{\partial q}$  положительна. Если заштрихованная область располагается над кривой, то данная ветвь образована устойчивыми положениями равновесия. Если заштрихованная область расположена ниже прилегающего участка кривой, то этот участок отвечает неустойчивым положениям равновесия.

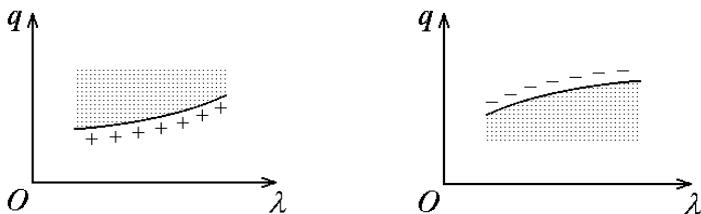


Рис. 2

Примеры использования приведенных соображений для выделения неустойчивых и устойчивых ветвей кривой равновесия без точек бифуркации представлены на рис. 2. Для наглядности здесь и далее вдоль устойчивой ветви поставлены знаки «плюс», вдоль неустойчивой – знаки «минус».

На рис. 3 изображено слияние двух ветвей  $\Gamma$ . При слиянии в точке бифуркации

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q \partial \lambda} \neq 0. \quad (5)$$

При выполнении условий

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q \partial \lambda} = 0 \quad (6)$$

в точке бифуркации  $P$  пересекаются несколько ветвей кривой  $\Gamma$ , причем касательная к одной из ветвей может быть вертикальной (рис. 4).

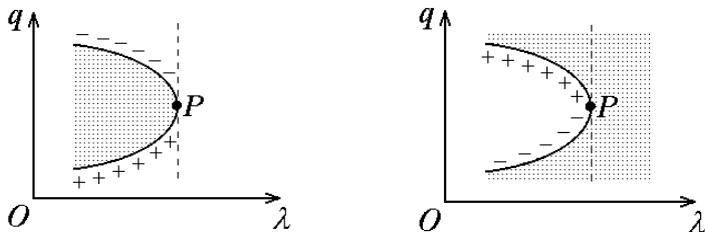


Рис. 3

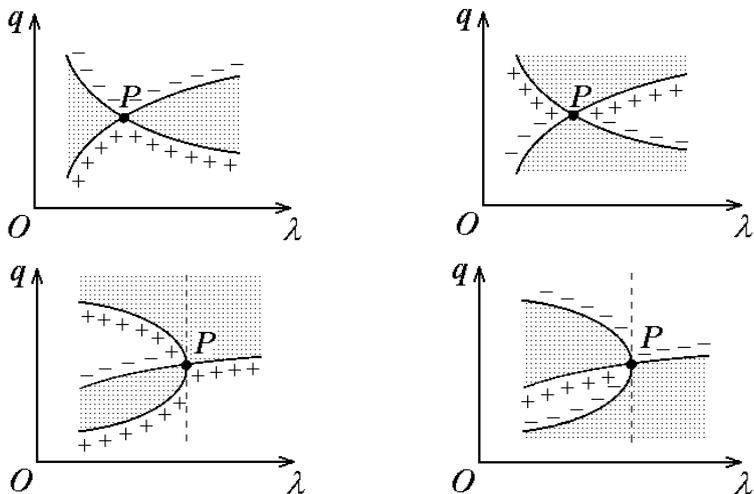


Рис. 4

Бифуркационные диаграммы консервативных систем, рассматриваемых в учебных целях или при проведении прикладных исследований, обычно являются комбинацией бифуркаций, приведенных на рис. 3 и 4. Поэтому мы не будем обсуждать более сложные бифуркации (в случае необходимости соответствующую информацию можно найти, например, в [2]).

Из геометрических соображений понятно, что если на плоскости  $(\lambda, q)$  прямая  $\lambda = \text{const}$  не содержит бифуркационных точек и точек сингулярности (или разрывов), то в общем

случае при перемещении вдоль этой прямой знаки функции  $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}$  в точках пересечения кривой равновесия чередуются (рис. 5а). Таким образом, после прохождения устойчивого положения равновесия ( $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} > 0$ ) мы встретим неустойчивое ( $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} < 0$ ), после неустойчивого – устойчивое. При наличии у функции  $\Pi$  точек сингулярности такого чередования может и не быть (рис. 5б).

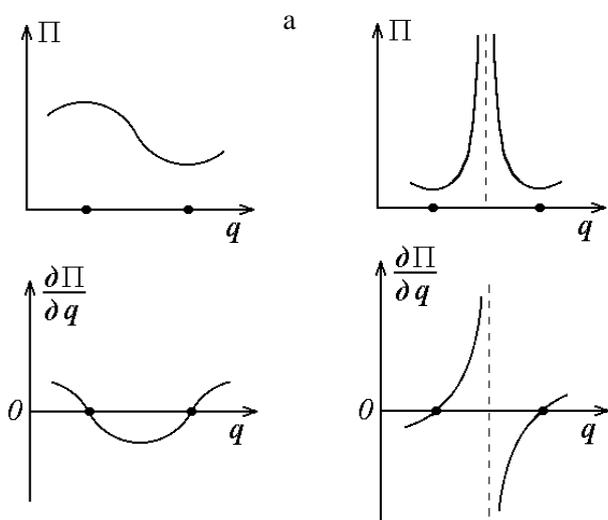


Рис. 5. Примеры разного поведения функции  $\Pi$  и ее первой производной: а) – сингулярности отсутствуют, устойчивые и неустойчивые положения равновесия чередуются; б) – случай сингулярности, чередования устойчивости и неустойчивости нет

Чередование участков устойчивых и неустойчивых положений равновесия наблюдается и при переходе с одной ветви кривой  $\Gamma$  на другую в точке их слияния (рис. 3), и при переходе между ветвями с одинаковыми неперпендикулярными касательными в бифуркациях, изображенных на рис. 4. При перемещении вдоль одной ветви  $q = \varphi_i(\lambda)$  характер устойчивости положения рав-

новесия не изменяется, так как не изменяется знак второй производной функции  $\Pi$ .

## 1.2. Бифуркации равновесий в системах с несколькими степенями свободы

Бифуркации равновесий в консервативных системах при наличии  $n \geq 2$  степеней свободы отличаются от случая  $n = 1$  бóльшим разнообразием – происходят не только рождения положений равновесия и их переходы "устойчивость–неустойчивость", но и бифуркации величин, характеризующих степень неустойчивости (строгое описание таких бифуркаций приведено, например, в [2]).

