

Лекция № 8
Энергия электрического поля
Электрический ток

Алексей Викторович
Гуденко

29/10/2012

План лекции

1. Электрическая энергия системы зарядов.
2. Электрическая энергия проводника и конденсатора.
3. Энергия электрического поля.
4. Постоянный электрический ток.
5. Закон Ома
6. Закон Джоуля-Ленца
7. Переходные процессы в цепях с конденсатором

Взаимная энергия системы зарядов

- Энергия взаимодействия двух зарядов:

$$W = q_1\varphi_{21} = q_2\varphi_{12} = \frac{1}{2}(q_1\varphi_{21} + q_2\varphi_{12})$$

- Энергия взаимодействия системы зарядов:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} \frac{q_i q_k}{r_{ik}}$$

- Для непрерывного распределения зарядов:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho(r) \varphi(r) dV$$

Энергия заряженного шара. Энергия плоского конденсатора

- Металлический шар:

$$W_R = \frac{1}{2} \varphi q = \frac{q^2}{2R}$$

- Плоский конденсатор:

$$W_C = \frac{1}{2} (q_1 \varphi_1 + q_2 \varphi_2) = \frac{1}{2} q (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{q \Delta \varphi}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{C \Delta \varphi^2}{2}$$

Плоский конденсатор

- Ёмкость: $C = q / \Delta\varphi$
- Плоский конденсатор – две близко расположенные пластины с зарядами q и $-q$
- Поле в конденсаторе: $E = 4\pi\sigma / \varepsilon$
- Напряжение на конденсаторе $\Delta\varphi = Ed = \frac{4\pi\sigma d}{\varepsilon} = \frac{4\pi qd}{\varepsilon S}$
- Ёмкость конденсатора: $C = q / \Delta\varphi = \frac{\varepsilon S}{4\pi d}$

Плоский конденсатор

- Ёмкость плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d}$$

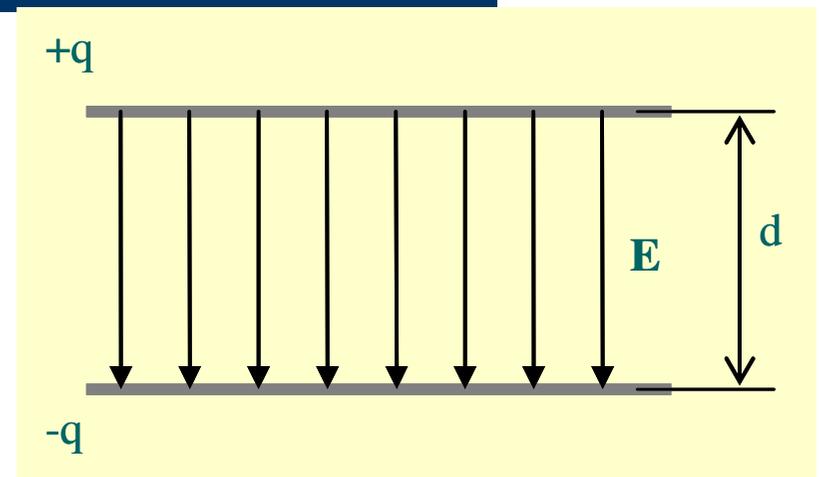
- Единицы измерения ёмкости:

$$C = q / \Delta\varphi$$

$$[C] = \Phi(\text{Фарада})$$

$$1\Phi = \frac{\text{Кл}}{\text{В}} = \frac{3 \cdot 10^9}{1/300} = 9 \cdot 10^{11} \text{ см} \Rightarrow$$

$$1\text{см} = \frac{1}{9 \cdot 10^{11}} \Phi \approx 10^{-12} = 1\text{n}\Phi$$



Плотность энергии в конденсаторе

$$W_c = \frac{q\Delta\varphi}{2} = \frac{\sigma SEd}{2} = \frac{4\pi\sigma SEd}{8\pi} = \frac{DE}{8\pi} V = wV$$

$$w = \frac{DE}{8\pi} = \frac{\epsilon E^2}{8\pi}$$

Энергия электростатического поля

$$\operatorname{div}(\varphi \vec{D}) = \vec{D} \nabla \varphi + \varphi \operatorname{div} \vec{D} = \vec{D} \vec{E} + \varphi \operatorname{div} \vec{D}$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho \Rightarrow \varphi \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho\varphi \Rightarrow \frac{1}{2} \rho\varphi = \frac{\varphi \operatorname{div} \vec{D}}{8\pi} \Rightarrow$$

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho\varphi dV = \frac{1}{8\pi} \int_V \varphi \operatorname{div} \vec{D} dV =$$

$$\frac{1}{8\pi} \int_V \vec{D} \vec{E} dV + \frac{1}{8\pi} \int_V \operatorname{div}(\varphi \vec{D}) dV = \int_V \frac{\vec{D} \vec{E}}{8\pi} dV = \int_V w dV$$

