

Концепции и модели физики

Кузьмичев Сергей Дмитриевич



Содержание лекции №10

1. Магнитное поле.
2. Сила Лоренца. Сила Ампера.
3. Магнитное поле равномерно движущегося заряда.
4. Закон Био-Савара.
5. Магнитное поле бесконечного прямого провода с током.
6. Магнитное поле витка с током на его оси.
7. Магнитное поле короткого соленоида на его оси.
8. Теорема Гаусса для магнитного поля в вакууме.
9. Теорема о циркуляции для магнитного поля в вакууме.
10. Магнитное поле тороидальной катушки.
11. Магнитный момент витка с током. Поле точечного магнитного диполя.
12. Виток с током в магнитном поле: энергия, момент сил, сила.

Магнитное поле

Магнитное поле действует на движущиеся заряды, токи и тела, обладающие магнитным моментом.

Источниками магнитного поля являются **электрические токи, движущиеся заряды и магнитные моменты.**

Магнитное поле характеризуется вектором **магнитной индукции \vec{B}** .

Постоянное во времени магнитное поле создаётся постоянными токами и неподвижными магнитными моментами.



Сила Лоренца

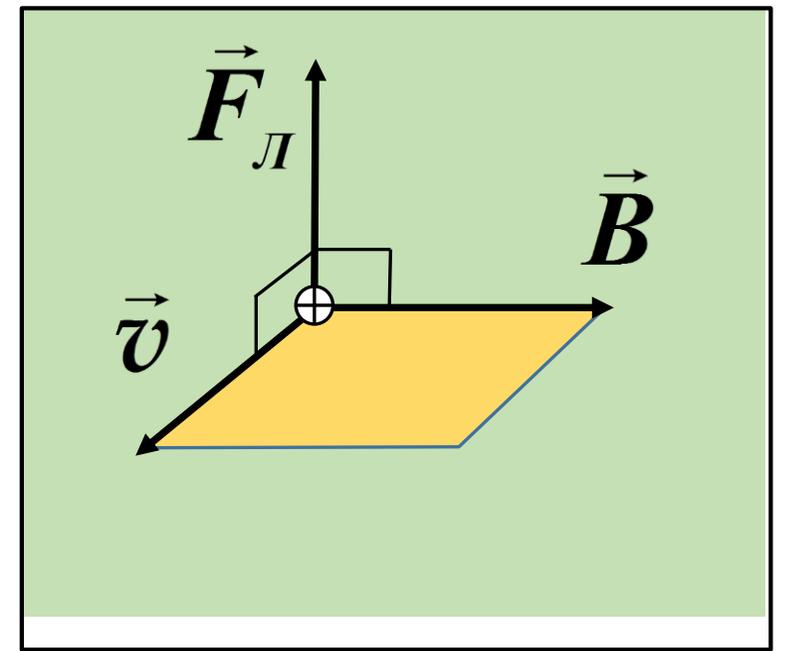
В магнитном поле с индукцией \vec{B} на движущийся со скоростью \vec{v} заряд q действует сила Лоренца

$$\vec{F}_L = \frac{q}{c} \cdot [\vec{v}, \vec{B}] = \frac{q}{c} \cdot [\vec{v} \times \vec{B}]$$

Полная сила, действующая на заряд, движущийся в электромагнитном поле, определяется выражением

$$\vec{F} = q \left\{ \vec{E} + \frac{1}{c} \cdot [\vec{v} \times \vec{B}] \right\}$$