Рассмотрим консервативную систему с потенциальной энергией  $\Pi$ , являющейся функцией обобщенных координат  $q_1, \dots, q_n$  и параметра  $\lambda$ . Уравнения

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0, \dots, \frac{\partial \Pi}{\partial q_n} = 0 \quad (7)$$

определяют в пространстве  $(\lambda, q_1, \dots, q_n)$  линии  $\Gamma_i$  – ветви кривой равновесия  $\Gamma$ . В точках бифуркаций

$$\det \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \right) = 0. \quad (8)$$

Следуя [1, 2], ограничимся обсуждением достаточно часто встречающегося случая, когда в точке бифуркации  $P$  (с точностью до переобозначения)

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2 \partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_n \partial q_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_n^2} \end{pmatrix} \neq 0 \quad (9)$$

При выполнении условия (9) в окрестности точки  $P$  соотношения

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0, \dots, \frac{\partial \Pi}{\partial q_n} = 0 \quad (10)$$

задают неявным образом функции

$$q_2(q_1, \lambda), \dots, q_n(q_1, \lambda). \quad (11)$$

После подстановки функций (11) в выражение для потенциальной энергии  $\Pi$  мы получим функцию  $\Psi$ , зависящую от одной обобщенной координаты  $q_1$  и параметра  $\lambda$ :

$$\Psi(q_1, \lambda) = \Pi(q_1, q_2(q_1, \lambda), \dots, q_n(q_1, \lambda), \lambda). \quad (12)$$

Дальнейший анализ бифуркации повторяет основные этапы исследования бифуркаций в системах с одной степенью свободы, но только вместо потенциальной энергии  $\Pi$  следует использовать функцию  $\Psi(q_1, \lambda)$ .

В частности, уравнение

$$\frac{\partial \Psi}{\partial q_1} = 0 \quad (13)$$

определяет проекцию кривой равновесия на плоскость  $(\lambda, q_1)$ .  
Условие

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial q_1^2} = 0 \quad (14)$$

эквивалентно условию (8), выделяющему на кривой  $\Gamma$  точки бифуркации.

Наконец, если предположить дополнительно, что в окрестности точки  $P$  матрица

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2 \partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_n \partial q_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_n^2} \end{pmatrix} \quad (15)$$

положительно определена, то тогда заключение об устойчивости или неустойчивости положений равновесия изучаемой системы можно будет сделать, принимая во внимание знак  $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial q_1^2}$  в точках плоскости  $(\lambda, q_1)$ , лежащих на проекции кривой равновесия.

*Упражнение.* Пусть  $q_1^*$  и  $\lambda_*$  удовлетворяют условию

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial q_1} \right|_{q_1=q_1^*, \lambda=\lambda_*} = 0. \quad (16)$$

Проверить, что в предположении положительной определенности матрицы (15) неравенство

$$\left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial q_1^2} \right|_{q_1=q_1^*, \lambda=\lambda_*} > 0 \quad (17)$$

является достаточным условием устойчивости положения равновесия

$$q_1 = q_1^*, q_2 = q_2(q_1^*, \lambda), \dots, q_n = q_n(q_1^*, \lambda). \quad (18)$$

В случае

$$\left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial q_1^2} \right|_{q_1=q_1^*, \lambda=\lambda_*} < 0 \quad (19)$$

положение равновесия (18) неустойчиво.

*Указание.* Из положительной определенности матрицы (15) вытекает, что точки (11) будут точками строгого локального минимума для функции  $\Pi$ , в которой  $q_1$  и  $\lambda$  рассматриваются как параметры.

### 1.3. Пример бифуркации положений равновесия

На рис. 6 изображена механическая система, состоящая из однородного стержня  $AB$ , концы которого скользят по неподвижной проволоке, изогнутой в форме параболы  $y = x^2 / a$

(ось  $Oy$  направлена вертикально вверх). Масса стержня  $m$ , длина –  $l$ . Найдем положения равновесия стержня и исследуем их устойчивость при разных значениях параметров системы .

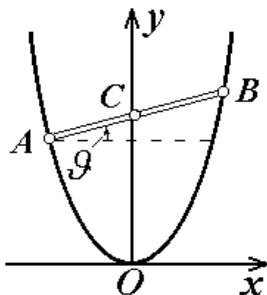


Рис. 6

Данная система является консервативной и имеет одну степень свободы. В качестве обобщенной координаты возьмем угол  $\vartheta$ , образуемый стержнем с осью  $Ox$ .

Координаты центра масс стержня  $C$  и его концов связаны соотношениями

$$x_A = x_C - \frac{l}{2} \cos \vartheta, \quad y_A = y_C - \frac{l}{2} \sin \vartheta, \quad (20)$$

$$x_B = x_C + \frac{l}{2} \cos \vartheta, \quad y_B = y_C + \frac{l}{2} \sin \vartheta.$$

Принимая во внимание равенства

$$y_A = \frac{x_A^2}{a}, \quad y_B = \frac{x_B^2}{a}, \quad (21)$$

нетрудно установить, что

$$x_C = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \vartheta, \quad y_C = \frac{l}{4\sigma} (\cos^2 \vartheta + \sigma^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta), \quad (22)$$

где  $\sigma = a/l$ .

Потенциальная энергия стержня в гравитационном поле

$$\Pi = mgy_C = \frac{mgl}{4\sigma} (\cos^2 \vartheta + \sigma^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta). \quad (23)$$

Уравнение равновесия

$$\frac{d\Pi}{d\vartheta} = -\frac{mgl \sin \vartheta}{2\sigma} \left( \cos \vartheta - \frac{\sigma^2}{\cos^3 \vartheta} \right) = 0 \quad (24)$$

имеет решение  $\vartheta_1 = 0$  при любых значениях  $\sigma$  и еще два решения

$$\vartheta_2 = \arccos \sqrt{\sigma}, \quad \vartheta_3 = -\arccos \sqrt{\sigma} \quad (25)$$

при условии  $\sigma \leq 1$ . Таким образом, при  $\sigma = 1$  в системе происходит бифуркация, соответствующая бифуркационная диаграмма представлена на рис. 7.

