ТЕОРЕМА ЭММИ НЁТЕР В КУРСЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ МФТИ

Г.Н. Яковенко

Для вычисления первого интеграла по теореме Эмми Нётер требуется, чтобы уравнения Лагранжа допускали однопараметрическую группу вариационных симметрий [1, 2, 3]. В модификации Бессель-Хагена — однопараметрическую группу дивергентных (вариационные — частный случай) симметрий [2, 3, 4]. Изучается случай, когда уравнения Лагранжа допускают гладкое семейство (не обязательно группу) дивергентных симметрий. Возможный эффект: по однопараметрическому семейству вычисляется несколько первых интегралов. В приведённом примере — десять. В основу настоящего сообщения легли статьи [5, 6, 7].

Семейство преобразований

$$\begin{aligned} &\widehat{t} = \widehat{t}\,(t, q, \tau)\,, \\ &\widehat{q}_i = \widehat{q}_i\,(t, q, \tau)\,, \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \tag{1}$$

есть решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\widehat{t}}{d\tau} &= \xi\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau\right), \\ \frac{d\widehat{q}_i}{d\tau} &= \eta_i\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau\right), \quad i = \overline{1, n}, \\ \frac{dR}{d\tau} &= r\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau\right), \end{aligned} \tag{2}$$

при начальных условиях

$$\widehat{t}\,(0) = t, \qquad \widehat{q}_i\,(0) = q_i, \qquad R\,(0) = 0. \tag{3}$$

Преобразование (1) называется преобразованием **дивергентной симметрии** лагранжевой системы

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \tag{4}$$

определённой функцией Лагранжа $L\,(t, q, \dot{q})$, если преобразование (1) связано с функцией Лагранжа соотношением

$$L\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \frac{d\widehat{q}}{d\widehat{t}}\right)\frac{d\widehat{t}}{dt} + \frac{dR}{dt} = L\left(t, q, \frac{dq}{dt}\right). \tag{5}$$

Если в (2) последнее уравнение отсутствует, в (3), (5) $R \equiv 0$, то преобразование (1) называется преобразованием **вариационной симметрии**.

ТЕОРЕМА. Пусть преобразования (1) удовлетворяют условию (5) дивергентной симметрии. Тогда у лагранжевой системы с функцией Лагранжа $L\left(t,q,\dot{q}\right)$ есть семейство первых интегралов

$$w\left(t,q,\dot{q},\tau\right)=\sum_{i=1}^{n}p_i\eta_i\left(t,q,\tau\right)-\xi\left(t,q,\tau\right)H+r\left(t,q,\tau\right), \tag{6}$$

$\xi\left(t,q,\tau\right)$**,** $\eta_i\left(t,q,\tau\right)$**,** $r\left(t,q,\tau\right)$ — функции из (2), p_i и H — обобщенные импульсы и функция Гамильтона [3]:

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i},\quad H\left(t,q,p\right)=\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{q}_i-L\left(t,q,\dot{q}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L\left(t,q,\dot{q}\right). \tag{7}$$

□ Потребуются формулы (учтены перестановочность дифференцирования по независимым переменным τ и t и уравнения (2))

$$\frac{d}{d\tau}\frac{d\widehat{t}}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{d\widehat{t}}{d\tau}=\frac{d\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{dt}=\frac{d\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{d\widehat{t}}\frac{d\widehat{t}}{dt}, \tag{8}$$

$$\frac{d}{d\tau}\frac{dR}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{dR}{d\tau}=\frac{dr\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{dt}=\frac{dr\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{d\widehat{t}}\frac{d\widehat{t}}{dt}, \tag{9}$$