Энергия электростатического поля

- Плотность энергии:

$$w = \frac{\vec{D}\vec{E}}{8\pi}$$

$$\int_V \operatorname{div}(\varphi\vec{D})dV = \oint \varphi\vec{D}d\vec{S} = 0$$

$$\varphi \sim 1/r; D \sim 1/r^2; \varphi D \sim 1/r^3; S \sim r^2 \Rightarrow (\varphi DS) \sim 1/r \rightarrow 0$$

$$w = \frac{\vec{D}\vec{E}}{8\pi} = \frac{(\vec{E} + 4\pi\vec{P})\vec{E}}{8\pi} = \frac{E^2}{8\pi} + \frac{\vec{P}\vec{E}}{2}$$

Энергия заряженного шара

- Шар, равномерно заряженный по поверхности:

$$W = \int_R^{\infty} w dV = \int_r^{\infty} \frac{E^2}{8\pi} dV = \frac{1}{8\pi} \int_0^R \left(\frac{q}{r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{2R}$$

- Шар, равномерно заряженный по объёму:

$$W = W(r < R) + W(r \geq R)$$

$$r < R \Rightarrow W_{r < R} = \int_0^R w dV = \int_0^R \frac{E^2}{8\pi} dV = \frac{1}{8\pi} \int_0^R \left(\frac{qr}{R^3}\right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{10R}$$

$$r > R \Rightarrow W_{r \geq R} = \int_R^{\infty} w dV = \int_r^{\infty} \frac{E^2}{8\pi} dV = \frac{1}{8\pi} \int_0^R \left(\frac{q}{r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{2R}$$

$$W = \frac{q^2}{10R} + \frac{q^2}{2R} = \frac{3q^2}{5R}$$

Постоянный электрический ток

- Электрический ток – это упорядоченное движение зарядов.
- Сила тока – количество заряда, переносимого через сечение проводника в единицу времени: $I = dq/dt$
- Плотность тока – количество заряда, переносимого в единицу времени через единичную площадку: $j = dI/dS$
- $j = enu$ – e - заряд носителя, n – концентрация, u – средняя скорость упорядоченного движения (дрейфовая скорость)
- Для медных проводов технически допустимая плотность тока $j = 10 \text{ А/мм}^2$

Закон Ома

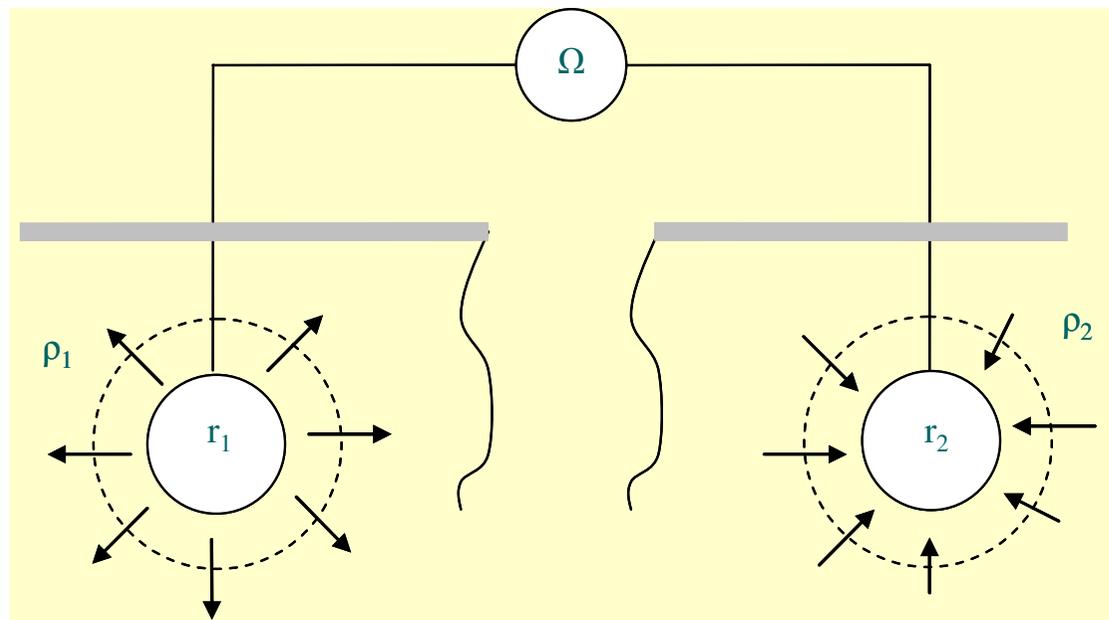
- Дифференциальная форма:
плотность тока пропорциональна
напряжённости электрического поля
 $\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E} = (1/\rho) \mathbf{E}$,
 λ – проводимость среды
 ρ – удельное сопротивление
- Интегральная форма:
 $I = U/R$,
 $R = \rho l/S$ – сопротивление проводника

