

Концепции и модели физики

Кузьмичев Сергей Дмитриевич



Содержание лекции №7

1. Теорема о циркуляции для электростатического поля.
2. Потенциал электрического поля.
3. Примеры.
4. Связь вектора напряжённости поля и потенциала поля.
5. Уравнения Пуассона и Лапласа.
6. Проводники в электростатическом поле. Граничные условия.
7. Проводящий шар в однородном электростатическом поле.
8. Метод зеркальных изображений.

Теорема о циркуляции

Циркуляция вектора \vec{E} напряжённости электростатического поля по замкнутому контуру L равна нулю:

$$\int_L \vec{E} d\vec{l} = 0 \quad - \text{интегральная форма}$$

Теорема о циркуляции в дифференциальной форме

$$\text{rot } \vec{E} = 0$$

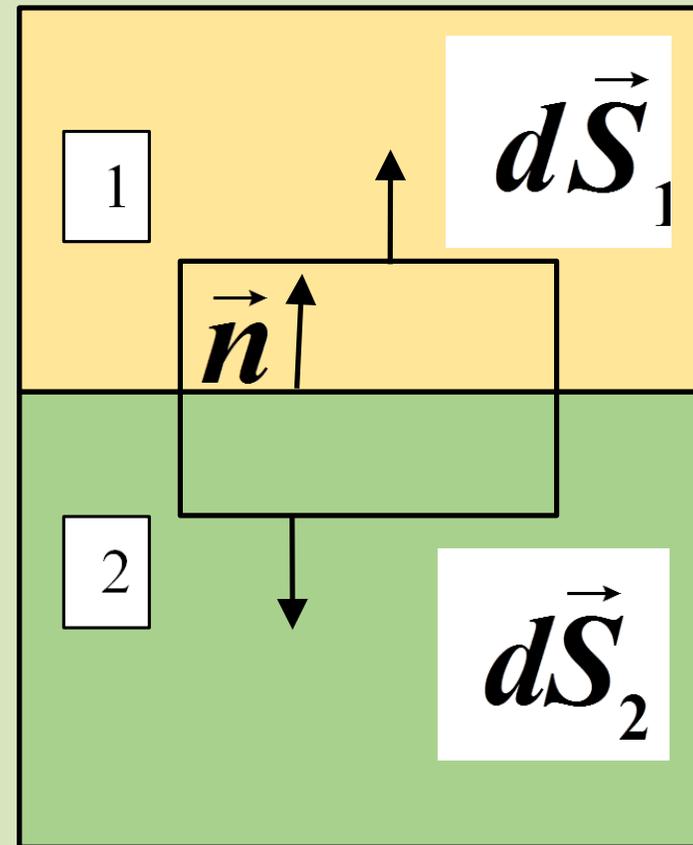
Граничные условия для вектора напряжённости

Из теоремы Гаусса для нормальных компонент напряжённости электрического поля по обе стороны от границы раздела

$$E_{1n} - E_{2n} = 4\pi\sigma$$

E_{1n}, E_{2n} - проекции векторов напряжённости по обе стороны от границы на вектор \vec{n} единичной нормали

σ - поверхностная плотность заряда на границе раздела

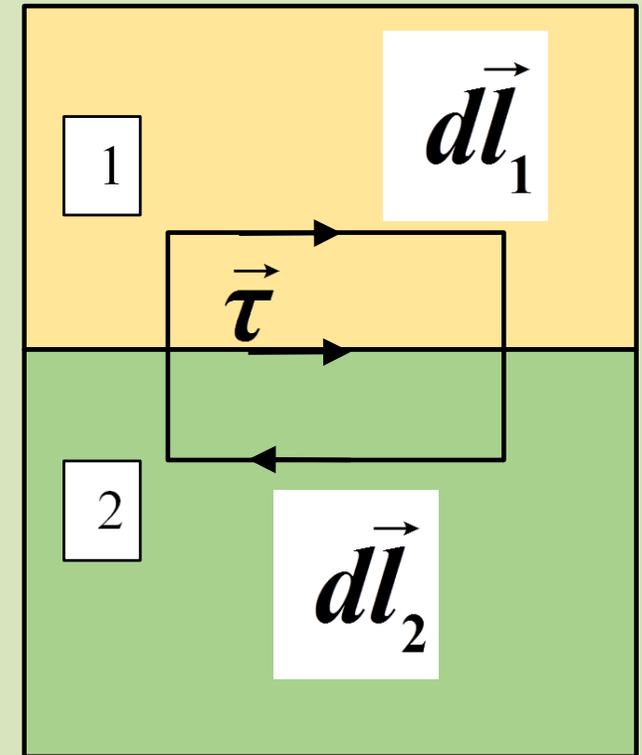


Граничные условия для вектора напряжённости

Из теоремы для тангенциальных (касательных) компонент напряжённости электрического поля по обе стороны от границы

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}$$

$E_{1\tau}, E_{2\tau}$ - проекции векторов напряжённости по обе стороны от границы на вектор $\vec{\tau}$ единичной касательной



Потенциал электрического поля

Разностью потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ поля между точками 1 и 2 называется величина

