Н.И. Амелькин

Теоремы прямого метода Ляпунова

Рассматривается автономная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x) \tag{1}$$

Здесь x – вектор фазовых переменных. Для механических систем, описываемых уравнениями Лагранжа, x – 2n-мерный вектор, составленный из обобщенных координат и обобщенных скоростей:

$$x^T = (q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n)$$

Решения системы (1), определяемые начальными условиями $t = 0, x(0) = x_0$, будем обозначать через $\varphi(x_0, t)$. Из курса дифференциальных уравнений известно, что для решений автономных систем имеет место групповое свойство:

$$\varphi(x_0, t+T) = \varphi(\varphi(x_0, t), T) \tag{2}$$

Положения равновесия системы (1) определяются из системы $f(x) = 0$ и представляют собой траектории-точки в фазовом пространстве.

Первым методом Ляпунова называют метод исследования устойчивости положений равновесия, основанный на анализе линеаризованных уравнений в окрестности положения равновесия. В основе этого метода лежит **теорема Ляпунова об устойчивости по линейному приближению:** *если все корни характеристического уравнения линеаризованной системы лежат слева от мнимой оси, то положение равновесия асимптотически устойчиво, а если среди этих корней имеется хотя-бы один, лежащий справа от мнимой оси, то положение равновесия неустойчиво*. Но имеются *критические случаи*, когда с помощью этой теоремы не удается установить характер устойчивости, например, нельзя доказать устойчивость положений равновесия консервативных систем. Для таких случаев применяется *второй метод Ляпунова*.

Второй (*прямой*) *метод Ляпунова* связан с использованием *вспомогательных непрерывно дифференцируемых функций* $V(x)$. Основу этого метода составляют приводимые ниже теоремы.

Всюду далее без ограничения общности будем полагать, что исследуемым положением равновесия является точка $x = 0$, а $V(0) = 0$.

Теорема 1 (*терема Ляпунова об устойчивости*). *Если существует функция* $V(x)$, *определенно положительная в окрестности положения равновесия* $x=0$ (*имеет строгий минимум в точке* $x=0$), *а ее производная по времени, вычисленная в силу уравнений* (1), *знакоотрицательна, т.е.*

$$\dot{V}\Big|_{(1)} = \frac{\partial V}{\partial x^T}\dot{x}\Big|_{(1)} = \frac{\partial V}{\partial x^T} f \le 0 \ , \qquad (3)$$

то $x=0$ – *устойчивое положение равновесия*.

Функции $V(x)$, удовлетворяющие условиям теоремы 1, называются *функциями Ляпунова* для соответствующего положения равновесия.

Доказательство. По условиям теоремы для любых достаточно малых $\varepsilon>0$ функция $V(x)$ на сфере S_ε радиуса ε принимает положительные значения. Обозначим через $V_\varepsilon^{\min} = \min\limits_{S_\varepsilon} V(x) > 0$ – минимум функции $V(x)$ на границе ε-окрестности. В силу непрерывности функции $V(x)$ существует достаточно малое $\delta>0$, такое что $V_\delta^{\max} = \max\limits_{|x|<\delta} V(x) < V_\varepsilon^{\min}$. Поэтому, стартуя из любой точки δ-окрестности вследствие (3) будем иметь $V(t) \le V_\delta^{\max} < V_\varepsilon^{\min}$, а это означает, что траектория системы никогда не достигнет границы ε-окрестности. *Теорема доказана.*

Известная теорема Лагранжа об устойчивости положений равновесия консервативных систем является простым следствием теоремы 1.

Теорема Лагранжа. *Если в положении равновесия* $\mathbf{q}=\mathbf{0}$ *консервативной системы потенциальная энергия* $\Pi(\mathbf{q})$ *имеет строгий минимум, то это положение устойчиво.*

Для доказательства в качестве функции Ляпунова достаточно взять полную энергию системы $V=E=T+\Pi$. Для консервативной системы кинетическая энергия $T=\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}/2$ является строго положительно определенной формой скоростей, а ввиду того, что $\Pi(\mathbf{q})$ имеет строгий минимум в точке $\mathbf{q}=\mathbf{0}$, полная энергия будет строго положительно определенной по всем фазовым переменным в окрестности положения равновесия. При этом, поскольку полная энергия консервативной системы сохраняется, выполняются все условия теоремы 1.