Здесь \vec{E} - напряжённость электрического поля



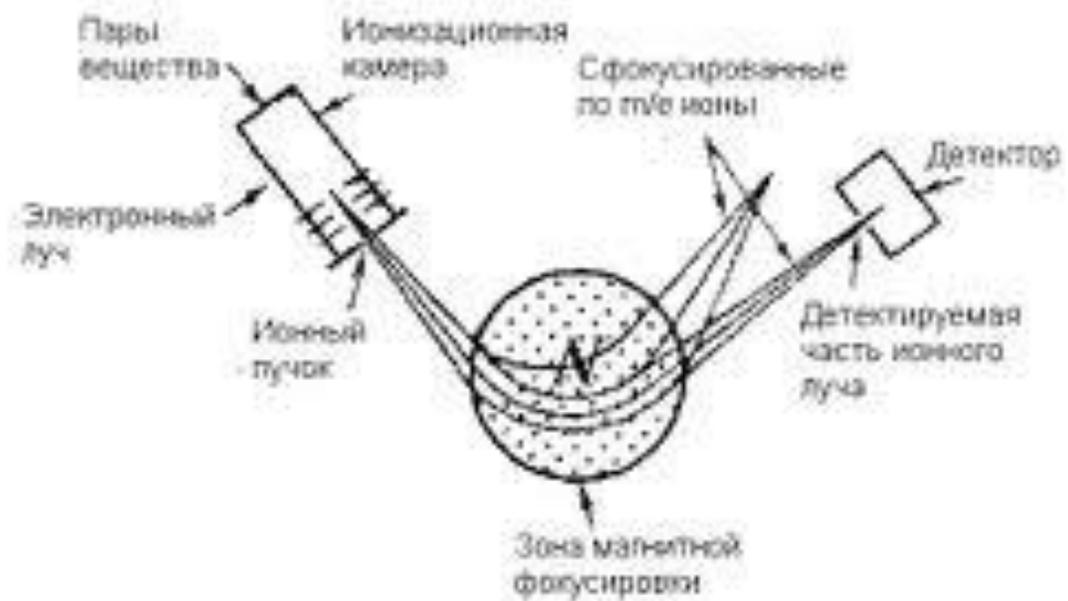
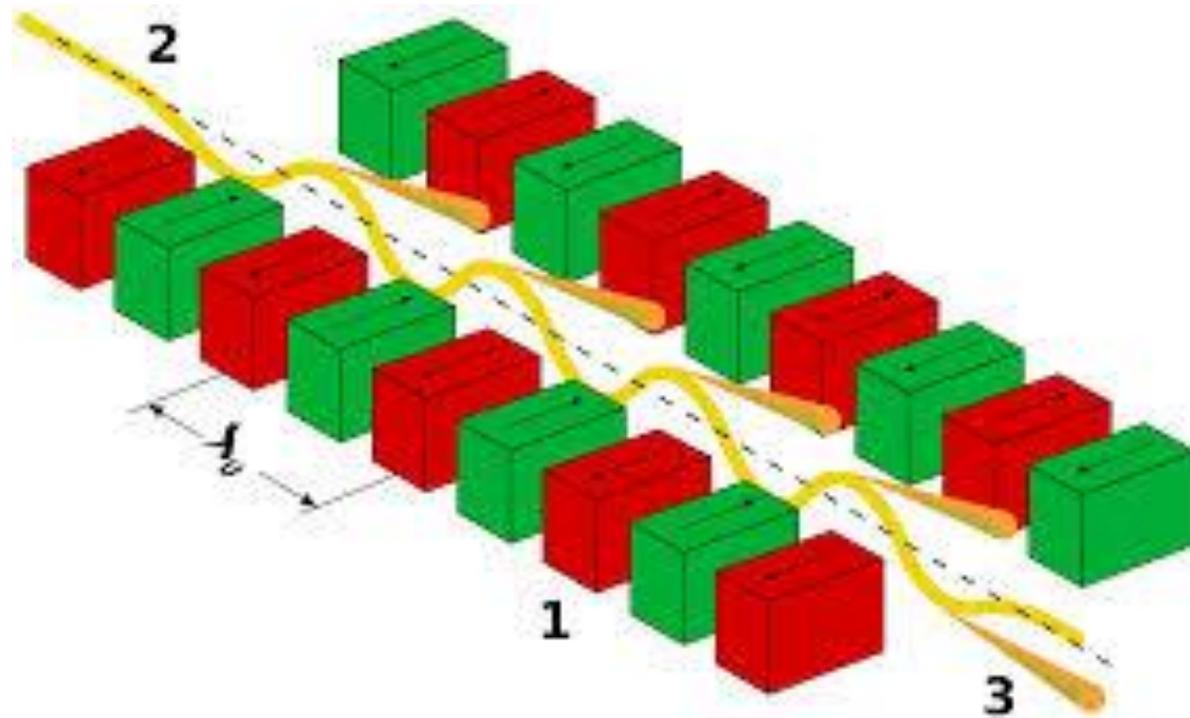
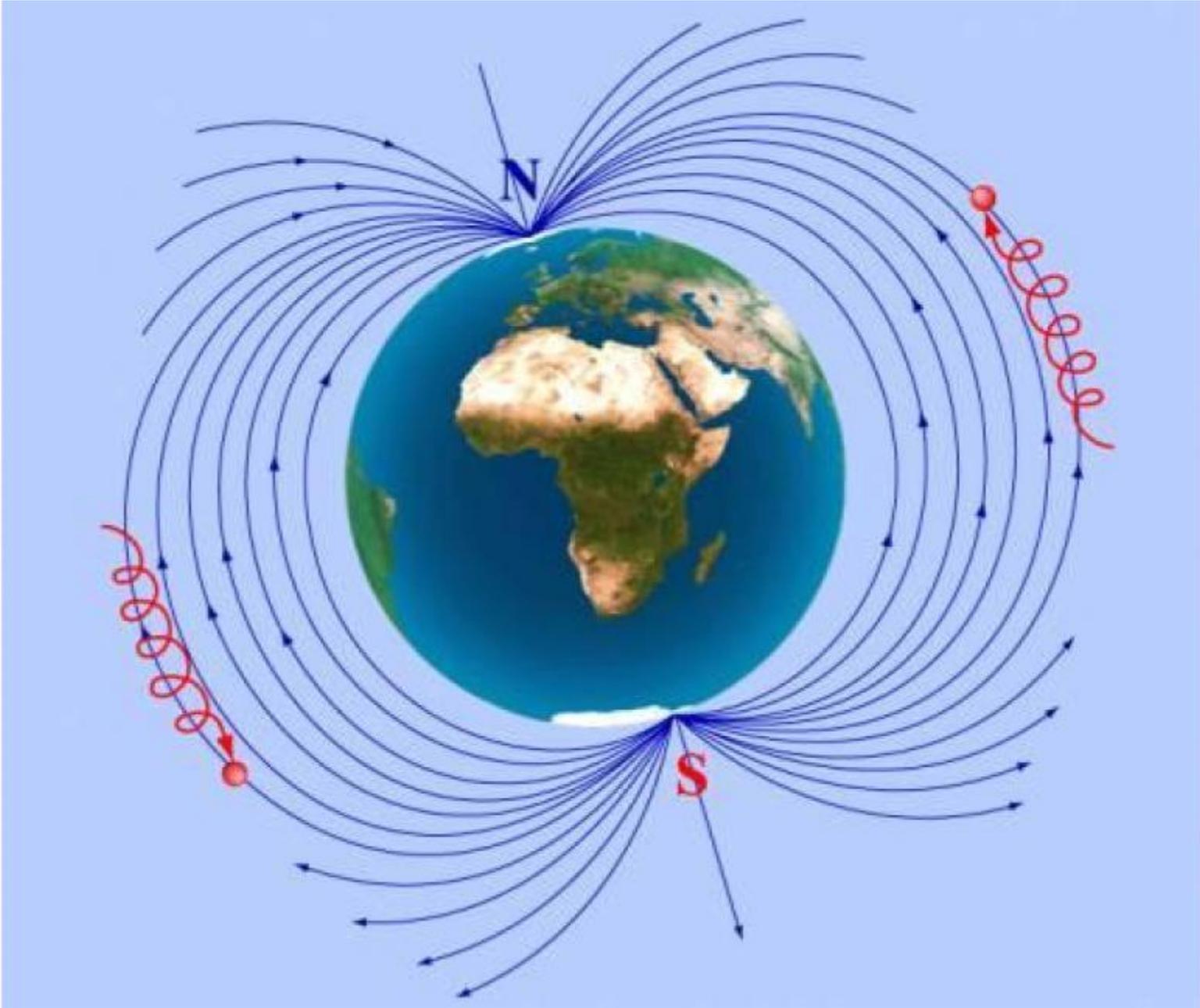