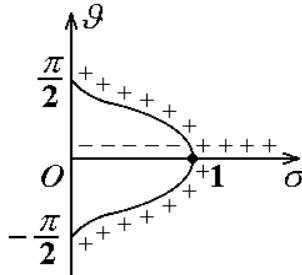


Рис. 7

Отметим одно важное свойство решений  $\vartheta_2$  и  $\vartheta_3$ . Значения производных

$$\frac{d\vartheta_2}{d\sigma} = -\frac{1}{2\sqrt{\sigma(1-\sigma)}}$$

и

$$\frac{d\vartheta_3}{d\sigma} = \frac{1}{2\sqrt{\sigma(1-\sigma)}}$$

стремятся к бесконечности при  $\sigma \rightarrow 1-$ . Поэтому в окрестности точки бифуркации даже малое изменение параметра  $\sigma$  приводит к резкому изменению величин  $\vartheta_2$  и  $\vartheta_3$ .

Перейдем к исследованию устойчивости положений равновесия. Воспользовавшись формулой

$$\frac{d^2\Pi}{d\vartheta^2} = \frac{mgl}{2\sigma} \left[ 1 - 2\cos^2 \vartheta - \frac{\sigma^2}{\cos^2 \vartheta} \left( 2 - \frac{3}{\cos^2 \vartheta} \right) \right], \quad (26)$$

получим

$$\frac{d^2\Pi}{d\vartheta^2}(\vartheta_1) = \frac{mgl}{2\sigma}(\sigma^2 - 1) \quad (27)$$

и

$$\frac{d^2\Pi}{d\vartheta^2}(\vartheta_2) = \frac{d^2\Pi}{d\vartheta^2}(\vartheta_3) = \frac{2mgl}{\sigma}(1 - \sigma). \quad (28)$$

Из соотношения (27) следует, что положение равновесия  $\vartheta_1 = 0$  устойчиво при  $\sigma > 1$  и неустойчиво при  $\sigma < 1$ . Положения равновесия  $\vartheta = \vartheta_2$ ,  $\vartheta = \vartheta_3$  устойчивы при  $\sigma < 1$ .

При  $\sigma = 1$  в положении равновесия  $\vartheta_1 = 0$

$$\frac{d^2\Pi}{d\vartheta^2}(\vartheta_1) = 0. \quad (29)$$

Поэтому для заключения об устойчивости или неустойчивости необходимо вычислить следующие производные:

$$\frac{d^3\Pi}{d\vartheta^3}(\vartheta_1) = 0, \quad \frac{d^4\Pi}{d\vartheta^4}(\vartheta_1) = 6mgl > 0. \quad (30)$$

Так как первая отличная от нуля производная функции  $\Pi(\vartheta)$  оказалась четной и положительной, то при  $\vartheta_1 = 0$  у этой функции будет минимум. Отсюда следует, что положение равновесия  $\vartheta_1 = 0$  при  $\sigma = 1$  устойчиво.

*Упражнение.* Проверить, что постоянная  $a$  в выражении для параболы равна учетверенному расстоянию от фокуса до вершины параболы.

## 2. ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ РАВНОВЕСИЯ

### 2.1. Уравнения относительного движения

Достаточно часто возникает необходимость изучать динамику голономных систем, в которых движение каких-то элементов предполагается заданным (поддерживается принудительным образом). Одна из возможных задач такого исследования – анализ относительного движения других элементов. Использование обобщенных координат, наиболее удобных при рассмотрении относительных движений, обычно приводит к тому, что декартовы координаты точек системы в абсолютном пространстве являются функциями не только обобщенных координат  $q_1, \dots, q_n$ , но и времени  $t$ :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, \dots, q_n, t). \quad (1)$$

В общем случае кинетическая энергия системы при нестационарной параметризации (1) представляет сумму трех форм от обобщенных скоростей:

$$T = T_2 + T_1 + T_0. \quad (2)$$

Здесь  $T_0 = T_0(q_1, \dots, q_n, t)$  – форма нулевой степени,

$$T_1 = \sum_{i=1}^n b_i \dot{q}_i \quad (3)$$

– форма первой степени,

$$T_2 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (4)$$

– форма второй степени.

Далее нас будет интересовать движение относительно элемента, вращающегося с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной в абсолютном пространстве оси (см. пример в п. 2.3). В этой ситуации можно ввести связанную с данным элементом систему координат и изучать движение других элементов в этой системе координат. Кроме того, при надлежащем выборе обобщенных координат коэффициенты  $a_{ij}$ ,  $b_i$  и функция  $T_0$  не будут зависеть от  $t$ .

Уравнения движения запишем в форме уравнений Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad (i = \overline{1, n}), \quad (5)$$

где  $\Pi$  – потенциальная энергия системы, которую мы также будем считать функцией, зависящей от только обобщенных координат ( $\frac{\partial \Pi}{\partial t} \equiv 0$ ).

Несложные преобразования позволяют переписать уравнения (5) следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T_2}{\partial q_i} = \Gamma_i - \frac{\partial W}{\partial q_i} \quad (i = \overline{1, n}). \quad (6)$$

Здесь  $W = \Pi - T_0$  – измененная потенциальная энергия, а  $\Gamma_i$  интерпретируются как гироскопические силы:

$$\Gamma_i = \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} \dot{q}_j, \quad \gamma_{ij} = -\gamma_{ji} = \frac{\partial b_j}{\partial q_i} - \frac{\partial b_i}{\partial q_j}. \quad (7)$$

Из формул (7) вытекает, что гироскопические силы могут быть только в системах с числом степеней свободы  $n \geq 2$ .

## 2.2. Положения относительного равновесия и их бифуркации

Соотношения, определяющие положения относительного равновесия, имеют вид

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = 0 \quad (i = \overline{1, n}). \quad (8)$$

В том случае, когда мы изучаем поведение системы при разных значениях некоторого ее параметра  $\lambda$ , соотношения (8) можно интерпретировать как уравнения кривой относительных равновесий  $\Gamma$  в пространстве  $(\lambda, q_1, \dots, q_n)$ . Точки бифурка-

ций, в которых сливаются или пересекаются разные ветви кривой  $\Gamma$ , удовлетворяют условию

$$\det \left( \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_j} \right) = 0.$$

Если у системы одна степень свободы, то при употреблении термина "относительное равновесие" вместо "равновесия" утверждения первого пункта предыдущего раздела о бифуркациях, об устойчивости и неустойчивости остаются в силе после замены в соответствующих формулах  $\Pi$  на функцию  $W$ .