$$\frac{d}{d\tau}\frac{d\widehat{q}_i}{d\widehat{t}}=\frac{d}{d\tau}\frac{\dfrac{d\widehat{q}_i}{dt}}{\dfrac{d\widehat{t}}{dt}}=\frac{\left(\dfrac{d}{d\tau}\dfrac{d\widehat{q}_i}{dt}\right)\dfrac{d\widehat{t}}{dt}-\dfrac{d\widehat{q}_i}{dt}\left(\dfrac{d}{d\tau}\dfrac{d\widehat{t}}{dt}\right)}{\left(\dfrac{d\widehat{t}}{dt}\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(\dfrac{d}{dt}\dfrac{d\widehat{q}_i}{d\tau}\right)\dfrac{d\widehat{t}}{dt}-\dfrac{d\widehat{q}_i}{dt}\left(\dfrac{d}{dt}\dfrac{d\widehat{t}}{d\tau}\right)}{\left(\dfrac{d\widehat{t}}{dt}\right)^2}=\frac{\dfrac{d\eta_i\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{dt}\dfrac{d\widehat{t}}{dt}-\dfrac{d\widehat{q}_i}{dt}\dfrac{d\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{dt}}{\left(\dfrac{d\widehat{t}}{dt}\right)^2}=$$

$$=\frac{d\eta_i\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{d\widehat{t}}-\frac{d\widehat{q}_i}{d\widehat{t}}\frac{d\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{d\widehat{t}}. \tag{10}$$

Потребуется также формула [3]

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{dH}{dt}. \tag{11}$$

Для доказательства утверждения (6) теоремы продифференцируем условие (5) по τ (учтены уравнения Лагранжа и формулы (2), (4), (8) — (11)):

$$\begin{gathered}
\left\{ \frac{\partial L}{\partial \widehat{t}} \xi\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \widehat{q}_i} \eta_i\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau\right) + \right. \\
\left. + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{\widehat{q}}_i} \left(\frac{d\eta_i\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau\right)}{d\widehat{t}} - \dot{\widehat{q}}_i \frac{d\xi\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau\right)}{d\widehat{t}} \right) \right\} \frac{d\widehat{t}}{dt} + \\
+ L \frac{d\xi\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau\right)}{d\widehat{t}} \frac{d\widehat{t}}{dt} + \frac{dr(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau)}{d\widehat{t}} \frac{d\widehat{t}}{dt} = \\
= \left\{ \frac{\partial L}{\partial \widehat{t}} \xi\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{d\widehat{t}} \frac{\partial L}{\partial \dot{\widehat{q}}_i} \eta_i\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau\right) + \right. \\
\left. + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{\widehat{q}}_i} \left(\frac{d\eta_i\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau\right)}{d\widehat{t}} - \dot{\widehat{q}}_i \frac{d\xi\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau\right)}{d\widehat{t}} \right) \right\} \frac{d\widehat{t}}{dt} + \\
+ L \frac{d\xi\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau\right)}{d\widehat{t}} \frac{d\widehat{t}}{dt} + \frac{dr(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau)}{d\widehat{t}} \frac{d\widehat{t}}{dt} \overset{(8)}{=} \\
= \left\{ -\frac{dH}{d\widehat{t}} \xi\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau\right) + \frac{d}{d\widehat{t}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{\widehat{q}}_i} \eta_i\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau\right) - \right. \\
\left. - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\widehat{q}}_i} \dot{\widehat{q}}_i - L \right) \frac{d\xi\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau\right)}{d\widehat{t}} + \frac{dr(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau)}{d\widehat{t}} \right\} \frac{d\widehat{t}}{dt} \overset{(9)}{=} \\
= \left\{ -\frac{dH}{d\widehat{t}} \xi\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau\right) + \frac{d}{d\widehat{t}} \sum_{i=1}^{n} \widehat{p}_i \eta_i\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau\right) - \right. \\
\left. - H \frac{d\xi\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau\right)}{d\widehat{t}} + \frac{dr(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau)}{d\widehat{t}} \right\} \frac{d\widehat{t}}{dt} = \\
= \frac{d}{d\widehat{t}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \widehat{p}_i \eta_i\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau\right) - \xi\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau\right) H + r(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau) \right\} \frac{d\widehat{t}}{dt} = 0.
\end{gathered}$$

Как следует из (3), при малых значениях τ выполняется $d\widehat{t}/dt \neq 0$, поэтому на решениях лагранжевой системы, соответствующей функции Лагранжа $L\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \dot{\widehat{q}}\right)$, сохраняется формула, находящаяся в фигурных скобках последнего выражения, что доказывает наличие первого интеграла (6) для лагранжевой системы с функцией Лагранжа $L(t, q, \dot{q})$. ■

