

# Концепции и модели физики

Кузьмичев Сергей Дмитриевич

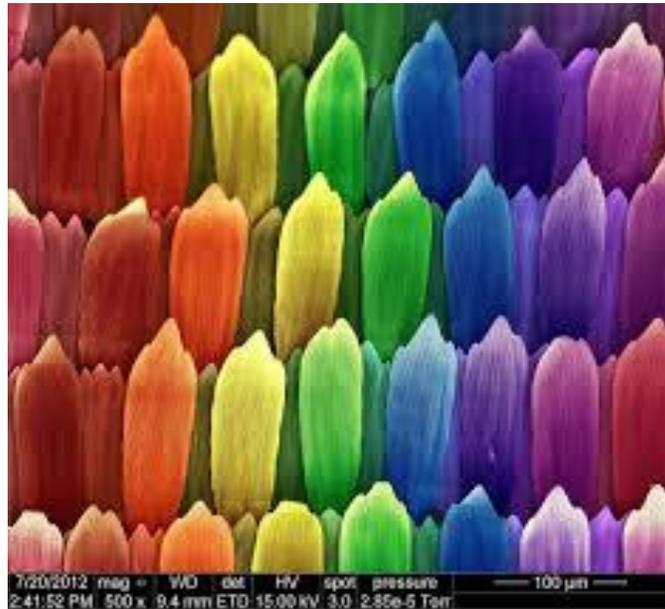


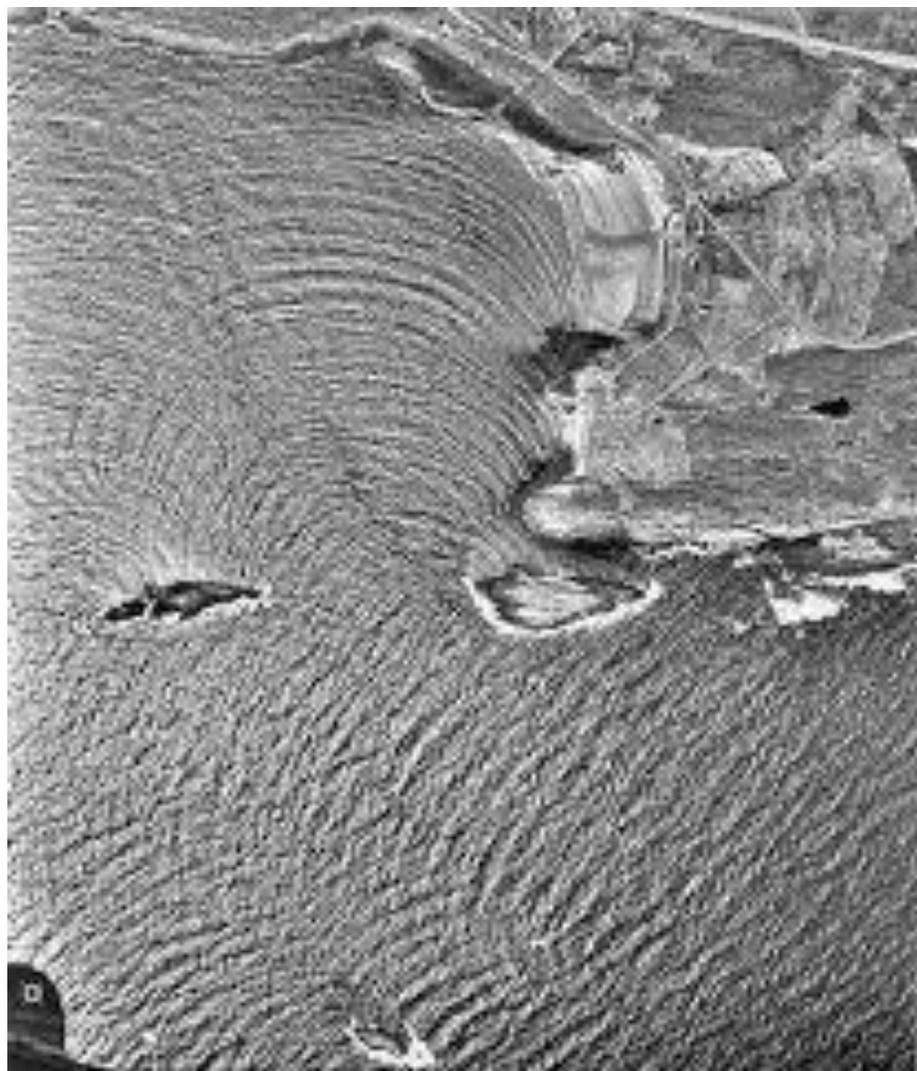
## Содержание лекции №4

1. Постановка задачи о дифракции.
2. Границы применимости геометрической оптики. Волновой параметр. Дифракционные явления при различных значениях волнового параметра.
3. Принцип Гюйгенса-Френеля.
4. Дифракция Френеля на круглом отверстии. Зоны Френеля. Зонная пластинка.
5. Дифракция Френеля на диске. Пятно Пуассона.
6. Линза.

