Концепции и модели физики

Кузьмичев Сергей Дмитриевич

Московский Физико-Технический Институт

Содержание лекции №7

1. **Теорема о циркуляции для электростатического поля.**
2. **Потенциал электрического поля.**
3. **Примеры.**
4. **Связь вектора напряжённости поля и потенциала поля.**
5. **Уравнения Пуассона и Лапласа.**
6. **Проводники в электростатическом поле. Граничные условия.**
7. **Проводящий шар в однородном электростатическом поле.**
8. **Метод зеркальных изображений.**

Теорема о циркуляции

Циркуляция вектора $\vec{E}$ *напряжённости* *электростатического* *поля по замкнутому контуру* L *равна нулю:*

$$\boxed{\oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0}$$

\- интегральная форма

Теорема о циркуляции в дифференциальной форме

$$\boxed{rot\,\vec{E} = 0}$$

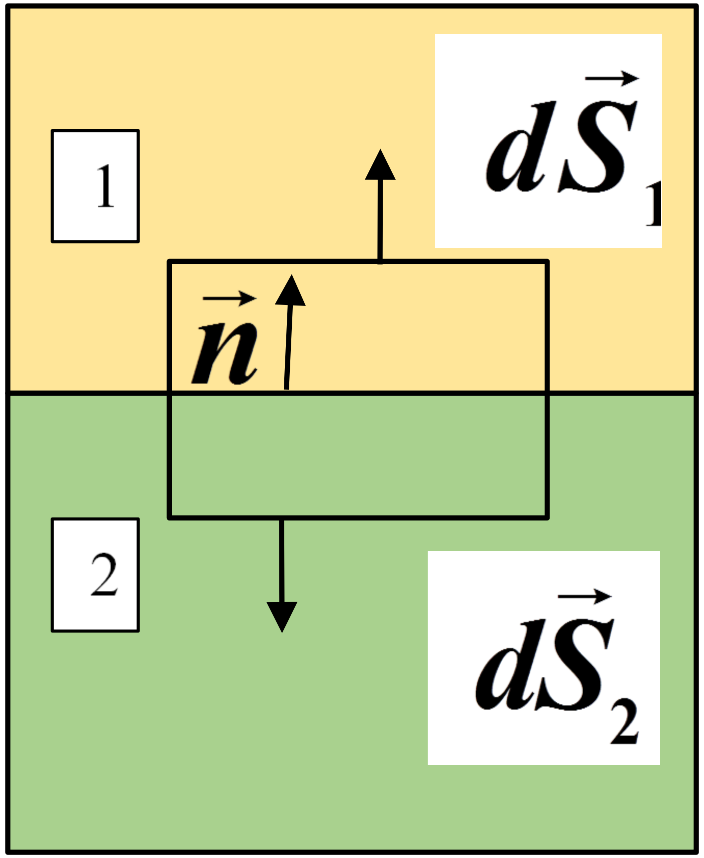
Граничные условия для вектора напряжённости

Из теоремы Гаусса для нормальных компонент напряжённости электрического поля по обе стороны от границы раздела

$$E_{1n} - E_{2n} = 4\pi\sigma$$

E_{1n}, E_{2n} - проекции векторов напряжённости по обе стороны от границы на вектор $\vec{n}$ единичной нормали.

σ - поверхностная плотность заряда на границе раздела.

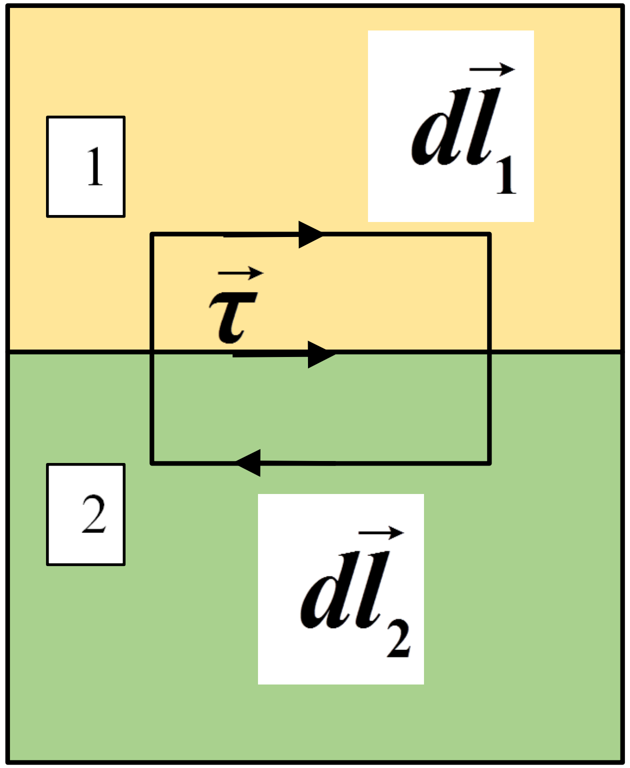


Граничные условия для вектора напряжённости

Из теоремы для тангенциальных (касательных) компонент напряжённости электрического поля по обе стороны от границы

$$\boxed{E_{1\tau} = E_{2\tau}}$$

$E_{1\tau}, E_{2\tau}$ - проекции векторов напряжённости по обе стороны от границы на вектор $\vec{\tau}$ единичной касательной.



