Концепции и модели физики

Кузьмичев Сергей Дмитриевич

МФТИ
Московский Физико-Технический Институт

Содержание лекции №9

1. Взаимная энергия системы зарядов.
2. Энергия плоского конденсатора.
3. Энергия электрического поля и её локализация в пространстве. Объёмная плотность энергии.
4. Энергетический метод вычисления сил в электрическом поле.
5. Постоянный ток. Сила и плотность тока.
6. Закон Ома в интегральной и дифференциальной формах.
7. Работа и мощность постоянного тока.
8. Закон Джоуля-Ленца.
9. Процесс установления тока в цепи с конденсатором.
10. Токи в неограниченных средах.

Взаимная энергия системы зарядов

а) Энергия взаимодействия двух точечных зарядов

$$U(\infty) = 0, \quad U(r_{12}) - U(\infty) = A_{внеш,12}$$

$$A_{внеш,12} = q_1\varphi_2 = q_2\varphi_1 = k\frac{q_1q_2}{r_{12}}$$

$$U(r_{12}) = q_1\varphi_2 = q_2\varphi_1 = \frac{1}{2}\left(q_1\varphi_2 + q_2\varphi_1\right)$$

б) Энергия взаимодействия системы зарядов

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i\neq k} q_i\varphi_k$$

в) Энергия жёсткого диполя в однородном поле

$$\boxed{U = (+q)\varphi_+ + (-q)\varphi_- = -q\cdot\left(\varphi(\vec{r}) - \varphi(\vec{r}+\vec{l})\right) = -q\cdot\vec{l}\vec{E} = -\vec{p}\vec{E}}$$

г) Энергия взаимодействия в случае непрерывного распределения зарядов в пространстве с объёмной плотностью $\rho(\vec{r})$

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\int_V \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})\,dV}$$

д) Энергия взаимодействия в случае непрерывного распределения зарядов по поверхности с поверхностной плотностью заряда $\sigma(\vec{r})$

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\int_S \sigma(\vec{r})\varphi(\vec{r})\,dS}$$

Энергия электрического поля в плоском конденсаторе

(энергия плоского конденсатора)

а) По определению энергии зарядов

$$U = \frac{1}{2}\left(+q\right)\varphi_{+} + \frac{1}{2}\left(-q\right)\varphi_{-} =$$

$$= \frac{1}{2}q\left(\varphi_{+} - \varphi_{-}\right) = \frac{q^{2}}{2C} = \frac{C\left(\varphi_{+} - \varphi_{-}\right)^{2}}{2}$$

б) По величине работы, затраченной на создание такой системы зарядов

$$dA = dq\cdot\left(\varphi_{+} - \varphi_{-}\right) = dq\cdot\frac{q}{C}$$

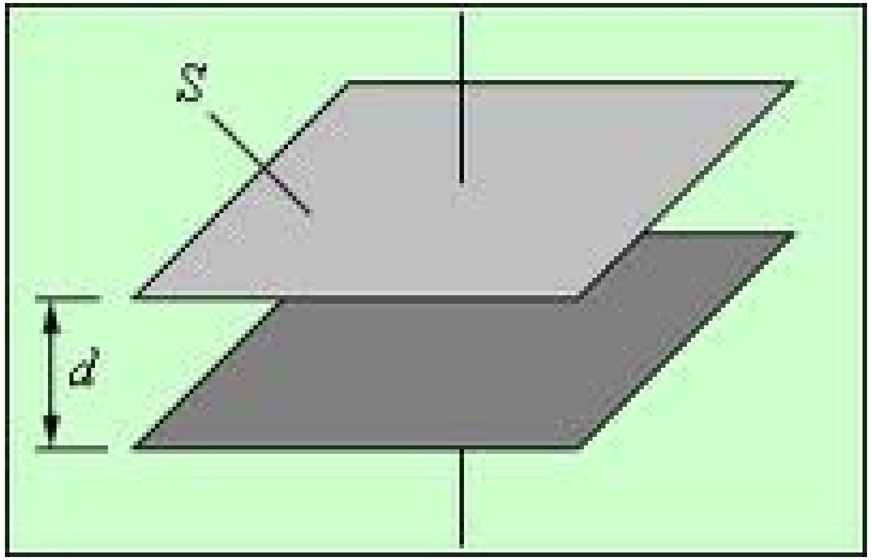
$$A = U = \frac{q^{2}}{2C}$$

Плотность энергии электрического поля

$$\varphi_+ - \varphi_- = Ed, \quad C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d}$$

$$U = \frac{C\left(\varphi_+ - \varphi_-\right)^2}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon S}{4\pi d}\cdot\left(Ed\right)^2 = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}\cdot Sd$$

$$w = \frac{U}{V} = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}$$



Для веществ, где выполняется соотношение $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$

$$w = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \frac{ED}{8\pi} = \frac{D^2}{8\pi\varepsilon}$$