Схема устройства и работы масс-спектрометра





Сила Ампера

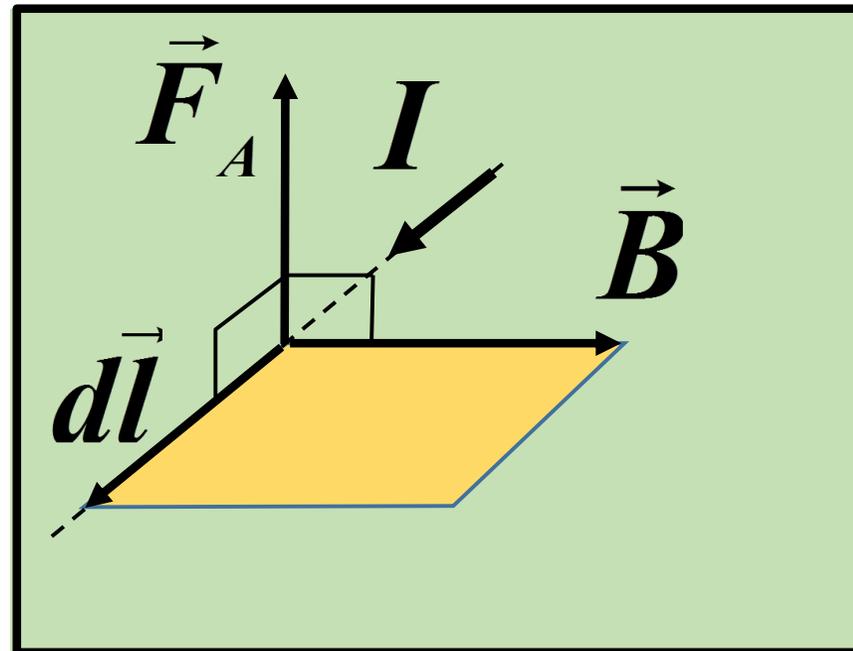
Силой Ампера называется сила, действующая на токи со стороны магнитного поля.

На объёмный элемент тока $\vec{j}dV$ действует сила

$$d\vec{F} = \frac{1}{c} \cdot \left[\vec{j}dV \times \vec{B} \right] = \frac{1}{c} \cdot \left[\vec{j} \times \vec{B} \right] dV$$

На линейный элемент тока $I d\vec{l}$ действует сила

$$d\vec{F} = \frac{I}{c} \cdot \left[d\vec{l} \times \vec{B} \right]$$





Магнитное поле равномерно движущегося заряда

$$\vec{B} = \frac{q}{c} \cdot \frac{[\vec{v} \times \vec{r}]}{r^3}$$

Связь между магнитным и электрическим полями ($v \ll c$)

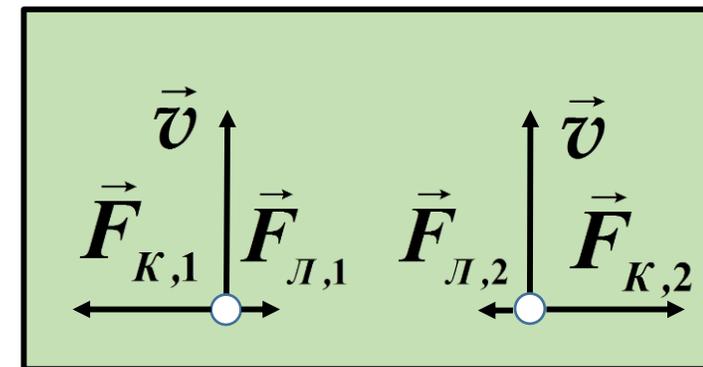
$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{r^3}$$
$$\vec{B} = \frac{q}{c} \cdot \frac{[\vec{v} \times \vec{r}]}{r^3} = \frac{1}{c} \cdot [\vec{v} \times \vec{E}]$$

Взаимодействие двух движущихся зарядов

$$\vec{F}_{\text{кул}} = q\vec{E} = \frac{q^2\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{F}_{\text{маг}} = \vec{F}_l = \frac{q}{c} [\vec{v} \times \vec{B}] = \frac{q}{c} \left[\vec{v} \times \frac{1}{c} \cdot [\vec{v} \times \vec{E}] \right]$$

$\vec{v} \perp \vec{E}$



$$\vec{F}_l = \frac{q}{c} [\vec{v} \times \vec{B}] = \frac{q}{c} q\vec{E} = \frac{q}{c} \vec{F}_{\text{кул}}$$

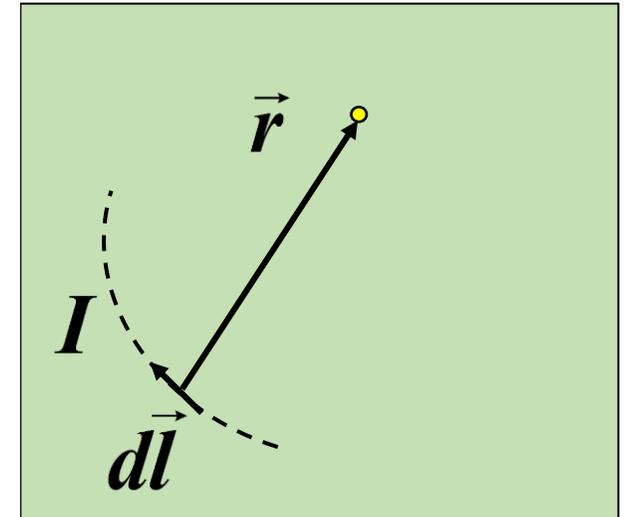
Закон Био-Савара

Индукция магнитного поля, создаваемого элементом тока в точке наблюдения с радиусом-вектором \vec{r} , равна:
Для объёмного элемента тока $\vec{j}dV$

$$d\vec{B} = \frac{1}{c} \cdot \frac{[\vec{j} \times \vec{r}]}{r^3} dV$$

Для линейного элемента тока $I d\vec{l}$

$$d\vec{B} = \frac{I}{c} \cdot \frac{[d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}$$