Применительно к системам с несколькими степенями свободы ( $n \geq 2$ ) подобной модификации может быть подвергнута теорема Лагранжа: достаточным условием устойчивости положения относительного равновесия является наличие у измененной потенциальной энергии  $W$  изолированного минимума в этом положении.

В общем случае исследование устойчивости следует начать с анализа свойств корней уравнения

$$\det \left( \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_j} - \kappa \delta_{ij} \right) = 0, \quad (9)$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера ( $\delta_{ij} = 1$  при  $i = j$ ,  $\delta_{ij} = 0$  в остальных случаях), а производные вычисляются для изучаемого положения относительного равновесия. Корни  $\kappa_1, \dots, \kappa_n$  уравнения (9) называются коэффициентами устойчивости, количество отрицательных корней – степень неустойчивости.

Предположим, что среди коэффициентов устойчивости  $\kappa_1, \dots, \kappa_n$  нет равных нулю. Если все коэффициенты положительны, то  $W$  в положении относительного равновесия имеет минимум, и соответственно это положение устойчиво. Если степень неустойчивости выражается нечетным числом, то относительное равновесие неустойчиво. Наконец, при четной степени

неустойчивости необходимо исследовать, какое влияние на движение системы оказывают гироскопические силы – они могут сделать положение относительного равновесия устойчивым.

### 2.3. Примеры

*Пример 1.* Материальная точка массы  $m$  перемещается по проволоке, согнутой в кольцо радиуса  $R$ . Плоскость кольца вертикальна и вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, проходящей на расстоянии  $a$  от его центра (рис. 8). Найдем положения относительного равновесия материальной точки.

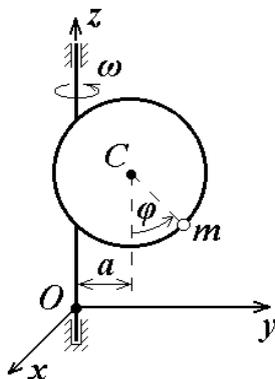


Рис. 8

Система имеет одну степень свободы, в качестве обобщенной координаты возьмем угол  $\varphi$ , образуемый осью вращения и прямой, проходящей через центр кольца  $C$  и материальную точку.

Скорость точки  $\mathbf{v}_m$  представим в виде суммы относительной скорости  $\mathbf{v}_m^r$  (скорости в системе координат  $Ox\eta z$ , связанной с вращающимся кольцом так, как показано на рис. 8) и переносной скорости  $\mathbf{v}_m^e$ :

$$\mathbf{v}_m = \mathbf{v}_m^r + \mathbf{v}_m^e. \quad (1)$$

Следует отметить, что в рассматриваемом случае

$$\mathbf{v}_m^r \perp \mathbf{v}_m^e. \quad (2)$$

Принимая во внимание (1) и (2), нетрудно найти кинетическую энергию точки

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m v_m^2 = \frac{m}{2} [(\mathbf{v}_m^r, \mathbf{v}_m^r) + (\mathbf{v}_m^e, \mathbf{v}_m^e)] = \\ &= \frac{m}{2} [R^2 \dot{\varphi}^2 + (a + R \sin \varphi)^2 \omega^2]. \end{aligned} \quad (3)$$

В выражении (3) выделим слагаемые, являющиеся формами различных степеней от  $\dot{\varphi}$ :

$$T = T_2 + T_0, \quad (4)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}^2, \quad T_0 = \frac{1}{2} m \omega^2 (a + R \sin \varphi)^2.$$

Теперь, располагая выражением для  $T_0$  и подсчитав потенциальную энергию точки в гравитационном поле ( $\Pi = -mgR \cos \varphi$ ), можно выписать измененную потенциальную энергию:

$$W = \Pi - T_0 = -mgR \left[ \cos \varphi + \frac{\lambda}{2} (\kappa + \sin \varphi)^2 \right]. \quad (5)$$

Здесь

$$\lambda = \frac{\omega^2 R}{g}, \quad \kappa = \frac{a}{R}. \quad (6)$$

– безразмерные параметры. Будем считать, что  $\kappa < 1$ , предоставив читателю возможность изучить ситуацию при  $\kappa \geq 1$  самостоятельно.

Действуя стандартным образом, далее мы должны были бы сосредоточить свои усилия на отыскании решений уравнения

$$\frac{\partial W}{\partial \varphi} = 0, \quad (7)$$

где

$$\frac{\partial W}{\partial \varphi} = mgR[\sin \varphi - \lambda(\kappa + \sin \varphi) \cos \varphi]. \quad (8)$$

Соотношения

$$\sin \varphi = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}, \quad \cos \varphi = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} \quad (9)$$

позволяют преобразовать уравнение

$$mgR[\sin \varphi - \lambda(\kappa + \sin \varphi) \cos \varphi] = 0 \quad (10)$$

в алгебраическое уравнение третьей степени относительно  $\xi = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ , однако попытки получить явные формулы для его корней приводят к громоздким выражениям, с которыми практически невозможно работать.

Более успешным оказался другой подход к построению кривой равновесия. Из уравнения (10) следует, что в положении равновесия

$$\lambda = F(\varphi), \quad (11)$$

где

$$F(\varphi) = \frac{\sin \varphi}{(\kappa + \sin \varphi) \cos \varphi}.$$

Соотношение (11) дает решение обратной в некотором смысле задачи – задачи о нахождении значения параметра  $\lambda$ , при котором в положении относительного равновесия обобщенная координата имеет заданное значение  $\varphi$ . Если  $F(\varphi) < 0$ , то положение равновесия с данным  $\varphi$  не существует.

