Концепции и модели физики

Кузьмичев Сергей Дмитриевич

Московский Физико-Технический Институт

Содержание лекции №6

1. **Электрический заряд.**
2. **Закон Кулона.**
3. **Напряжённость электрического поля. Принцип суперпозиции. Электрическое поле на оси равномерно заряженного диска.**
4. **Электрический диполь.**
5. **Теорема Гаусса в интегральной форме.**
6. **Теорема Гаусса в дифференциальной форме.**
7. **Примеры применения теоремы Гаусса для расчёта характеристик электрического поля.**
8. **Теорема Ирншоу.**

Основные понятия

Электромагнитное взаимодействие – один из фундаментальных типов взаимодействий.

Электромагнитное взаимодействие осуществляется на расстоянии посредством **электромагнитного поля.**

Электромагнитное поле создаётся **электрическими зарядами** и действует на заряды.

Электрический заряд – физическая величина, характеризующая свойство частиц или тел **вступать** в электромагнитное взаимодействие, и **меру** (интенсивность) этого взаимодействия.

Электрический заряд

Существуют два типа электрических зарядов: положительные и отрицательные.

Носителями положительного заряда являются, например, протоны и ядра атомов. Носителями отрицательного заряда являются электроны.

Элементарный электрический заряд

$$\boxed{e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \textit{Кл} = 4{,}803 \cdot 10^{-10}\ \textit{ед. СГСЭ}}$$

Заряд q тела кратен элементарному заряду.

$$q = (+e)N_p + (-e)N_e = e \cdot (N_P - N_e)$$

Здесь N_p и N_e - числа протонов и электронов в теле.

Закон сохранения электрического заряда: *в замкнутой системе суммарный электрический заряд остаётся неизменным.*

$$\boxed{q_\Sigma = q_1 + q_2 + \ldots + q_n = const}$$

Точечный заряд – заряженное тело, размерами и формой которого в рассматриваемых условиях можно пренебречь.

Пробный заряд – небольшой по величине точечный заряд, который не производит заметного перераспределения зарядов, создающих исследуемое поле.

В **электростатике** изучаются поля, создаваемые неподвижными зарядами, а также взаимодействия между такими зарядами.

Неподвижные электрические заряды создают **электростатическое** (неизменное во времени) **поле**.

Способы электризации тел – трение, электрическая индукция, излучение.

Электроскоп.

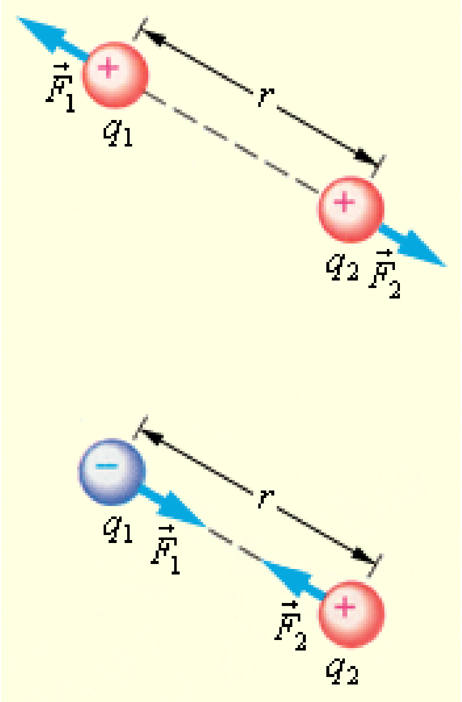
Проводники и диэлектрики.