Замечание. *Если в положении равновесия* $\mathbf{q}=\mathbf{0}$ *консервативной системы потенциальная энергия* $\Pi(\mathbf{q})$ *имеет строгий минимум, то это положение остается устойчивым при добавлении гироскопических и дисси-*

пативных сил, поскольку мощность этих сил не положительна и для производной от полной энергии по времени будет выполняться условие (3).

Нижеследующая теорема 2 замечательна тем, что она предъявляет самые слабые требования к свойствам функции $V(x)$, при которых можно доказать асимптотическую устойчивость или неустойчивость положения равновесия. Многие другие теоремы прямого метода Ляпунова представляют собой следствия (частные случаи) этой теоремы.

Теорема 2 (Е.А. Барбашин, Н.Н. Красовский). *Пусть существует функция $V(x)$, для которой в некоторой окрестности положения равновесия $x=0$ выполняется условия:*

1. $\dot{V}\big|_{(1)} \le 0$ *– неравенство* (3).

2. Множество X^0 точек x, в которых производная $\dot{V}$ равна нулю:

$$X^0 : \dot{V}(x)\big|_{(1)} = \frac{\partial V}{\partial x^T} f = 0 \qquad (4)$$

кроме $x(t)=0$ не содержит других целых траекторий системы (1).

($x(t)=0$ – единственное решение, полностью лежащее на множестве X^0).

Тогда

а) Если функция $V(x)$ имеет строгий минимум в точке $x=0$, то это положение асимптотически устойчиво.

б) Если в точке $x=0$ функция $V(x)$ не имеет минимума (*включая нестрогий*)*, то это положение неустойчиво.*

Условие 2 означает, что, кроме $x(t)=0$, нет других таких решений системы (1), на которых функция V остается неизменной с течением времени. Иначе говоря, если $x_0 \ne 0$, то найдутся интервалы времени, в течение которых на решении $\varphi(x_0,t)$ будет выполняться $\dot{V}\big|_{(1)} < 0$. Это, в свою очередь, означает, что если $x_0 \ne 0$, то найдется *конечное* $T>0$, такое что

$$V(\varphi(x_0,T)) < V(x_0) \qquad (5)$$

Доказательство утверждения а). По условиям теоремы существует ε-окрестность ($\varepsilon > 0$) точки $x=0$, в которой выполняется условие (3) и $V(x)>0$, если $x \ne 0$. По тереме 1 положение $x=0$ устойчиво. Из устойчивости следует существование $\Delta > 0$, такого, что

$$\forall |x_0| < \Delta,\ \forall t \ge 0 \quad |x(t)| = |\varphi(x_0,t)| < \varepsilon \qquad (6)$$

Покажем, что Δ-окрестность является областью притяжения точки $x=0$. По условиям теоремы функция $V(x)$ в ε- окрестности монотонно убывает и ограничена снизу значением $V=0$. Поэтому она имеет предел

$$\lim_{t\to\infty} V(\varphi(x_0,t)) = V^* \tag{7}$$

Покажем, что $\forall |x_0| < \Delta \quad V^* = 0$. Отсюда в силу положительной определенности $V(x)$ будет следовать $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(x_0,t) = 0$.

Рассмотрим произвольную последовательность моментов времени $t_k (k=1,2,\ldots)$, такую, что $t_{k+1} > t_k$, $t_k \to \infty$ *при* $k \to \infty$. В силу (6) последовательность $x(t_k) = \varphi(x_0,t_k)$ ограничена. По теореме Больцано-Вейерштрасса существует сходящаяся подпоследовательность $x(t_i) = \varphi(x_0,t_i)$

$$\lim_{i\to\infty} x(t_i) = \lim_{i\to\infty} \varphi(x_0,t_i) = x^* \tag{8}$$

Поэтому предел функции $V(\varphi(x_0,t))$ можно представить в виде

$$V^* = \lim_{t\to\infty} V(\varphi(x_0,t)) = \lim_{i\to\infty} V(\varphi(x_0,t_i)) = V(x^*) \tag{9}$$

Рассматривая другой вариант вычисления предела и используя групповое свойство (2), получаем

$$V^* = \lim_{t\to\infty} V(\varphi(x_0,t+T)) = V(\varphi(x^*,T)) \tag{10}$$

Предположим, что для некоторого $|x_0| < \Delta \quad V^* > 0$. Тогда из (9) следует, что $x^* \neq 0$. Но тогда на основании (5) получаем, что найдется такое $T > 0$, что

$$V^* = V(x^*) > V(\varphi(x^*,T)) \tag{11}$$

Полученное неравенство противоречит равенству (10). Установленное противоречие доказывает, что $\forall |x_0| < \Delta \quad V^* = 0$, т.е. $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(x_0,t) = 0$.