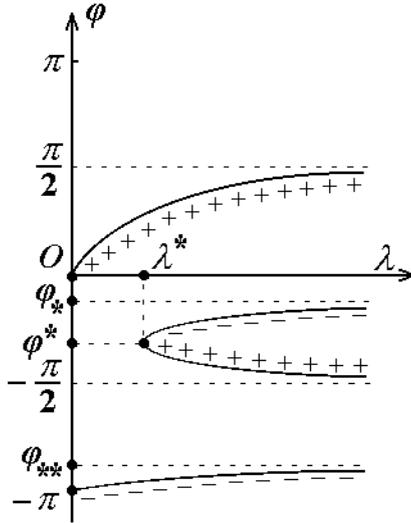


Рис. 9

Кривая равновесия состоит из "кусков" графика функции  $F(\varphi)$ , лежащих в полуплоскости  $\lambda > 0$  (рис. 9). Характеризуя качественные свойства этой функции, отметим, что

$$F(\varphi) \rightarrow \infty \quad (12)$$

при

$$\varphi \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}, \quad \varphi \rightarrow \varphi_* = -\arcsin \kappa, \quad (13)$$

$$\varphi \rightarrow \varphi_{**} = -(\pi - \arcsin \kappa).$$

При

$$\varphi^* = -\arcsin \kappa^{1/3} \quad (14)$$

у функции  $F(\varphi)$  будет локальный минимум

$$\lambda^* = F(\varphi^*) = \frac{1}{(1 - \kappa^{2/3})^{3/2}}. \quad (15)$$

Данное значение параметра  $\lambda$  является бифуркационным: если  $\lambda < \lambda_*$ , то имеется два положения относительного равновесия, а при  $\lambda > \lambda_*$  положений равновесия четыре.

Исследуем устойчивость обсуждаемых равновесных решений. Отметим предварительно, что соотношение

$$\frac{\partial W}{\partial \varphi}(\varphi, F(\varphi)) = 0 \quad (16)$$

является тождеством – выполняется при любых допустимых значениях  $\varphi$ . Дифференцируя данное тождество по  $\varphi$ , найдем

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi \partial \lambda} \frac{dF}{d\varphi} = 0. \quad (17)$$

Из соотношения (17) вытекает формула, с помощью которой легко определять знак второй производной от  $W$  по  $\varphi$  в положениях относительного равновесия при  $\lambda = F(\varphi)$ :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2}(\varphi, F(\varphi)) = mgR \cos \varphi (\kappa + \sin \varphi) \frac{dF}{d\varphi}. \quad (18)$$

Знак  $\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2}$  для различных ветвей кривой равновесия указан рис. 9. На тех ветвях, где

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} > 0, \quad (19)$$

положения относительного равновесия устойчивы. Неустойчивые ветви выделяются условием

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} < 0. \quad (20)$$

*Пример 2.* Плоскость  $Oxy$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega \perp Oxy$  вокруг оси, проходящей через точку  $O$  (рис. 10). В плоскости  $Oxy$  движется материальная точка массой

$m$ , притягиваемая центрами  $\mathbf{r}_1 = (-a, d)^T$  и  $\mathbf{r}_2 = (a, d)^T$ ; силы притяжения  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$  пропорциональны расстояниям до этих центров:

$$\mathbf{F}_k = -c(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k), \quad k=1,2. \quad (21)$$

Здесь  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор точки,  $c$  – положительная постоянная.

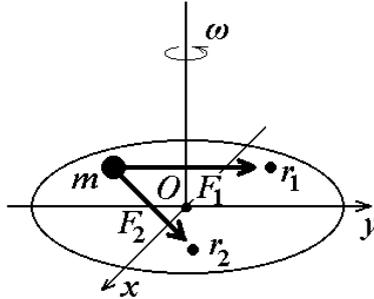


Рис. 10

Нетрудно получить формулы для потенциала  $\Pi$  силового поля (21) и для кинетической энергии точки  $T$ :

$$\Pi = \frac{c}{2} \sum_{k=1}^2 (\mathbf{r} - \mathbf{r}_k, \mathbf{r} - \mathbf{r}_k) = c(x^2 + y^2 - 2yd) + \dots, \quad (22)$$

$$T = \frac{m}{2} (\mathbf{v}_m^r + \omega \times \mathbf{r}, \mathbf{v}_m^r + \omega \times \mathbf{r}) = T_2 + T_1 + T_0,$$

$$T_2 = \frac{m}{2} (\mathbf{v}_m^r, \mathbf{v}_m^r), \quad T_1 = m(\mathbf{v}_m^r, \omega \times \mathbf{r}) = m\omega(xy - \dot{x}y),$$

$$T_0 = \frac{m\omega^2}{2} (\mathbf{r}, \mathbf{r}).$$

Здесь  $\mathbf{v}_m^r$  – относительная скорость материальной точки. Многоточие в формуле для потенциала обозначает несущественную для дальнейшего анализа постоянную величину.

Располагая формулами для  $\Pi$  и  $T_0$ , выпишем измененную потенциальную энергию

$$W = \Pi - T_0 = c[(1 - \lambda)(x^2 + y^2) - 2yd], \quad (23)$$

где

$$\lambda = \frac{m\omega^2}{2c} \quad (24)$$

– безразмерный параметр.

Координаты точки в положении относительного равновесия являются решением системы уравнений

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 2c(1 - \lambda)x = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = 2c[(1 - \lambda)y - d] = 0. \quad (25)$$

Из уравнений (25) следует, что в относительном равновесии

$$x = 0, \quad y = \frac{d}{1 - \lambda}. \quad (26)$$

Проекция кривой относительных равновесий на плоскость  $(\lambda, y)$  представлена на рис. 11.

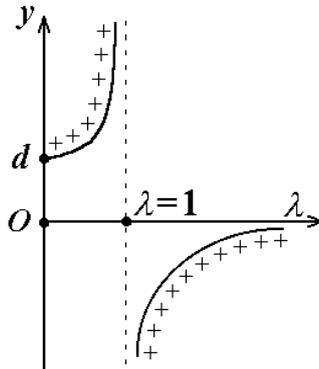


Рис. 11

Для анализа устойчивости удобно перейти к переменным, характеризующим отклонение точки от положения равновесия:

$$(x, y) \mapsto (\tilde{x}, \tilde{y}), \quad (27)$$

где

$$\tilde{x} = x, \quad \tilde{y} = y - \frac{d}{1-\lambda}. \quad (28)$$

С точностью до некоторой постоянной величины в новых переменных

$$W = c(1-\lambda)(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2). \quad (29)$$

Если  $\lambda \in [0,1)$ , то измененная потенциальная энергия имеет минимум в положении относительного равновесия; следовательно, это положение устойчиво.

При  $\lambda > 1$  степень неустойчивости равна 2, в положении относительного равновесия достигается максимум. Тем не менее несложно установить, что и в этом случае положение относительного равновесия устойчиво.