Закон Кулона

Сила взаимодействия двух находящихся в вакууме точечных зарядов пропорциональна величинам этих зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними, и направлена вдоль прямой, соединяющей заряды

$$F = k\frac{|q_1||q_2|}{r^2}, \qquad \vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^3}\vec{r}$$

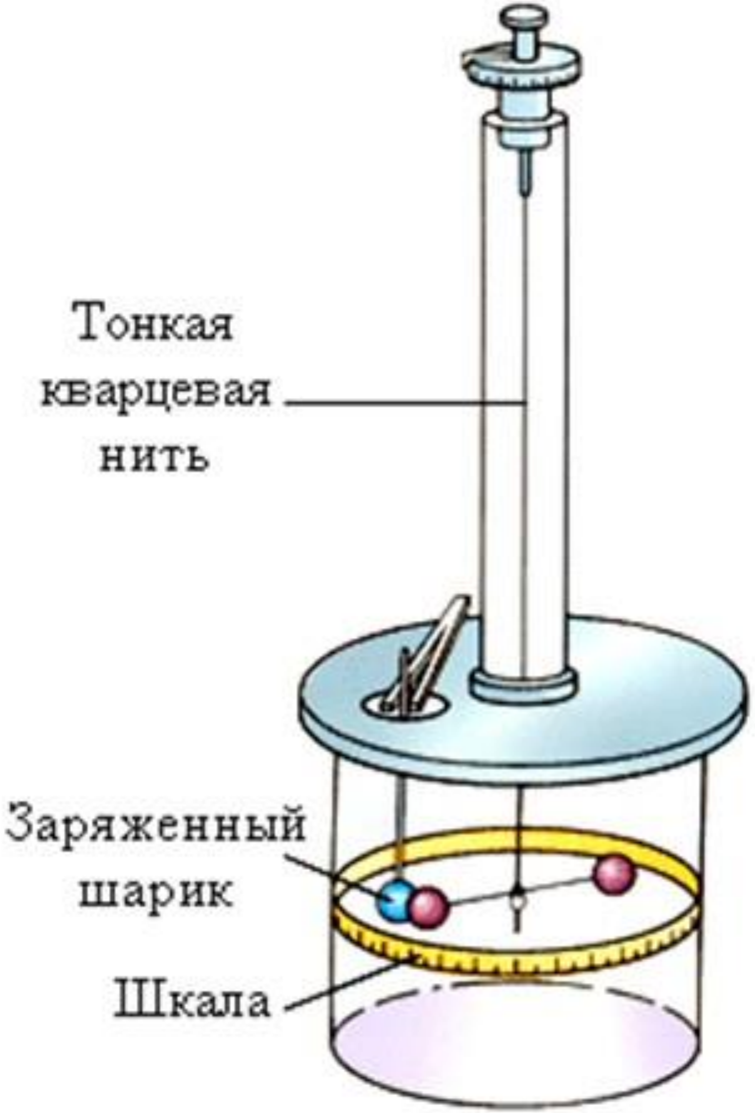
$$k = 1\ (СГСЭ), \qquad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot 10^9\ \frac{Н\cdot м^2}{Кл^2}$$



$$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\ \frac{Кл^2}{Н\cdot м^2}$$ - электрическая постоянная.

Шарль Огюсте́н де Куло́н

Charles-Augustin de Coulomb



Напряжённость электрического поля

Напряжённостью электрического поля в некоторой точке называют физическую величину, равную отношению силы, с которой поле действует на положительный пробный заряд, помещённый в данную точку, к модулю этого заряда

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}, \qquad \vec{F} = q\vec{E}$$

