

Концепции и модели физики

Кузьмичев Сергей Дмитриевич



Содержание лекции №5

1. Длина свободного пробега.
2. Диффузия, вязкость, теплопроводность.
3. Связь коэффициента диффузии с подвижностью частицы.
4. Броуновское движение как процесс диффузии.
5. Молекулярное течение разреженного газа через трубу

Модель молекулы газа – твердый шарик диаметром d .

Эффективное газокинетическое сечение молекулы $\sigma \approx \pi d^2$

$$\sigma \approx \pi \left(3 \cdot 10^{-10} \text{ м} \right)^2 \approx 28 \cdot 10^{-20} \text{ м}^2$$

Длина свободного пробега

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma}$$

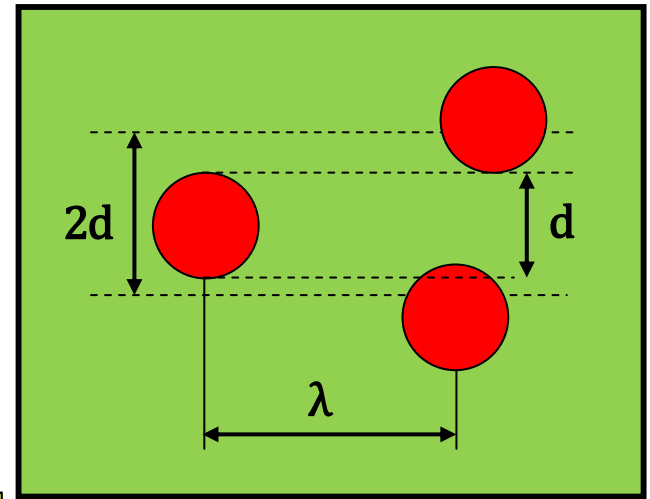
Здесь n - концентрация рассеивателей (молекул).

Для идеального газа ($P = nkT$)

$$\lambda = \frac{kT}{P\sigma}$$

$$T = 273 \text{ К}, P = 760 \text{ мм.рт.ст.}, \lambda \approx 1,3 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

$$T = 273 \text{ К}, P = 10^{-2} \text{ мм.рт.ст.}, \lambda \approx 1 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$



Время свободного пробега

$$\tau = \frac{\lambda}{\bar{v}}, \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}},$$
$$\tau = \lambda \sqrt{\frac{\pi m}{8kT}} = \lambda \sqrt{\frac{\pi M}{8RT}}$$

Для азота ($M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг / моль) при нормальных условиях

$$\tau = 2,8 \cdot 10^{-10} \text{ с}$$

Число столкновений, испытываемых молекулой в секунду

$$N_{ст} = \frac{1}{\tau} \approx 3,6 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$$



Оценка запасов древесины

Сечение столкновения и ослабление потока частиц

$$dN = d(jS) = -\sigma n_{\text{расc}} dx \cdot N = -\sigma n_{\text{расc}} dx \cdot jS$$