Уравнения движения точки на плоскости являются линейными и имеют вид

$$\begin{aligned} m\ddot{\tilde{x}} - 2m\omega\dot{\tilde{y}} + 2c(1-\lambda)\tilde{x} &= 0, \\ m\ddot{\tilde{y}} + 2m\omega\dot{\tilde{x}} + 2c(1-\lambda)\tilde{y} &= 0, \end{aligned} \quad (30)$$

или (в векторной форме)

$$A\ddot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} + C\mathbf{q} = 0. \quad (31)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2m\omega \\ 2m\omega & 0 \end{pmatrix}, \\ C &= \begin{pmatrix} 2c(1-\lambda) & 0 \\ 0 & 2c(1-\lambda) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (32)$$

Запишем характеристическое уравнение линейной системы дифференциальных уравнений (31):

$$\begin{aligned} \det(A\rho^2 + B\rho + C) &= \\ &= m^2 \rho^4 + 4mc(1 + \lambda)\rho^2 + 4c^2(1 - \lambda)^2 = \\ &= [m\rho^2 + 2c(1 - \sqrt{\lambda})^2][m\rho^2 + 2c(1 + \sqrt{\lambda})^2] = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Очевидно, что при неотрицательном  $\lambda \neq 1$  корни уравнения (33) будут чисто мнимыми. Соответственно положение относительного равновесия будет устойчивым.

При  $\lambda > 1$  устойчивость обеспечивается гироскопическими силами.

### 3. БИФУРКАЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ

#### 3.1. Уравнения Рауса для системы с циклическими переменными

Рассмотрим голономную склерономную систему с  $n$  степенями свободы, в которой все активные силы потенциальны, и предположим, что некоторые обобщенные координаты не входят явным образом в выражения для кинетической энергии системы  $T$  и ее потенциальной энергии  $\Pi$ . В аналитической механике такие координаты принято называть *циклическими*. Остальные координаты, фигурирующие, по крайней мере, либо в  $T$ , либо в  $\Pi$ , будем именовать *позиционными*.

Примем для определенности, что  $q_i$  – позиционные координаты ( $i = \overline{1, k}$ ,  $k < n$ ),  $q_\alpha$  – циклические ( $\alpha = \overline{k+1, n}$ ). Уравнения движения, записанные в форме уравнений Лагранжа 2-го рода, имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j = \overline{1, n}). \quad (1)$$

Так как

$$\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial \Pi}{\partial q_\alpha} \equiv 0 \quad (\alpha = \overline{k+1, n}), \quad (2)$$

для циклических координат уравнения (1) эквивалентны уравнениям

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = 0 \quad (\alpha = \overline{k+1, n}). \quad (3)$$

Из соотношений (3) следует, что обобщенные импульсы, отвечающие циклическим переменным, будут первыми интегралами уравнений движения:

$$p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = c_\alpha \quad (\alpha = \overline{k+1, n}), \quad (4)$$

где  $c_\alpha$  – постоянные величины.

Первые интегралы (4) позволяют выразить  $\dot{q}_\alpha$  через  $q_i, \dot{q}_i, c_\alpha$  ( $i = \overline{1, k}, \alpha = \overline{k+1, n}$ ):

$$\dot{q}_\alpha = \hat{q}_\alpha(q_i, \dot{q}_i, c_\alpha) \quad (\alpha = \overline{k+1, n}). \quad (5)$$

Действительно, так как  $T$  представляет квадратичную форму от обобщенных скоростей  $\dot{q}_i$  и  $\dot{q}_\alpha$ , то

$$c_\alpha = \sum_{\beta=k+1}^n a_{\alpha\beta} \dot{q}_\beta + P_\alpha(q_i, \dot{q}_i). \quad (6)$$

Здесь

$$a_{\alpha\beta}(q_i) = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta}. \quad (7)$$

Соотношения (6) можно интерпретировать как систему линейных уравнений относительно  $\dot{q}_\alpha$  с коэффициентами  $a_{\alpha\beta}$ , являющимися элементами невырожденной матрицы (почему?).

Разрешая эту систему, найдем

$$\hat{q}_\alpha = \sum_{\beta=k+1}^n a_{\alpha\beta}^* c_\beta + Q_\alpha(q_i, \dot{q}_i), \quad (8)$$

где  $a_{\alpha\beta}^*(q_i)$  – элементы матрицы, обратной к матрице  $\{a_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=k+1}^n$ , а функции  $Q_\alpha(q_i, \dot{q}_i)$  определены формулами

$$Q_\alpha(q_i, \dot{q}_i) = - \sum_{\beta=k+1}^n a_{\alpha\beta}^*(q_i) P_\beta(q_i, \dot{q}_i). \quad (9)$$

*Упражнение.* Убедитесь, что  $Q_\alpha(q_i, \dot{q}_i)$  – линейные функции обобщенных скоростей  $\dot{q}_i$ .

Следующий шаг состоит в построении *уравнений Рауса* – специальной формы уравнений движения, удобной при изучении систем с циклическими координатами. Подобно уравнениям Лагранжа и Гамильтона, уравнения Рауса получаются в результате ряда манипуляций с некоторой функцией, именуемой *функцией Рауса*:

$$R(q_i, \dot{q}_i, c_\alpha) = T^*(q_i, \dot{q}_i, c_\alpha) - \sum_{\beta=k+1}^n c_\beta \hat{q}_\beta(q_i, \dot{q}_i, c_\alpha). \quad (10)$$

Здесь

$$T^*(q_i, \dot{q}_i, c_\alpha) = T(q_i, \dot{q}_i, \hat{q}_\alpha(q_i, \dot{q}_i, c_\alpha)). \quad (11)$$

Для позиционных переменных  $q_i$  уравнения Рауса имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial R}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}. \quad (12)$$

От уравнений Лагранжа (1) уравнения (12) отличаются тем, что не содержат обобщенных скоростей и ускорений, отвечающих циклическим координатам. Поэтому эти уравнения позволяют изучать поведение позиционных переменных, не имея никакого представления о том, как изменяются  $q_\alpha$ . Более того, можно вообще забыть о существовании степеней свободы, кото-

рым соответствуют циклические переменные, и рассматривать (12) как уравнения движения гипотетической системы с  $k$  степенями свободы, зависящей от параметров  $c_\alpha$ . Данную систему принято именовать *приведенной*, движения, описываемые позиционными и циклическими переменными, называют *явными* и *скрытыми движениями* соответственно.