Потенциал электрического поля

Разностью потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ поля между точками 1 и 2 называется величина

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{эл,1-2}}{q} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}d\vec{l}$$

Принцип суперпозиции для потенциала**:**

потенциал поля системы зарядов равен сумме потенциалов полей отдельных зарядов

$$\varphi_\Sigma(r) = \varphi_1(r) + \varphi_2(r) + \varphi_3(r) + \ldots$$


НЕ ВЛЕЗАЙ
УБЬЕТ


CAUTION
GOD THINKS
YOU ARE STUPID
NOTICE: IGNORING GOD IS UNAMERICAN
kulturologia.ru

Примеры

а) Разность потенциалов в однородном поле $\vec{E} = \left(E_x, 0, 0\right)$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}d\vec{l} = E_x \cdot \left(x_1 - x_2\right)$$

б) Потенциал точечного заряда

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}$$

Если выбрать $\varphi\left(\infty\right) = 0$, то

$$\boxed{\varphi\left(r\right) = \frac{q}{r}}$$

в) Потенциал поля точечного диполя

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = \frac{q}{r_+} + \frac{\left(-q\right)}{r_-},$$

$$r_+ = \left(r^2 - \vec{r}\vec{l} + l^2 / 4\right)^{1/2}, \; r_- = \left(r^2 + \vec{r}\vec{l} + l^2 / 4\right)^{1/2}$$

$$\varphi = \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}$$

г) Потенциал поля внутри однородно заряженного шара

$$E_r\left(r\right) = \frac{4}{3}\pi\rho r, \qquad r \le R$$

$$\varphi\left(0\right) - \varphi\left(r\right) = \int_{r=0}^{r>0} \vec{E}d\vec{l} = \int_{r=0}^{r>0} E\left(r\right)dr = \frac{2}{3}\pi\rho r^2$$

Связь потенциала с напряжённостью поля

$$\varphi\left(\vec{r}\right) - \varphi\left(\vec{r} + d\vec{r}\right) = \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{r} = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$\vec{E} = -\nabla \varphi = -grad\, \varphi$$

