Концепции и модели физики

Кузьмичев Сергей Дмитриевич

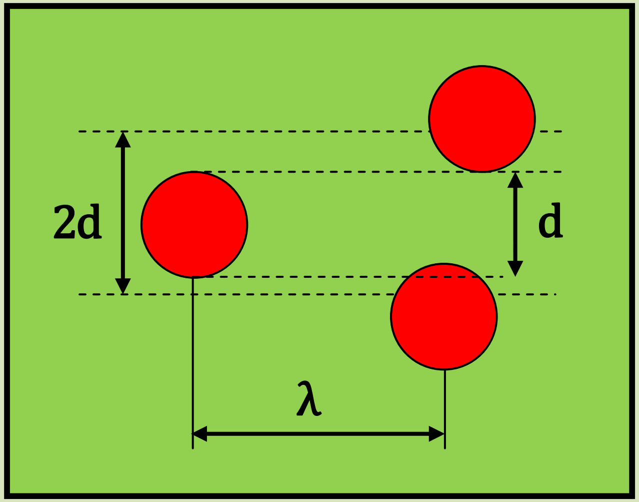
Московский Физико-Технический Институт

Содержание лекции №5

1. **Длина свободного пробега.**
2. **Диффузия, вязкость, теплопроводность.**
3. **Связь диффузии с подвижностью частицы.**
4. **Броуновское движение как процесс диффузии.**
5. **Молекулярное течение разреженного газа через трубу**

Модель молекулы газа – твердый шарик диаметром $\boxed{d}$.

Эффективное газокинетическое сечение молекулы $\boxed{\sigma \approx \pi d^2}$.



$$\boxed{\sigma \approx \pi\left(3\cdot 10^{-10}\ м\right)^2 \approx 28\cdot 10^{-20}\ м^2}$$

Длина свободного пробега $\boxed{\lambda = \dfrac{1}{n\sigma}}$

Здесь $\boxed{n}$ - концентрация рассеивателей (молекул).

Для идеального газа $\boxed{\left(P = nkT\right)}$

$$\boxed{\lambda = \frac{kT}{P\sigma}}$$

$$\boxed{T = 273\ К,\ P = 760\ мм.рт.ст., \quad \lambda \approx 1{,}3\cdot 10^{-7}\ м}$$

$$\boxed{T = 273\ К,\ P = 10^{-2}\ мм.рт.ст., \quad \lambda \approx 1\cdot 10^{-2}\ м = 1\ см}$$

Время свободного пробега

$$\boxed{\tau = \frac{\lambda}{\bar{v}},\ \bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}},\ \tau = \lambda\sqrt{\frac{\pi m}{8kT}}}$$

Для азота $\boxed{\left(m = 4{,}7\cdot 10^{-26}\ кг\right)}$ при нормальных условиях

$$\boxed{\tau = 2{,}8\cdot 10^{-10}\ c}$$

Число столкновений, испытываемых молекулой в секунду

$$\boxed{N_{ст} = \frac{1}{\tau} \approx 3{,}6\cdot 10^{9}\ c^{-1}}$$

Сечение столкновения и ослабление потока частиц

$$dN = d\left(jS\right) = -\sigma n_{расс} dx \cdot N = -\sigma n_{расс} dx \cdot jS$$

$$j\left(x\right) = j\left(x=0\right) \cdot e^{-\sigma n_{расс} x} = j\left(x=0\right) \cdot e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

Вероятность, что молекула без столкновений пройдет путь x

$$N\left(x\right) = N_0 \cdot e^{-\frac{x}{\lambda}}, \quad dN_{расс} = N_0 \cdot e^{-\frac{x}{\lambda}} \cdot \frac{dx}{\lambda}$$

$$dP\left(x\right) = \frac{dN_{расс}}{N_0} = e^{-\frac{x}{\lambda}} \cdot \frac{dx}{\lambda}$$

$$\overline{x} = \int_0^\infty x dP\left(x\right) = \int_0^\infty x e^{-\frac{x}{\lambda}} \cdot \frac{dx}{\lambda} = \lambda, \qquad \overline{x^2} = 2\lambda^2$$


Извините...прошу прощения...
Разрешите про...черт, осторожнее можно? смотрите, куда плывете!

Теплопроводность – один из видов переноса тепла от более нагретых частей вещества к менее нагретым.

Теплопроводность осуществляется хаотически движущимися частицами тела (макроскопические потоки вещества отсутствуют) и приводит к выравниванию температуры во всем веществе.