Магнитное поле прямого бесконечно длинного тонкого провода с током

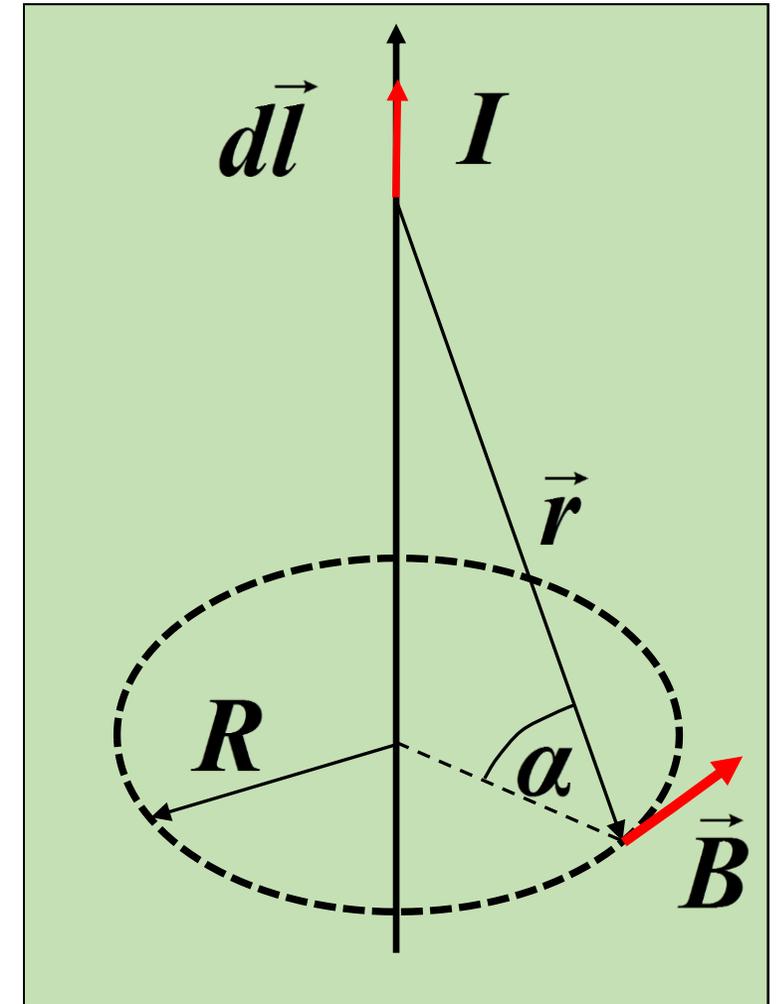
$$d\vec{B} = \frac{I}{c} \cdot \frac{[d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3},$$

$$d\vec{B} \perp d\vec{l}, \quad d\vec{B} \perp \vec{r},$$

$$r = \frac{R}{\cos \alpha},$$

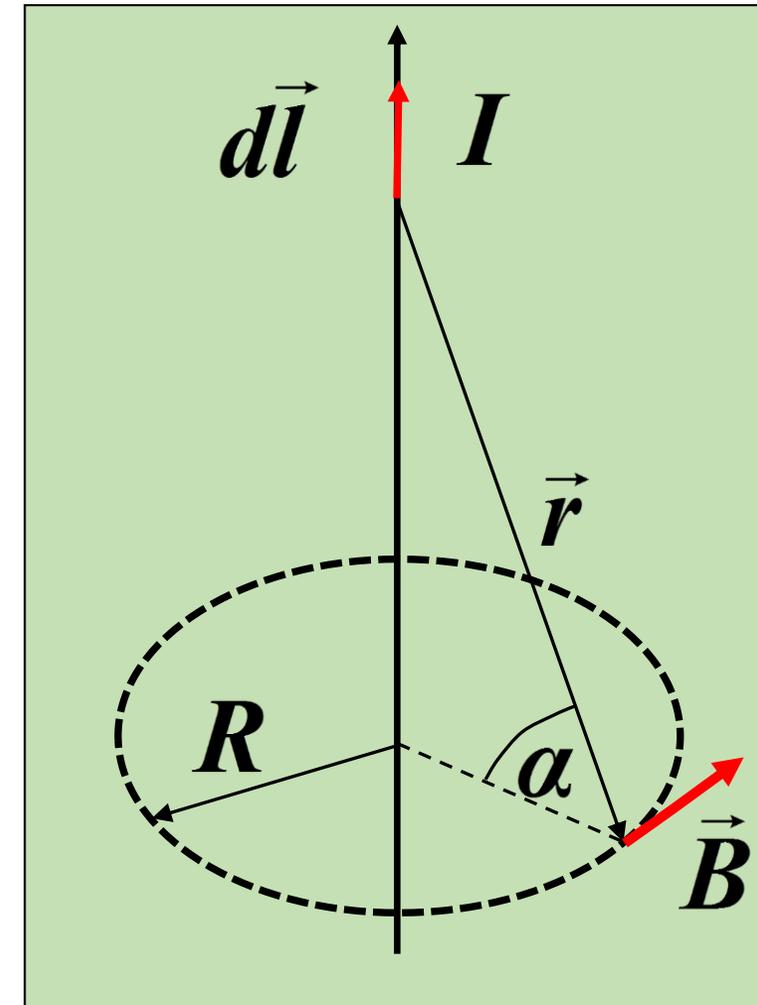
$$[d\vec{l} \times \vec{r}] = dl \cdot r \cdot \cos \alpha = dl \cdot R,$$

$$dl = dz, \quad z = R \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad dz = \frac{R \cdot d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