Уравнения Пуассона и Лапласа

$$div\vec{E} = 4\pi\rho, \qquad \vec{E} = -grad\,\varphi$$

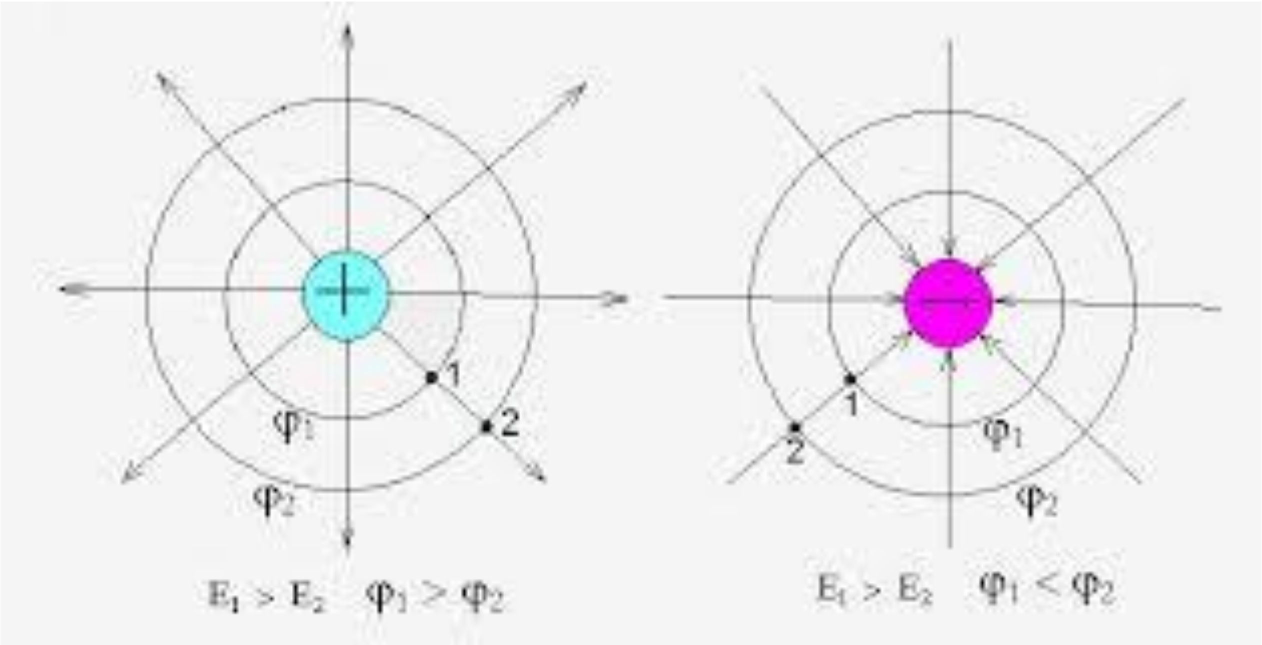
Уравнение Пуассона

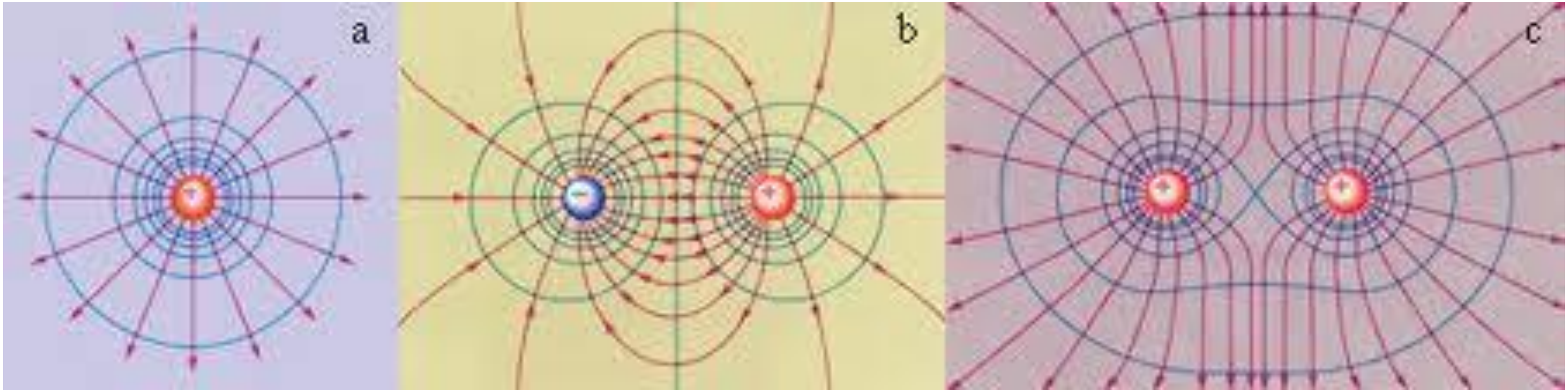
$$div\,grad\,\varphi = \Delta\varphi = -4\pi\rho,$$

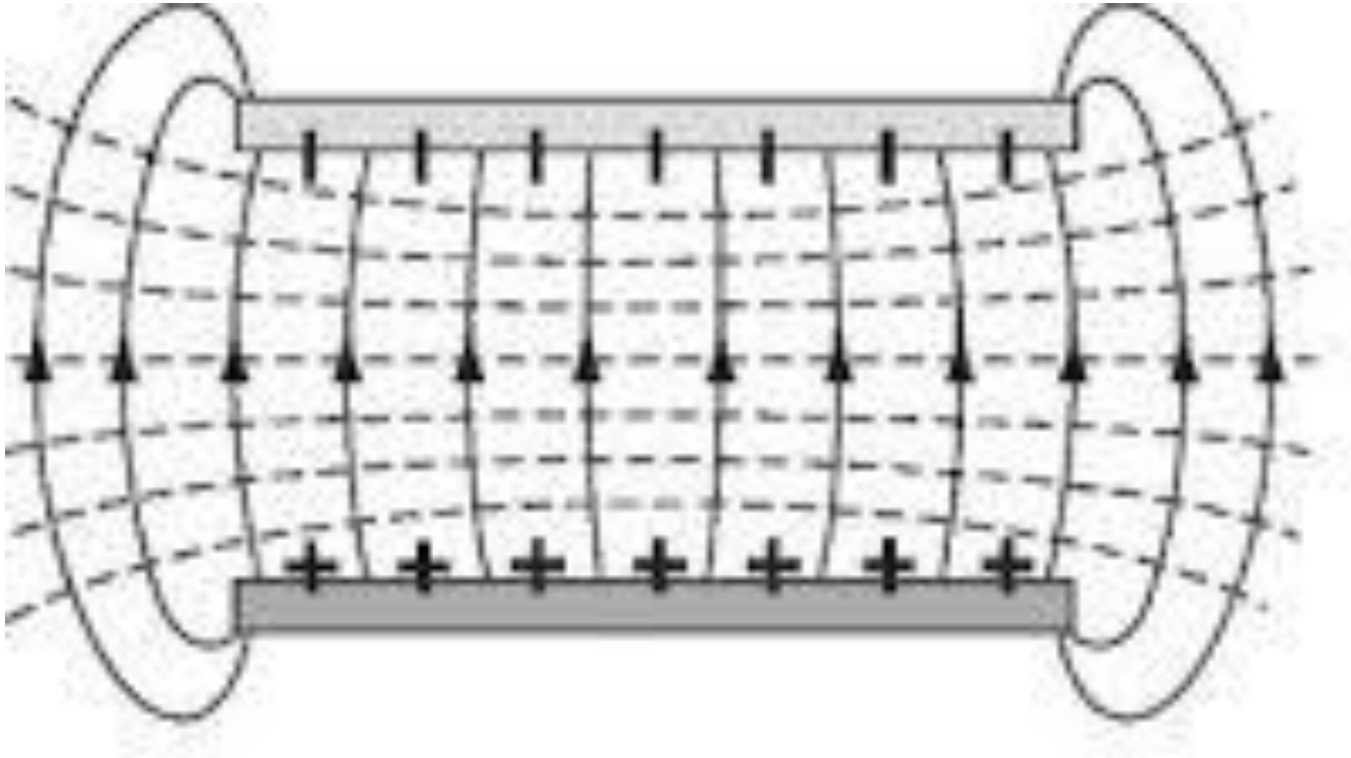
$$\Delta = div\,grad = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Уравнение Лапласа $(\rho = 0)$