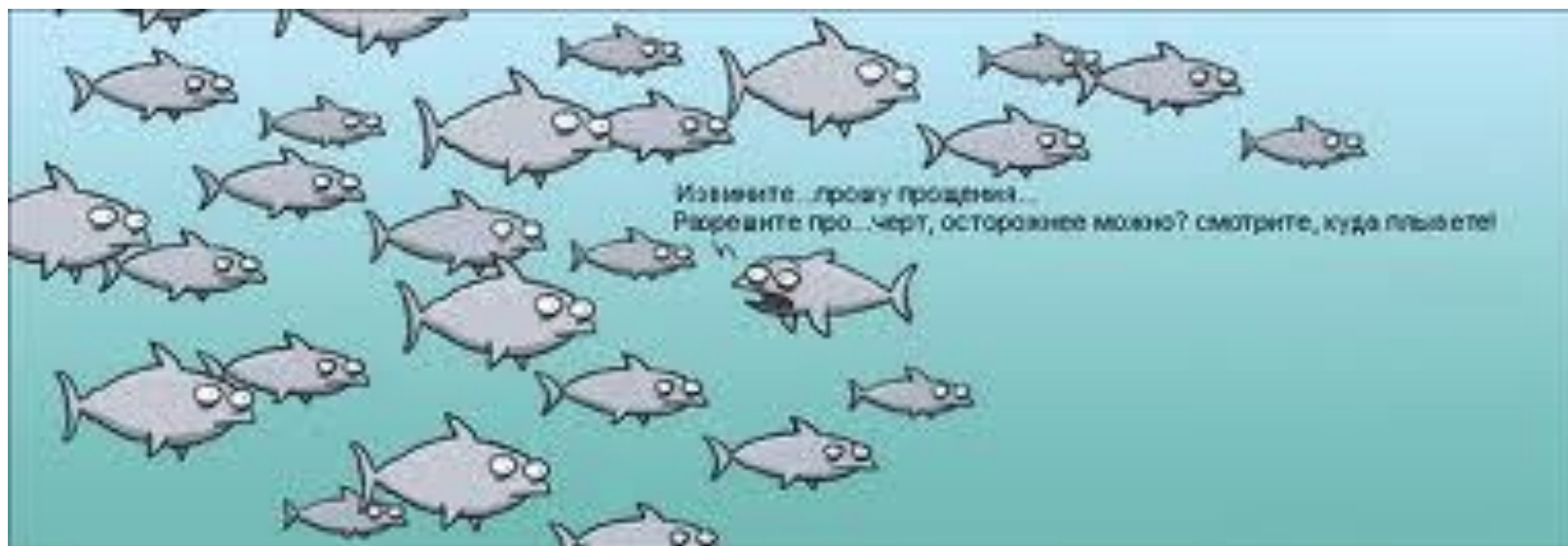
$$j(x) = j(x=0) \cdot e^{-\sigma n_{\text{расc}} x} = j(x=0) \cdot e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

Вероятность того, что молекула без столкновений пройдет путь x

$$N(x) = N_0 \cdot e^{-\frac{x}{\lambda}}, \quad dN_{\text{расc}} = N_0 \cdot e^{-\frac{x}{\lambda}} \cdot \frac{dx}{\lambda}$$

$$dP(x) = \frac{dN_{\text{расc}}}{N_0} = e^{-\frac{x}{\lambda}} \cdot \frac{dx}{\lambda}$$

$$\bar{x} = \int_0^{\infty} x dP(x) = \int_0^{\infty} x e^{-\frac{x}{\lambda}} \cdot \frac{dx}{\lambda} = \lambda, \quad \overline{x^2} = 2\lambda^2$$



Теплопроводность – один из видов переноса тепла от более нагретых частей вещества к менее нагретым.

Теплопроводность осуществляется хаотически движущимися частицами тела (макроскопические потоки вещества отсутствуют) и приводит к выравниванию температуры во всём объёме вещества.

Плотность потока тепла (q) - количество тепла, проходящее в единицу времени через площадку единичной площади.



Прелесть весны познается
только зимою, когда,
сидя у печки,
сочиняешь самые лучшие
майские песни.

Генрих Гейне

[Аtkritka.com](http://atkritka.com)



Уравнение теплопроводности

$$dQ = [q(x) - q(x + dx)] S dt = - \frac{\partial q}{\partial x} S dx dt$$

$$dQ = c_v dM dT, \quad dM = \rho S dx$$

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial q}{\partial x}$$

Закон Фурье

$$q = -\alpha \frac{\partial T}{\partial x}$$

α - коэффициент теплопроводности

$$[\alpha] = \frac{\text{Дж}}{\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К}}$$

Коэффициенты теплопроводности

Вещество	α , Вт/(м·К)	Вещество	α , Вт/(м·К)
Железо	75	Бальза	0,04
Медь	400	Алмаз	628
Серебро	418	Мел	1
Сталь	40	Кирпич	1
Вода	0,6	Воздух	0,02
Водород	0,17	Гелий	0,14