Напряжённость поля точечного заряда

$$\vec{E} = k\frac{q}{r^3}\vec{r}$$

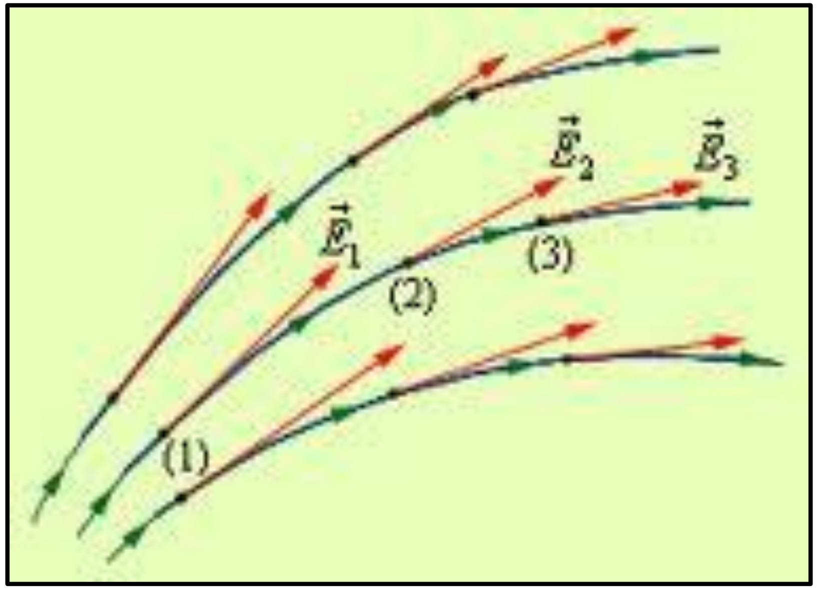
Принцип суперпозиции: напряжённость электрического поля, создаваемого системой зарядов в данной точке пространства, равна векторной сумме напряжённостей электрических полей, создаваемых в этой точке каждым зарядом в отдельности (в отсутствие других зарядов):

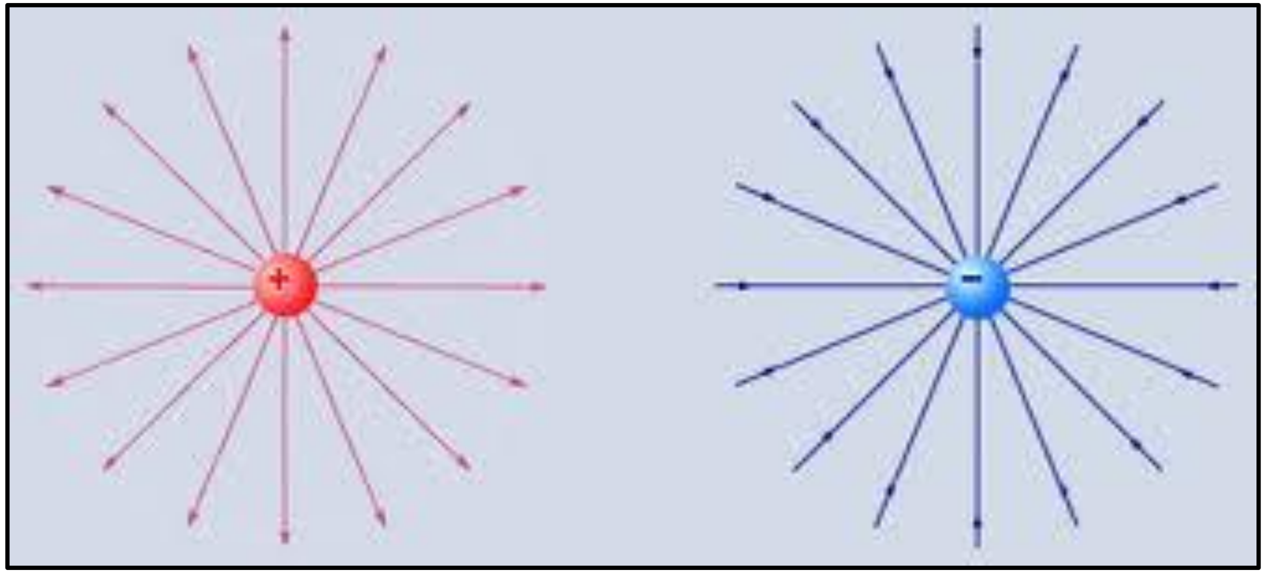
$$\vec{E}_\Sigma = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_n$$