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{\text{эл},1-2}}{q} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E} d\vec{l}$$

Принцип суперпозиции для потенциала:

потенциал поля системы зарядов равен сумме потенциалов полей отдельных зарядов

$$\varphi_{\Sigma}(r) = \varphi_1(r) + \varphi_2(r) + \varphi_3(r) + \dots$$



Примеры

а) Разность потенциалов в однородном поле

$$\vec{E} = (E_x, 0, 0)$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E} d\vec{l} = E_x \cdot (x_1 - x_2)$$

б) Потенциал точечного заряда

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}$$

Если выбрать $\varphi(\infty) = 0$, то

$$\varphi(r) = \frac{q}{r}$$

в) Потенциал поля точечного диполя

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = \frac{q}{r_+} + \frac{(-q)}{r_-},$$

$$r_+ = \left(r^2 - \vec{r}\vec{l} + l^2 / 4 \right)^{1/2}, \quad r_- = \left(r^2 + \vec{r}\vec{l} + l^2 / 4 \right)^{1/2}$$

$$\varphi = \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}$$

г) Потенциал поля внутри однородно заряженного шара

$$E_r(r) = \frac{4}{3}\pi\rho r, \quad r \leq R$$

$$\varphi(0) - \varphi(r) = \int_{r=0}^{r>0} \vec{E}d\vec{l} = \int_{r=0}^{r>0} E(r)dr = \frac{2}{3}\pi\rho r^2$$

Связь потенциала с напряжённостью поля

$$\varphi(\vec{r}) - \varphi(\vec{r} + d\vec{r}) = \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{r} = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$\vec{E} = -\nabla \varphi = -grad \varphi$$

Уравнения Пуассона и Лапласа

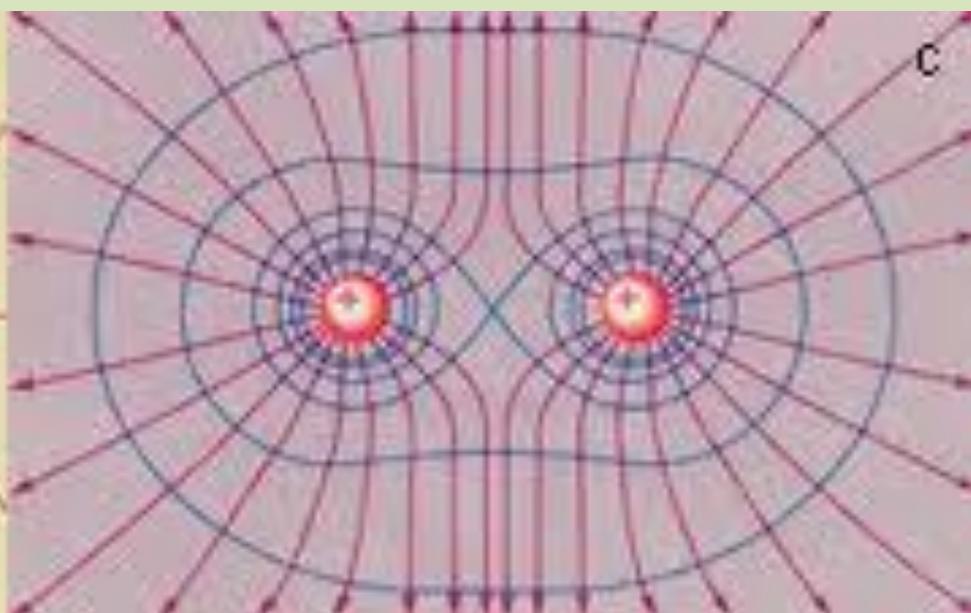
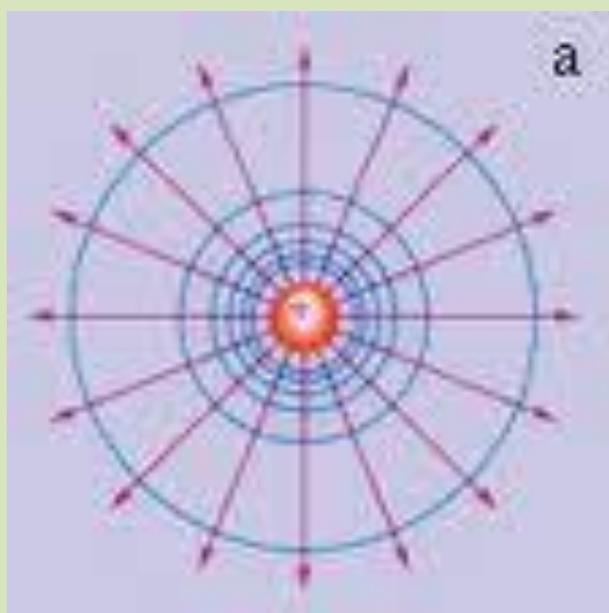
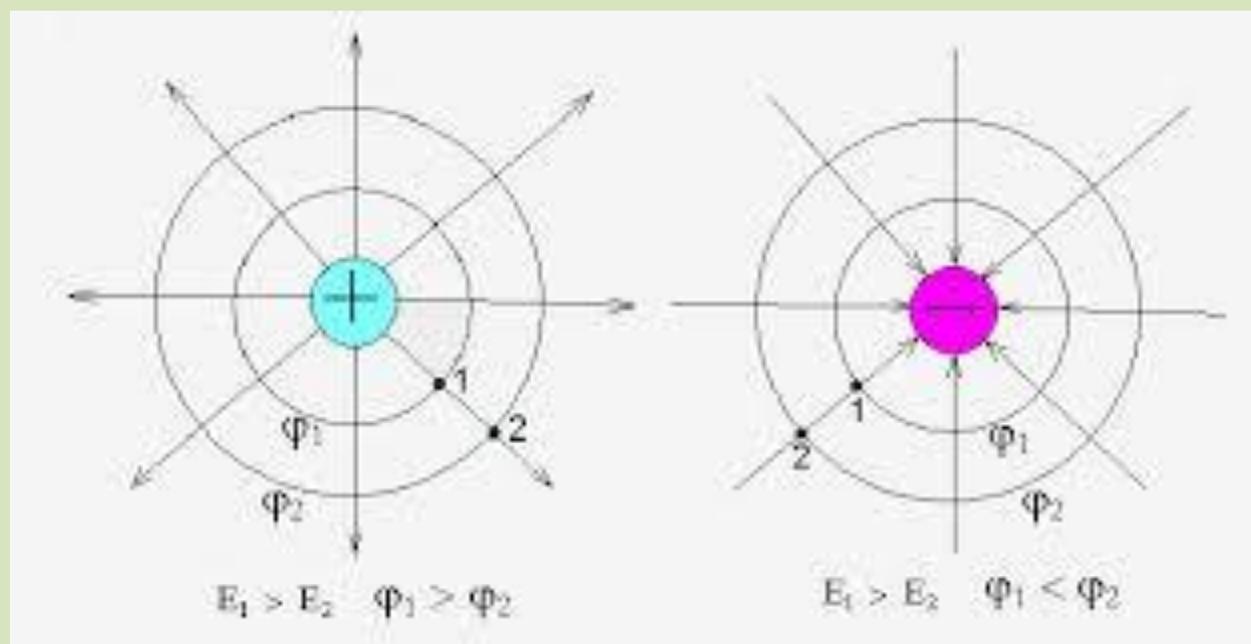
$$\mathit{div} \vec{E} = 4\pi\rho, \quad \vec{E} = -\mathit{grad} \varphi$$

