

# Концепции и модели физики

Кузьмичев Сергей Дмитриевич



# Содержание лекции №9

1. Взаимная энергия системы зарядов.
2. Энергия плоского конденсатора.
3. Энергия электрического поля и её локализация в пространстве. Объёмная плотность энергии.
4. Энергетический метод вычисления сил в электрическом поле.
5. Постоянный ток. Сила и плотность тока.
6. Закон Ома в интегральной и дифференциальной формах.
7. Работа и мощность постоянного тока.
8. Закон Джоуля-Ленца.
9. Процесс установления тока в цепи с конденсатором.
10. Токи в неограниченных средах.

# Взаимная энергия системы зарядов

## а) Энергия взаимодействия двух точечных зарядов

$$U(\infty) = 0, \quad U(r_{12}) - U(\infty) = A_{\text{внеш},12}$$

$$A_{\text{внеш},12} = q_1\varphi_2 = q_2\varphi_1 = k \frac{q_1q_2}{r_{12}}$$

$$U(r_{12}) = q_1\varphi_2 = q_2\varphi_1 = \frac{1}{2}(q_1\varphi_2 + q_2\varphi_1)$$

## б) Энергия взаимодействия системы зарядов

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} q_i \varphi_k$$

в) Энергия жёсткого диполя в однородном поле

$$U = (+q)\varphi_+ + (-q)\varphi_- = -q \cdot \left( \varphi(\vec{r}) - \varphi(\vec{r} + \vec{l}) \right) = -q \cdot \vec{l}\vec{E} = -\vec{p}\vec{E}$$

в) Энергия взаимодействия в случае непрерывного распределения зарядов в пространстве с объёмной плотностью  $\rho(\vec{r})$

$$U = \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) dV$$

г) Энергия взаимодействия в случае непрерывного распределения зарядов по поверхности с поверхностной плотностью заряда  $\sigma(\vec{r})$

$$U = \frac{1}{2} \int_S \sigma(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) dS$$

# Энергия электрического поля в плоском конденсаторе (энергия плоского конденсатора)

а) По определению энергии зарядов

$$U = \frac{1}{2}(+q)\varphi_+ + \frac{1}{2}(-q)\varphi_- = \\ = \frac{1}{2}q(\varphi_+ - \varphi_-) = \frac{q^2}{2C} = \frac{C(\varphi_+ - \varphi_-)^2}{2}$$

б) По величине работы, затраченной на создание такой системы зарядов

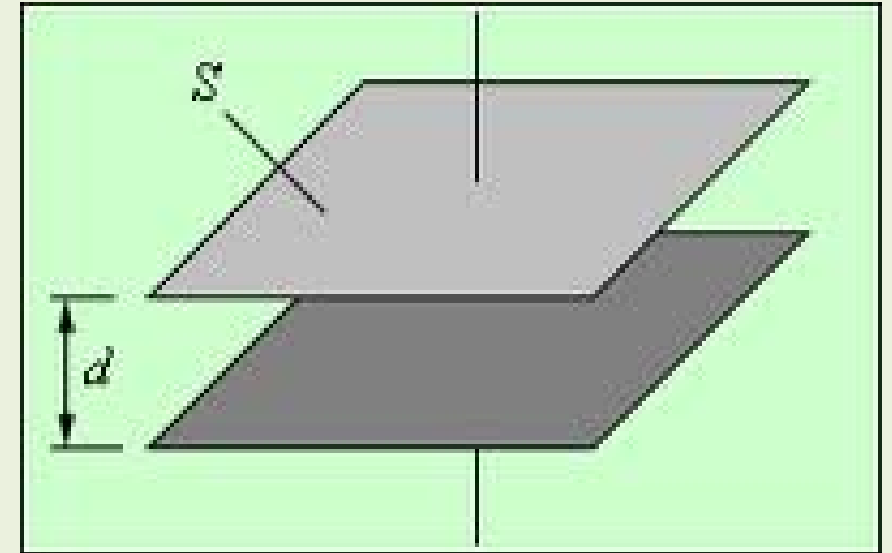
$$dA = dq \cdot (\varphi_+ - \varphi_-) = dq \cdot \frac{q}{C} \\ A = U = \frac{q^2}{2C}$$

## Плотность энергии электрического поля

$$\varphi_+ - \varphi_- = Ed, \quad C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d}$$

$$U = \frac{C(\varphi_+ - \varphi_-)^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon S}{4\pi d} \cdot (Ed)^2 = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} \cdot Sd$$

$$w = \frac{U}{V} = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}$$



Для веществ, где выполняется соотношение  $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

$$w = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \frac{ED}{8\pi} = \frac{D^2}{8\pi\varepsilon}$$