# Постановка задачи о дифракции

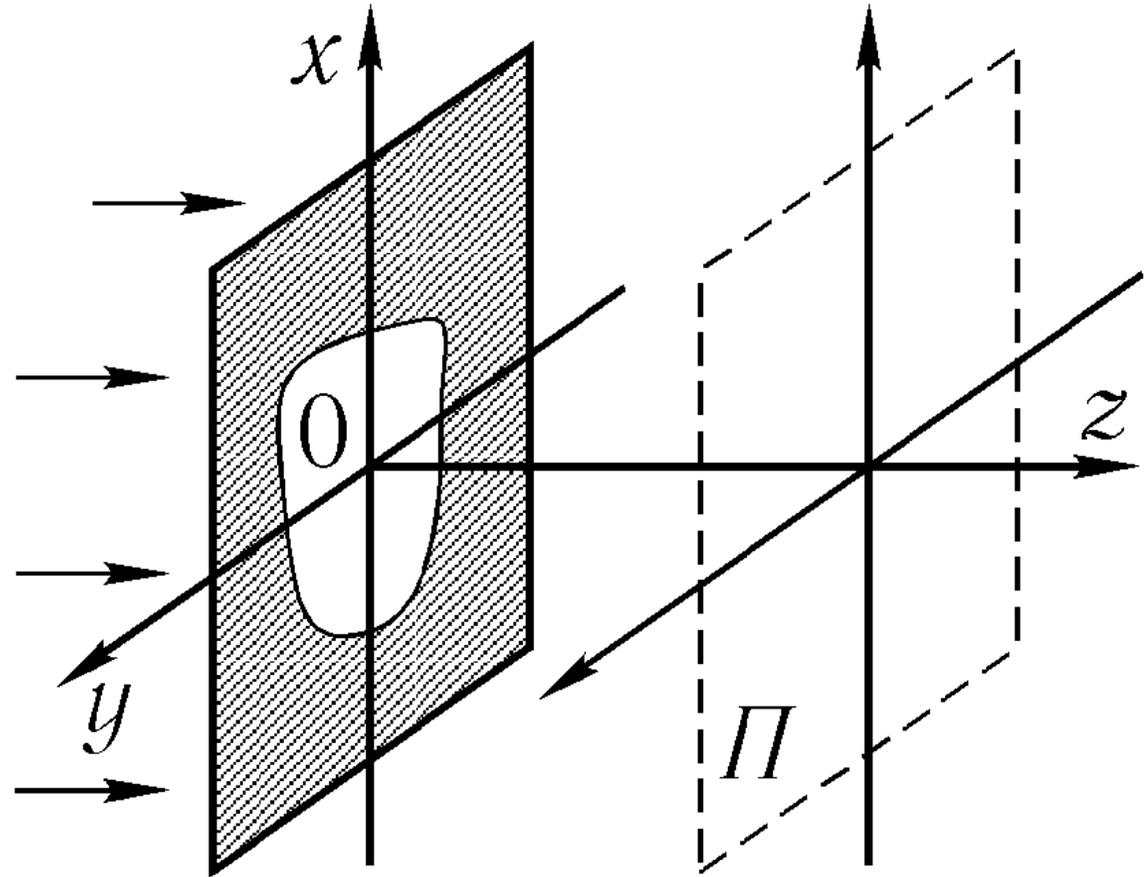
***Дифракция волн*** — совокупность явлений, в которых проявляются отклонения от законов геометрической оптики при распространении волн в неоднородных средах (например, при наличии препятствий). Она представляет собой **универсальное волновое явление** и характеризуется одними и теми же законами при наблюдении волновых полей разной природы.





# Постановка задачи о дифракции

- Падающая волна
- Экран с отверстием
- Плоскость наблюдения
- Граничные условия
- Метод расчёта искомого поля



# Приближенные граничные условия Кирхгофа

$$f(x, y, z = +0) = \begin{cases} f_s(x, y, z = 0) & \text{в точках,} \\ & \text{принадлежащих отверстию;} \\ 0 & \text{в точках, закрытых непрозрачной} \\ & \text{частью тонкого экрана} \end{cases}$$

При условии  $b \gg \lambda, z \gg \lambda$  наблюдается удовлетворительно согласие с экспериментом

$$f(x, y, z = +0) = f_s(x, y, z = 0) \cdot t(x, y)$$

$t(x, y)$  - функция пропускания

# Волновой параметр

$\lambda, b, z$  - длина волны, характерный размер препятствия, расстояние до плоскости наблюдения

$$p = \frac{\sqrt{\lambda z}}{b} \quad - \text{ волновой параметр}$$

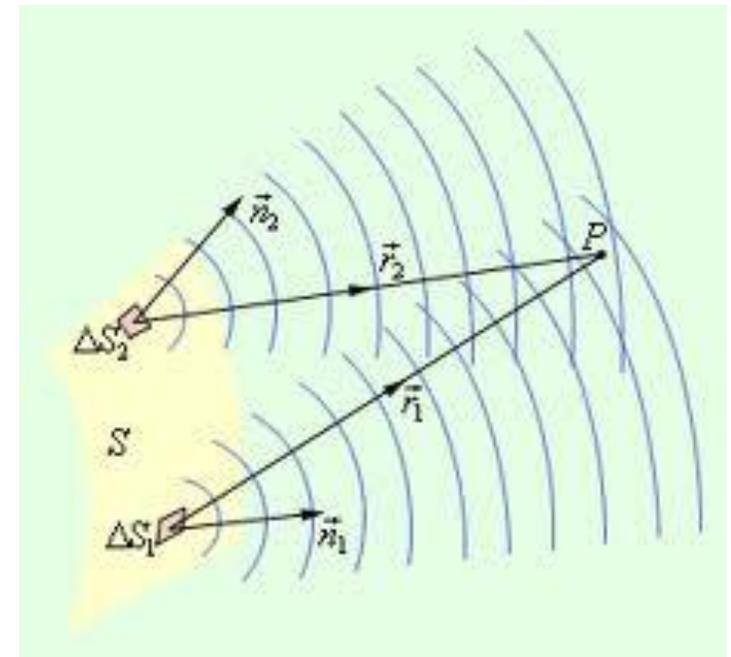
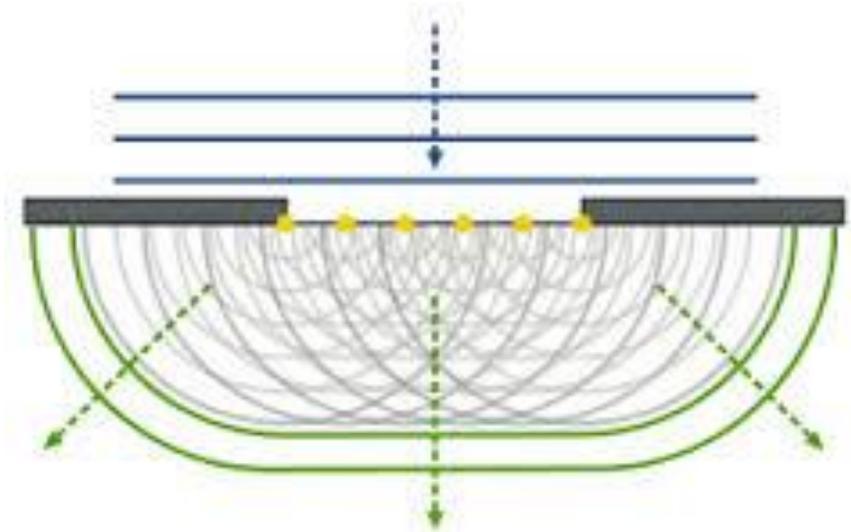
$p \ll 1$  - область геометрической оптики