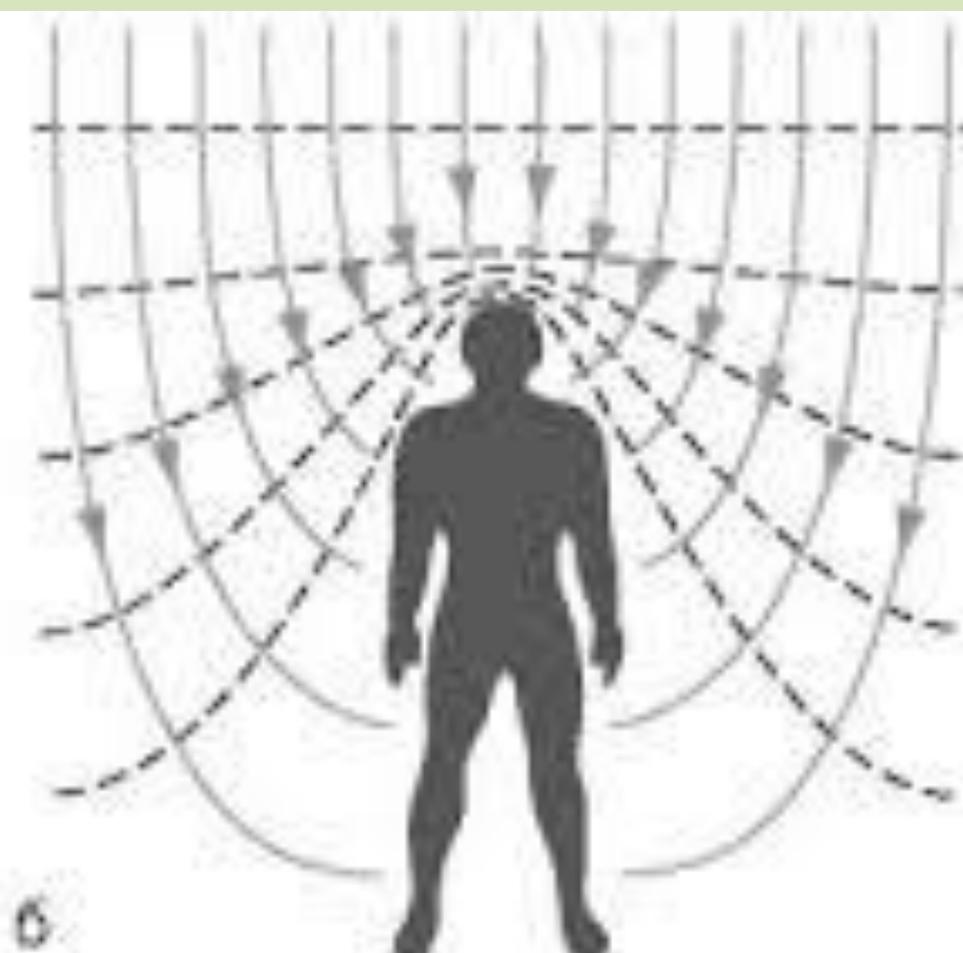
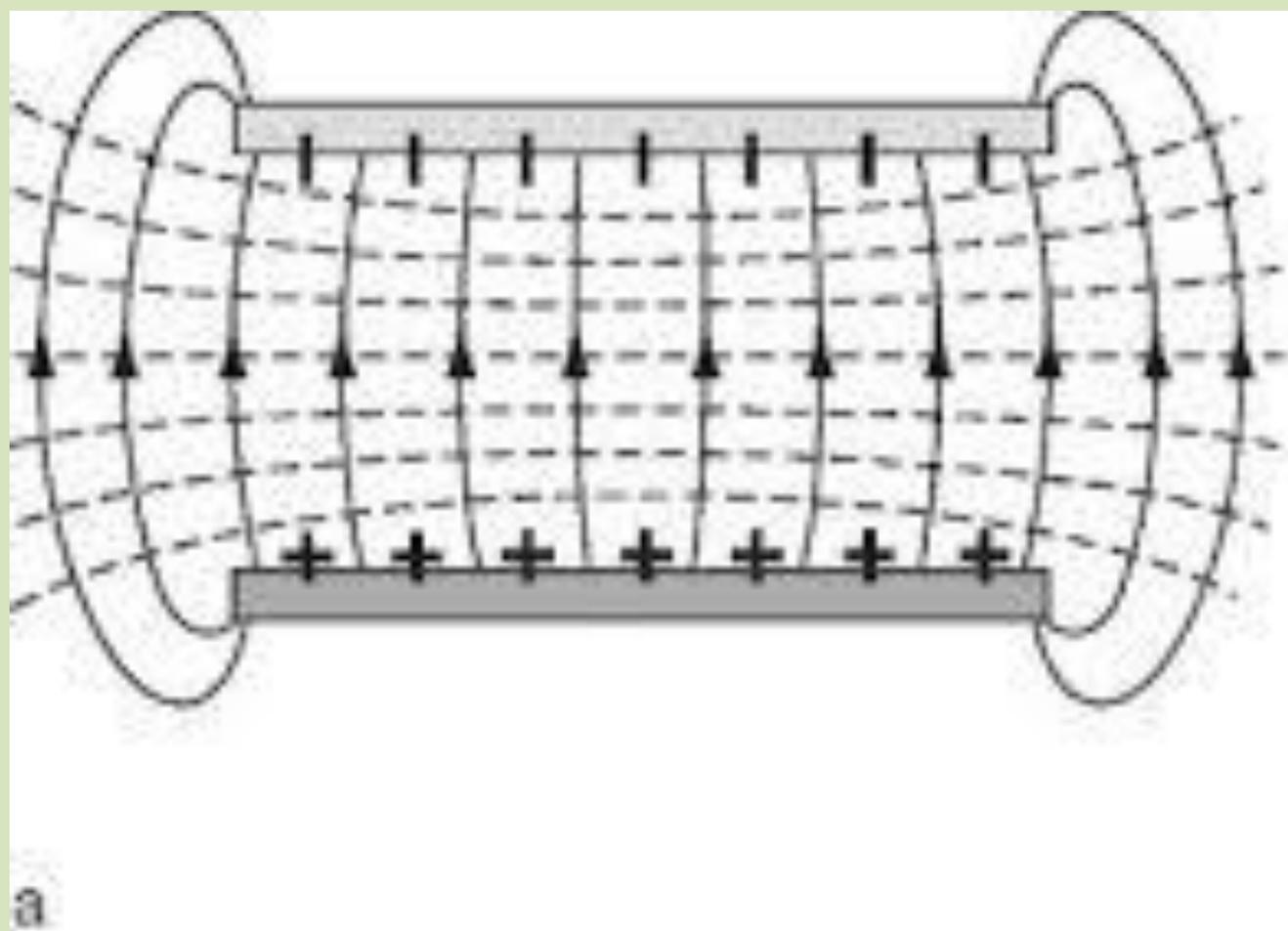
Уравнение Пуассона