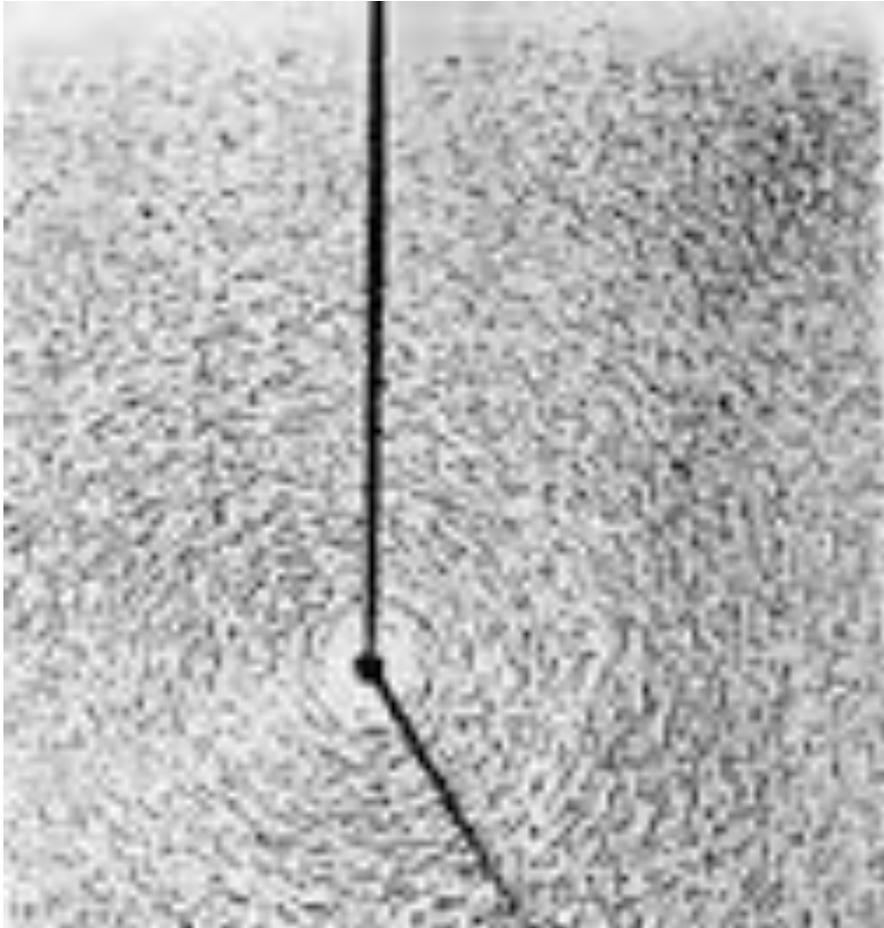


Магнитное поле прямого длинного тонкого провода с ТОКОМ

$$\begin{aligned} dB &= \frac{I}{c} \cdot \frac{R \cdot dz}{r^3} = \frac{I}{c} \cdot \frac{R^2 \cdot d\alpha}{\cos^2(R / \cos \alpha)^3} = \\ &= \frac{I}{cR} \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha \\ B &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{I}{cR} \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha \\ B &= \frac{2I}{cR} \end{aligned}$$



Магнитное поле прямого длинного тонкого провода с ТОКОМ



$$I = 1 \text{ A} = 3 \cdot 10^9 \text{ ед.тока.СГС},$$

$$R = 1 \text{ см}$$

$$B = \frac{2I}{cR} = 0,2 \text{ Гс (СГС)}$$

Магнитное поле Земли

$$B \approx 0,5 \text{ Гс (СГС)}$$

Сила взаимодействия двух параллельных проводов с током

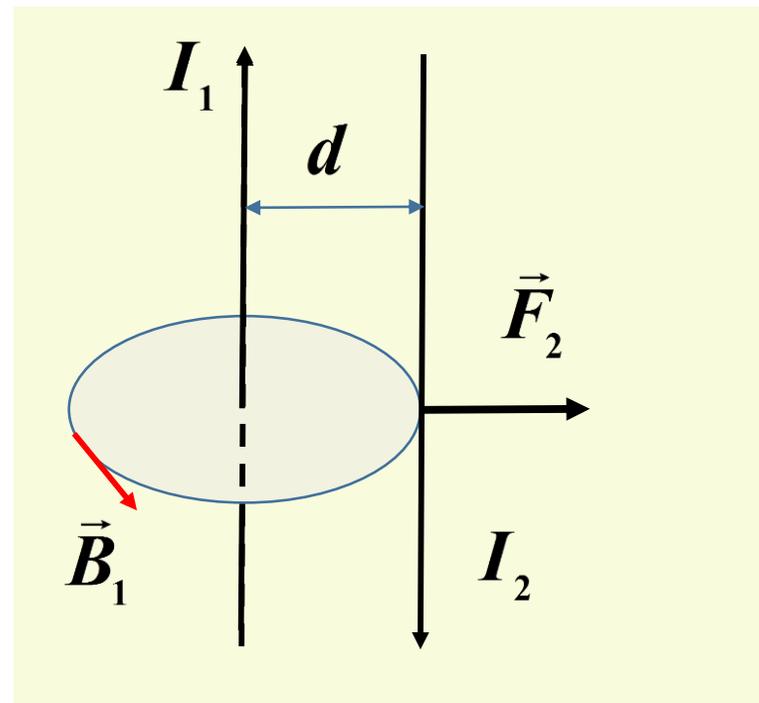
$$B_1(d) = \frac{2I_1}{cd}$$

$$F_2 = \frac{1}{c} I_2 B_1 l = \frac{2I_1 I_2}{c^2 d} l$$

$$I_1 = I_2 = 1 \text{ A} = 3 \cdot 10^9 \text{ ед.тока.СГС},$$

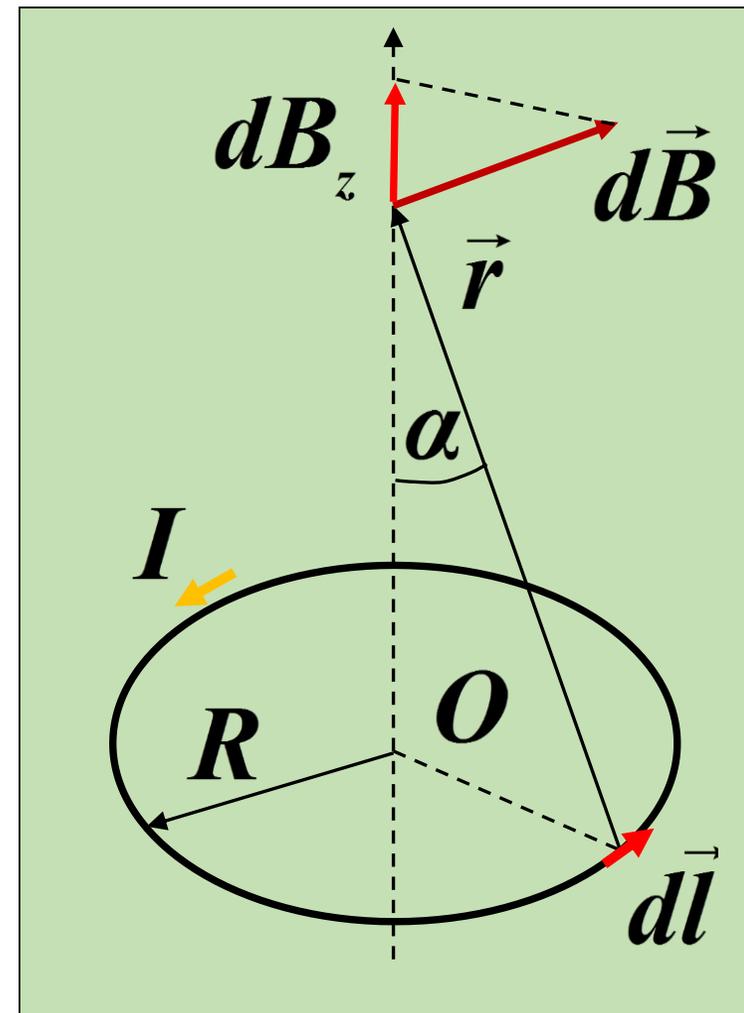
$$d = l = 1 \text{ м}$$

$$F_2 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ дин} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Н}$$