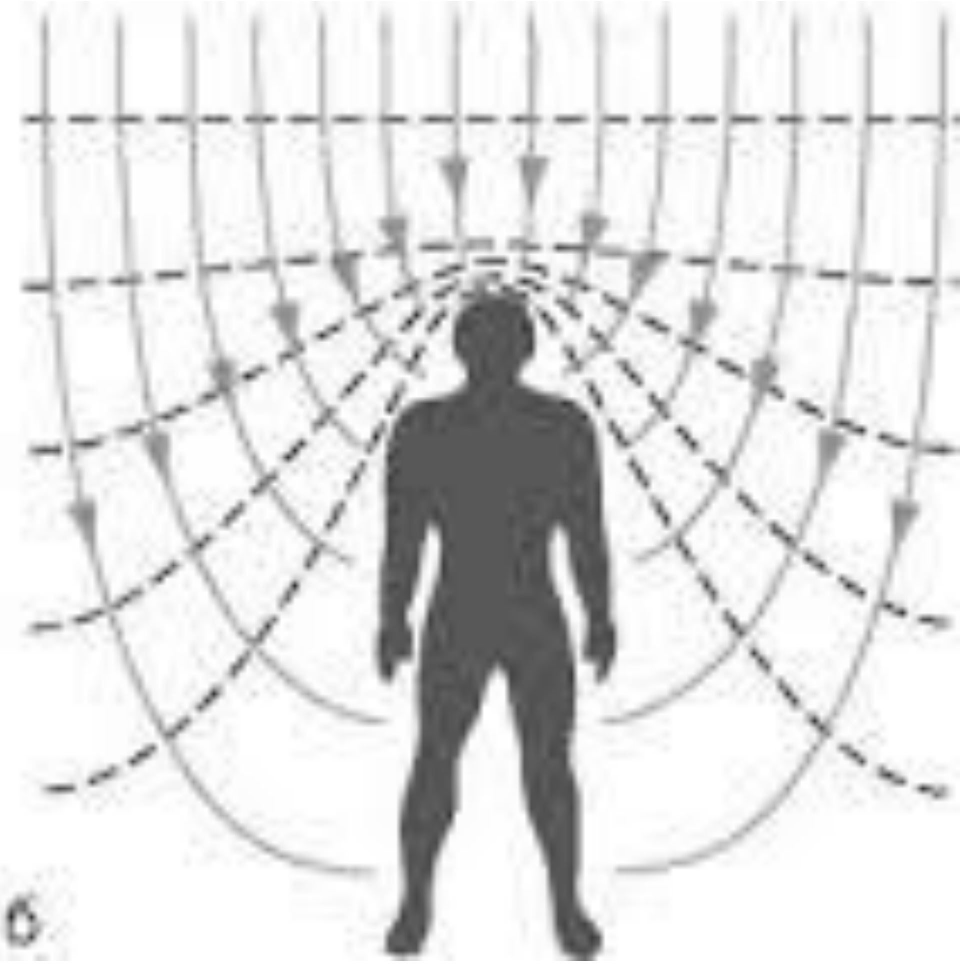
$$\Delta\varphi = 0$$


1
2
φ1
φ2
E1 > E2 φ1 > φ2
1
2
φ1
φ2
E1 > E2 φ1 < φ2


a
b
c

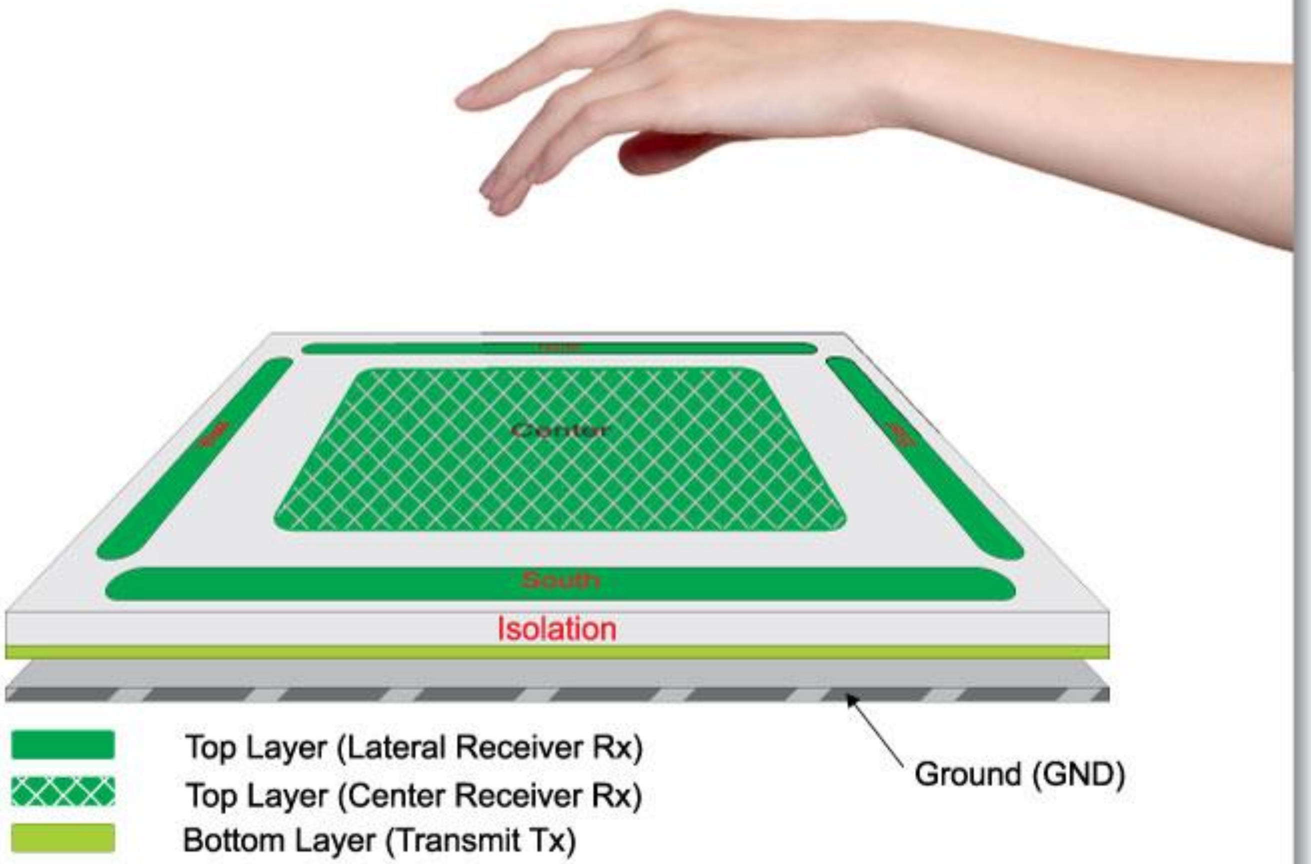


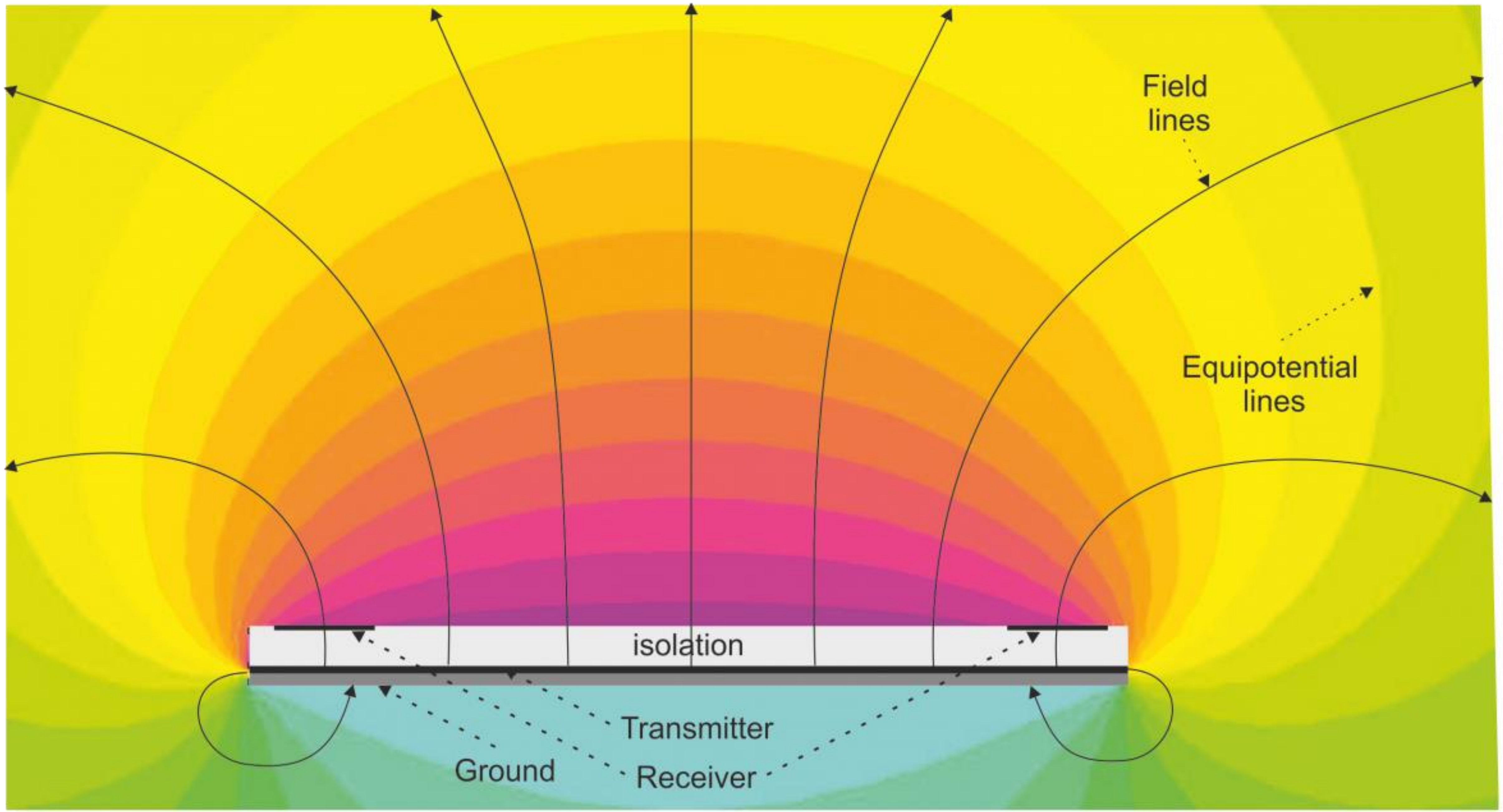
а