В общем случае функция Рауса (10) представляет сумму форм второй, первой и нулевой степени от обобщенных скоростей  $\dot{q}_i$ :

$$R = R_2 + R_1 + R_0. \quad (13)$$

Принимая во внимание такую структуру функции  $R$ , перепишем уравнения (12) следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial R_2}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial R_2}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \frac{\partial R_0}{\partial q_i} - \\ - \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial R_1}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial R_1}{\partial q_i} \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Выражения в фигурных скобках являются линейными функциями обобщенных скоростей

$$- \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial R_1}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial R_1}{\partial q_i} \right\} = \sum_{j=1}^k \gamma_{ij} \dot{q}_j, \quad (15)$$

где коэффициенты  $\gamma_{ij}$  удовлетворяют условию

$$\gamma_{ij} = -\gamma_{ji} \quad (16)$$

и связаны с коэффициентами линейной формы  $R_1$  соотношениями, аналогичными соотношениям (7) предыдущего раздела.

В конечном итоге уравнения Рауса для позиционных переменных можно привести к виду, наиболее удобному для последующего анализа устойчивости движения

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial R_2}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial R_2}{\partial q_i} = \Gamma_i - \frac{\partial W}{\partial q_i}. \quad (17)$$

Здесь

$$W = \Pi - R_0 \quad (18)$$

– измененная потенциальная энергия; слагаемые

$$\Gamma_i = \sum_{j=1}^k \gamma_{ij} \dot{q}_j \quad (19)$$

называют гироскопическими силами.

*Упражнение.* Используя соотношение (8), убедиться, что

$$R_0 = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=k+1}^n a_{\alpha\beta}^* c_\alpha c_\beta. \quad (20)$$

*Упражнение.* Пусть наложенные на систему связи допускают ее вращение вокруг некоторой неподвижной прямой. Предположим также, что угол поворота  $\varphi$  является циклической переменной. Тогда первый интеграл

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \kappa \quad (21)$$

будет выражать постоянство проекции кинетического момента системы на ось вращения, а измененная потенциальная энергия имеет вид

$$W = \Pi + \frac{\kappa^2}{2J}, \quad (22)$$

где  $J(q_i)$  – момент инерции системы относительно оси вращения.

*Дополнение. Проблема "скрытых движений".* Рассмотрим консервативную механическую систему с  $n+1$  степенями свободы, лагранжиан  $L$  которой содержит только кинетическую энергию:

$$L = T, \quad T = \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j.$$

Предполагая координату  $q_{n+1}$  циклической, перейдем к приведенной системе с  $n$  степенями свободы. Функция Рауса (лагранжиан приведенной системы) будет содержать измененную потенциальную энергию

$$W = -R_0 = \frac{c_{n+1}^2}{2a_{n+1,n+1}(q_1, \dots, q_n)}. \quad (*)$$

Выражение (\*) можно трактовать как потенциал неких гипотетических сил, действующих на приведенную систему.

Развивая эту идею, Г. Гельмгольц, Г. Герц и Дж. Томсон пытались и в общем случае интерпретировать потенциальную энергию консервативной системы как кинетическую энергию "скрытых" движений, описываемых циклическими координатами.

*Пример: движение волчка Лагранжа.* Если бы мы не знали о вращении волчка вокруг оси симметрии (вращение осесимметричного объекта всегда трудно распознать), то могли бы попытаться объяснить разнообразие возможных движений волчка наличием дополнительных потенциальных сил.

### 3.2. Стационарные движения

Движения, в которых значения позиционных координат и циклических скоростей не изменяются, называются стационарными.

Из уравнений (17) следует, что значения позиционных координат  $q_i$  и значения циклических первых интегралов  $c_\alpha$  в стационарных движениях связаны соотношениями

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = 0 \quad (i = \overline{1, k}). \quad (23)$$

При изучении динамики системы, обладающей первыми интегралами, естественным образом возникает проблема описания ее поведения при заданных значениях этих интегралов. Поиск стационарных движений сведется соответственно к отысканию корней системы уравнений (23), где  $c_\alpha$  следует интерпретировать как параметры. Такие задачи мы уже обсуждали в

предыдущих разделах. В  $n$ -мерном пространстве переменных  $q_i, c_\alpha$  соотношения (23) задают семейство гиперповерхностей  $\Gamma_s$  ( $\dim \Gamma_s = n - k$ ); каждой точке, принадлежащей множеству  $\Gamma = \bigcup_s \Gamma_s$ , отвечает стационарное движение системы. Как и прежде, критические точки, в которых

$$\det \left( \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_j} \right) = 0, \quad (24)$$

будут точками бифуркаций – в их окрестности уравнения (23) не имеют однозначных решений. В точках бифуркаций либо пересекаются отдельные гиперповерхности  $\Gamma_s$ , либо имеются ортогональные к подпространству  $\{c_\alpha\}$  касательные гиперплоскости, либо происходит и то, и другое.

Перейдем теперь к анализу устойчивости стационарных движений [5].

**Теорема Рауса.** Если в стационарном движении измененная потенциальная энергия  $W = \Pi - R_0$  имеет минимум, то это движение устойчиво относительно позиционных координат  $q_i$  и скоростей  $\dot{q}_i$ , а также циклических скоростей  $\dot{q}_\alpha$ , по крайней мере для возмущений, не нарушающих циклические интегралы (4).

Ограничение на возмущения, фигурирующее в условиях теоремы Рауса, было снято А.М. Ляпуновым.

**Теорема Ляпунова.** Пусть измененная потенциальная энергия  $W$  имеет минимум не только при данных величинах  $p_\alpha = c_\alpha$ , отвечающих рассматриваемому стационарному движению, но и при всяких достаточно близких к данным  $p_\alpha = c_\alpha + \eta_\alpha$ , причем значения переменных  $q_i$ , доставляющие  $W$  минимум, являются непрерывными функциями  $p_\alpha$ . В этом случае стационарное движение устойчиво относительно позиционных координат и скоростей, а также циклических скоростей.

Теорема Рауса фактически является теоремой Лагранжа–Дирихле для приведенной системы. Найти аналоги теорем о устойчивости (например, теорем Ляпунова или теоремы Четаева) в общем случае нельзя: стационарное движение может быть устойчиво и при отсутствии у функции  $W$  минимума – за счет гироскопических сил. Но если гироскопические силы отсутствуют (случай гироскопически несвязанной системы), то никаких препятствий к применению теорем Ляпунова и Четаева нет.