## Энергия равномерно заряженного шара

а) Шар равномерно заряжен по поверхности и находится в вакууме

$$U = \int_V \frac{(E(r))^2}{8\pi} dV = \int_{r=R}^{\infty} \frac{1}{8\pi} \cdot \left(\frac{Q}{r^2}\right)^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{2R}$$

б) Шар равномерно заряжен по объёму

$$U = U(r < R) + U(r \geq R)$$

$$U(r < R) = \int_{r=0}^{r=R} \frac{1}{8\pi} \cdot \left(\frac{Q}{R^3} r\right)^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{10R}$$

$$U(r \geq R) = \int_{r=R}^{\infty} \frac{1}{8\pi} \cdot \left(\frac{Q}{r^2}\right)^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{2R}$$

$$U = \frac{3Q^2}{5R}$$

# Энергетический метод вычисления сил в электрическом поле

Метод виртуальных перемещений

$$\delta A = F \cdot \delta x$$

а) На пластинах конденсатора постоянные заряды

$$U = U(x) = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2 4\pi x}{2S} = \frac{2\pi q^2}{S} x$$

$$dA_{\text{внеш}} = F_{\text{внеш},x} dx = dU = \frac{2\pi q^2}{S} dx, \quad F_{\text{внеш},x} = -F_{\text{эл},x}$$

$$F_{\text{эл},x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{2\pi q^2}{S}$$



б) На пластинах конденсатора постоянные потенциалы

$$\varphi_+ - \varphi_- = \mathcal{E} = \text{const}, \quad q = C \cdot (\varphi_+ - \varphi_-) = C\mathcal{E},$$

$$U = U(x) = \frac{C(\varphi_+ - \varphi_-)^2}{2} = \frac{C\mathcal{E}^2}{2}, \quad \delta U = \frac{\mathcal{E}^2}{2} \delta C$$

$$dA_{\text{внеш}} = dA_{\text{бат}} + dA_{\text{мех}} = \delta U,$$

$$dA_{\text{бат}} = \delta q \cdot \mathcal{E} = \mathcal{E}^2 \cdot \delta C, \quad dA_{\text{мех}} = F_{\text{внеш},x} \delta x$$

$$\frac{\mathcal{E}^2}{2} \delta C = \mathcal{E}^2 \cdot \delta C + F_{\text{внеш},x} \delta x$$

$$\varphi_+ - \varphi_- = \mathcal{E} = \text{const}, \quad q = C \cdot (\varphi_+ - \varphi_-) = C\mathcal{E},$$

$$F_{\text{внеш},x} \delta x = -\frac{\mathcal{E}^2}{2} \delta C = -\delta U, \quad F_{\text{эл},x} = -F_{\text{внеш},x} = \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{2\pi q^2}{S}$$

## в) Втягивание диэлектрической пластины в конденсатор

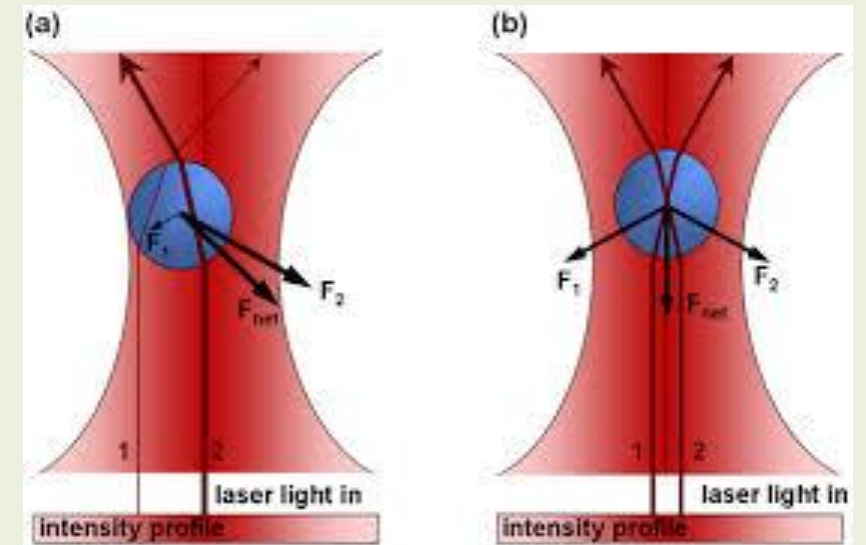
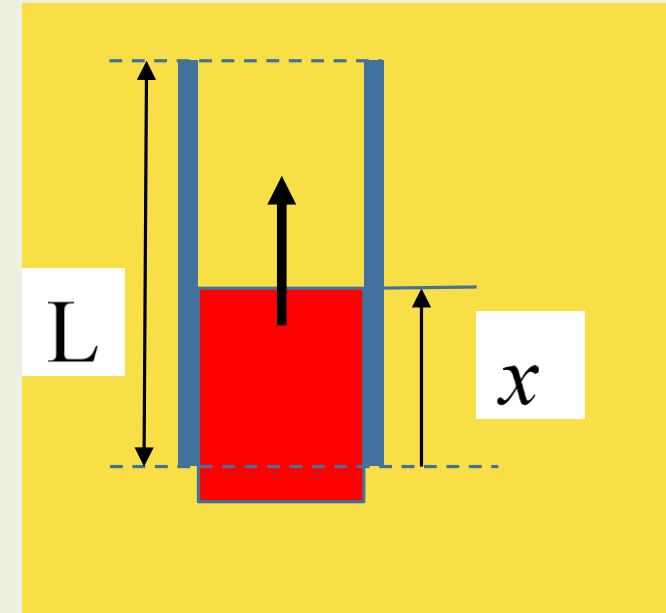
$$L, x, d, h, \varepsilon, \quad q = \text{const},$$