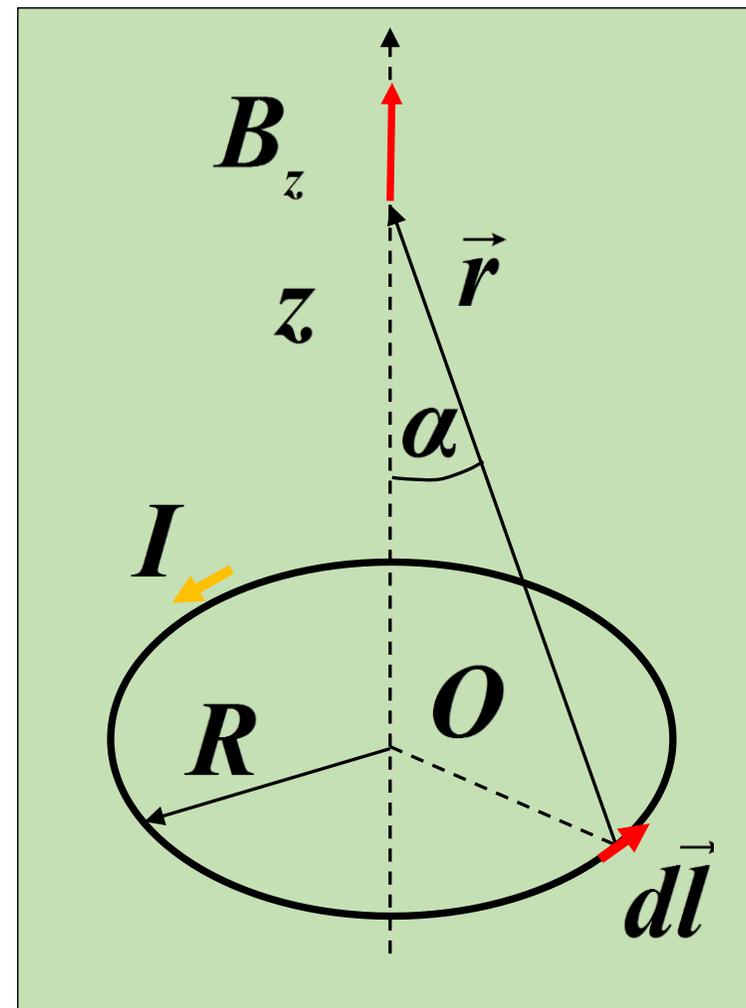
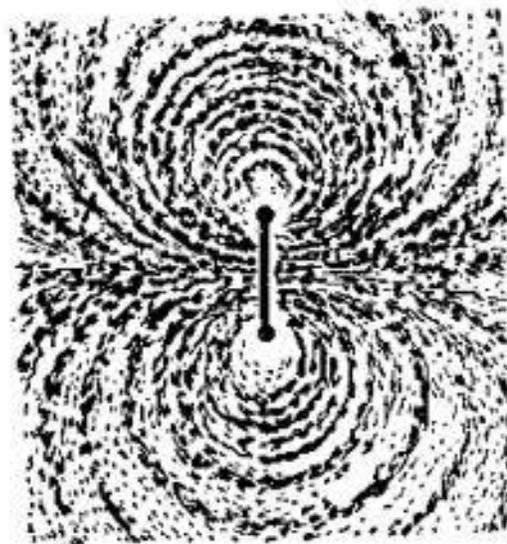
Магнитное поле кругового витка с током на его оси

$$d\vec{B} = \frac{I}{c} \cdot \frac{[d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3},$$
$$d\vec{B} \perp d\vec{l}, \quad \Sigma d\vec{B}_{\perp} = 0,$$
$$\vec{r} \perp d\vec{l}, \quad \left[d\vec{l} \times \vec{r} \right] = dl \cdot r,$$
$$r = \frac{R}{\sin \alpha}, \quad dB_z = dB \cdot \sin \alpha$$
$$dB_z = \frac{I}{c} \cdot \frac{\sin^3 \alpha}{R^2} dl$$



Магнитное поле кругового витка с током на его оси

$$B_z = \frac{I \sin^3 \alpha}{cR^2} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{2\pi I}{cR} \sin^3 \alpha$$
$$B_z = \frac{2\pi R^2 I}{cr^3},$$
$$r^2 = R^2 + z^2$$



Магнитное поле короткого соленоида на его оси

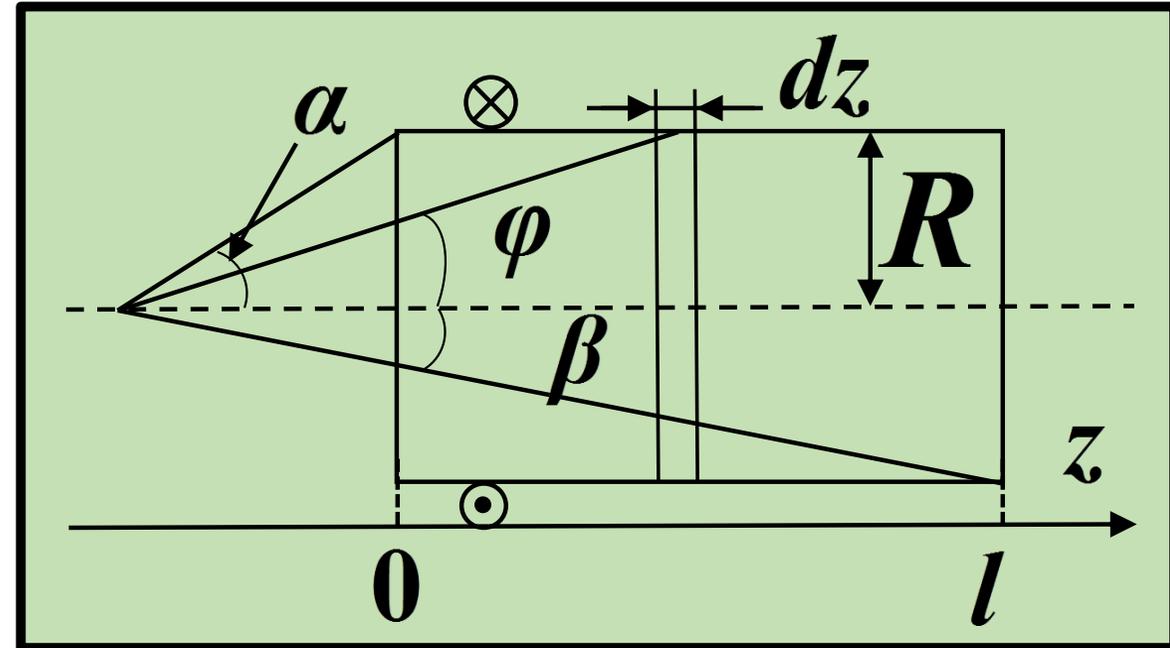
$$dB_z = \frac{2\pi \cdot dI}{cR} \sin^3 \varphi, \quad n = \frac{N}{l}$$