Удельное сопротивление меди

- $\rho \sim 1,7 \cdot 10^{-6} \text{ Ом см} =$
- Оценка $\lambda = 1/\rho \sim ne^2\tau/m \sim 4 \cdot 10^{17} \text{ с}^{-1} =$
- $n \sim 8,5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$
- $\tau \sim 100a/v \sim 2 \cdot 10^{-6}/10^8 = 2 \cdot 10^{-14} \text{ с}$
- $m_e = 9.11 \cdot 10^{-28} \text{ г}$
- 5 км медного провода $d = 1 \text{ см}$ имеет сопротивление $R = 1 \text{ Ом}$
- 1 м толщиной $d \sim 0,1 \text{ мм} - 2 \text{ Ом}$

Сопротивление Земного шара

- Металлические шары $r_1 = r_2 \sim 1$ см
- Удельное сопротивление почвы $\rho_1 = \rho_2 \sim 10^3$ Ом см
($\rho_{\text{cu}} \sim 1,7 \cdot 10^{-6}$ Ом см = $1,9 \cdot 10^{-18}$ с)
- Сопротивление земли между шарами???



Сопротивление Земного шара

- $I = \int j_1 dS = \int E_1 / \rho_1 dS = 4\pi q_1 / \rho_1 \Rightarrow$
 $\varphi_1 = q_1 / r_1 = I \rho_1 / r_1$
 $\varphi_2 = -q_2 / r_2 = -I \rho_2 / r_2$
- $\Delta\varphi = I(\rho_1 / 4\pi r_1 + \rho_2 / 4\pi r_2) \Rightarrow$
 $R = \Delta\varphi / I = 1/4\pi(\rho_1 / r_1 + \rho_2 / r_2) = \rho / 2\pi r \sim 160 \text{ Ом}$

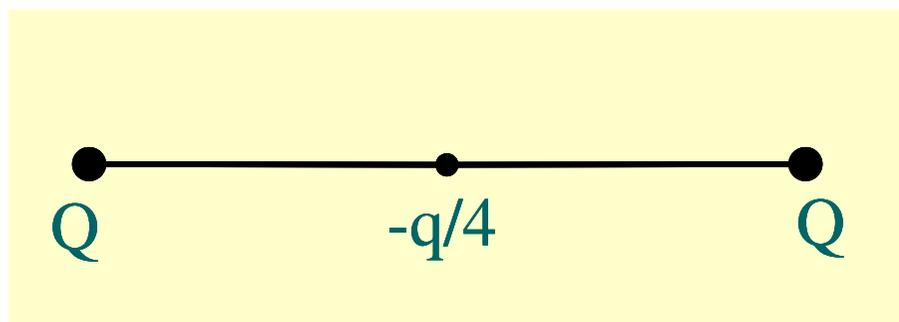
Закон Джоуля-Ленца

- Дифференциальная форма:
Мощность тепла, выделяемая током в единице объёма
 $w = jE = \rho j^2 = E^2/\rho$
- Интегральная форма
 $W = IU = RI^2 = U^2/R$

Пример на уравнение Пуассона (Овчинкин, № 2.5)

- Распределение потенциала в плоском конденсаторе.
- Дано: ρ , d , $\varphi(0) = 0$; $\varphi(d) = \varphi_0$
- $\varphi(x) = ?$
- Пуассон: $\partial^2\varphi/\partial x^2 = -4\pi\rho$; $\varphi(0) = \varphi_0$
- $\varphi(x) = (\varphi_0 + 2\pi\rho d)x - 2\pi\rho x^2$