Скорость нагрева воды в чайнике

а) *Стальное дно без накипи:*

$$T_1 = 283 \text{ K}, \quad T_2 = 1073 \text{ K}, \quad S = 0,75 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2, \\ l_1 = 3 \text{ мм}, \quad \alpha_1 = 40 \text{ Вт} / (\text{м} \cdot \text{К})$$

$$J_1 = \frac{S \cdot (T_2 - T_1)}{l_1 / \alpha_1} = 99 \text{ кВт}$$

б) *Стальное дно с накипью (мел):*

$$T_1 = 283 \text{ K}, \quad T_2 = 1073 \text{ K}, \quad S = 3 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2 \\ l_1 = 3 \text{ мм}, \quad \alpha_1 = 40 \text{ Вт} / (\text{м} \cdot \text{К}), \\ l_2 = 1 \text{ мм}, \quad \alpha_2 = 1 \text{ Вт} / (\text{м} \cdot \text{К})$$

$$J_1 = \frac{S \cdot (T_2 - T_1)}{l_1 / \alpha_1 + l_2 / \alpha_2} = 7,4 \text{ кВт}$$

Вязкость

Силы вязкого трения связаны с передачей (переносом) импульса между слоями жидкости (или газа).

Пусть x -составляющая скорости \vec{u} макроскопического направленного движения порции вещества изменяется вдоль оси OY

Сила вязкого трения, действующая по площади S на слой жидкости (газа), параллельный скорости течения, даётся законом Ньютона

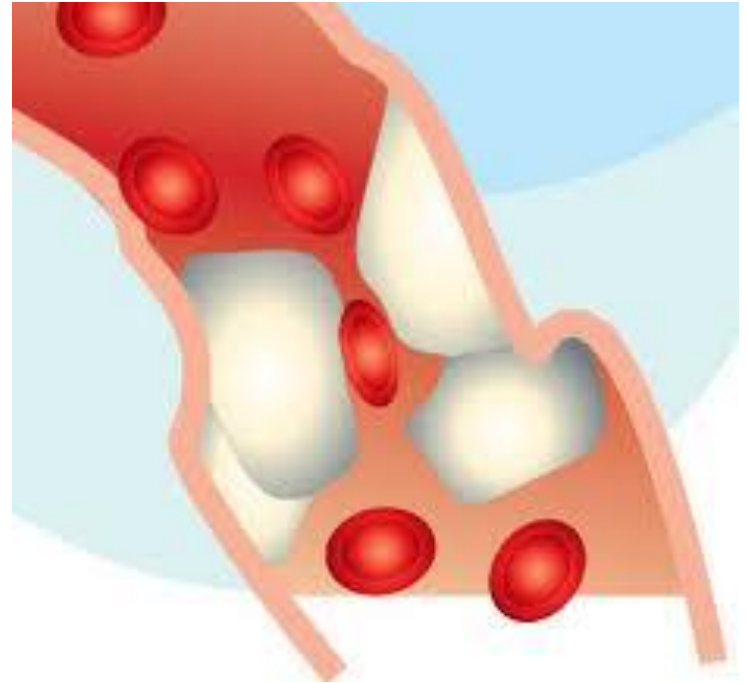
$$F_x = -\eta S \frac{du_x}{dy}$$

η - коэффициент вязкого трения.

$$[\eta] = \frac{\text{кг}}{\text{с} \cdot \text{м}}$$

Коэффициенты вязкости

Вещество	η , кг/(м·с)
Вода	$1 \cdot 10^{-3}$
Глицерин (100%), 20° С	1,5
Глицерин (95%)	0,5
Воздух	$181 \cdot 10^{-7}$
Кровь	$1,7 \div 22,9 \cdot 10^{-3}$
Мёд, 20° С	50



Диффузия

Диффузия – процесс пространственного перераспределения компонент смеси относительно друг друга, обусловленный тепловым движением молекул.

Для одномерной диффузии вдоль оси Ox плотность потока компоненты смеси определяется законом Фика:

$$j_x = -D \frac{dn}{dx}$$

Здесь $n(x)$ - концентрация компоненты смеси,

D - коэффициент диффузии.