$$dI = In \cdot dz, \quad dz = -\frac{Rd\varphi}{\sin^2 \varphi},$$

$$dB_z = -\frac{2\pi \cdot In}{c} \sin \varphi d\varphi$$

$$B_z = -\frac{2\pi \cdot In}{c} \int_{\beta}^{\alpha} \sin \varphi d\varphi$$

$$B_z = \frac{2\pi \cdot In}{c} \cdot (\cos \beta - \cos \alpha)$$



Магнитное поле соленоида на его оси

$$B_z = \frac{2\pi \cdot In}{c} \cdot (\cos \beta - \cos \alpha),$$

$$R \ll l, \quad \alpha \rightarrow \pi, \quad \beta \rightarrow 0$$

$$B_z = \frac{4\pi \cdot In}{c}$$

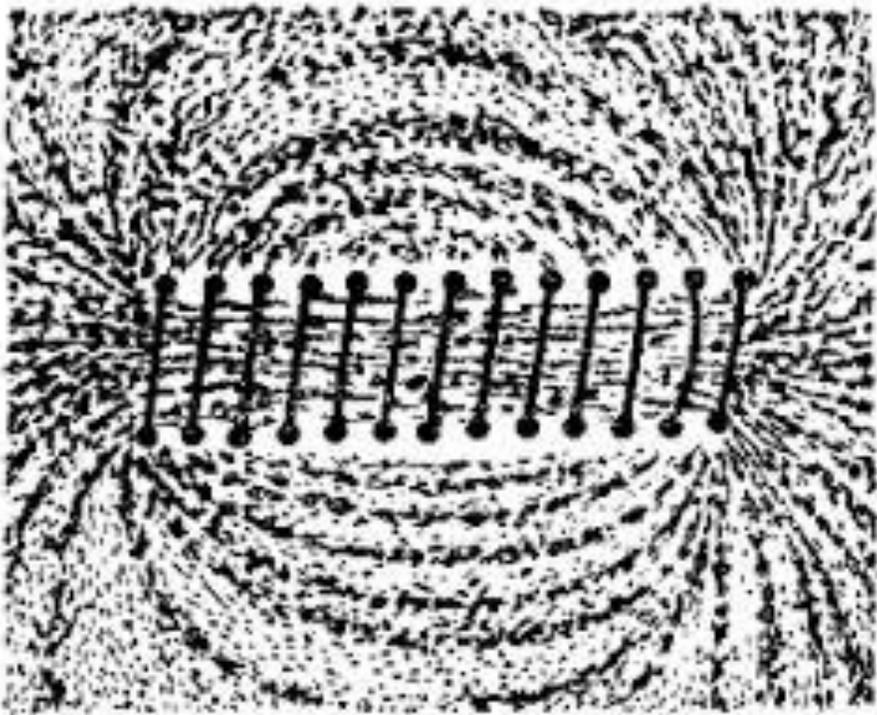
- магнитное поле в «центре»
длинного соленоида

$$R \ll l, \quad \alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}, \quad \beta \rightarrow 0$$

$$B_z = \frac{2\pi \cdot In}{c}$$

- магнитное поле на «торце»
длинного соленоида

Магнитное поле соленоида



$$I = 5 \text{ A} = 15 \cdot 10^9 \text{ ед.тока.СГС},$$

$$n = 20 \text{ см}^{-1}$$

$$B = \frac{4\pi \cdot In}{c} \approx 125 \text{ Гс}$$

Мощные Магниты

В Национальной лаборатории высоких магнитных полей (NHMFL), расположенной в городе Таллахасси (Флорида), запустили гибридный магнит. Он весит 34 т, высота его – почти 7 м, и он может создать магнитное поле в **45 Тл**, что примерно в миллион раз больше, чем у Земли.

В Лос-Аламосской национальной лаборатории США создали сверхмощный импульсный магнит. С его помощью получено магнитное поле с индукцией **100,75 Тл**. Для магнитного поля это рекордная величина, она превышает магнитное поле Земли в 2 млн раз.

Соленоид магнита изготовлен из российского сверхпрочного высокопроводящего нанокompозита медь — ниобий, который и позволяет создавать столь высокие магнитные поля. Композит, разработанный в Курчатовском институте совместно с ВНИИ неорганических материалов им. А. А. Бочвара.

Теорема Гаусса для индукции магнитного поля

Поток вектора магнитной индукции через замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

- теорема Гаусса в интегральной форме

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

- теорема Гаусса в дифференциальной форме

Не существует свободных магнитных зарядов, на которых могли бы начинаться или заканчиваться силовые линии индукции магнитного поля.

Теорема о циркуляции индукции магнитного поля постоянных токов в вакууме

Циркуляция индукции магнитного поля постоянных токов по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов, пронизывающих контур, умноженной на $4\pi / c$ (в системе СГС)