Плотность потока тепла $\boxed{(q)}$ - количество тепла, проходящее в единицу времени через площадку единичной площади.


Прелесть весны познается
только зимою, когда,
сидя у печки,
сочиняешь самые лучшие
майские песни.
Генрих Гейне
Atkritka.com

Уравнение теплопроводности

$$dQ = \left[q(x) - q(x+dx)\right] Sdt = -\frac{\partial q}{\partial x} Sdxdt$$

$$dQ = c_V dMdT \quad , \; dM = \rho Sdx$$

$$\rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}$$

Закон Фурье

$$q = -æ \frac{\partial T}{\partial x}$$

$æ$ - коэффициент теплопроводности

$$[æ] = \frac{Дж}{м \cdot с \cdot К}$$

Коэффициенты теплопроводности

Вещество	æ, Вт/(м·К)	Вещество	æ, Вт/(м·К)
Железо	75	Бальза	0,04
Медь	400	Алмаз	628
Серебро	418	Мел	1
Сталь	40	Кирпич	1
Вода	0,6	Воздух	0,02
Водород	0,17	Гелий	0,14

Скорость нагрева воды в чайнике

а) Стальное дно без накипи:

$$T_1 = 283\ К,\ \ T_2 = 1073\ К,\ \ S = 0,75 \cdot 10^{-2}\ м^2$$
$$l_1 = 3\ мм,\ \ æ_1 = 40\ Вт/(м \cdot К)$$

$$J_1 = \frac{S \cdot (T_2 - T_1)}{l_1 / æ_1} = 99\ кВт$$

б) Стальное дно с накипью (мел):

$$T_1 = 283\ К,\ \ T_2 = 1073\ К,\ \ S = 3 \cdot 10^{-2}\ м^2$$
$$l_1 = 3\ мм,\ \ æ_1 = 40\ Вт/(м \cdot К),$$
$$l_2 = 1\ мм,\ \ æ_2 = 1\ Вт/(м \cdot К)$$

$$J_1 = \frac{S \cdot (T_2 - T_1)}{l_1 / æ_1 + l_2 / æ_2} = 7,4\ кВт$$

Вязкость

Силы вязкого трения связаны с передачей (переносом) импульса между слоями жидкости (или газа).

Пусть x -составляющая скорости $\vec{u}$ макроскопического направленного движения порции вещества изменяется вдоль оси OY Сила вязкого трения, действующая по площади S на слой жидкости (газа), параллельный скорости течения, даётся законом Ньютона

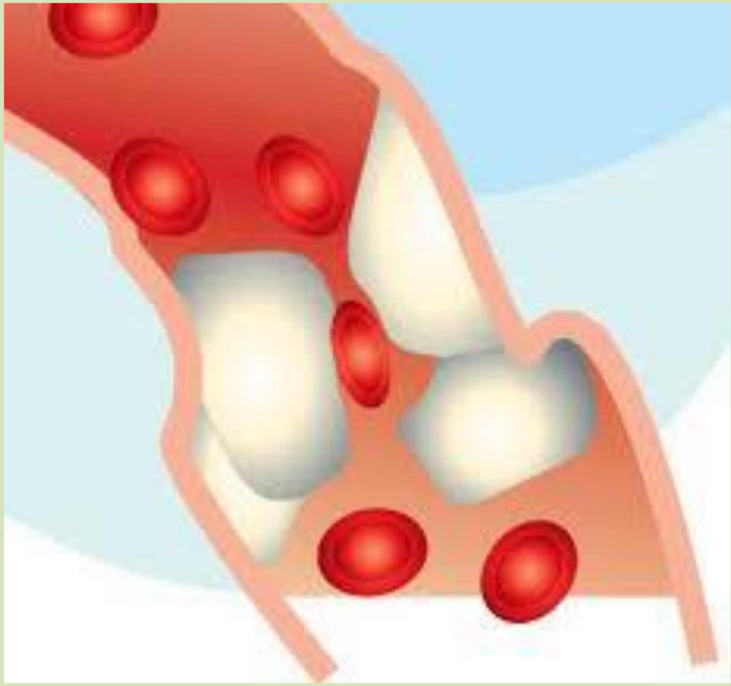
$$F_x = -\eta S \frac{du_x}{dy}$$

η - коэффициент вязкого трения.

$$[\eta] = \frac{кг}{с \cdot м}$$

Коэффициенты вязкости

Вещество	ŋ, кг/(м·с)
Вода	$1 \cdot 10^{-3}$
Глицерин (100%), 20^0 С	1,5
Глицерин (95%)	0,5
Воздух	$181 \cdot 10^{-7}$
Кровь	$1{,}7 \div 22{,}9 \cdot 10^{-3}$
Мёд, 20^0 С	50




ASPIRIN

Диффузия

Диффузия – процесс пространственного перераспределения компонент смеси относительно друг друга, обусловленный тепловым движением молекул.