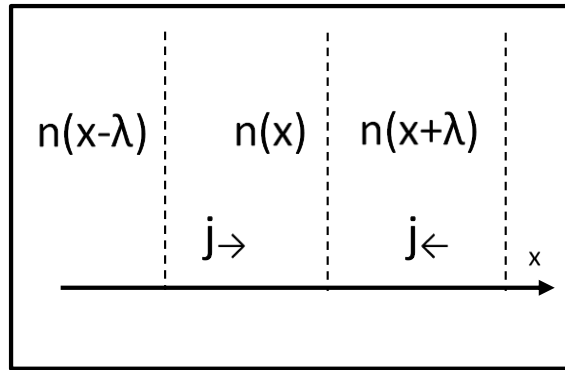
$$[D] = \frac{m^2}{c}$$

Коэффициенты диффузии

Вещество	D, см ² /с
CuSO ₄ в воде	0,45·10 ⁻⁵
NaCl в воде	1,24·10 ⁻⁵
He в воздухе	0,62
CH ₄ в воздухе	0,186



Коэффициент диффузии в газах



$$j_{x,\leftarrow} = \frac{1}{6} n(x + \lambda) \cdot \bar{v} = \frac{1}{6} \cdot \left(n(x) + \lambda \frac{dn}{dx} \right) \cdot \bar{v}$$

$$j_{x,\rightarrow} = \frac{1}{6} n(x - \lambda) \cdot \bar{v} = \frac{1}{6} \cdot \left(n(x) - \lambda \frac{dn}{dx} \right) \cdot \bar{v}$$

$$j_{\Sigma,x} = j_{x,\rightarrow} - j_{x,\leftarrow} = -\frac{1}{3} \lambda \bar{v} \frac{dn}{dx} = -D \frac{dn}{dx} \quad D = \frac{1}{3} \lambda \bar{v}$$

При нормальных условиях для азота

$$D \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 / \text{с} = 0,2 \text{ см}^2 / \text{с}$$

Коэффициенты теплопроводности и вязкости в газах

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \lambda \bar{v} = \frac{1}{3} m_0 n \lambda \bar{v} \quad - \text{ коэффициент вязкости}$$

$$\alpha = \frac{1}{3} \rho \lambda \bar{v} c_{уд,V} = \frac{1}{3} \rho \lambda \bar{v} \frac{C_V}{M} \quad - \text{ коэффициент теплопроводности}$$

Для воздуха при нормальных условиях

$$\rho = 1,29 \text{ кг} / \text{м}^3, \quad \lambda = 10^{-7} \text{ м}, \quad \bar{v} = 446 \text{ м} / \text{с},$$

$$\eta = 1,9 \cdot 10^{-5} \text{ кг} / (\text{м} \cdot \text{с}), \quad \eta_{\text{табл}} = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ кг} / (\text{м} \cdot \text{с})$$

$$C_V = 21 \text{ Дж} / (\text{моль} \cdot \text{К}), \quad M = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг} / \text{моль}$$

$$\alpha = 1,4 \cdot 10^{-2} \text{ Вт} / (\text{м} \cdot \text{К}), \quad \alpha_{\text{табл}} = 2,4 \cdot 10^{-2} \text{ Вт} / (\text{м} \cdot \text{К}).$$