$p \gg 1$  - область дифракции Фраунгофера

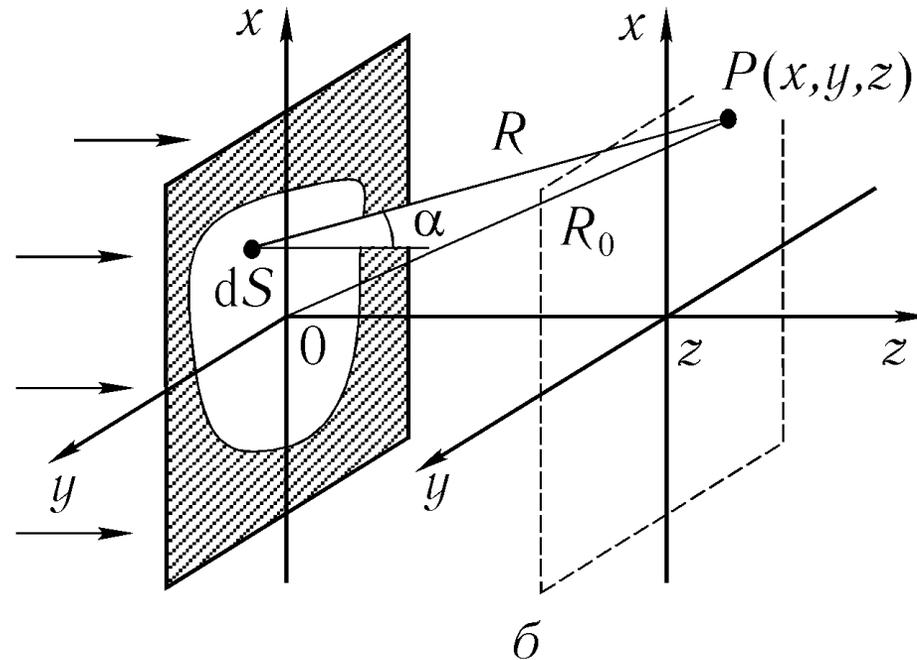
$p \approx 1$  - область дифракции Френеля

# Принцип Гюйгенса-Френеля

- ❖ Каждую малую площадку на плоскости экрана (или волновой поверхности) можно рассматривать как источник вторичной волны.
- ❖ Вторичные волны когерентны.
- ❖ Поле в любой точке наблюдения есть результат интерференции этих вторичных волн.

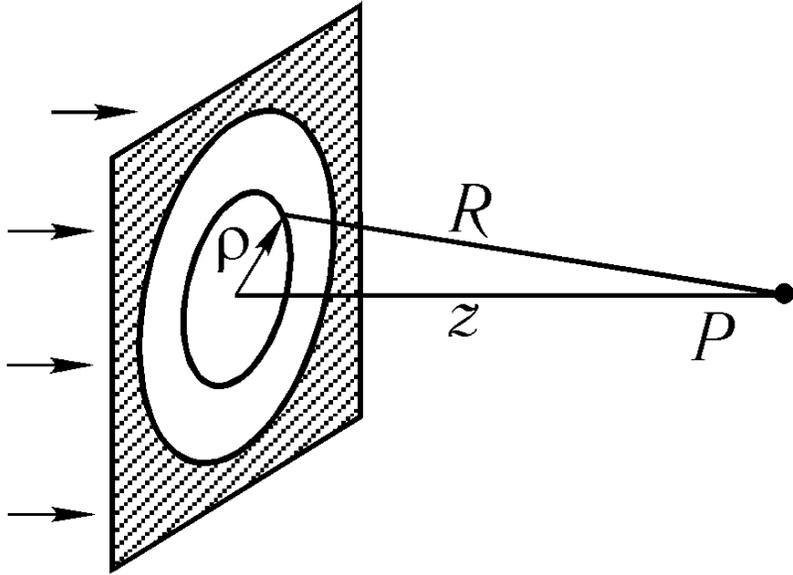


# Принцип Гюйгенса-Френеля (математическая формулировка)



$$f(P) = K_0 \cdot \int_S a_0(x, y) \cdot e^{i\varphi_0(x, y)} \cdot \frac{e^{ikR}}{R} \cdot \cos \alpha \cdot dS$$

# Круглое отверстие в непрозрачном экране (поле на оси)

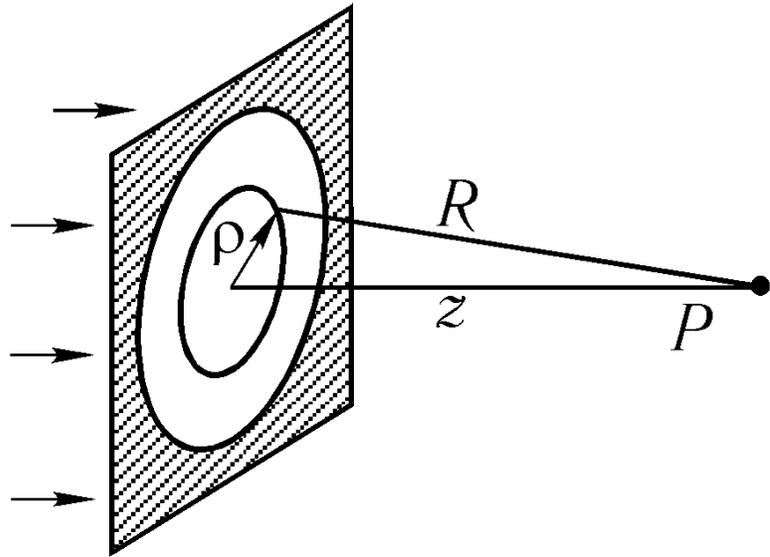


- экран освещается **плоской** нормально падающей волной с амплитудой  $a_0$
- радиус отверстия  $\rho_0$  много меньше расстояния  $z$  до точки наблюдения
- точка наблюдения находится **на оси отверстия**

$$\cos \alpha \approx 1, \quad 1/R \approx 1/z$$

$$f(P) = K_0 \cdot \int_S a_0(x, y) \cdot e^{i\varphi_0(x, y)} \cdot \frac{e^{ikR}}{R} \cdot \cos \alpha \cdot dS \approx K_0 \cdot \frac{a_0}{z} \int_S e^{ikR} \cdot dS$$