Энергия равномерно заряженного шара

а) Шар равномерно заряжен по поверхности и находится в вакууме

$$U = \int_V \frac{\left(E\left(r\right)\right)^2}{8\pi} dV = \int_{r=R}^{\infty} \frac{1}{8\pi} \cdot \left(\frac{Q}{r^2}\right)^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{2R}$$

б) Шар равномерно заряжен по объёму

$$U\left(r < R\right) = \int_{r=0}^{r=R} \frac{1}{8\pi} \cdot \left(\frac{Q}{R^3} r\right)^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{10R}$$

$$U\left(r \geq R\right) = \int_{r=R}^{\infty} \frac{1}{8\pi} \cdot \left(\frac{Q}{r^2}\right)^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{2R}$$

$$U = U\left(r < R\right) + U\left(r \geq R\right) = \frac{3Q^2}{5R}$$

Энергетический метод вычисления сил в электрическом поле

Метод виртуальных перемещений $\delta A = F \cdot \delta x$

а) На пластинах конденсатора постоянные заряды

$$U = U(x) = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2 4\pi x}{2S} = \frac{2\pi q^2}{S} x$$

$$dA_{внеш} = F_{внеш,x} dx = dU = \frac{2\pi q^2}{S} dx, \qquad F_{внеш,x} = -F_{эл,x}$$

$$F_{эл,x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{2\pi q^2}{S}$$

б) Постоянная разность потенциалов

$$\varphi_+ - \varphi_- =$$ [redacted]

$$U = U(x) = \frac{C(\varphi_+ - \varphi_-)^2}{2} = \frac{C\mathcal{E}^2}{2}, \qquad \delta U = \frac{\mathcal{E}^2}{2}\delta C$$

$$dA_{внеш} = dA_{бат} + dA_{мех} = \delta U,$$

$$dA_{бат} = \delta q \cdot \mathcal{E} = \mathcal{E}^2 \cdot \delta C, \qquad dA_{мех} = F_{внеш,x}\delta x$$

$$\frac{\mathcal{E}^2}{2}\delta C = \mathcal{E}^2 \cdot \delta C + F_{внеш,x}\delta x$$

$$\varphi_+ - \varphi_- =$$ [redacted]

$$F_{внеш,x}\delta x = -\frac{\mathcal{E}^2}{2}\delta C = -\delta U$$

$$F_{эл,x} = -F_{внеш,x} = \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{2\pi q^2}{S}$$

в) Втягивание диэлектрической пластины в конденсатор

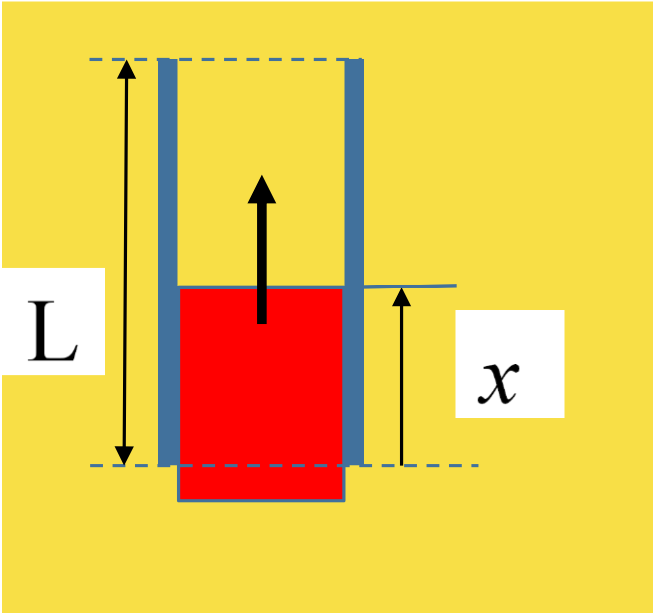
$$L,\ x,\ d,\ h,\ \varepsilon, \qquad q = const,$$