Коэффициенты переноса в газах

$$D = \frac{1}{3} \lambda \bar{v}$$

- коэффициент диффузии

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \lambda \bar{v}$$

- коэффициент вязкости

$$\alpha = \frac{1}{3} \rho \lambda \bar{v} c_{y0, V}$$

- коэффициент теплопроводности

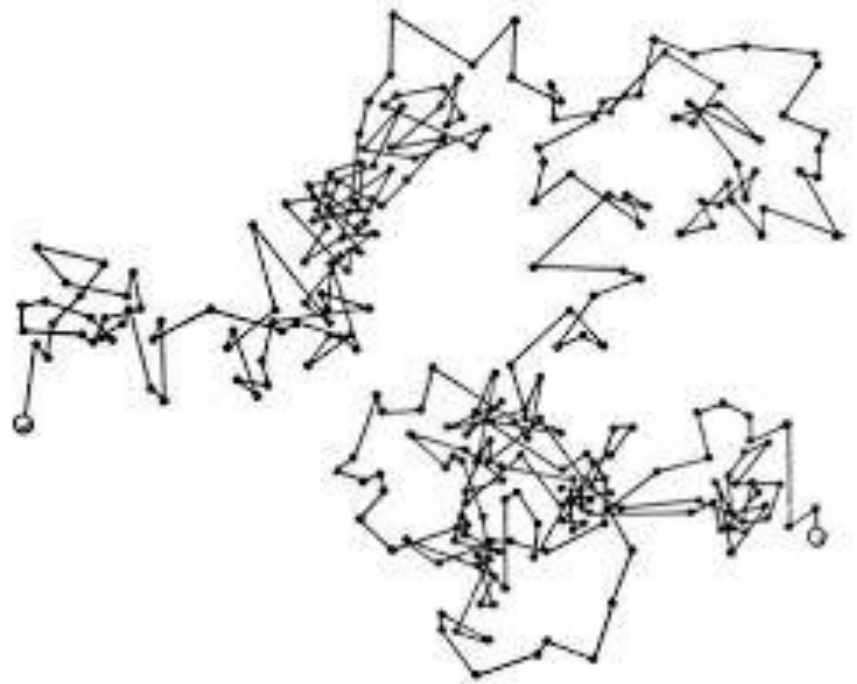
Броуновское движение как диффузия

Броуновское движение – беспорядочное движение малых частиц, находящихся в жидкости или газе, вызванное случайными ударами молекул окружающей среды.

$$\vec{R} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \dots + \vec{r}_N,$$

$$\begin{aligned} \overline{\vec{R}^2} &= \sum_{i=1}^N \overline{\vec{r}_i^2} + \sum_{i \neq j}^N \overline{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j} = N \overline{r^2} = N \cdot 2\lambda^2 = \\ &= \frac{t}{\tau} \cdot 2 \cdot \bar{v} \tau \cdot \lambda = 2 \cdot \bar{v} \cdot \lambda \cdot t = 6Dt \end{aligned}$$

$$\overline{x^2} = \overline{y^2} = \overline{z^2} = 2Dt$$



Оценка характерного диффузионного пути

1) Соль (NaCl) в воде за один час

$$D = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2 / \text{с}$$

$$R_{\text{диф}} = \sqrt{6Dt} \approx 0,5 \text{ см}$$

2) Метан (CH₄) в воздухе за один час

$$D = 0,186 \text{ см}^2 / \text{с}$$

$$R_{\text{диф}} = \sqrt{6Dt} \approx 63 \text{ см}$$

Связь коэффициента диффузии и подвижности частицы (соотношение Эйнштейна)

Подвижность частицы B : средняя скорость \vec{u} дрейфа частицы под действием постоянной силы \vec{F} равна

$$\vec{u} = B\vec{F}, \quad \vec{F} = (F, 0, 0), \quad u_x = BF$$

Плотность потока частиц, движущихся по направлению действия силы (дрейфовый поток)

$$\dot{J}_{\text{дрейф}} = nu_x$$

В стационарном состоянии устанавливается распределение Больцмана для концентрации частиц, находящихся в поле силы \vec{F} :

$$n(x) = n_0 \cdot \exp\left(-\frac{F \cdot x}{kT}\right)$$

Плотность диффузионного потока

$$j_{\text{дифф}} = -D \frac{dn}{dx} = Dn \cdot \frac{F}{kT}$$

Для стационарного состояния встречные диффузионный и дрейфовый потоки равны.

$$j_{\text{дрейф}} = nVF = j_{\text{дифф}} = Dn \frac{F}{kT}$$

$$D = kTB$$

Молекулярное течение разреженного газа

Разреженный газ

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma} \gg d$$

d - характерный размер сосуда, трубки.