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I_{\Sigma}$$

- теорема о циркуляции в интегральной

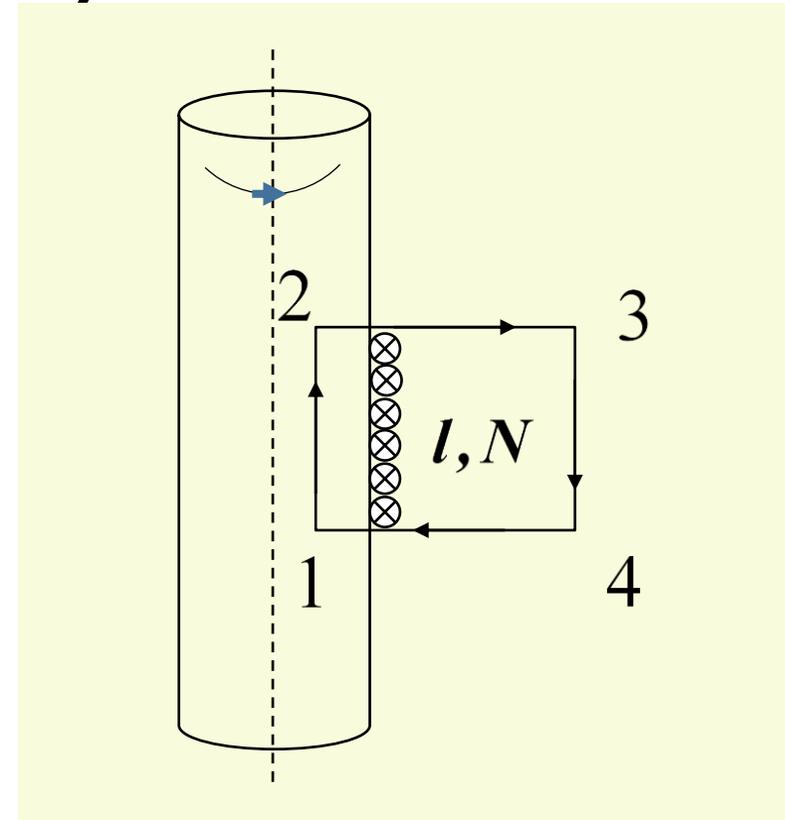
$$\text{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

теорема о циркуляции в дифференциальной форме

Магнитное поле длинного соленоида и тороидальной катушки (на основе теоремы о циркуляции)

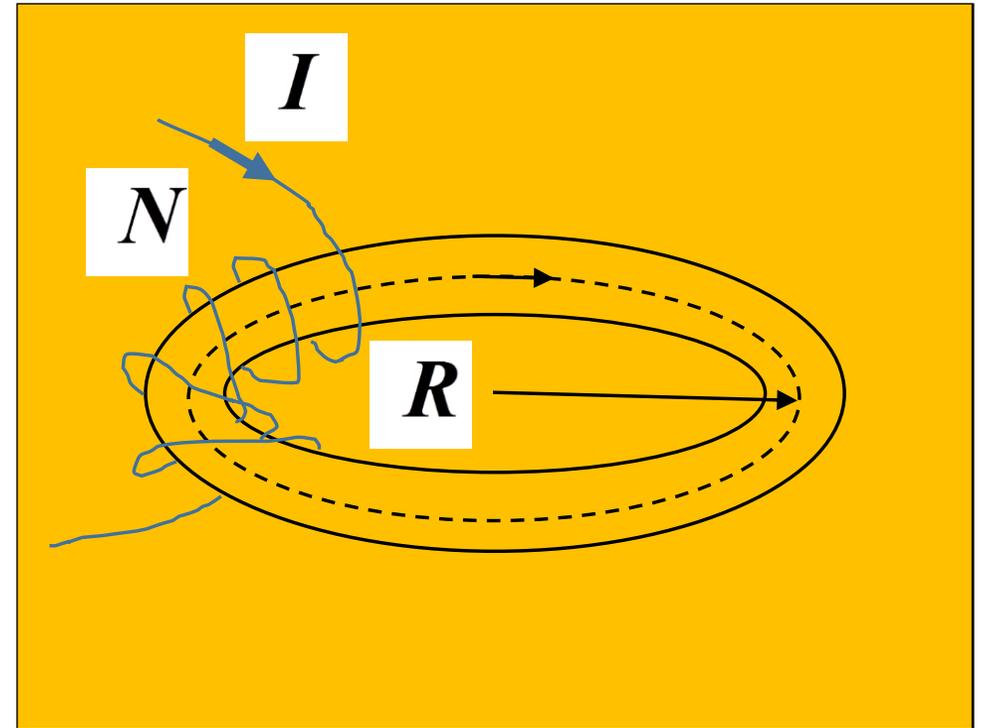
а) Длинный соленоид

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{B} d\vec{l} &= B_{\text{внутри},\tau} l + B_{\text{вне},\tau} l = \\ &= \frac{4\pi}{c} I_{\Sigma} = \frac{4\pi}{c} NI, \\ B_{\text{вне},\tau} &= 0, \quad i = \frac{NI}{l}, \\ B_{\text{внутри},\tau} &= \frac{4\pi}{c} i \end{aligned}$$



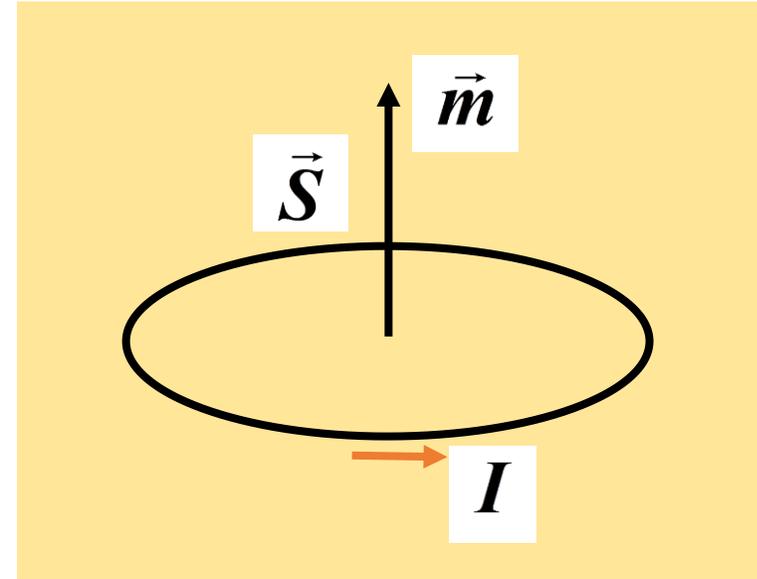
б) Тонкая тороидальная катушка

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = B_{\text{внутри}} \cdot 2\pi R =$$
$$= \frac{4\pi}{c} I_{\Sigma} = \frac{4\pi}{c} NI,$$
$$B_{\text{внутри},\tau} = \frac{2NI}{cR}$$



Магнитный момент витка с током

$$\vec{m} = \frac{I}{c} \vec{S}$$



Момент сил, действующих на виток
с током в магнитном поле

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} = [\vec{m}, \vec{B}]$$

Потенциальная энергия *витка с током* в магнитном поле

$$U = -\vec{m}\vec{B}$$

Сила, действующая на виток с током (магнитный момент) в неоднородном магнитном поле

$$\vec{F} = (\vec{m}, \nabla) \vec{B}$$

Магнитное поле точечного *магнитного диполя*

$$\vec{B} = \frac{3(\vec{m}, \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}$$

Магнитное поле Земли