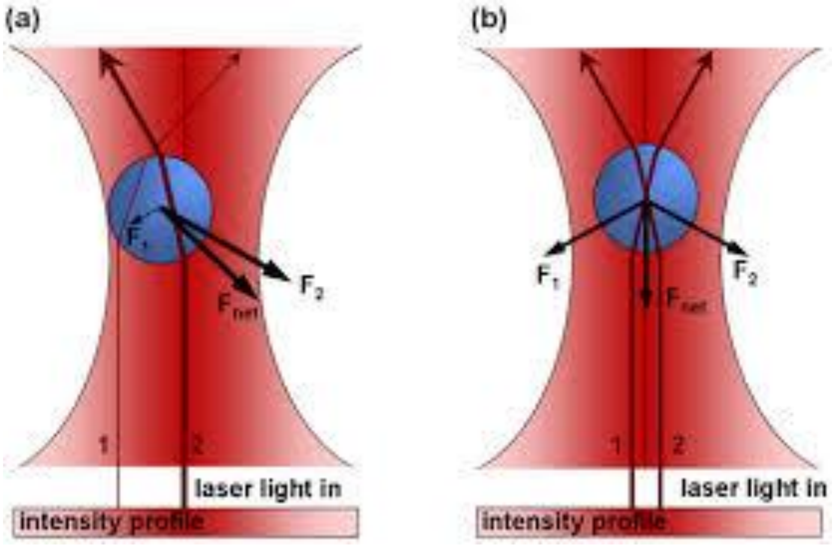
$$C(x) = C_1 + C_2, \quad C_1 = \frac{\varepsilon h x}{4\pi d}, \quad C_2 = \frac{h(L-x)}{4\pi d}$$

$$C(x) = \frac{Lh}{4\pi d}\left(1 + (\varepsilon - 1)\frac{x}{L}\right),$$

$$U(x) = \frac{q^2}{2C(x)},$$

$$F_{эл,x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{q^2}{2C^2} \cdot \frac{(\varepsilon - 1)h}{4\pi d}$$





Постоянный электрический ток

Электрический ток – упорядоченное движение зарядов.

Сила тока – количество заряда, переносимое через сечение проводника в единицу времени.

$$I = \frac{dq}{dt}$$

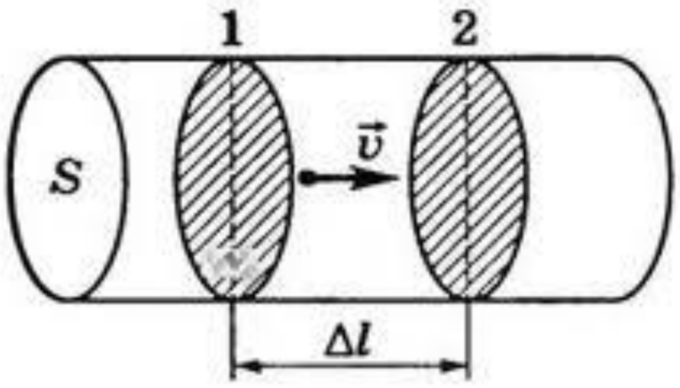
Плотность тока - количество заряда, переносимое в единицу времени через площадку единичного сечения.

$$j = \frac{I}{S}$$

- для постоянной по сечению проводника плотности тока

Если q_0 -величина заряда носителя заряда (электроны, ионы), n - концентрация носителей заряда, $\vec{v}$ - средняя скорость направленного движения зарядов, то плотность тока определяется выражением

$$\boxed{j = \frac{dq}{dS \cdot dt} = \frac{q_0 \cdot n \cdot v \cdot dt \cdot dS}{dS \cdot dt} = q_0 \cdot n \cdot v}$$



Плотность тока в векторной форме

$$\boxed{\vec{j} = q_0 \cdot n \cdot \vec{v}}$$

Для тока, текущего через поверхность

$$\boxed{I = \int_S \vec{j} d\vec{S}}$$

Закон сохранения заряда и уравнение непрерывности

$$-\frac{dQ}{dt} = \int_S \vec{j}d\vec{S},$$

$$Q = \int_V \rho dV$$

$$-\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = \int_S \vec{j}d\vec{S} = \int_V div\vec{j}dV$$

Уравнение непрерывности или закон сохранения заряда

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\vec{j} = 0$$

Закон Ома

а) Для однородного металлического проводника

$$\boxed{I = \frac{U}{R}} \qquad I = jS = \frac{E \cdot l}{R}, \quad j = \lambda E = \frac{1}{\rho} E$$

- плотность тока пропорциональна напряжённости электрического поля, λ - проводимость среды, $\rho = 1 / \lambda$ - удельное сопротивление

