Лекция № 9
Магнитное поле в вакууме

Алексей Викторович Гуденко

05/11/2012

План лекции

1. Сила Лоренца и сила Ампера.
2. Закон Био-Савара.
3. Теорема Гаусса и теорема о циркуляции для магнитного поля в вакууме.
4. Магнитный момент

Магнитное поле

- Магнитное поле – это силовое поле, действующее на ***движущиеся*** заряды, токи и на тела, обладающие магнитным моментом (магнитные диполи).
- Магнитное поле создаётся движущимися зарядами, электрическими токами, магнитными моментами (диполями).
- Постоянные токи, неподвижные магнитные диполи создают постоянные магнитные поля.
- Магнитное поле характеризуется вектором ***магнитной индукции*** **B**

Сила Лоренца

- В магнитном поле с индукцией **B** на движущийся заряд q действует сила:

$$\vec{F}_m = \frac{q}{c}[\vec{v} \times \vec{B}]$$

- Сила Лоренца – это полная сила, действующая на заряд q со стороны электрического и магнитного полей:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v} \times \vec{B}])$$

Сила Ампера

- **Силой Ампера** называется сила, действующая на токи со стороны магнитного поля:
  – Сила, действующая на *объёмный элемент* тока **j**dV:

$$d\vec{F} = \frac{1}{c}[\vec{j}\times\vec{B}]dV \Rightarrow \vec{F} = \frac{1}{c}\int[\vec{j}\times\vec{B}]dV$$

  – Сила, действующая на *линейный элемент* тока **I**dl

$$d\vec{F} = \frac{I}{c}[d\vec{l}\times\vec{B}] \Rightarrow \vec{F} = \oint\frac{I}{c}[d\vec{l}\times\vec{B}]$$

Магнитное поле равномерно движущегося заряда при v << c

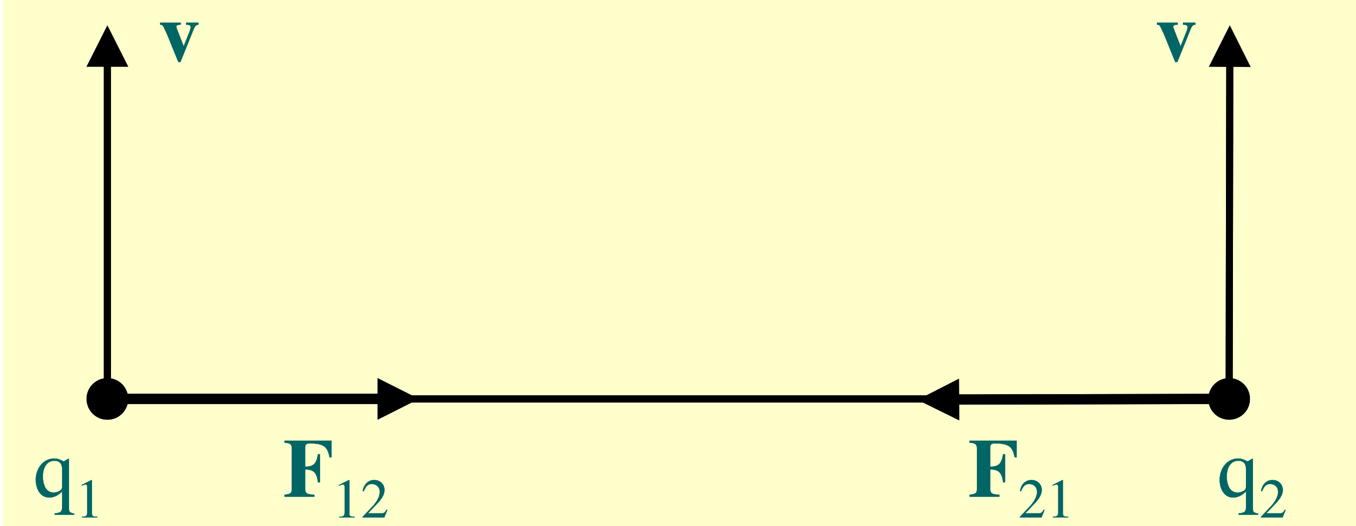
- Магнитное поле медленно движущегося заряда:

$$\vec{B} = \frac{q}{c}\frac{[\vec{v}\times\vec{r}]}{r^3}$$

- Магнитное поле – релятивистский эффект:

$$\vec{B} = \frac{1}{c}[\vec{v}\times\vec{E}]$$

Магнитное взаимодействие двух кулоновских зарядов



$$F_m = \frac{v^2}{c^2} F_q = \frac{v^2}{c^2} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Закон Био и Савара

- Принцип суперпозиции для B:
  - каждый заряд возбуждает поле, не зависящее от наличия других зарядов;
  - магнитные поля отдельных движущихся зарядов векторно складываются **B** = Σ**B**$_i$
- Магнитное поле объёмного элемента тока **j**dV:

$$d\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{[\vec{j}\times\vec{r}]}{r^3}dV$$