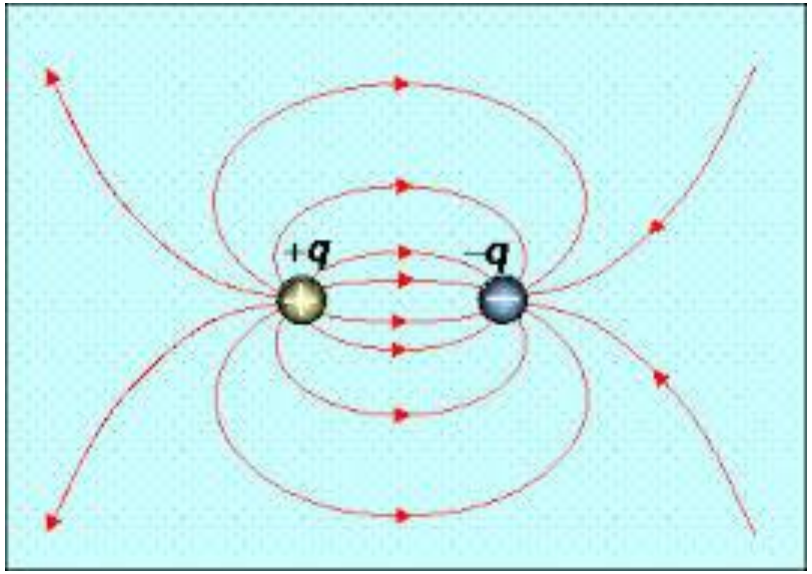
Графическое изображение электрического поля с помощью силовых линий

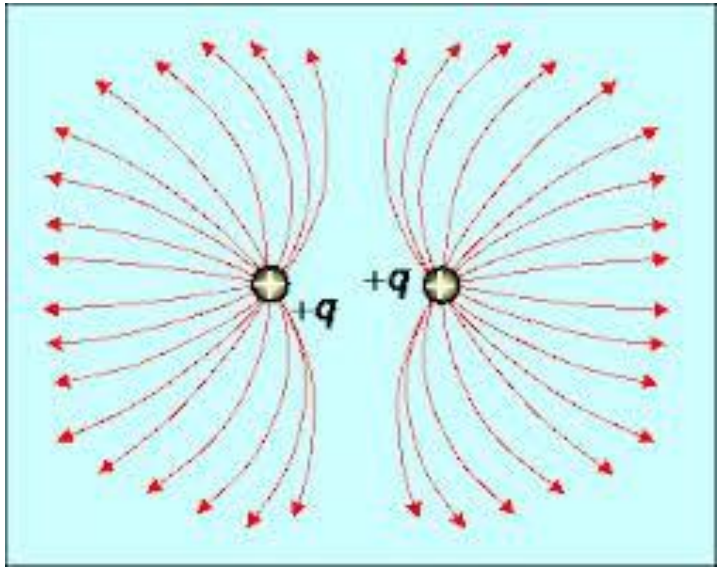
- Направление касательной к силовой линии в каждой точке совпадает с направлением вектора напряжённости поля в той же точке.
- Силовые линии начинаются на положительных зарядах или приходят из бесконечности. Силовые линии заканчиваются на отрицательных зарядах или уходят на бесконечность.
- Густота силовых линий пропорциональна модулю вектора напряжённости.

Примеры графического изображения силовых линий





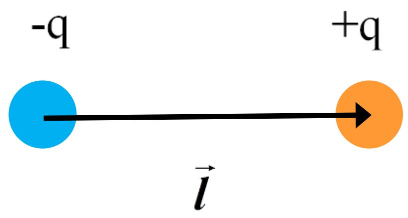




Электрический диполь

Простейший диполь – система, состоящая из двух точечных зарядов, одинаковых по величине и противоположных по знаку.

Плечо диполя – вектор, идущий от отрицательного заряда к положительному, длина которого равна расстоянию между зарядами**.**



Дипольным моментом диполя называется вектор

$$\vec{p} = q\vec{l}$$

Диполь называется **точечным,** если расстояние l между его зарядами мало по сравнению с расстоянием r от диполя до точки наблюдения.

Жёсткий диполь - расстояние между зарядами диполя неизменно.

Упругий диполь – расстояние между его зарядами может изменяться под действием внешних сил.