# Круглое отверстие в непрозрачном экране



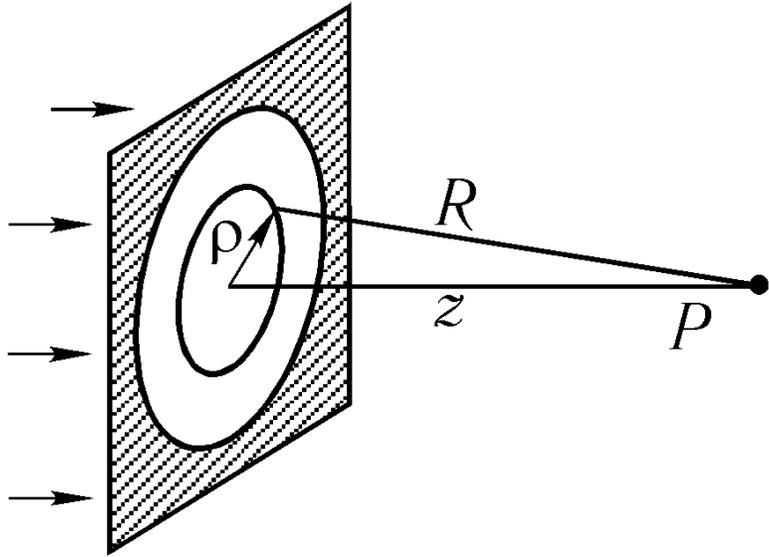
$$R = \left( z^2 + \rho^2 \right)^{1/2} = z \left( 1 + \rho^2 / z^2 \right)^{1/2} \approx$$

$$\approx z + \frac{\rho^2}{2z}, \quad \rho \ll z$$

$$dS = 2\pi\rho d\rho$$

$$f(P) = K_0 \cdot \frac{a_0}{z} \int_S e^{ikR} \cdot dS \approx K_0 \cdot \frac{a_0 \cdot e^{ikz}}{z} \int_S e^{i\frac{k}{2z}\rho^2} \cdot 2\pi\rho d\rho$$

# Круглое отверстие в непрозрачном экране



$$\rho^2 = \xi, \quad d\xi = 2\rho d\rho$$

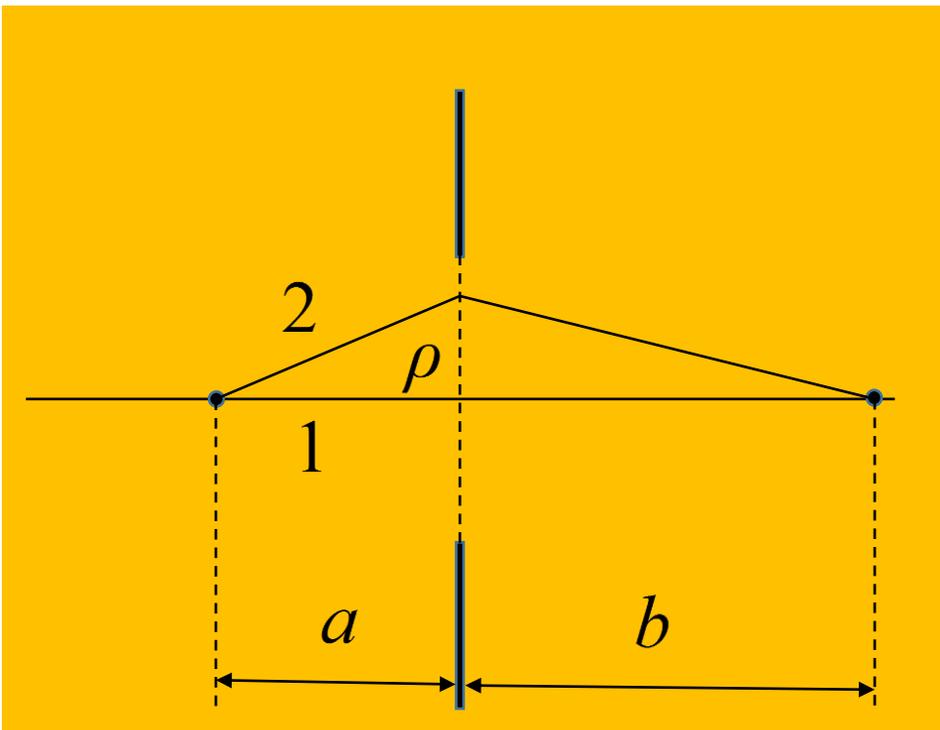
$$f(P) = K_0 \cdot \frac{a_0 \cdot e^{ikz}}{z} \pi \int_0^{\rho_0^2} e^{i\frac{k}{2z}\xi} d\xi$$

$$f(P) = K_0 \cdot \frac{a_0 \lambda \cdot e^{ikz}}{i} \cdot \left( e^{i\frac{k}{2z}\rho_0^2} - 1 \right)$$

$$\frac{k}{2z_1} \rho_0^2 = 2\pi, \quad z_1 = \frac{\rho_0^2}{2\lambda}, \quad f(z_1) = 0 \quad !!!$$

# Зоны Френеля

- Круглое отверстие в непрозрачном экране
- Точечный источник на оси
- Точка наблюдения на оси