Для одномерной диффузии вдоль оси $\boxed{OX}$ **плотность потока компоненты смеси определяется законом Фика:**

$$\boxed{j_x = -D\frac{dn}{dx}}$$

Здесь $\boxed{n(x)}$ **концентрация компоненты смеси,**

$\boxed{D}$ **- коэффициент диффузии.**

$$\boxed{[D] = \frac{м^2}{с}}$$

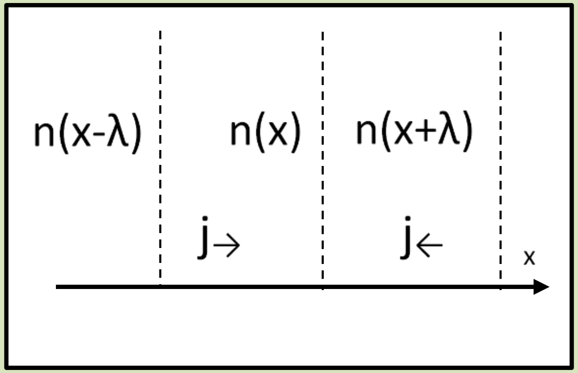
Коэффициенты диффузии

Вещество	D, $см^2/с$
$CuSO_4$ в воде	$0{,}45 \cdot 10^{-5}$
NaCl в воде	$1{,}24 \cdot 10^{-5}$
He в воздухе	0,62
CH_4 в воздухе	0,186

Коэффициент диффузии в газах

$$j_{x,\leftarrow} = \frac{1}{6} n(x+\lambda)\cdot\bar{v} = \frac{1}{6}\cdot\left(n(x)+\lambda\frac{dn}{dx}\right)\cdot\bar{v}$$

$$j_{x,\rightarrow} = \frac{1}{6} n(x-\lambda)\cdot\bar{v} = \frac{1}{6}\cdot\left(n(x)-\lambda\frac{dn}{dx}\right)\cdot\bar{v}$$



$$j_{\Sigma,x} = j_{x,\rightarrow} - j_{x,\leftarrow} = -\frac{1}{3}\lambda\bar{v}\frac{dn}{dx}$$

$$D = \frac{1}{3}\lambda\bar{v}$$

При нормальных условиях

$$D \approx 2\cdot 10^{-5}\ м^2/с = 0{,}2\ см^2/с$$

Коэффициенты теплопроводности и вязкости в газах

$$\eta = \frac{1}{3}\rho\lambda\overline{v} = \frac{1}{3}m_0 n\lambda\overline{v}$$ - коэффициент вязкости

$$æ = \frac{1}{3}\rho\lambda\overline{v}c_{уд,V} = \frac{1}{3}\rho\lambda\overline{v}\frac{C_V}{M}$$ - коэффициент теплопроводности

Для воздуха при нормальных условиях

$$\rho = 1{,}29\ кг/м^3,\ \lambda = 10^{-7}\ м,\ \overline{v} = 446\ м/с,$$

$$\eta = 1{,}9\cdot 10^{-5}\ кг/(м\cdot с),\ \eta_{табл} = 1{,}7\cdot 10^{-5}\ кг/(м\cdot с)$$

$$C_V = 21\ Дж/(моль\cdot К),\ M = 29\cdot 10^{-3}\ кг/моль$$

$$æ = 1{,}4\cdot 10^{-2}\ Вт/(м\cdot К),\ æ_{табл} = 2{,}4\cdot 10^{-2}\ Вт/(м\cdot К),$$