Доказательство утверждения б). Доказательство неустойчивости проведем методом «от обратного». Предположим, что $x=0$ устойчиво. По условиям теоремы существует ε- окрестность ($\varepsilon > 0$) точки $x=0$, в которой выполняется условие (3) и имеется область $V<0$ (область значений x, в которой $V(x)<0$). Из предполагаемой устойчивости следует существование $\Delta > 0$, такого, что для любых начальных условий из Δ-окрестности выполняется (6), и существует сходящаяся подпоследовательность (8).

Выберем начальное условие $|x_0| < \Delta$ из области $V < 0$. В силу непрерывности функция $V(x)$ ограничена снизу в ε- окрестности, а в силу монотонности и условия (6) она имеет предел $\lim\limits_{t\to\infty} V(\varphi(x_0,t)) = V^*$, причем, поскольку $V(x_0) < 0$, то $V^* < 0$. Записывая этот предел в виде (9) и (10), получим $x^* \neq 0$, а на основании (5) получим неравенство (11), противоречащее равенству (10). Это противоречие опровергает предположение об устойчивости решения $x = 0$ и доказывает его неустойчивость.

Дополнение к теореме 2. *Для доказательства* утверждение *б*) *о неустойчивости необязательно требовать выполнения условий 1 и 2 теоремы в полной окрестности точки* $x = 0$. *Достаточно, чтобы они выполнялись в области* $V < 0$.

Теорема 3 (теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости). *Если существует функция* $V(x)$, *определенно положительная в окрестности положения равновесия* $x = 0$ *системы* (1), *а ее производная* $\dot{V}\big|_{(1)}$ *определенно отрицательна, то положение* $x = 0$ *асимптотически устойчиво*.

По условиям этой теоремы множество X^0 (4) состоит из единственной точки $x = 0$ и поэтому выполняются все условия теоремы 2, обеспечивающие асимптотическую устойчивость решения $x = 0$.

Теорема 4 (Четаев Н.Г.). *Пусть существует такая функция* $V(x)$, *что в любой достаточно малой окрестности точки* $x = 0$ *существует область* $V < 0$. *Если во всех точках области* $V < 0$ *производная* $\dot{V}\big|_{(1)} < 0$, *то положение равновесия* $x = 0$ *неустойчиво*.

Утверждение этой теоремы следует из дополнения к теореме 2, поскольку в области $V < 0$ выполняются условия 1 и 2 теоремы 2 о неустойчивости. Функции, удовлетворяющие условиям теоремы 4, часто называют функциями Четаева.

Простым следствием теоремы 2 является и следующая

Теорема 5 (об асимптотической устойчивости строго диссипативных систем**)**. *Если в положении равновесия* $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ *консервативной системы потенциальная энергия* $\Pi(\mathbf{q})$ *имеет строгий* ***изолированный*** *минимум, то это положение становится асимптотически устойчивым при добавлении диссипативных сил с полной диссипацией*.

Напомним, что диссипативными силами с полной диссипацией называются силы, мощность которых отрицательна на любом *движении* системы, т.е. $\mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{q}} < 0 \; \forall \dot{\mathbf{q}} \neq 0$. Вследствие этого свойства для производной от полной энергии системы будет выполняться условие (3), причем эта производная будет равно нулю только в тех точках фазового пространства, для которых $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, т.е. множество X^0 (4) состоит из неподвижных состояний системы. Но целыми траекториями на множестве неподвижных состояний могут быть только положения равновесия системы. Поэтому в силу указанной в теореме изолированности положения равновесия $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ выполняются все условия теоремы 2 об асимптотической устойчивости.

Замечание к теореме 5. Существует множество примеров, когда изолированное положение равновесия консервативной системы становится асимптотически устойчивым и при наложении сил с частичной диссипацией, и в таких примерах теорема Барбашина-Красовского является наиболее эффективным средством доказательства асимптотической устойчивости.

Литература

1. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. – М.: Физматлит, 2008. – 264 с.
2. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. – М.: Наука, 1990. – 416 с.
3. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.
4. *Четаев Н*.Г. Устойчивость движения. – 4-е издание. – М.: Наука, 1990. – 176 с.
5. *Яковенко Г.Н.* Краткий курс аналитической динамики. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. – 238 с.