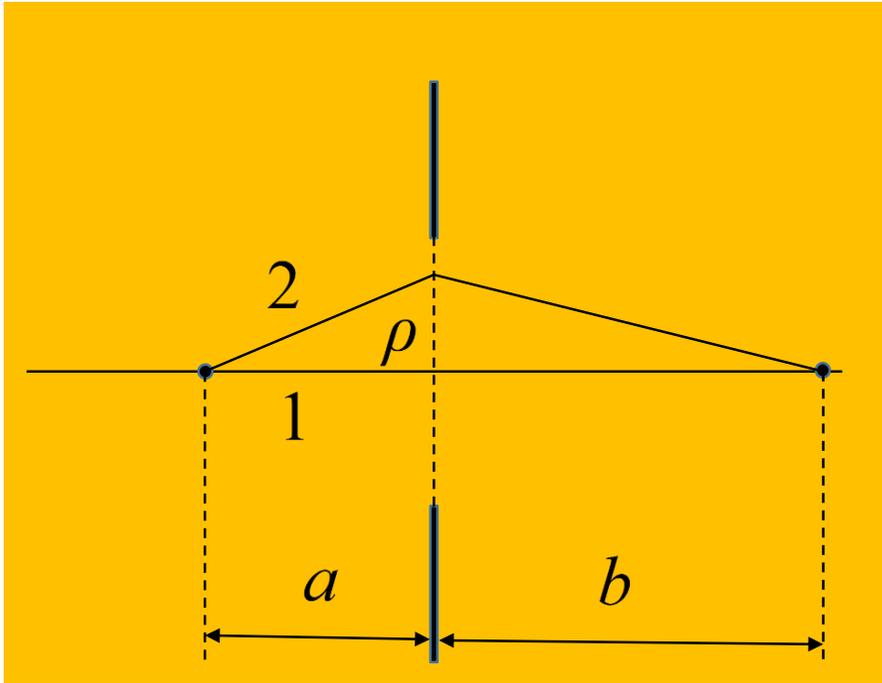


$$L_1 = a + b, \quad \rho \ll a, b$$

$$L_2 = \sqrt{a^2 + \rho^2} + \sqrt{b^2 + \rho^2} \approx a + b + \frac{\rho^2}{2a} + \frac{\rho^2}{2b}$$

$$\Delta = L_2 - L_1 = \frac{\rho^2}{2a} + \frac{\rho^2}{2b} = \frac{\rho^2}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

# Круглое отверстие в непрозрачном экране (точечный источник на оси)



$$\Delta = L_2 - L_1 = \frac{\rho^2}{2a} + \frac{\rho^2}{2b} = \frac{\rho^2}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

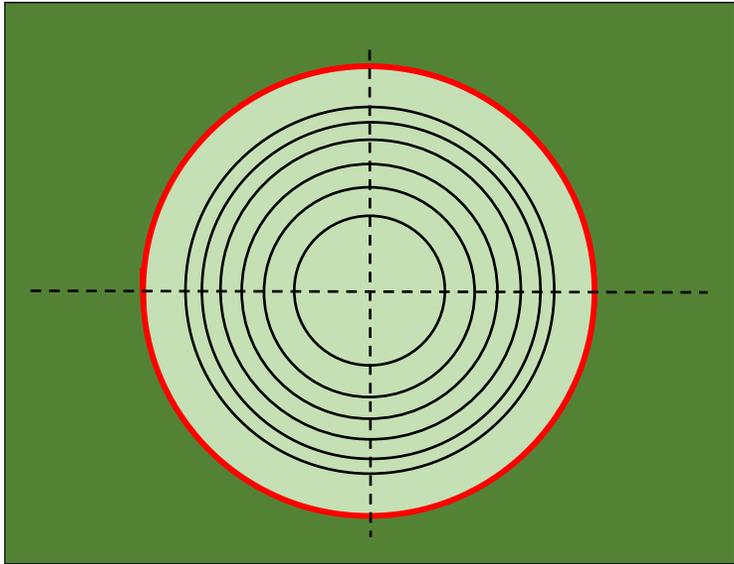
$$\Delta_m = m \cdot \frac{\lambda}{2}, \quad \Delta = \frac{\rho_m^2}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

$$\rho_m = \sqrt{m \frac{\lambda ab}{a + b}}$$

$\rho_m$  - радиус  $m$ -ой зоны Френеля  
Кольцевые зоны расположены в  
плоскости экрана



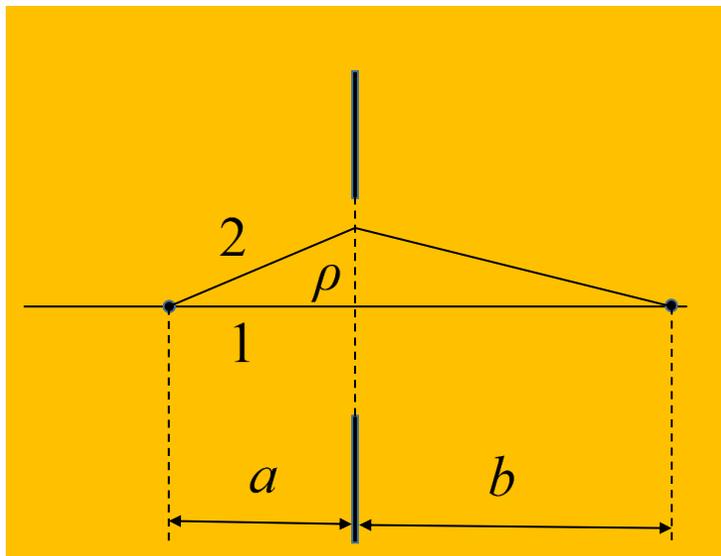
# Круглое отверстие в непрозрачном экране (точечный источник на оси)



$$\rho_m = \sqrt{m \frac{\lambda ab}{a + b}}$$

$$S_{\text{одной зоны}} = \pi \rho_{m+1}^2 - \pi \rho_m^2 = \frac{\pi \lambda ab}{a + b} = \text{const}$$