$$\mathit{div} \mathit{grad} \varphi = \Delta\varphi = -4\pi\rho,$$
$$\Delta = \mathit{div} \mathit{grad} = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

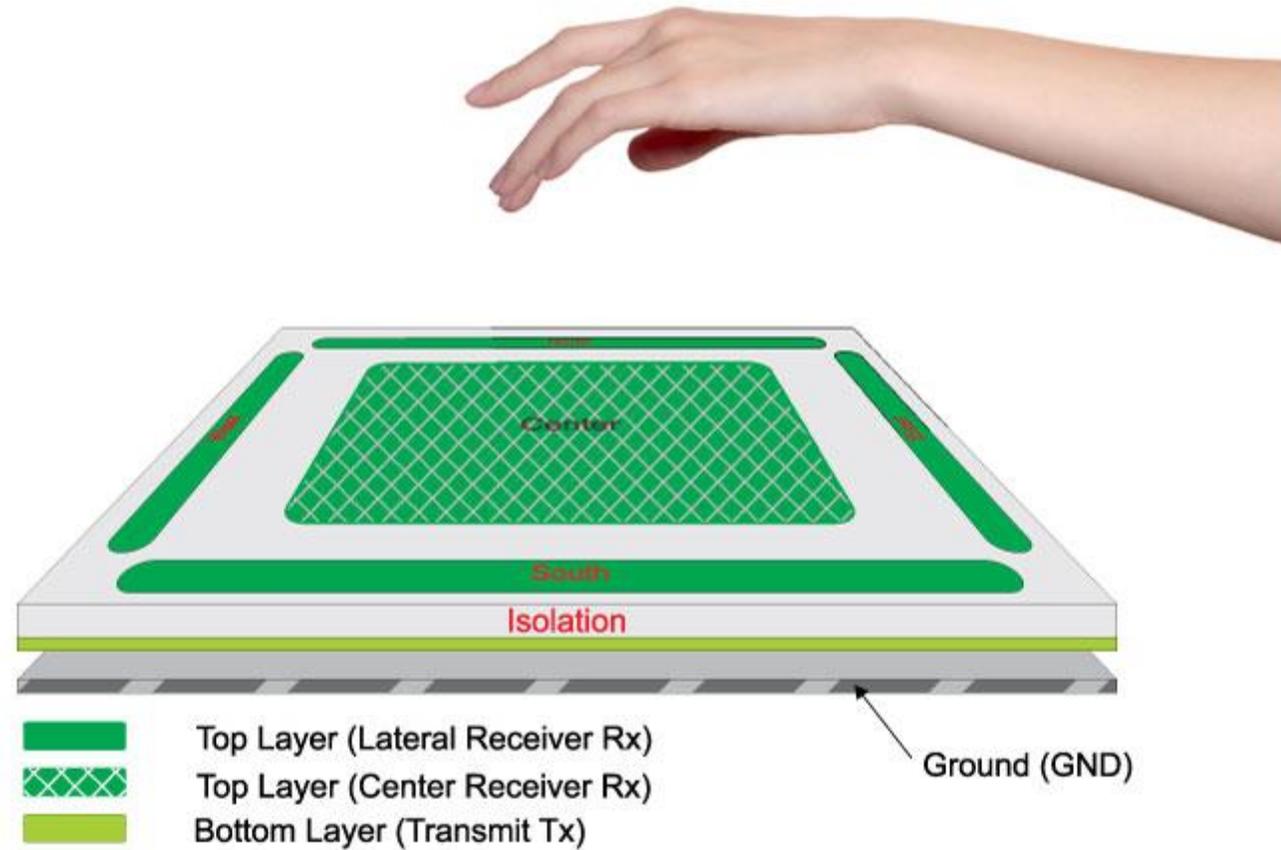
Уравнение Лапласа $(\rho = 0)$

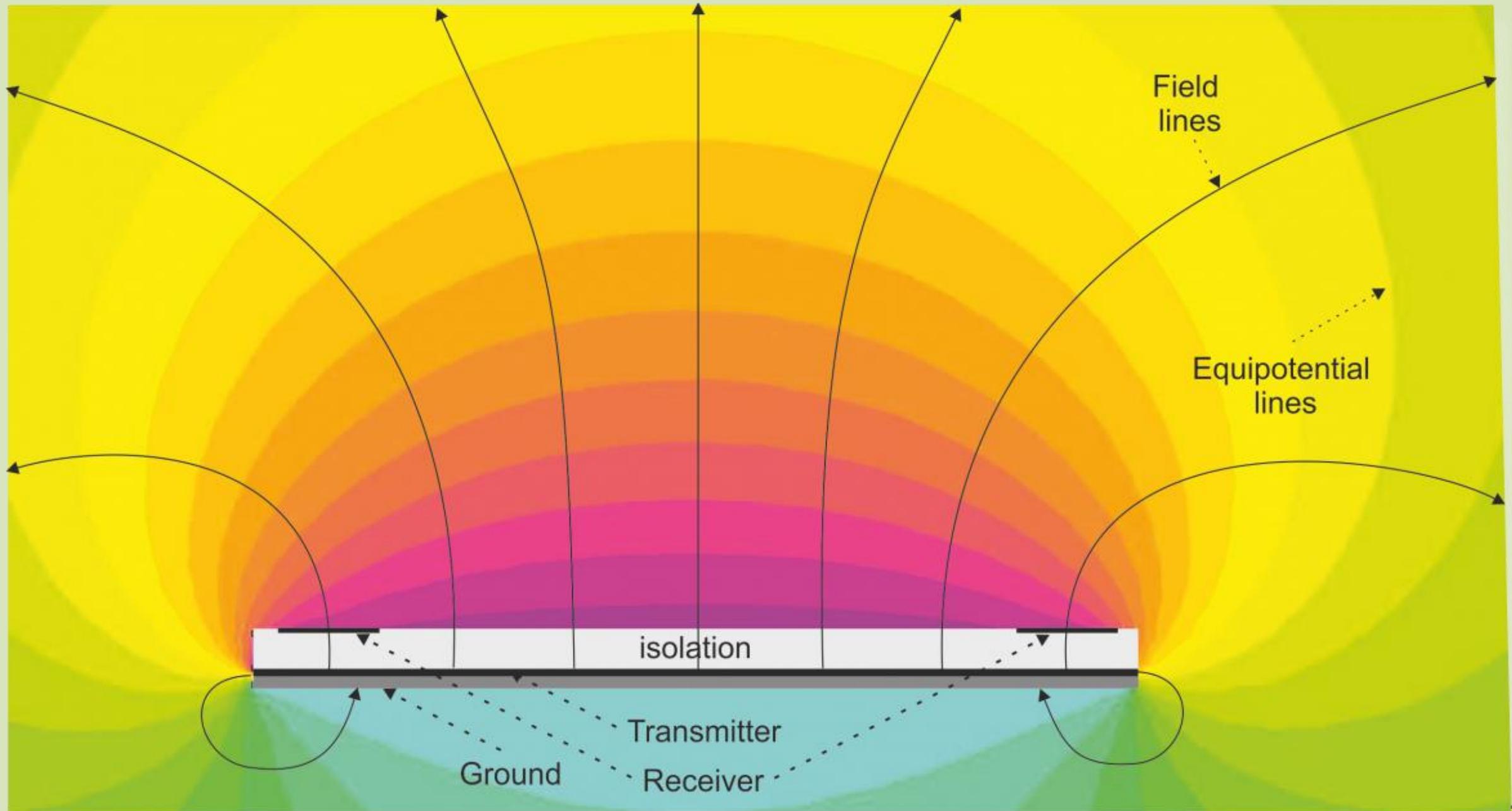