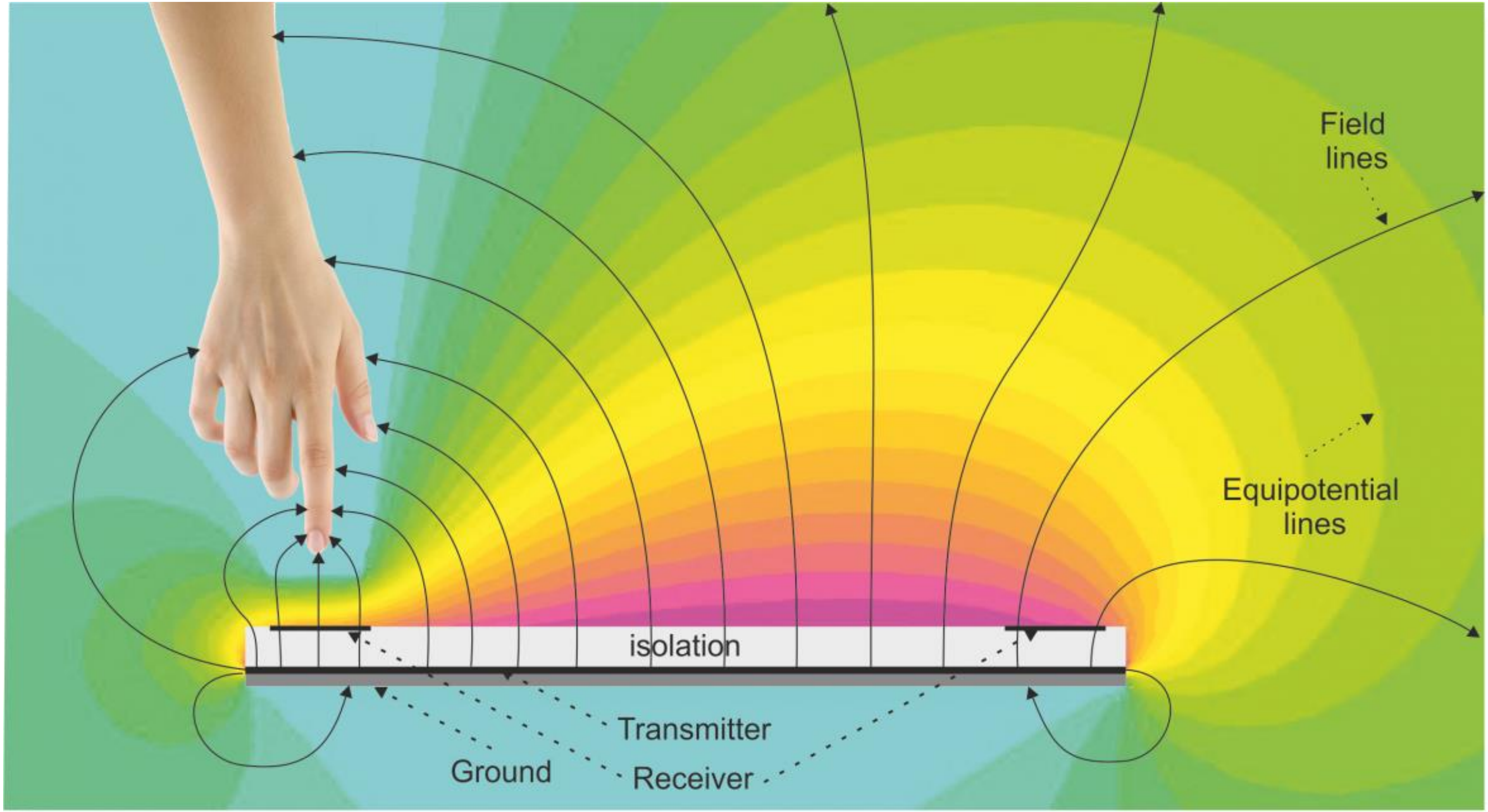


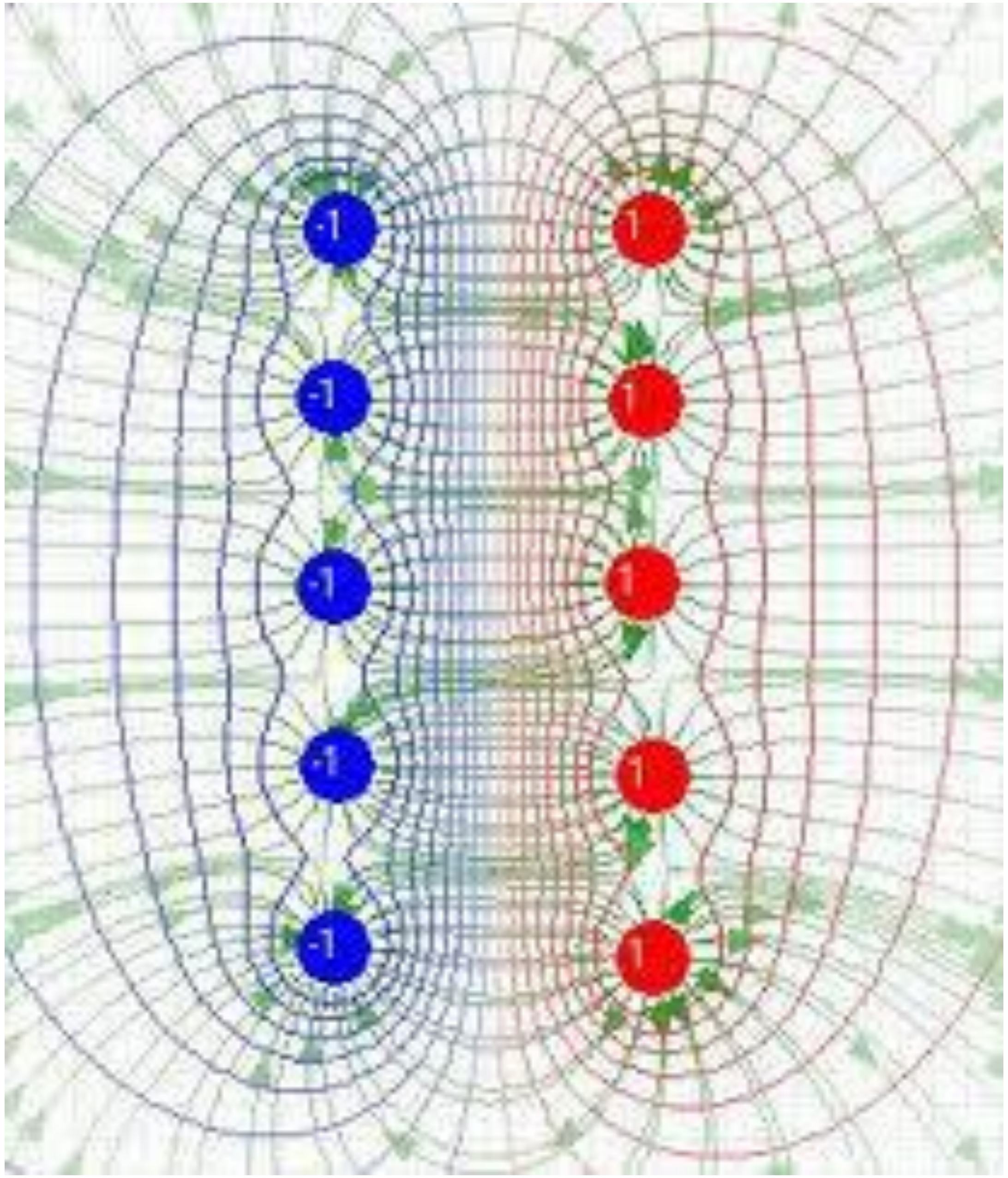
б

Standard Electrode Design




Field
lines
Equipotential
lines
isolation
Transmitter
Ground
Receiver


Field
lines
Equipotential
lines
isolation
Transmitter
Ground
Receiver


-1
-1
-1
-1
-1
1
1
1
1
1

<u>Проводники</u> в электростатическом поле

В стационарном состоянии (токи отсутствуют):

а) напряжённость электрического поля в объёме проводника равна нулю:

$$\vec{E}_{внутри} = 0$$

б) объёмная плотность электрических зарядов в проводнике равна нулю:

$$\rho_{внутри} = 0$$

Свободные заряды могут располагаться только ***<u>на поверхности проводника.</u>***