# Круглое отверстие в непрозрачном экране (точечный источник на оси)

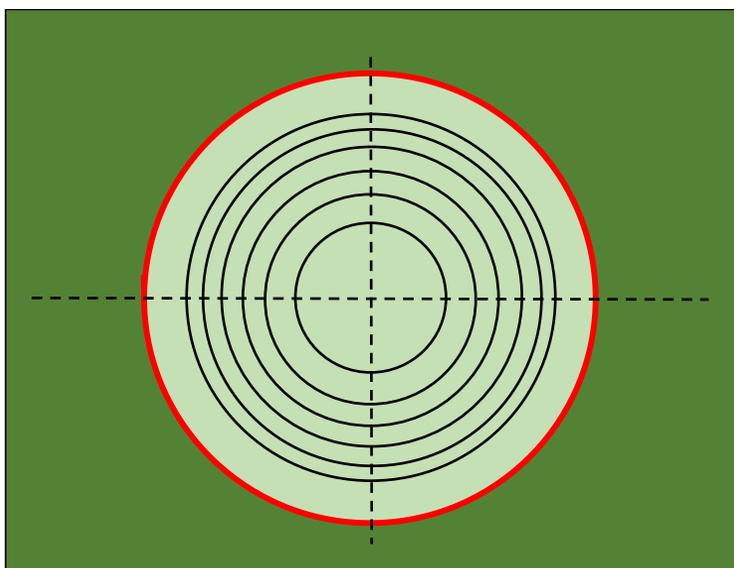


$$\rho_m = \sqrt{m \frac{\lambda ab}{a + b}}$$

$a \rightarrow \infty$  (плоская волна)

$$r_m = \sqrt{m \lambda b}$$

$$S_{\text{одной зоны}} = \pi \lambda b = \text{const}$$



# Круглое отверстие в непрозрачном экране (точечный источник на оси)

Число открытых зон Френеля

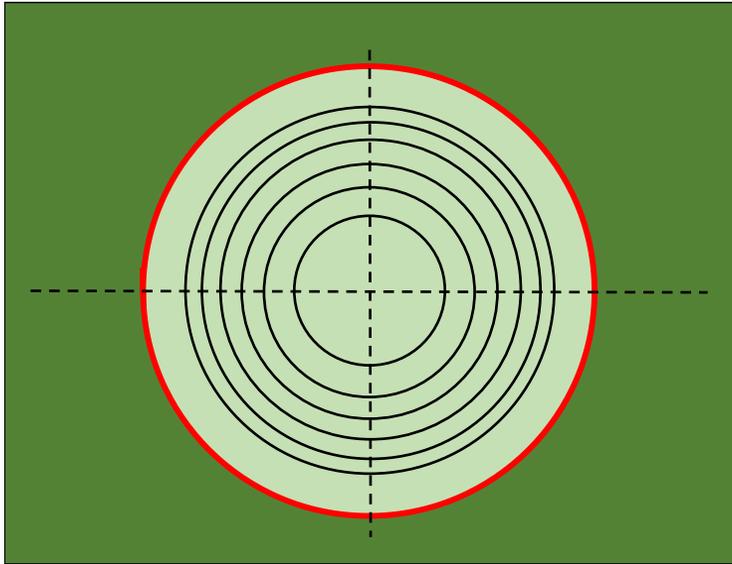
$$N = \frac{S_{отв}}{S_{одной\ зоны}} = \frac{\rho_0^2 \cdot (a + b)}{\lambda ab}$$

$$a \rightarrow \infty$$

$$N = \frac{\rho_0^2}{\pi \lambda b}$$

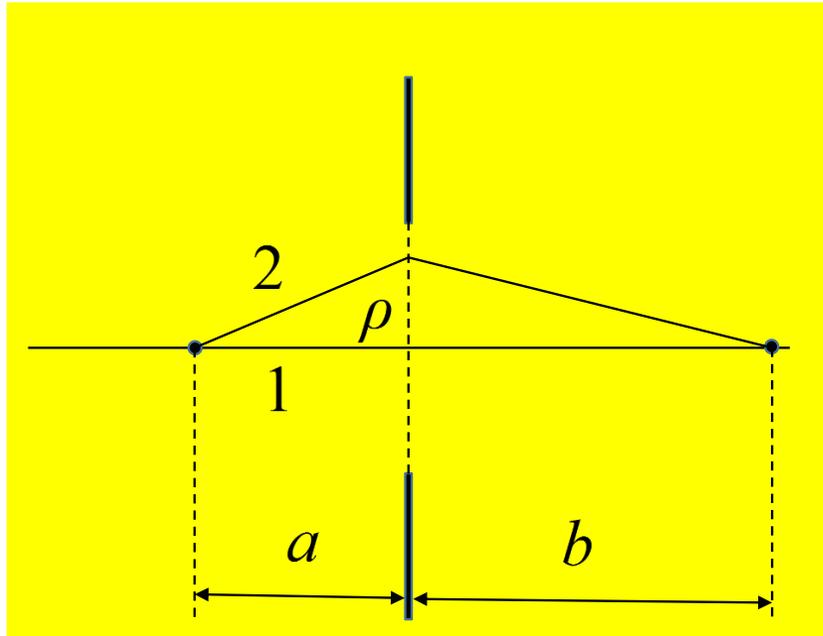
$$a = 1 \text{ м}, \quad b = 1 \text{ м}, \quad \lambda = 500 \text{ нм}, \quad m = 1$$

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{\lambda ab}{a + b}} = 0,5 \text{ мм}$$