$$\Delta\varphi = 0$$

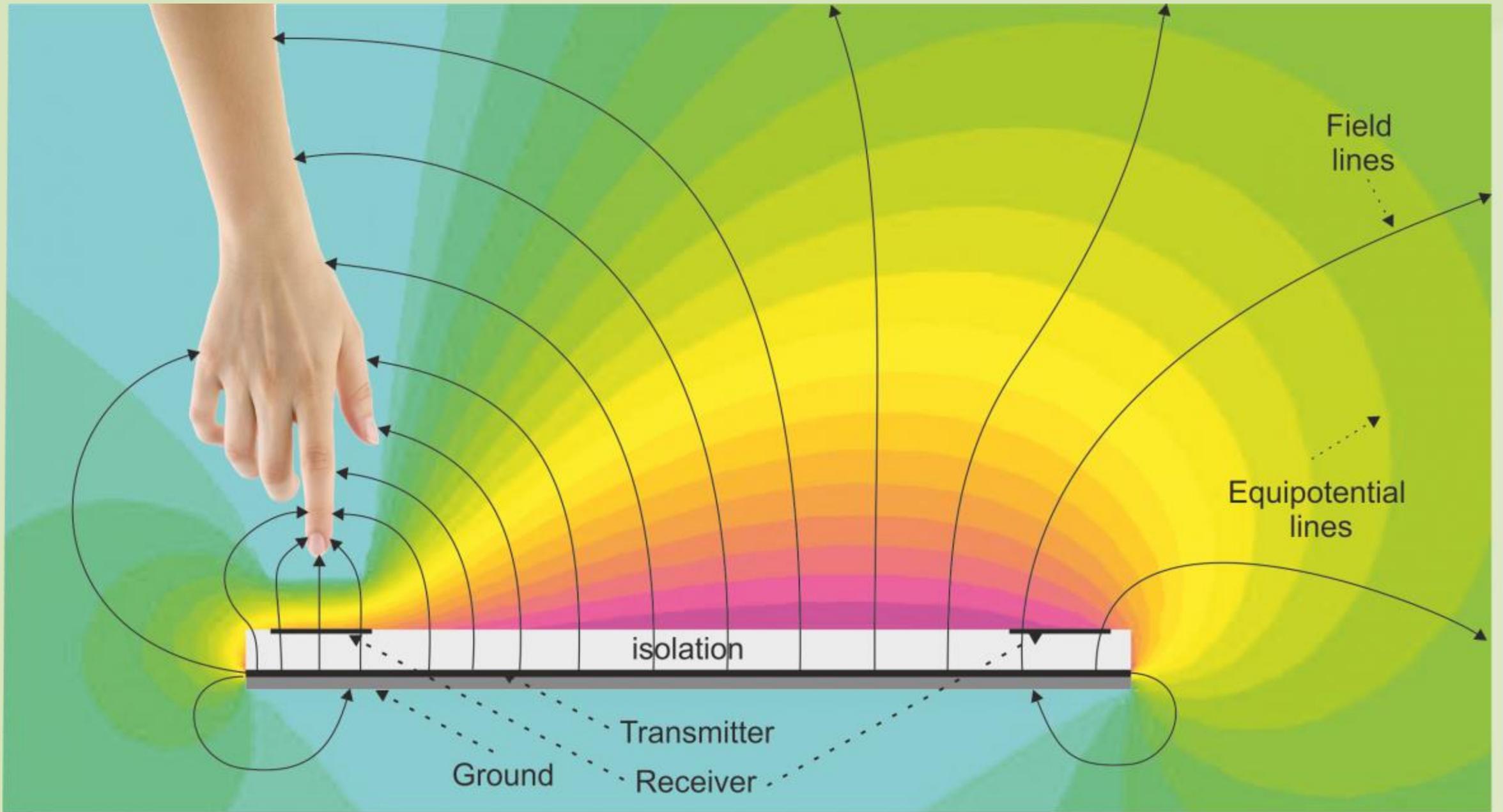


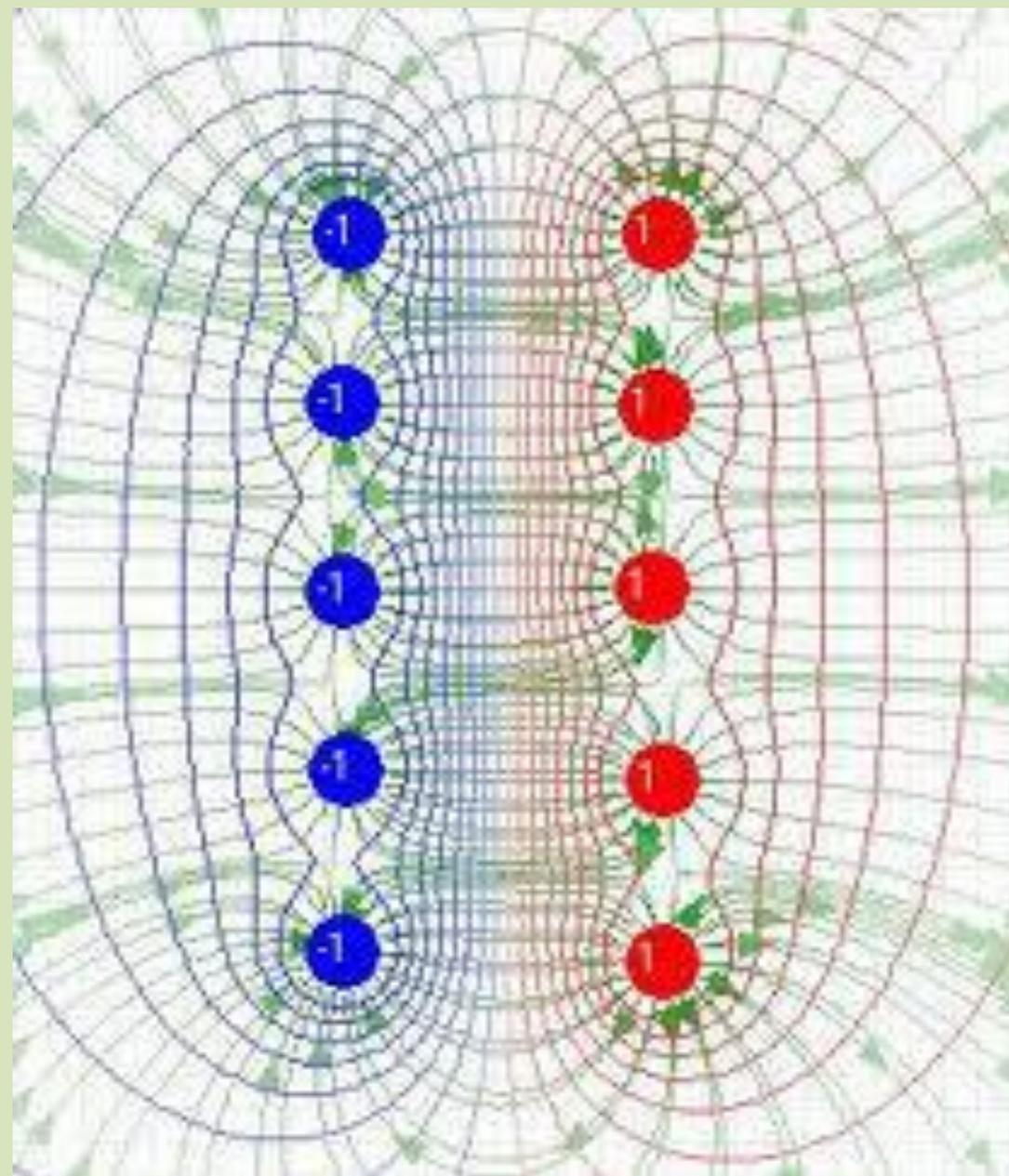


Standard Electrode Design









Проводники в электростатическом поле

В стационарном состоянии (токи отсутствуют):

а) напряжённость электрического поля в объёме проводника равна нулю:

$$\vec{E}_{\text{внутри}} = 0$$

б) объёмная плотность электрических зарядов в проводнике равна нулю:

$$\rho_{\text{внутри}} = 0$$

Свободные заряды могут располагаться только на поверхности проводника.