Коэффициенты переноса в газах

$$D = \frac{1}{3}\lambda\overline{v}$$

- коэффициент диффузии

$$\eta = \frac{1}{3}\rho\lambda\overline{v}$$

- коэффициент вязкости

$$æ = \frac{1}{3}\rho\lambda\overline{v}c_{уд,V}$$

-коэффициент теплопроводности

Броуновское движение как диффузия

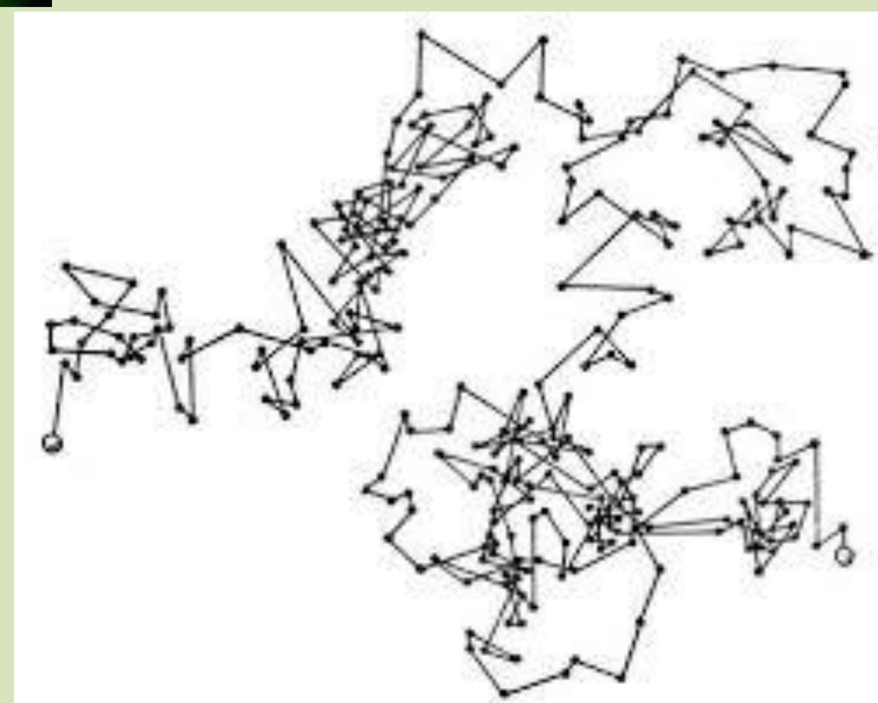
Броуновское движение – беспорядочное движение малых частиц, находящихся в жидкости или газе, вызванное случайными ударами молекул окружающей среды.

$$\vec{R} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \ldots + \vec{r}_N \,,$$

$$\overline{\vec{R}^2} = \sum_{i=1}^{N} \overline{\vec{r}_i^{\,2}} + \sum_{i \neq j}^{N} \overline{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j} = N\,\overline{r^2} = N \cdot 2\lambda^2 = \frac{t}{\tau} \cdot 2 \cdot \bar{v}\tau \cdot \lambda =$$

$$= 2 \cdot \bar{v} \cdot \lambda \cdot t = 6Dt$$

$$\overline{x^2} = \overline{y^2} = \overline{z^2} = 2Dt$$



Оценка характерного диффузионного пути

1) Соль ($NaCl$) в воде за один час

$$D = 1,2 \cdot 10^{-5}\ см^2/с$$

$$R_{диф} = \sqrt{6Dt} \approx 0,5\ см$$

2) Метан (CH_4) в воздухе за один час

$$D = 0,186\ см^2/с$$

$$R_{диф} = \sqrt{6Dt} \approx 63\ см$$

Связь коэффициента диффузии и подвижности частицы (соотношение Эйнштейна)

Подвижность частицы $\boxed{B}$: средняя скорость $\boxed{\vec{u}}$ дрейфа частицы под действием постоянной силы $\boxed{\vec{F}}$ равна

$$\boxed{\vec{u} = B\vec{F}, \quad \vec{F} = \left(F, 0, 0\right), \quad u_x = BF}$$

Плотность потока частиц, движущихся по направлению действия силы (дрейфовый поток)

$$\boxed{j_{дрейф} = nu_x}$$

В стационарном состоянии устанавливается больцмановское распределение концентрации частиц, находящихся в поле силы $\boxed{\vec{F}}$:

$$\boxed{n(x) = n_0 \cdot exp\left(-\frac{F \cdot x}{kT}\right)}$$

Плотность диффузионного потока

$$\boxed{j_{дифф} = -D\frac{dn}{dx} = Dn \cdot \frac{F}{kT}}$$

Для стационарного состояния встречные диффузионный и дрейфовый потоки равны.

$$\boxed{j_{дрейф} = nBF = j_{дифф} = Dn\frac{F}{kT}}$$

$$\boxed{D = kTB}$$

Молекулярное течение разреженного газа

Разреженный газ

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma} \gg d$$

$\boxed{d}$ - характерный размер сосуда, трубки

Сосуд Дьюара – давление в пространстве между двойными стенками $\approx 10^{-2}\ Па$.