Поле точечного диполя

$$\vec{r}_{-} = \vec{r} + \vec{l}\,/\,2, \qquad \vec{r}_{+} = \vec{r} - \vec{l}\,/\,2,$$

$$\vec{E}_{-} = \frac{(-q)}{r_{-}^{3}}\vec{r}_{-}\,, \quad \vec{E}_{+} = \frac{(+q)}{r_{+}^{3}}\vec{r}_{+}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_{-} + \vec{E}_{+}$$

При условии $l \ll r$ выражению для электрического поля диполя можно придать вид

$$\boxed{\vec{E} = \frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r}}{r^{5}} - \frac{\vec{p}}{r^{3}}}$$

Поле на оси равномерно заряженного диска (СГСЭ)

$$\sigma = \frac{q}{\pi R^2}, \; dS = r \cdot d\varphi \cdot dr, \quad dq = \sigma \cdot dS,$$

$$d\vec{E} = \frac{dq}{\rho^3}\vec{\rho}, \;\; \rho = \sqrt{r^2 + z^2} \;\; ,$$

$$dE_z = dE \cdot cos\,\theta, \quad cos\,\theta = \frac{z}{\rho},$$

$$E_z = \int_{r=0}^{r=R} \frac{\sigma z r dr}{\left(r^2 + z^2\right)^{3/2}} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi = 2\pi\sigma \cdot \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right)$$

$$E_z = 2\pi\sigma$$ при $z \ll R$

$$E_z = \frac{q}{z^2}$$ при $z \gg R$

Теорема Гаусса

Поток вектора напряжённости $\vec{E}$ электрического поля через площадку dS

$$d\Phi = \vec{E}d\vec{S} = EdS\cos\theta$$

Поток через **замкнутую поверхность** S

$$\Phi = \oint_S \vec{E}d\vec{S}$$

Интегральная форма теоремы Гаусса

$$\boxed{\Phi = \oint_S \vec{E}d\vec{S} = 4\pi Q_\Sigma}$$

Q_Σ - полный заряд, находящийся в объёме, ограниченном поверхностью S .

Дифференциальная форма теоремы Гаусса

$$div\vec{E} = 4\pi\rho \qquad (СГСЭ)$$

$$div\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \left(\vec{\nabla}, \vec{E}\right)$$

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

Примеры применения теоремы Гаусса

а) Поле равномерно заряженной плоскости

$$\Phi = \vec{E}_1 \cdot \Delta\vec{S}_1 + \vec{E}_2 \cdot \Delta\vec{S}_2 = 2E \cdot \Delta S = 4\pi Q_\Sigma = 4\pi\sigma \cdot \Delta S$$

$$E = 2\pi\sigma$$

б) Поле равномерно заряженной тонкой нити

$$\Phi = 2\pi r l E(r) = 4\pi Q_\Sigma = 4\pi \cdot æ \cdot l$$

$$E(r) = \frac{2æ}{r}$$

Примеры применения теоремы Гаусса

в) Поле равномерно заряженного шара

$$\Phi = 4\pi r^2 E\left(r\right) = 4\pi Q_\Sigma = 4\pi \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

- для точек внутри $r \leq R$

$$E\left(r\right) = \frac{4}{3}\pi\rho r, \qquad \vec{E}\left(r\right) = \frac{4}{3}\pi\rho\vec{r}$$

$$\Phi = 4\pi r^2 E\left(r\right) = 4\pi Q_\Sigma = 4\pi \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

- для точек вне шара $r \geq R$

$$E\left(r\right) = \frac{Q}{r^2}, \qquad \vec{E}\left(r\right) = \frac{Q}{r^3}\vec{r}$$