ПРИМЕР. Замкнутая консервативная система. Потенциальная энергия $\Pi(r_{ik})$ зависит только от расстояний r_{ik}между точками:

$$r_{ik}^2 = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2 .$$

Функция Лагранжа:

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right) - \Pi(r_{ik}). \tag{12}$$

Обобщённые импульсы:

$$p_i^x = m_i \dot{x}_i, \quad p_i^y = m_i \dot{y}_i, \qquad p_i^z = m_i \dot{z}_i. \tag{13}$$

Функция Гамильтона:

$$H = T + \Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right) + \Pi(r_{ik}). \tag{14}$$

Для введённой в примере материальной системы известна десятипараметрическая группа симметрий [8] — группа Галилея:

$$\begin{aligned}
&\widehat{t} = t + \tau_1, && \widehat{x}_i = x_i + \tau_2, \quad \widehat{y}_i = y_i + \tau_3,\\
& && \widehat{z}_i = z_i + \tau_4;\\
&\widehat{t} = t, && \widehat{x}_i = x_i, \quad \widehat{y}_i = y_i \cos\tau_5 - z_i \sin\tau_5,\\
& && \widehat{z}_i = y_i \sin\tau_5 + z_i \cos\tau_5;\\
&\widehat{t} = t, && \widehat{x}_i = x_i \cos\tau_6 - z_i \sin\tau_6, \quad \widehat{y}_i = y_i,\\
& && \widehat{z}_i = x_i \sin\tau_6 + z_i \cos\tau_6;\\
&\widehat{t} = t, && \widehat{x}_i = x_i \cos\tau_7 - y_i \sin\tau_7,\\
& && \widehat{y}_i = x_i \sin\tau_7 + y_i \cos\tau_7, \quad \widehat{z}_i = z_i;\\
&\widehat{t} = t, && \widehat{x}_i = x_i + t\tau_8, \quad \widehat{y}_i = y_i + t\tau_9,\\
& && \widehat{z}_i = z_i + t\tau_{10};
\end{aligned}$$

Специализация параметров $\tau_1 = \tau^3$, $\tau_2 = 0$, $\tau_3 = 0$, $\tau_4 = 0$, $\tau_5 = \tau$, $\tau_6 = \dfrac{\pi}{2}\tau$, $\tau_7 = 0$, $\tau_8 = 0$, $\tau_9 = 0$, $\tau_{10} = \tau^4$ и суперпозиция τ_5, τ_6, τ_{10}, τ_1 приводит к однопараметрическому семейству (1) преобразований

$$\begin{aligned}
&\widehat{t} = t - \tau^3,\\
&\widehat{x}_i = x_i \cos\frac{\pi}{2}\tau - (y_i \sin\tau + z_i\cos\tau)\sin\frac{\pi}{2}\tau,\\
&\widehat{y}_i = y_i\cos\tau - z_i\sin\tau,\\
&\widehat{z}_i = x_i\sin\frac{\pi}{2}\tau + (y_i\sin\tau + z_i\cos\tau)\cos\frac{\pi}{2}\tau + t\tau^4.
\end{aligned}$$

Условие (5) дивергентной симметрии удовлетворяется при

$$R = -\sum_{i=1}^{N} m_i\left\{x_i\sin\frac{\pi}{2}\tau + (y_i\sin\tau + z_i\cos\tau)\cos\frac{\pi}{2}\tau\right\}\tau^4 - \frac{1}{2}t\tau^8\sum_{i=1}^{N} m_i.$$

Функции $\widehat{t}$, $\widehat{x}_i$, $\widehat{y}_i$, $\widehat{z}_i$, R есть решение системы (2), (3) при

$$\begin{aligned}
\xi &= -3\tau^2,\\
\eta_i^x &= \left\{\left(\widehat{t} + \tau^3\right)\tau^4 - \widehat{z}_i\right\}\frac{\pi}{2} - \widehat{y}_i\sin\frac{\pi}{2}\tau,\\
\eta_i^y &= \widehat{x}_i\sin\frac{\pi}{2}\tau - \widehat{z}_i\cos\frac{\pi}{2}\tau + \left(\widehat{t} + \tau^3\right)\tau^4\cos\frac{\pi}{2}\tau,\\
\eta_i^z &= \widehat{x}_i\frac{\pi}{2}\tau + \widehat{y}_i\cos\frac{\pi}{2}\tau + 4\left(\widehat{t} + \tau^3\right)\tau^3,\\
r &= -\frac{\pi}{2}\tau^4\sum_{i=1}^{N} m_i\widehat{x}_i - \tau^4\sum_{i=1}^{N} m_i\widehat{y}_i\cos\frac{\pi}{2}\tau - 4\tau^3\sum_{i=1}^{N} m_i\widehat{z}_i.
\end{aligned}\tag{15}$$