$$C(x) = C_1 + C_2, \quad C_1 = \frac{\varepsilon h x}{4\pi d}, \quad C_2 = \frac{h(L-x)}{4\pi d}$$

$$C(x) = \frac{Lh}{4\pi d} \left( 1 + (\varepsilon - 1) \frac{x}{L} \right),$$

$$U(x) = \frac{q^2}{2C(x)},$$

$$F_{\text{эл},x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{q^2}{2C^2} \cdot \frac{(\varepsilon - 1)h}{4\pi d}$$



## Постоянный электрический ток

**Электрический ток** – упорядоченное движение зарядов.

**Сила тока** – количество заряда, переносимое через сечение проводника в единицу времени

$$I = \frac{dq}{dt}$$

**Плотность тока** - количество заряда, переносимое в единицу времени через площадку единичного сечения.

$$j = \frac{I}{S}$$

- для постоянной по сечению проводника плотности тока

Если  $q_0$  - величина заряда носителя заряда (электроны, ионы),  $n$  - концентрация носителей заряда,  $\vec{v}$  - средняя скорость направленного движения зарядов, то плотность тока определяется выражением

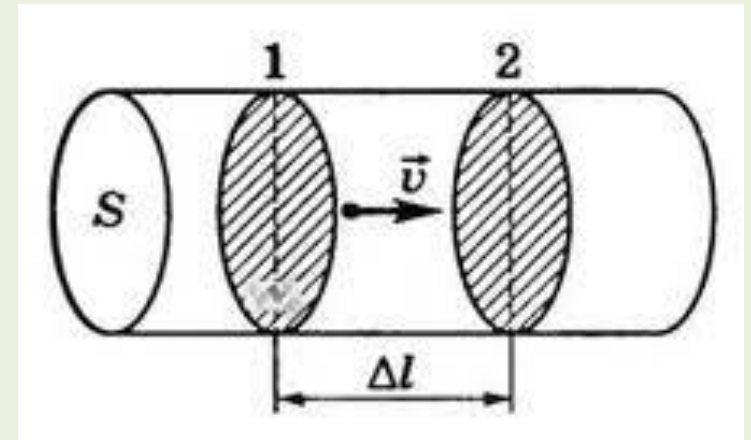
$$j = \frac{dq}{dS \cdot dt} = \frac{q_0 \cdot n \cdot v \cdot dt \cdot dS}{dS \cdot dt} = q_0 \cdot n \cdot v$$

**Плотность тока** в векторной форме

$$\vec{j} = q_0 \cdot n \cdot \vec{v}$$

Для тока, текущего через поверхность

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S}$$



## Закон сохранения заряда и уравнение непрерывности

$$-\frac{dQ}{dt} = \int_S \vec{j} d\vec{S},$$
$$Q = \int_V \rho dV$$

$$-\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_S \vec{j} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV$$

Уравнение непрерывности или закон сохранения заряда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

## Закон Ома

а) Для однородного металлического проводника

$$I = \frac{U}{R}$$

$$I = jS = \frac{E \cdot l}{R}, \quad j = \lambda E = \frac{1}{\rho} E$$

- плотность тока пропорциональна напряжённости электрического поля,  $\lambda$  - проводимость среды,  $\rho$  - удельное сопротивление

б) При наличии сторонних сил

$$\vec{E} \rightarrow \vec{E} + \frac{\vec{F}_{\text{стор}}}{q_0} = \vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}},$$
$$\vec{j} = \lambda \cdot (\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}})$$