б) При наличии сторонних сил

$$\vec{E} \to \vec{E} + \frac{\vec{F}_{стор}}{q_0} = \vec{E} + \vec{E}_{стор},$$

$$\vec{j} = \lambda \cdot \left(\vec{E} + \vec{E}_{стор}\right)$$

Закон Ома для участка цепи, содержащий источник ЭДС и проводящие участки (интегральная форма закона Ома)

$$E + E_{стор} = \frac{I}{\lambda S}, \qquad \int\limits_{(1)}^{(4)} \left(E + E_{стор}\right) dl = \int\limits_{(1)}^{(4)} \frac{dl}{\lambda S}$$

$$\int\limits_{(1)}^{(4)} E dl = \varphi_1 - \varphi_4, \qquad \int\limits_{(1)}^{(4)} E_{стор} dl = \mathcal{E}$$

$$\int\limits_{(1)}^{(4)} \frac{dl}{\lambda S} = R$$

$$\varphi_1 - \varphi_4 + \mathcal{E} = IR$$

Оценка проводимости

$$m\vec{a} = e\vec{E}, \quad \vec{v} = \vec{a}t = \frac{e\vec{E}}{m}t,$$

$$\vec{u} = \overline{\vec{v}} = \frac{e\vec{E}}{2m}\tau,$$

$$\vec{j} = ne\vec{u} = \frac{ne^2\tau}{2m}\vec{E} = \lambda\vec{E},$$

$$\lambda = \frac{ne^2\tau}{2m}$$

Медный проводник

$$\rho = 1{,}78 \cdot 10^{-6}\ Ом \cdot см$$

Допустимая сила тока для изолированного медного провода сечением $1\ мм^2$ *равна* $10\ A$

Сопротивление медного проводника диаметром 1 см и длиной 1 км равно 0,22 Ом.

Сопротивление медного проводника диаметром 1 мм и длиной 10 м равно 0,22 Ом.

Средняя скорость направленного движения

$$n = 8{,}5 \cdot 10^{28}\ м^{-3},\quad q_0 = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ Кл,$$

$$u = \frac{j}{nq_0} \approx 0{,}7\ мм/с$$

Токи в «неограниченных» средах

$$C = \frac{q}{\varphi_+ - \varphi_-},$$

$$\oint \vec{E}d\vec{S} = \frac{4\pi}{\varepsilon}q = \frac{4\pi}{\varepsilon}C\cdot\left(\varphi_+ - \varphi_-\right),$$

$$I = \oint \vec{j}d\vec{S} = \lambda\oint \vec{E}d\vec{S} = \lambda\frac{4\pi}{\varepsilon}C\cdot\left(\varphi_+ - \varphi_-\right),$$

$$R = \frac{\varphi_+ - \varphi_-}{I} = \frac{\varepsilon}{4\pi C\lambda}$$

Токи в «неограниченных» средах

Если электроды – шары радиусов r_+ и r_- помещены в морскую воду

$$C = \frac{C_+ C_-}{C_+ + C_-}, \quad C_+ = \varepsilon r_+, \quad C_- = \varepsilon r_-$$

$$R = \frac{1}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}\right)$$

$$r_+ = r_- = r = 1 \ см, \quad \lambda = 0,3 \ Ом \cdot м,$$

$$R = \frac{1}{2\pi\lambda r} = 53 \ Ом$$

Электробезопасность

Тело человека является проводником электрического тока. Сопротивление человека при сухой и неповреждённой коже колеблется от 3 до 100 кОм.

Ток, пропущенный через организм человека или животного, производит следующие действия: термическое (ожоги, нагрев и повреждение кровеносных сосудов); электролитическое (разложение крови, нарушение физико-химического состава); биологическое (раздражение и возбуждение тканей организма, судороги)

Основным фактором, обуславливающим исход поражения током, является величина тока, проходящего через тело человека.

пороговым *неотпускающим* называется минимальный ток такой силы, при которой человек уже неспособен усилием воли оторвать руки от токоведущей части. Для переменного тока это около 10—15 мА, для постоянного — 50—80 мА;

фибрилляционным порогом называется сила переменного тока (50 Гц) около 100 мА и 300 мА постоянного тока, воздействие которого дольше 0,5 с с большой вероятностью вызывает фибрилляцию сердечных мышц. Этот порог одновременно считается условно смертельным для человека.

Закон Джоуля-Ленца

$$dA = n\vec{F}\vec{v}dt, \qquad dA_{cp} = n\vec{F}\vec{u}dt$$

$$w = \frac{dA_{cp}}{dt} = n\vec{F}\vec{u} = ne\vec{u}\vec{E} = \vec{j}\vec{E} = \lambda\vec{E}^2 = \frac{j^2}{\lambda}$$

$$W = \int_V w\,dV = \int_V \frac{1}{\lambda}\left(\frac{I}{S}\right)^2 S\,dl = I^2\int_V \frac{dl}{\lambda S} = I^2 R$$

Для замкнутой цепи

$$\mathcal{E} = IR$$

$$W = \mathcal{E}I = \frac{\mathcal{E}^2}{R}$$