Первый интеграл (6) с учётом (13) — (15) равен

$$\begin{aligned}
w(\tau) &= K_x\cos\frac{\pi}{2}\tau - \frac{\pi}{2}K_y + K_z\sin\frac{\pi}{2}\tau +\\
&+ P_x\tau^7 + P_y\tau^7\cos\frac{\pi}{2}\tau + 4P_z\tau^6 +\\
&+ G_x\tau^4 + G_y\tau^4\cos\frac{\pi}{2}\tau + 4G_z\tau^3 + 3H\tau^2.
\end{aligned}\tag{16}$$

Введены обозначения для проекций кинетического момента $\mathbf{K}_O$, импульса $\mathbf{P}$, вектора Галилея $\mathbf{G}$:

$$\begin{aligned}
&K_x = \sum_{i=1}^{N} m_i(y_i\dot z_i - z_i\dot y_i),\\
&K_y = \sum_{i=1}^{N} m_i(z_i\dot x_i - x_i\dot z_i), \quad K_z = \sum_{i=1}^{N} m_i(x_i\dot y_i - y_i\dot x_i),\\
&P_x = \sum_{i=1}^{N} m_i\dot x_i, \quad P_y = \sum_{i=1}^{N} m_i\dot y_i, \quad P_z = \sum_{i=1}^{N} m_i\dot z_i,\\
&G_x = P_x t - m x_c, \quad G_y = P_y t - m y_c, \quad G_z = P_z t - m z_c.
\end{aligned}\tag{17}$$

Подстановка в (16) $\tau = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 5$ приводит к алгебраической системе из 10 уравнений и к выводу, что механическая система с функцией Лагранжа (12) обладает 10 функционально независимыми первыми интегралами: H и (17).

Список литературы

[1] Noether E. Invariante Variationsprobleme. Nachr. König. Gesell. Wissen. Göttingen, Math-Phys. Kl. 1918. S. 235 — 257. (Перевод в кн.: Вариационные принципы механики. — М.: Физматгиз, 1959. С. 611 — 630.)

[2] Яковенко Г.Н. Симметрии уравнений Гамильтона и Лагранжа - М.: Изд. МЗ Пресс, 2006. 120 с.

[3] Яковенко Г.Н. Краткий курс аналитической динамики — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. — 238 с.

[4] Bessel-Hagen E. Über die Erhaltungsätze der Electrodynamic // Math. Ann., 1921. Bd. 84. S. 258 — 276.

[5] Яковенко Г.Н. К теореме Эмми Нётер: "одним махом семерых убивахом" // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. "Герценовские чтения — 2006". — СПб., 2006. — С. 112 — 119.

[6] Яковенко Г.Н. Синергетический вариант теоремы Бессель-Хагена // Синергетические идеи в образовании: Сборник научных трудов Первой Всероссийской научно-практической конференции "Образование. Синергетика и новое мировидение" 13 — 15 апреля 2006 г. / Под ред. Н.В. Аммосовой, Б.Б. Коваленко — Астрахань: Изд-во АИПКП, 2006. С. 63 — 68.

[7] Яковенко Г.Н. Теорема Эмми Нётер — негрупповой вариант // Современные методы физико-математических наук. Труды международной конференции. 9 — 14 октября 2006 г., Орёл. Т. 1. — Орёл: Издательство ОГУ, 2006. С. 140 — 143.

[8] Engel F. Über zehn algemeinen Integrale der klassischen Mechanik, Nachr. König. Gesell. Wissen. Göttingen, Math-Phys. Kl. 1916. S. 270 — 275.