# Закон Ома для участка цепи, содержащий источник ЭДС и проводящие участки (интегральная форма закона Ома)

$$E + E_{\text{стоп}} = \frac{I}{\lambda S}, \quad \int_{(1)}^{(4)} (E + E_{\text{стоп}}) dl = \int_{(1)}^{(4)} \frac{dl}{\lambda S}$$

$$\int_{(1)}^{(4)} E dl = \varphi_1 - \varphi_4, \quad \int_{(1)}^{(4)} E_{\text{стоп}} dl = \mathcal{E}$$

$$\int_{(1)}^{(4)} \frac{dl}{\lambda S} = R$$

$$\varphi_1 - \varphi_4 + \mathcal{E} = IR$$

## Оценка проводимости

$$m\vec{a} = e\vec{E}, \quad \vec{v} = \vec{a}t = \frac{e\vec{E}}{m}t,$$

$$\vec{u} = \overline{\vec{v}} = \frac{e\vec{E}}{2m}\tau,$$

$$\vec{j} = ne\vec{u} = \frac{ne^2\tau}{2m}\vec{E} = \lambda\vec{E},$$

$$\lambda = \frac{ne^2\tau}{2m}$$



## Медный проводник

$$\rho = 1,78 \cdot 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{см}$$

*Допустимая сила тока для изолированного медного провода сечением  $1 \text{ мм}^2$  равна  $10 \text{ А}$*



Сопротивление медного проводника диаметром  $1 \text{ см}$  и длиной  $1 \text{ км}$  равно  **$0,22 \text{ Ом}$** .

Сопротивление медного проводника диаметром  $1 \text{ мм}$  и длиной  $10 \text{ м}$  равно  **$0,22 \text{ Ом}$** .

Средняя скорость направленного движения

$$n = 8,5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}, \quad q_0 = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл},$$

$$u = \frac{j}{nq_0} \approx 0,7 \text{ мм / с}$$

## Токи в «неограниченных» средах

$$C = \frac{q}{\varphi_+ - \varphi_-},$$

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{4\pi}{\varepsilon} q = \frac{4\pi}{\varepsilon} C \cdot (\varphi_+ - \varphi_-),$$

$$I = \oint \vec{j} d\vec{S} = \lambda \oint \vec{E} d\vec{S} = \lambda \frac{4\pi}{\varepsilon} C \cdot (\varphi_+ - \varphi_-),$$

$$R = \frac{\varphi_+ - \varphi_-}{I} = \frac{\varepsilon}{4\pi C \lambda}$$

## Токи в «неограниченных» средах

Если электроды – шары радиусов  $r_+$  и  $r_-$  помещены в морскую воду

$$C = \frac{C_+ C_-}{C_+ - C_-}, \quad C_+ = \varepsilon r_+, \quad C_- = \varepsilon r_-$$

$$R = \frac{1}{4\pi\lambda} \left( \frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right)$$

$$r_+ = r_- = r = 1 \text{ см}, \quad \rho = \frac{1}{\lambda} = 0,3 \text{ Ом} \cdot \text{м},$$

$$R = \frac{1}{2\pi\lambda r} = 4,8 \text{ Ом}$$

# Электробезопасность

Тело человека является проводником электрического тока. Сопротивление человека при сухой и неповрежденной коже колеблется от 3 до 100 кОм.

Ток, пропущенный через организм человека или животного, производит следующие действия: термическое (ожоги, нагрев и повреждение кровеносных сосудов); электролитическое (разложение крови, нарушение физико-химического состава); биологическое (раздражение и возбуждение тканей организма, судороги)

**Основным фактором, обуславливающим исход поражения током, является величина тока, проходящего через тело человека.**

*пороговым неотпускающим* называется минимальный ток такой силы, при которой человек уже неспособен усилием воли оторвать руки от токоведущей части. Для переменного тока это около **10—15 мА**, для постоянного — **50—80 мА**;

*фибрилляционным порогом* называется сила переменного тока (50 Гц) около 100 мА и 300 мА постоянного тока, воздействие которого дольше 0,5 с с большой вероятностью вызывает фибрилляцию сердечных мышц. Этот порог одновременно считается условно смертельным для человека.

## Закон Джоуля-Ленца

$$dA = \vec{F} \vec{v} dt, \quad dA_{cp} = \vec{F} \vec{u} dt$$

$$w = \frac{dA_{cp}}{dt} = n \vec{F} \vec{u} = ne \vec{u} \vec{E} = \vec{j} \vec{E} = \lambda \vec{E}^2$$

$$W = \int_V w dV = \int_V \frac{1}{\lambda} \left( \frac{I}{S} \right)^2 S dl = I^2 \int_V \frac{dl}{\lambda S} = I^2 R$$

Для замкнутой цепи

$$\mathcal{E} = IR$$

$$W = \mathcal{E} I = \frac{\mathcal{E}^2}{R}$$