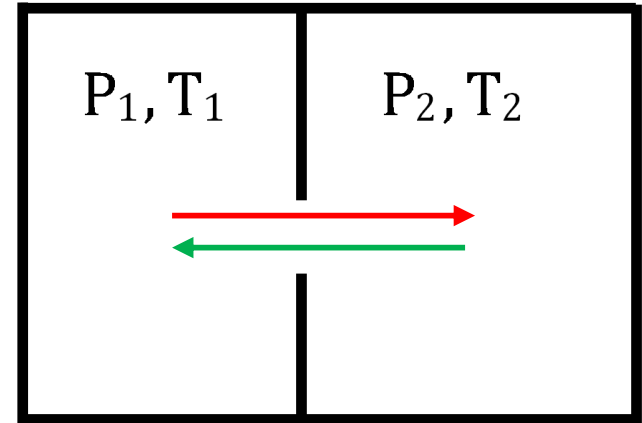
Сосуд Дьюара – давление в пространстве между двойными стенками $\approx 10^{-2}$ Па.

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma} \approx 1 \text{ м} \gg d = 1 \text{ мм}$$

Для описания течения разреженного газа по трубе неприменима формула Пуазейля.

Эффект Кнудсена

$$J_{1-2} = S j_{1-2} = \frac{1}{4} S n_1 \bar{v}_1 = S n_1 \sqrt{\frac{kT_1}{2\pi m}}$$



$$J_{2-1} = S j_{2-1} = \frac{1}{4} S n_2 \bar{v}_2 = S n_2 \sqrt{\frac{kT_2}{2\pi m}}$$

В состоянии равновесия

$$J_{2-1} = S n_2 \sqrt{\frac{kT_2}{2\pi m}} = J_{1-2} = S n_1 \sqrt{\frac{kT_1}{2\pi m}}$$

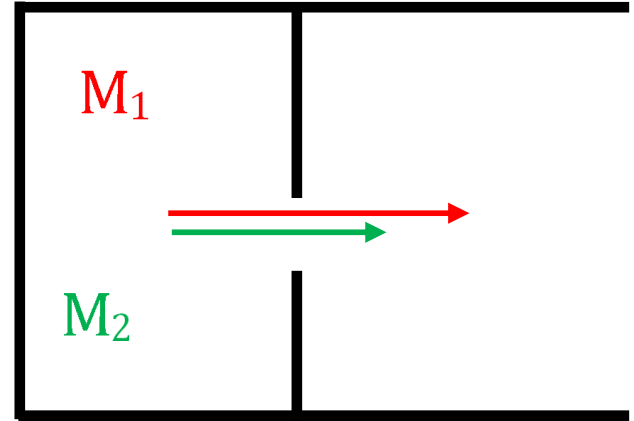
$$n_1 = \frac{P_1}{kT_1}, \quad n_2 = \frac{P_2}{kT_2}$$

$$\frac{P_1}{\sqrt{T_1}} = \frac{P_2}{\sqrt{T_2}}$$

Разделение газовых смесей

$$J_1 = S j_1 = \frac{1}{4} S n_{1,0} \bar{v}_1 = S n_{1,0} \sqrt{\frac{RT}{2\pi M_1}}$$

$$J_2 = S j_2 = \frac{1}{4} S n_{2,0} \bar{v}_2 = S n_{2,0} \sqrt{\frac{RT}{2\pi M_2}}$$



После одного цикла эффузии

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{J_1}{J_2} = \sqrt{\frac{M_2}{M_1}} \cdot \left(\frac{n_1}{n_2} \right)_0$$

При $M_1 < M_2$ доля лёгкой компоненты увеличивается

$$\frac{n_1}{n_2} > \left(\frac{n_1}{n_2} \right)_0 \quad (\text{разделение изотопов})$$

Свободное молекулярное течение газа через трубу

$$\lambda_{\text{эфф}} = 2r, \quad D = \frac{2}{3} r \bar{v}$$

Число молекул, переходящих из сосуда в
сосуд в единицу времени

$$\frac{dN}{dt} = Sj = -SD \frac{dn}{dx} = -\frac{2r\bar{v}}{3} \frac{dn}{dx} S = -\frac{2r\bar{v}}{3} \cdot \frac{n_2 - n_1}{L} S$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{4r^3}{3L} \sqrt{\frac{2\pi}{kmT}} \cdot (P_1 - P_2)$$