Теорема Ирншоу – следствие теоремы Гаусса

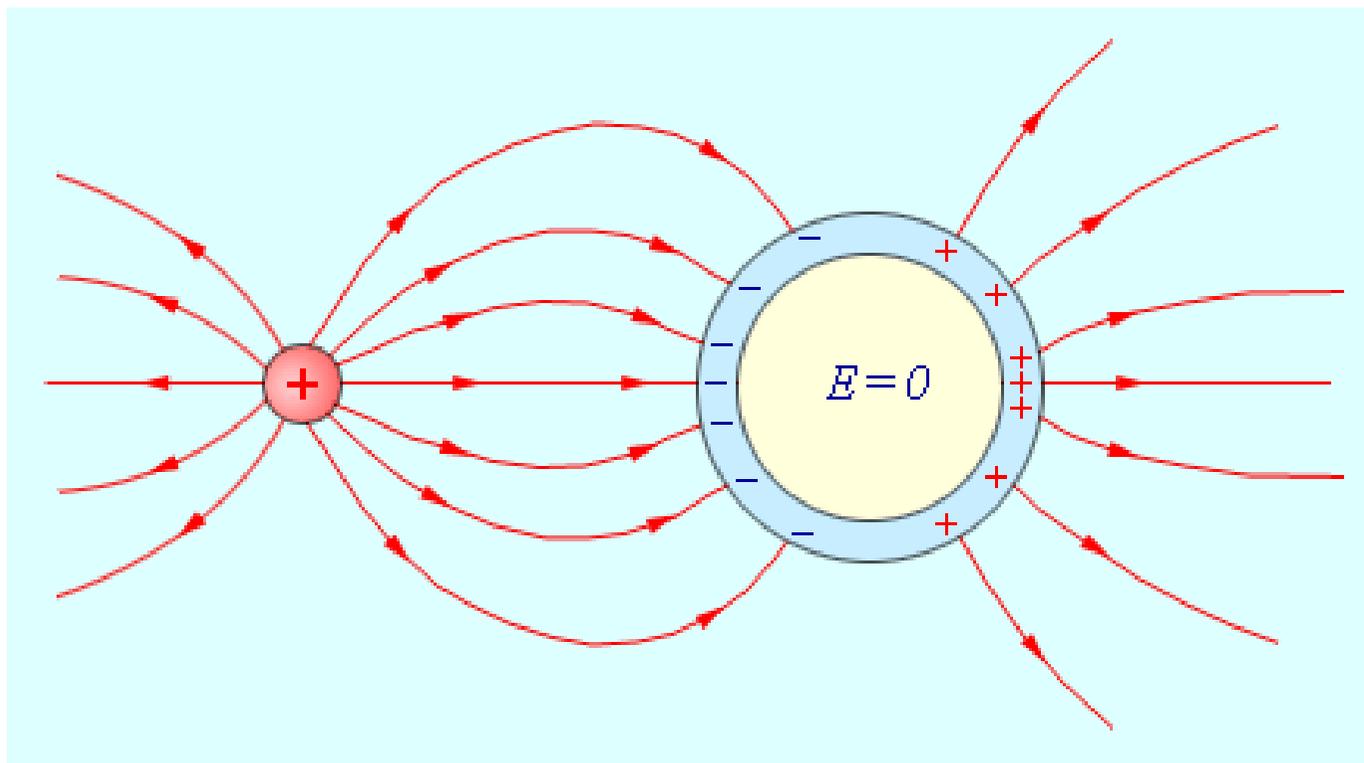


- Невозможно создать **устойчивую** систему только из покоящихся точечных кулоновских зарядов.

Проводник в электрическом поле

- Проводник – это вещество, способное проводить электрический ток. Ток переносят *свободные заряды*.
- В условиях равновесия (ток $I = 0$) напряжённость поля в проводнике $E = 0 \Rightarrow$
 - Объёмная плотность заряда в проводнике $\rho = 0$. нескомпенсированные заряды распределены по поверхности.
 - Потенциал всех точек проводника $\varphi = \text{const}$: проводник – эквипотенциальная область, поверхность проводника – эквипотенциальная поверхность.
 - Поле $E \perp$ поверхности; $E = 4\pi\sigma$

Электростатическая защита



Электрическое поле в диэлектриках

- В электрическом поле диэлектрик поляризуется – в объёме и на поверхности появляются *связанные заряды* ⇒ диэлектрик приобретает дипольный момент.
- Поляризованность \mathbf{P} – дипольный момент единицы объёма
$$\mathbf{P} = \sum \mathbf{p}_i / V$$
- Поверхностная плотность поляризационных зарядов
$$\sigma_{\text{пол}} = P_n$$
- $P_{n1} - P_{n2} = \sigma_{\text{пол}}$ – граничное условие для вектора \mathbf{P}

Связь потенциала с напряжённостью поля

- Убыль потенциала равна работе поля:
 $\varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = \mathbf{E}d\mathbf{r} = E_x dx + E_y dy + E_z dz \Rightarrow$
 $E_x = -\partial\varphi/\partial x; E_y = -\partial\varphi/\partial y; E_z = -\partial\varphi/\partial z \Rightarrow$
 $\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi$

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi = -\nabla\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}; \frac{\partial\varphi}{\partial y}; \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

Соотношения между электрическими единицами СИ и СГСЭ

- Заряд:

$$1 \text{ Кулон} = 1 \text{ Кл} = 3 \cdot 10^9 \text{ единиц СГСЭ}$$

- Потенциал:

$$1 \text{ Вольт} = 1 \text{ В} = 1/300 \text{ единиц СГСЭ}$$

$$1 \text{ В} = 1 \text{ Дж} / 1 \text{ Кл} = 10^7 \text{ эрг} / 3 \cdot 10^9 = 1/300 \text{ единиц СГСЭ потенциала}$$