Примеры применения теоремы Гаусса

г) Поле равномерно заряженного слоя

$$\vec{E} = \left(E_x, 0, 0\right)$$

$$div\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = 4\pi\rho\left(x\right) = 4\pi\rho, \qquad \left|x\right| \le d\ /\ 2,$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 4\pi\rho\left(x\right) = 0, \qquad \left|x\right| > d\ /\ 2,$$

$$E_x\left(x\right) = 4\pi\rho x + const, \qquad E_x\left(x = 0\right) = 0$$

$$E_x\left(x\right) = 4\pi\rho x, \qquad \left|x\right| \le d\ /\ 2$$

$$E_x\left(x\right) = 2\pi\rho d, \qquad \left|x\right| > d\ /\ 2$$

Электрический диполь во внешнем поле

а) Момент силы, действующий на диполь в однородном электрическом поле

[redacted]

$$\vec{M}_{\Sigma} = \vec{M}_{+} + \vec{M}_{-} = \left[\vec{l}, q\vec{E}\right] = \left[q\vec{l}, \vec{E}\right] = \left[\vec{p}, \vec{E}\right]$$

$$\boxed{\vec{M}_{\Sigma} = \left[\vec{p}, \vec{E}\right]}$$

Диполь в электрическом поле ориентируется по направлению вектора напряжённости поля.

Электрический диполь во внешнем поле

б) Сила, действующая на диполь в неоднородном электрическом поле

[redacted]

$$\vec{F} = \vec{F}_{+} + \vec{F}_{-} = q \cdot \left(\vec{E}\left(\vec{r} + \frac{\vec{l}}{2}\right) - \vec{E}\left(\vec{r} - \frac{\vec{l}}{2}\right) \right)$$

$$F_{x} = q\left(E_{x}\left(\vec{r} + \frac{\vec{l}}{2}\right) - E_{x}\left(\vec{r} - \frac{\vec{l}}{2}\right) \right)$$

Электрический диполь во внешнем поле

$$E_x\left(\vec{r}+\frac{\vec{l}}{2}\right)\approx E_x\left(\vec{r}\right)+\frac{\partial E_x}{\partial x}\cdot\frac{l_x}{2}+\frac{\partial E_x}{\partial y}\cdot\frac{l_y}{2}+\frac{\partial E_x}{\partial z}\cdot\frac{l_z}{2}$$

$$E_x\left(\vec{r}-\frac{\vec{l}}{2}\right)\approx E_x\left(\vec{r}\right)-\frac{\partial E_x}{\partial x}\cdot\frac{l_x}{2}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\cdot\frac{l_y}{2}-\frac{\partial E_x}{\partial z}\cdot\frac{l_z}{2}$$

$$E_x\left(\vec{r}+\frac{\vec{l}}{2}\right)-E_x\left(\vec{r}-\frac{\vec{l}}{2}\right)\approx l_x\frac{\partial E_x}{\partial x}+l_y\frac{\partial E_x}{\partial y}+l_z\frac{\partial E_x}{\partial z}$$

$$F_x=ql_x\frac{\partial E_x}{\partial x}+ql_y\frac{\partial E_x}{\partial y}+ql_z\frac{\partial E_x}{\partial z}=\left(\vec{p},\vec{\nabla}\right)E_x$$

$$\boxed{\vec{F}=\left(\vec{p},\vec{\nabla}\right)\vec{E}}$$

Работа электростатического поля

$$\vec{E} = \frac{q}{r^3}\vec{r}$$

$$A_{1-2} = \int_{(1)}^{(2)} q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 q \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Величина работы по перемещению пробного заряда зависит от положения начальной и конечной точек, но не зависит от формы и параметров траектории, соединяющей эти точки.

Теорема Ирншоу

Всякая равновесная конфигурация точечных зарядов неустойчива, если на них кроме кулоновских сил притяжения и отталкивания ничто не действует.

Рассмотрим положительный точечный заряд. Действующая на него сила направлена вдоль вектора электростатического поля. Для устойчивого равновесия в какой-либо точке пространства, необходимо, чтобы при (малом) отклонении от неё на него начинала действовать возвращающая сила.

С точки зрения теоремы Гаусса, возникновение возвращающей силы (со всех сторон направленной к некоторой точке) означает, что вектор напряжённости внешних сил создаёт отрицательный поток через малую поверхность, окружающую точку предполагаемого равновесия. Но теорема Гаусса утверждает, что поток вектора напряжённости поля через поверхность равен нулю, если внутри этой поверхности нет заряда.