в) объём проводника является областью одинакового потенциала:

$$\varphi = \text{const} \quad \text{в объёме проводника}$$

Граничные условия на поверхности проводника

а) Из теоремы Гаусса

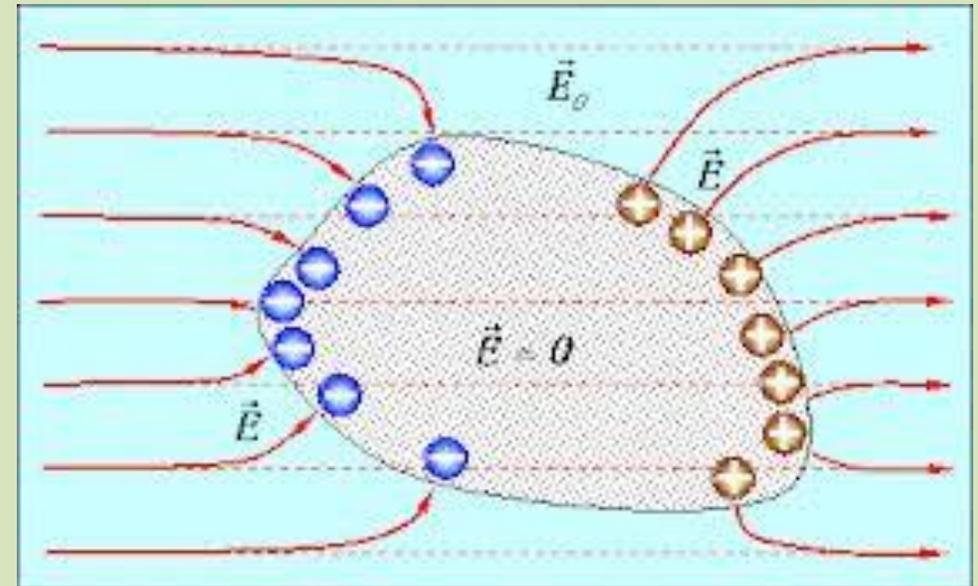
$$E_n = 4\pi\sigma$$

- нормальная компонента напряжённости поля (вне проводника).

б) Из теоремы о циркуляции

$$E_\tau = 0$$

Силловые линии электростатического поля перпендикулярны поверхности проводника.



Проводящий шар в однородном электрическом поле

$$\vec{E}_{\text{внутри}} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{\text{инд,зар}} = \mathbf{0}$$

$$\vec{E}_{\text{инд,зар}} = -\vec{E}_0 = -\frac{4\pi}{3}\sigma_0\vec{n}$$

$$\sigma_0 = \frac{3E_0}{4\pi}$$

Дипольный момент шара

$$\vec{p} = R^3\vec{E}_0$$

Электрическое поле во внешнем пространстве

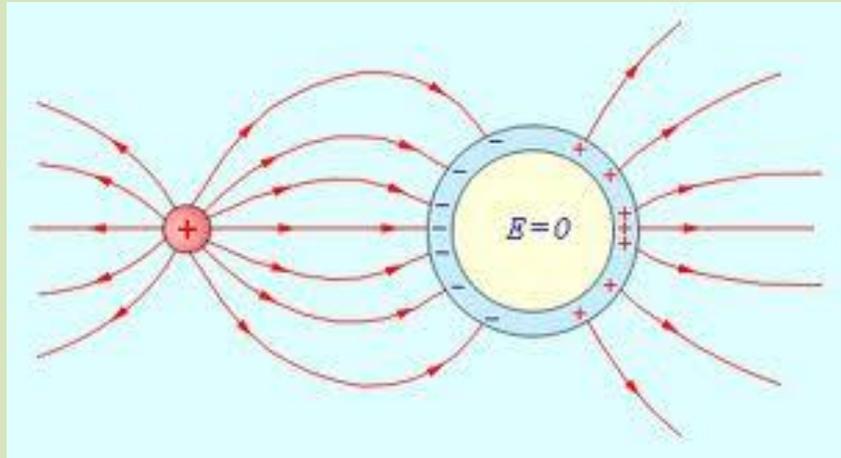
$$\vec{E}_{\text{вне}} = \vec{E}_0 + \frac{3(\vec{p}, \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}$$

Электростатическая защита (теоремы Фарадея)

Теорема 1. Пусть заряд q находится внутри металлической оболочки. Тогда сумма зарядов, индуцированных на внутренней стороне оболочки, равна по модулю и противоположна по знаку заряду внутри оболочки.

Теорема 2. Если в полости зарядов нет, то электростатическое поле в ней равно нулю.

Проводящая оболочка полностью экранирует поле всех зарядов, находящихся вне оболочки.



Метод зеркальных изображений

на примере точечного заряда над плоской проводящей поверхностью

Если имеется заряд q и проводящая поверхность с потенциалом φ_0 , то для расчёта поля в области нахождения заряда можно заменить эту поверхность таким зарядом q' , который вместе с зарядом q создаёт в точках поверхности требуемый потенциал. Фиктивные заряды q' называются изображениями зарядов q .

Основание: теорема единственности для уравнений Лапласа

$$\varphi_0 = \frac{q}{r} + \frac{q'}{r} = 0, \quad q' = -q$$

$$F = k \frac{q^2}{(2r)^2} = k \frac{q^2}{4r^2}$$