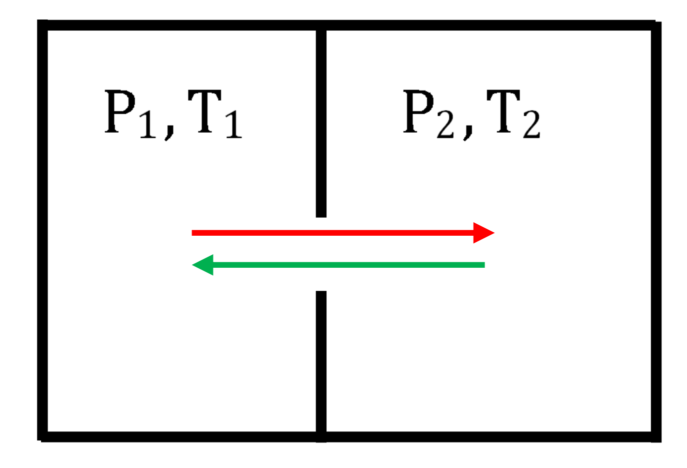
$$\lambda = \frac{1}{n\sigma} \approx 1\ м \gg d = 1\ мм$$

Для описания течения разреженного газа по трубе неприменима формула Пуазейля.

Эффект Кнудсена

$$J_{1-2} = Sj_{1-2} = \frac{1}{4} Sn_1\bar{v}_1 = Sn_1\sqrt{\frac{kT_1}{2\pi m}}$$

$$J_{2-1} = Sj_{2-1} = \frac{1}{4} Sn_2\bar{v}_2 = Sn_2\sqrt{\frac{kT_2}{2\pi m}}$$



В состоянии равновесия

$$J_{2-1} = Sn_2\sqrt{\frac{kT_2}{2\pi m}} = J_{1-2} = Sn_1\sqrt{\frac{kT_1}{2\pi m}}$$

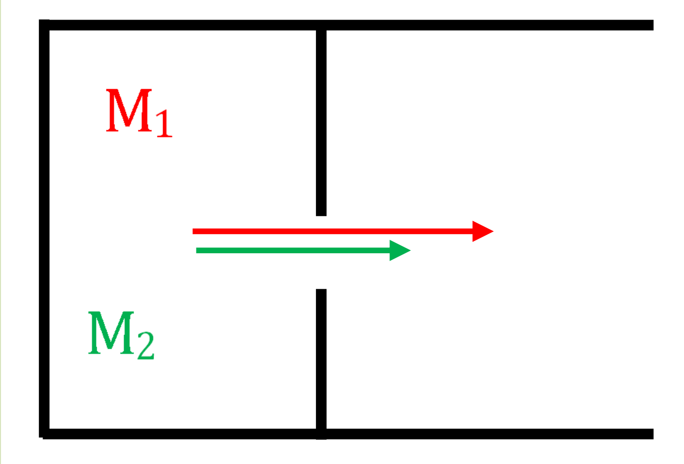
$$n_1 = \frac{P_1}{kT_1}, \qquad n_2 = \frac{P_2}{kT_2}$$

$$\frac{P_1}{\sqrt{T_1}} = \frac{P_2}{\sqrt{T_2}}$$

Разделение газовых смесей

$$J_1 = Sj_1 = \frac{1}{4} Sn_{1,0}\bar{v}_1 = Sn_{1,0}\sqrt{\frac{RT}{2\pi M_1}}$$

$$J_2 = Sj_2 = \frac{1}{4} Sn_{2,0}\bar{v}_2 = Sn_{2,0}\sqrt{\frac{RT}{2\pi M_2}}$$



После одного цикла эффузии

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{J_1}{J_2} = \sqrt{\frac{M_2}{M_1}} \cdot \left(\frac{n_1}{n_2}\right)_0$$

При $M_1 < M_2$ **доля лёгкой компоненты увеличивается**

$$\frac{n_1}{n_2} > \left(\frac{n_1}{n_2}\right)_0$$

(разделение изотопов)

Свободное молекулярное течение газа через трубу

$$\lambda_{эфф} = 2r, \qquad D = \frac{2}{3} r\overline{v}$$

Число молекул, переходящих из сосуда в сосуд в единицу времени

$$\frac{dN}{dt} = Sj = -SD\frac{dn}{dx} = -\frac{2r\overline{v}}{3}\frac{dn}{dx}S = -\frac{2r\overline{v}}{3}\cdot\frac{n_2 - n_1}{L}S$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{4r^3}{3L}\sqrt{\frac{2\pi}{kmT}}\cdot\left(P_1 - P_2\right)$$