### 3.3. Пример

Рассмотрим механическую систему, аналогичную той, которая изучалась в разделе «Относительные равновесия»: материальная точка перемещается по проволочному кольцу, кольцо прикреплено к вертикальной оси (рис. 8). Будем считать, что ось с кольцом вращается без трения.

Система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат возьмем угол  $\psi$ , характеризующий поворот плоскости кольца вокруг вертикальной оси по отношению к плоскости  $Oxz$ , и угол  $\varphi$ , так, как показано на рис. 8. Угол  $\varphi$  будет позиционной координатой, угол  $\psi$  – циклической. Отказавшись от прежнего предположения о постоянстве угловой скорости, мы должны принимать во внимание ее изменение при перемещении точки по кольцу.

Нетрудно выписать выражения для кинетической энергии системы  $T$  и потенциальной энергии  $\Pi$ :

$$T = \frac{m}{2} \left[ R^2 \dot{\varphi}^2 + (a + R \sin \varphi)^2 \dot{\psi}^2 \right], \quad (25)$$

$$\Pi = -mgR \cos \varphi.$$

Первый интеграл, отвечающий циклической переменной  $\psi$ , имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = m(a + R \sin \varphi)^2 \dot{\psi} = p. \quad (26)$$

Теперь, основываясь на утверждении, сформулированном в виде *Упражнения 2*, запишем измененную потенциальную энергию

$$W = \Pi - R_0 = \Pi + \frac{p^2}{2J} = \quad (27)$$

$$= -mgR \left[ \cos\varphi - \frac{\chi}{2(\kappa + \sin\varphi)^2} \right].$$

Здесь

$$\chi = \frac{p^2}{m^2 g R}, \quad \kappa = \frac{a}{R} \quad (28)$$

– безразмерные параметры задачи. Так же, как и в п. 2.3, ограничимся анализом случая  $\kappa < 1$ .

Из соотношения

$$\frac{\partial W}{\partial \varphi} = mgR \left[ \sin\varphi - \frac{\chi \cos\varphi}{(\kappa + \sin\varphi)^3} \right] = 0 \quad (29)$$

следует, что в стационарном движении

$$\chi = F(\varphi), \quad (30)$$

где

$$F(\varphi) = \operatorname{tg} \varphi (\kappa + \sin\varphi)^3. \quad (31)$$

Кривая стационарных движений будет состоять из кусков графика функции  $F(\varphi)$ , принадлежащих полуплоскости  $\chi > 0$  (рис. 12). Ось  $\chi = 0$  графиком пересекается в четырех точках:

$$\varphi = 0, \quad \varphi = -\pi, \quad \varphi = \varphi_*, \quad \varphi = \varphi_{**}. \quad (32)$$

Здесь

$$\varphi_* = -\pi + \arcsin\kappa, \quad \varphi_{**} = -\arcsin\kappa. \quad (33)$$

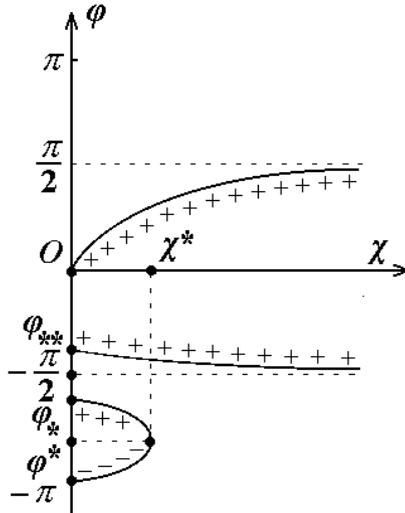


Рис. 12

Тем не менее при  $\chi = 0$  у системы нет стационарных движений, в которых  $\varphi = \varphi_*$  или  $\varphi = \varphi_{**}$ . Противоречие объясняется неправомерностью сведения задачи поиска корней уравнения (29) к поиску корней уравнения (30) при указанном значении параметра. Отметим, что стационарные движения, существующие при  $\chi = 0$ , фактически являются состояниями равновесия системы – вращение вокруг вертикальной оси отсутствует.

Дальнейшее исследование поведения функции  $F(\varphi)$  позволяет установить наличие локального максимума  $F(\varphi^*) = \chi^*$ , где  $\varphi^* \in (-\pi, \varphi_*)$ . Для отыскания точного значения  $\varphi^*$  необходимо решить уравнение

$$\kappa + 4\xi - 3\xi^3 = 0, \quad \xi = \sin\varphi^*. \quad (34)$$

При  $\chi = \chi^*$  происходит бифуркация стационарных движений: если  $\chi < \chi^*$ , то у системы есть четыре вида таких движений, а если  $\chi > \chi^*$ , то два.

При исследовании устойчивости стационарных движений удобно воспользоваться соотношением (ср. с формулой (17) раздела 2):

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} = - \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi \partial \chi} \cdot \frac{dF}{d\varphi}. \quad (35)$$

Устойчивые и неустойчивые ветви кривой стационарных движений на рис. 12 помечены знаками "+" и "-" соответственно.

*Вопрос:* почему в рассматриваемом примере при перемещении вдоль прямой  $\chi = \text{const}$  нарушается правило чередования устойчивости и неустойчивости?

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пуанкаре А. Фигуры равновесия жидкой массы. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2000. 208 с.
2. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. 3-е изд. М.: Наука, 1965. 208 с.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. 7-е изд. М.: Наука, 1969. 608 с.
4. Рубановский В.Н., Самсонов В.А. Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. М.: Наука, 1988. 304 с.
5. Румянцев В.В. Об устойчивости стационарных движений // Прикладная математика и механика. 1966. **30**. 922– 933.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Бифуркации равновесий в консервативных системах . . . .	3
1.1. Бифуркации равновесий в системах с одной степенью свободы . . . . .	3
1.2. Бифуркации равновесий в системах с несколькими степенями свободы . . . . .	8
1.3. Пример бифуркации положений равновесия . . . . .	10
2. Относительные равновесия . . . . .	14
2.1. Уравнения относительного движения . . . . .	14
2.2. Положения относительного равновесия и их бифуркации . . . . .	15
2.3. Примеры . . . . .	17
3. Бифуркации стационарных движений . . . . .	25
3.1. Уравнения Рауса для системы с циклическими переменными . . . . .	25
3.2. Стационарные движения . . . . .	30
3.3. Пример . . . . .	32
Список литературы . . . . .	36