# Круглое отверстие в непрозрачном экране (точечный источник на оси)

$$f(P) = K_0 \cdot \int_S a_0(x, y) \cdot e^{i\varphi_0(x, y)} \cdot \frac{e^{ikR}}{R} \cdot \cos \alpha \cdot dS$$



$$a_0(x, y) e^{i\varphi_0(x, y)} = \frac{C}{\sqrt{a^2 + \rho^2}} e^{ik\sqrt{a^2 + \rho^2}}$$

$$\frac{e^{ikR}}{R} = \frac{e^{ik\sqrt{b^2 + \rho^2}}}{\sqrt{b^2 + \rho^2}}$$

$$\cos \alpha \approx \frac{b}{\sqrt{b^2 + \rho^2}}, \quad dS = 2\pi\rho d\rho$$

# Круглое отверстие в непрозрачном экране (точечный источник на оси)

Вклад одной зоны с номером  $m$  в поле в точке наблюдения

$$A_m(P) = \int_{\rho_{m-1}}^{\rho_m} K_0 C \frac{e^{ik(\sqrt{a^2+\rho^2}+\sqrt{b^2+\rho^2})}}{\sqrt{a^2+\rho^2} \cdot \sqrt{b^2+\rho^2}} \frac{b}{\sqrt{b^2+\rho^2}} \cdot 2\pi\rho d\rho$$

$$A_m(P) \approx \frac{K_m C}{ab} \cdot e^{ik(a+b)} \int_{\rho_{m-1}}^{\rho_m} e^{i\frac{k\rho^2}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)} \cdot 2\pi\rho d\rho, \quad a, b \gg \rho$$

$$A_m(P) = \frac{K_m C \cdot e^{ik(a+b)}}{a+b} \cdot \frac{2\pi}{ik} \cdot \left( e^{i\frac{k\rho_m^2}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)} - e^{i\frac{k\rho_{m-1}^2}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)} \right)$$

# Круглое отверстие в непрозрачном экране (точечный источник на оси)

$$A_m(P) = \frac{K_m C \cdot e^{ik(a+b)}}{a+b} \cdot \frac{2\pi}{ik} \cdot \left( e^{i \frac{k\rho_m^2}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)} - e^{i \frac{k\rho_{m-1}^2}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)} \right)$$

$$\frac{\rho_m^2}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = m \frac{\lambda}{2}, \quad \frac{\rho_{m+1}^2}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = (m+1) \frac{\lambda}{2}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$A_m(P) = \frac{K_m C \cdot e^{ik(a+b)}}{a+b} \cdot \frac{2\pi}{ik} \cdot e^{im \frac{\lambda k}{2}} \left( 1 - e^{i \frac{\lambda k}{2}} \right) = \frac{K_m C \cdot e^{ik(a+b)}}{a+b} \cdot \frac{4\pi}{ik} \cdot (-1)^m$$

$$A_m(P) = -A_{m+1}(P)$$

# Круглое отверстие в непрозрачном экране (точечный источник на оси)

$$A_m(P) = \frac{K_m C \cdot e^{ik(a+b)}}{a+b} \cdot \frac{4\pi}{ik} \cdot (-1)^m,$$

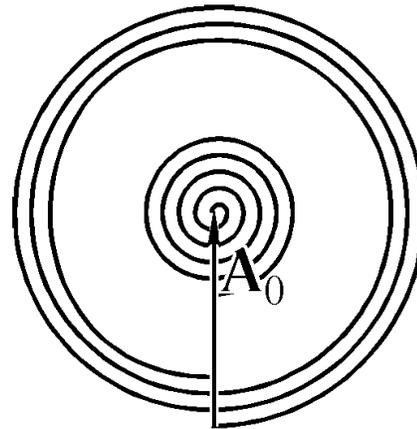
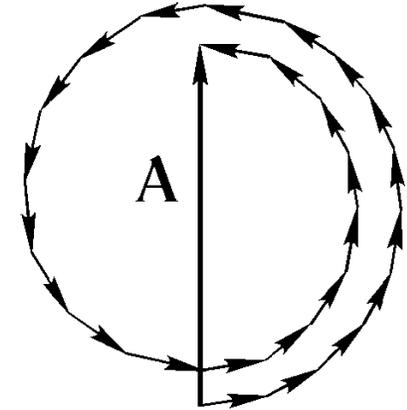
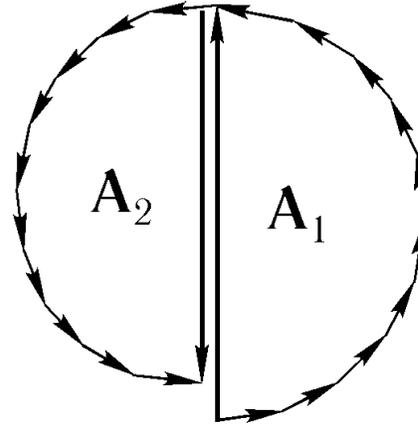
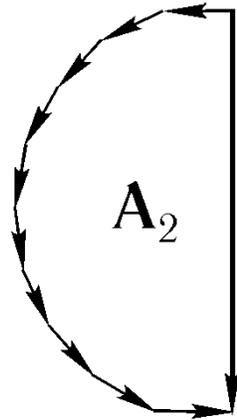
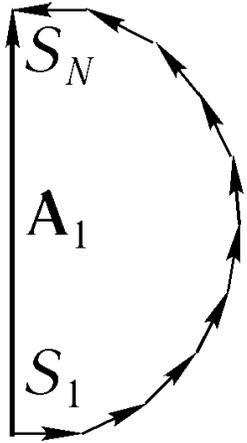
$$K_m \approx K_{m+1}, \quad K_m < K_{m+1}, \quad A_{m+1} \approx -A_m, \quad |A_{m+1}| < |A_m|$$

$$A_\Sigma(P) = \sum_m A_m(P)$$

$$A_\Sigma(P) = \frac{1}{2} A_1, \quad A_\Sigma(P) = \frac{C \cdot e^{ik(a+b)}}{a+b} = \frac{1}{2} \cdot \frac{K_1 C \cdot e^{ik(a+b)}}{a+b} \cdot \frac{4\pi}{ik} \cdot (-1)$$

$$K_1 = -\frac{ik}{2\pi} = \frac{k}{2\pi} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$