в) объём проводника является областью одинакового потенциала:

$$\varphi = const \qquad \text{в объёме проводника}$$

Граничные условия на поверхности проводника

а) ***Из теоремы Гаусса***

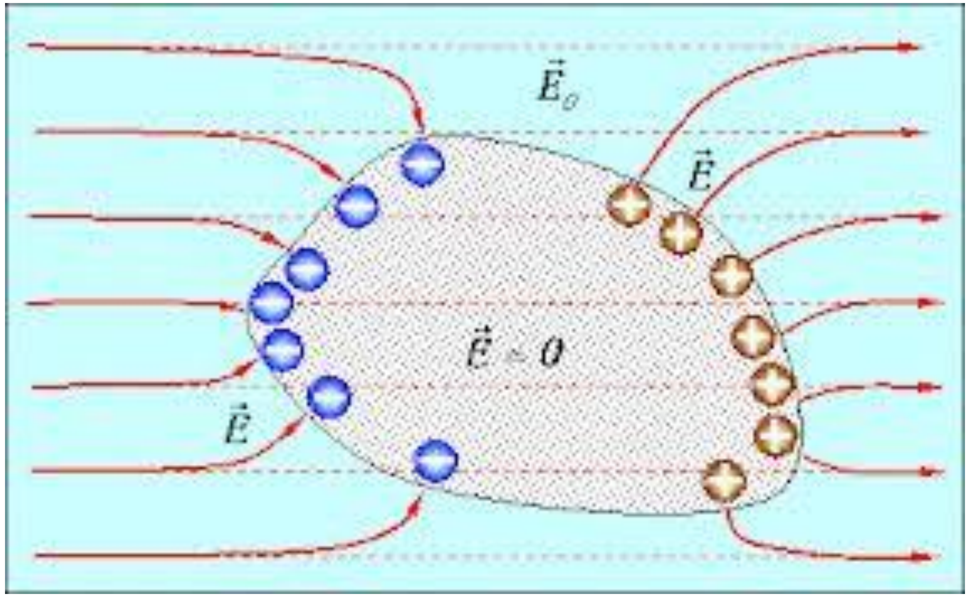
$$E_n = 4\pi\sigma$$

- нормальная компонента напряжённости поля (вне проводника).

б) ***Из теоремы о циркуляции***

$$E_\tau = 0$$

Силовые линии электростатического поля **перпендикулярны** поверхности проводника.



Проводящий шар в однородном электрическом поле

$$\vec{E}_{внутри} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{инд,зар} = 0$$

$$\vec{E}_{инд,зар} = -\vec{E}_0 = -\frac{4\pi}{3}\sigma_0\vec{n}$$

$$\sigma_0 = \frac{3E_0}{4\pi}$$

Дипольный момент шара

$$\vec{p} = R^3\vec{E}_0$$

Электрическое поле во внешнем пространстве

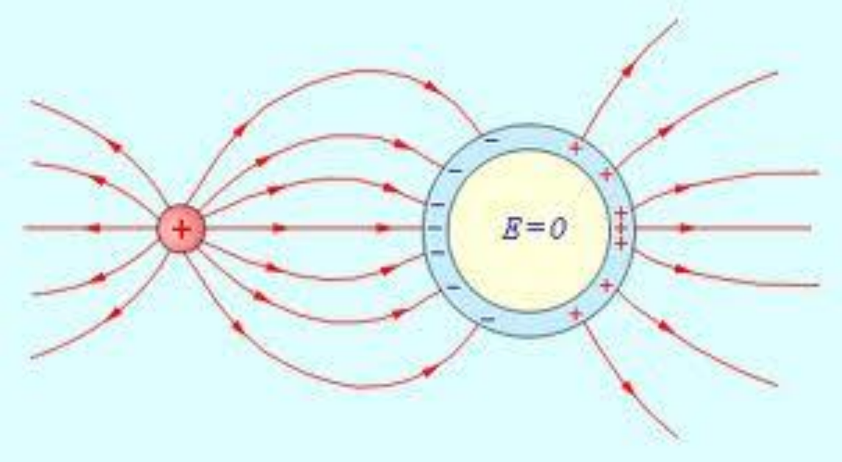
$$\vec{E}_{вне} = \vec{E}_0 + \frac{3\left(\vec{p},\vec{r}\right)\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}$$

Электростатическая защита (теоремы Фарадея)

<u>Теорема 1.</u> Пусть заряд q находится внутри металлической оболочки. Тогда сумма зарядов, индуцированных на внутренней стороне оболочки, равна по модулю и противоположна по знаку заряду внутри оболочки.

<u>Теорема 2.</u> Если в полости зарядов нет, то электростатическое поле в ней равно нулю.

Проводящая оболочка полностью экранирует поле всех зарядов, находящихся вне оболочки.


E = 0

Метод зеркальных изображений на примере точечного заряда над плоской проводящей поверхностью

Если имеется заряд q и проводящая поверхность с потенциалом φ_0, то для расчёта поля в области нахождения заряда можно заменить эту поверхность таким зарядом q', который вместе с зарядом q создаёт в точках поверхности требуемый потенциал. Фиктивный заряд q' называются «изображением» заряда q.

Основание: теорема единственности для уравнений Лапласа

$$\varphi_0 = \frac{q}{r} + \frac{q'}{r} = 0, \qquad q' = -q$$

$$F = k\frac{q^2}{(2r)^2} = k\frac{q^2}{4r^2}$$