- Магнитное поле линейного элемента тока **I**dl:

$$d\vec{B} = \frac{I}{c}\frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

Поле бесконечно длинного тонкого провода.

$$d\vec{B} = \frac{I}{cr^3}[d\vec{l} \times \vec{r}] = \frac{I}{cr^3}[d\vec{l}_\perp \times \vec{r}]$$

$$dB = \frac{I}{cr^2} dl_\perp = \frac{I}{cr} d\alpha = \frac{I}{cR} \cos\alpha d\alpha$$

$$B = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} dB = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{I}{cR} \cos\alpha d\alpha = \frac{2I}{cR}$$

$$B = \frac{2I}{cR}$$

$$B(\Gamma c) = \frac{2I}{cR} = \frac{2(I/c)}{R} = \frac{2 \cdot 0{,}1 I(\mathrm{A})}{R(\textit{см})}$$

$$B(I = 1A, R = 1\text{см}) = \frac{2(I/c)}{R} = \frac{2 \cdot 0{,}1 I(\mathrm{A})}{R(\textit{см})} = 0{,}2\ \Gamma c$$

Единицы измерения

- **Система СИ**
  [B] = Тл (Тесла) – в таком поле на 1 м провода с током 1 А действует максимальная сила 1 Н
- **Система СГС**
  [B] = Гс (Гаусс) – в таком поле на единичный заряд, движущийся со скоростью 1 см/с действует максимальная сила 1 Дин
- 1 Тл = 10^4 Гс

- Поле Земли: B = 0,4 - 0,7 Гс
- Поле постоянных сильных магнитов ~ 1 Тл

Взаимодействие параллельных проводов с токами

- $F = (I_1/c)B\ell = 2I_1I_2\ell/dc^2$

- $I_1 = I_2 = 1A$;
  $d = 1$ м;
  $\ell = 1$ м $\Rightarrow$
  $F = 2(I/c)^2\,\ell/d = 2\,(0{,}1)^2 = 2\cdot10^{-2}$ Дин $= 2\cdot10^{-7}$ Н

Магнитное поле витка с током

$$B = dB_z = \frac{I}{cr^2} dl \sin\alpha$$

$$B = \frac{2\pi R^2 I}{cr^3}$$

$$B_0 = \frac{2\pi (I/c)}{R}$$

$$B_0 (I = 1\text{А}, R = 1\text{см}) \approx 0{,}63\ \text{Гс}$$

$$B = \frac{2\pi R^2 I}{cr^3}$$

Поле соленоида

$$dB = \frac{Indz}{cr^2} dl \sin\theta = (i/c)d\Omega$$

$$B_c = 4\pi(i/c)$$

$$B_{1/2} = 2\pi(i/c)$$

Теорема Гаусса вектора B

- В природе отсутствуют магнитные заряды ⇨ линии вектора B не имеют ни начала, ни конца ⇨
  Теорема Гаусса: поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю:
  $\oint \mathbf{B}d\mathbf{S} = 0$ – т. Гаусса в интегральном виде
  $\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$ – т. Гаусса в дифференциальном виде
- Магнитное поле – **соленоидальное** поле.

Теорема о циркуляции вектора B
(для магнитного поля постоянных токов в вакууме)

- Циркуляция индукции магнитного поля **B** постоянных токов по произвольному замкнутому контуру равна сумме токов, пронизывающих контур, умноженной на 4π/c:

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I$$

$$I = \sum I_k$$

т. о циркуляции в дифференциальной форме

$$rot B = \frac{4\pi}{c} j$$

Ротор – это циркуляция вкруг единичной площадки

$$(rot\vec{a})_n = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_L \vec{a}\,d\vec{l}$$

$$\oint_L \vec{a}\,d\vec{l} = \int rot\vec{a}\,d\vec{S}$$

$$rot\vec{a} = [\vec{\nabla} \times \vec{a}] = \begin{Vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ a_x & a_y & a_z \end{Vmatrix}$$

$$\vec{\nabla}\varphi \equiv grad\varphi$$

$$\vec{\nabla}\vec{a} \equiv div\vec{a}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} \equiv rot\vec{a}$$

Магнитного поля соленоида и тороидальной катушки

- Поле длинного соленоида:
  $B = 4\pi(i/c)$; $i = In = IN/\ell$ - N –число витоков, ℓ - длина катушки, I – ток в соленоиде; i – линейная плотность тока; $n = N/\ell$ плотность намотки.
  $I = 10$ А, $n = 10$ см$^{-1}$ $B = 4\pi(In/c)= 1{,}25$ Тл
- Поле тонкой тороидальной катушки:
  $B = 2NI/cR$

Контур с током в магнитном поле

$$\vec{p}_m = (I/c)\vec{S}$$

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \times \vec{B}]$$

$$U = -(\vec{p}_m \cdot \vec{B})$$

$$\vec{F} = (\vec{p}_m \nabla)\vec{B}$$

$$\vec{B} = \frac{3(\vec{p}_m \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}_m}{r^3}$$

$$B = \frac{2\pi R^2 I}{cr^3} = \frac{2IS/c}{r^3} = \frac{2p_m}{r^3}$$