# Векторная диаграмма

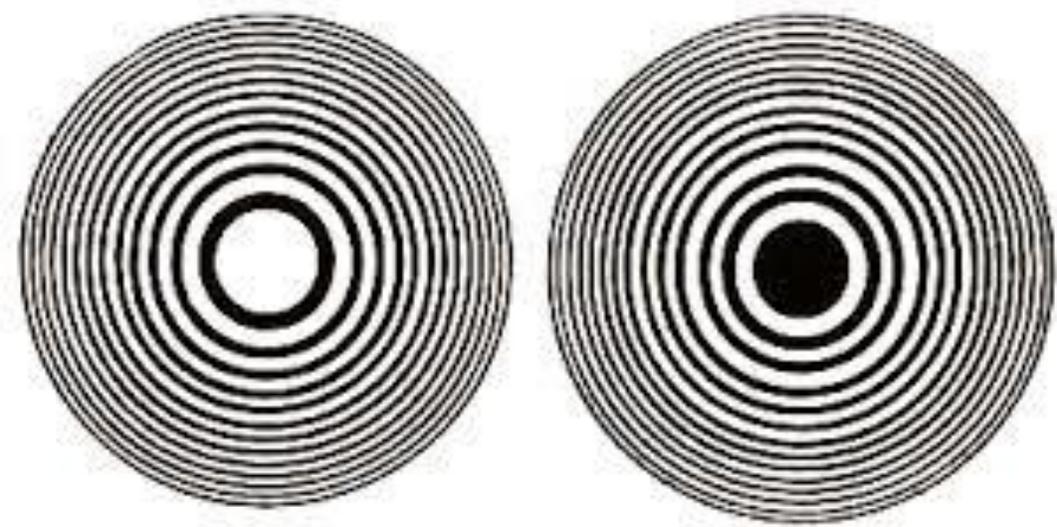


$$A_0(P) = \frac{1}{2} A_1(P)$$

# Картина дифракции Френеля на круглом отверстии при разном числе открытых зон



# Зонные пластинки



$I_0 = A_0^2$  - интенсивность света в точке наблюдения в отсутствии препятствий

$I_1 = A_1^2 = (2A_0)^2 = 4I_0$  - интенсивность света в точке наблюдения для отверстия, открывающего одну первую зону Френеля

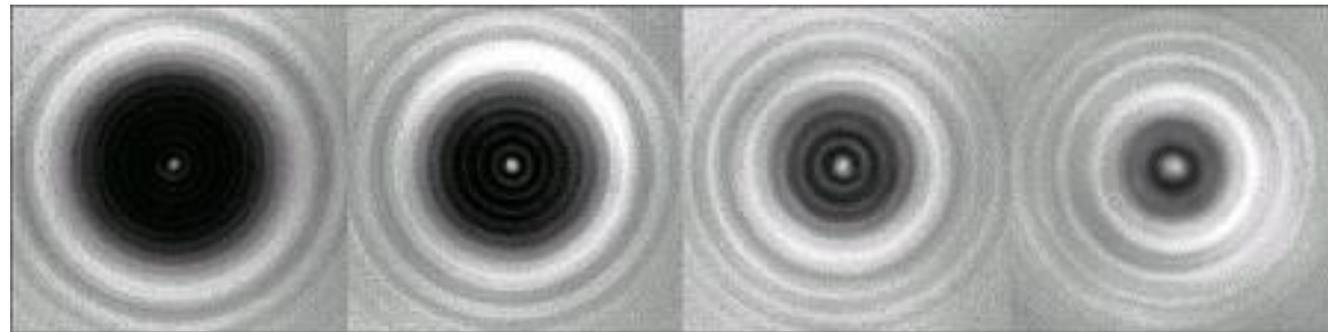
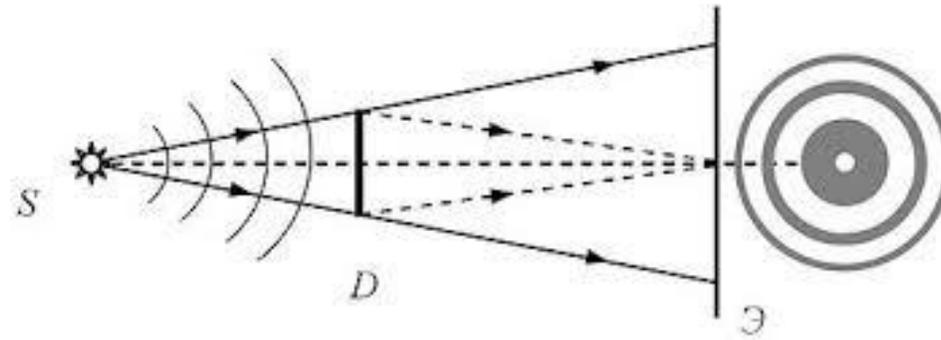
$I_n = (nA_1)^2 = (2nA_0)^2 = 4n^2 I_0$  - интенсивность света в точке наблюдения для пластинки, открывающей  $n$  первых нечётных зон Френеля

# Пятно Пуассона

**Пятно Пуассона** — это яркое пятно, возникающее в области геометрической тени за непрозрачным диском, освещённым направленным пучком света. Это явление стало одним из веских подтверждений волновой теории света.



Симеон Дени Пуассон



Можно ли увидеть пятно Пуассона от Луны?

$$R_L = R_M = \sqrt{M\lambda b},$$

$$R_L = 1737 \text{ км}, \quad b \approx 360000 \text{ км}, \quad \lambda = 0,5 \text{ мкм}, \quad a \gg b$$

$$R_{M+1} = \sqrt{(M+1)\lambda b},$$

$$\Delta R = R_{M+1} - R_M = \frac{R_{M+1}^2 - R_M^2}{R_{M+1} + R_M} \approx \frac{\lambda b}{D_L} \approx 10^{-4} \text{ м}$$

$h \approx 100 \text{ м} \gg \Delta R \rightarrow$  невозможно увидеть

# Линза и дифракция Френеля

- ❖ Линза уравнивает фазы волн, сходящихся в её фокус
- ❖ Спираль Френеля «разворачивается» в прямую линию
- ❖ Векторная диаграмма – прямая линия

$$R_{\text{линзы}} = \sqrt{m\lambda F},$$

*Вклад одной зоны –  $\pi A_0$*

*Вклад  $m$  первых открытых зон –  $m\pi A_0 = \frac{\pi D_l^2}{4\lambda F} A_0$*

$$\frac{I}{I_0} = \left( \frac{\pi D_l^2}{4\lambda F} \right)^2 \gg 1$$