Лекция № 7
Электрическое поле веществе

Алексей Викторович
Гуденко

22/10/2012

План лекции

1. Теорема о циркуляции вектора Е.
2. Уравнение Пуассона
3. Проводник в электростатическом поле.
4. Электрическое поле в диэлектрике.
5. Граничные условия

Уравнение Пуассона

$$\nabla(\nabla\varphi) = -4\pi\rho$$

$\nabla^2\varphi = -4\pi\rho$ – уравнение Пуассона

$\Delta \equiv \nabla^2 \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа (лапласиан)

$\Delta\varphi = 0$ - урвнение Лапласа

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho$$

Пример на уравнение Пуассона (Овчинкин, № 2.5)

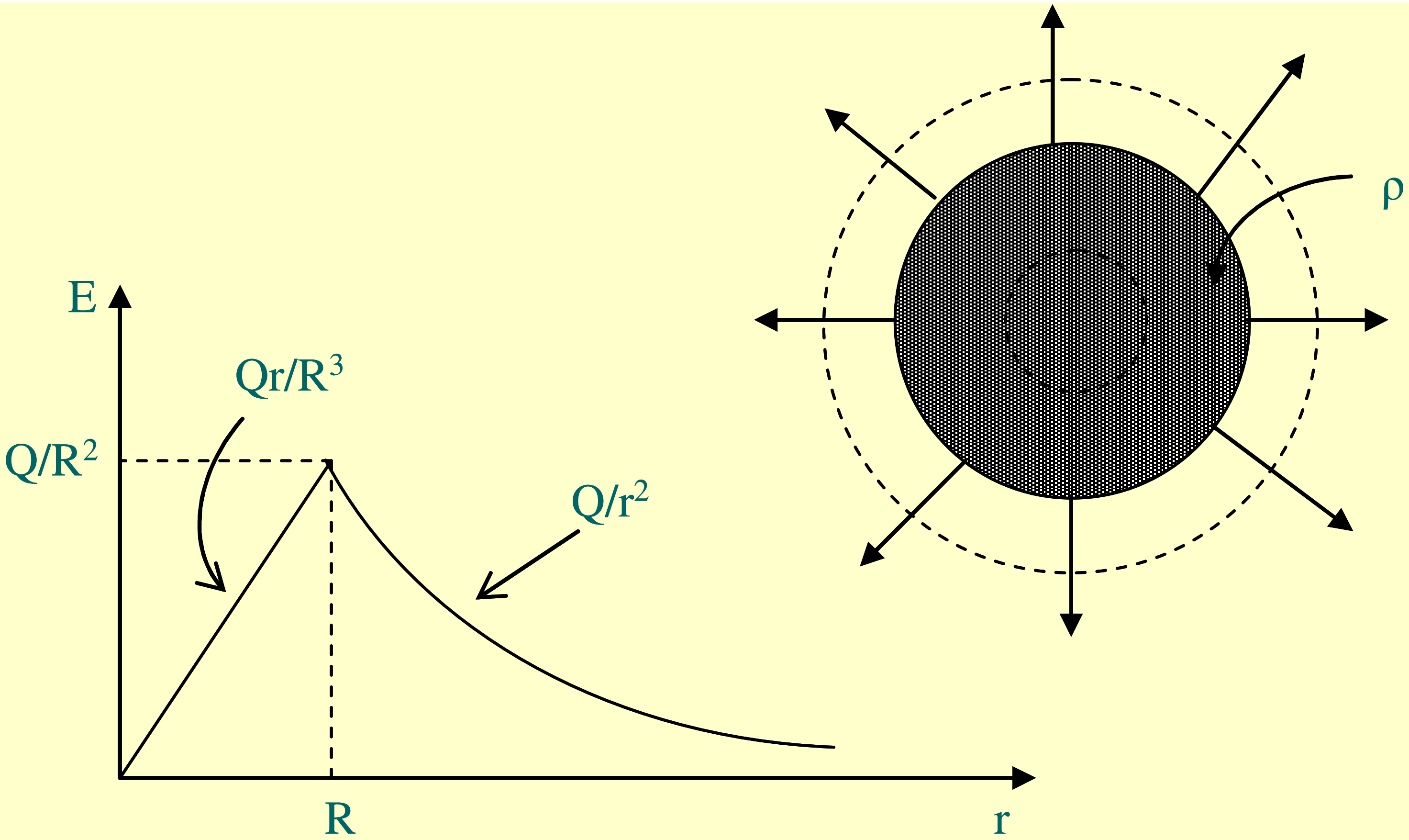
- Распределение потенциала в плоском конденсаторе.
- Дано: ρ, d, $\varphi(0) = 0$; $\varphi(d) = \varphi_0$
- $\varphi(x) = ?$
- Пуассон: $\partial^2\varphi/\partial x^2 = -4\pi\rho$; $\varphi(0) = \varphi_0$
- $\varphi(x) = (\varphi_0 + 2\pi\rho d)x - 2\pi\rho x^2$

Применение теоремы Гаусса

- Поле заряженной нити:
  $E \cdot 2\pi r \cdot L = 4\pi q \Rightarrow E = 2q/Lr = 2æ/r$
- Поле заряженной плоскости:
  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = E\Delta S + E\Delta S = 2E\Delta S = 4\pi\Delta q \Rightarrow E = 2\pi\Delta q/\Delta S = 2\pi\sigma$
- Поле равномерно заряженного шара:

1. Вне шара $r > R$: $E\, 4\pi r^2 = 4\pi Q \Rightarrow E = Q/r^2$
2. Внутри шара $r < R$: $E\, 4\pi r^2 = 4\pi q(r) = 4\pi Q(r/R)^3 \Rightarrow$
   $E = Qr/R^3 = 4/3\ \pi\rho r$
   в векторном виде:
   $\mathbf{E} = Q\mathbf{r}/r^3,\ r > R$
   $\mathbf{E} = Q\mathbf{r}/R^3 = 4/3\ \pi\rho\mathbf{r},\ r < R$

Поле равномерно заряженного шара



Теорема о циркуляции вектора E

- Циркуляция вектора **E** в любом электростатическом поле равна нулю:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$$

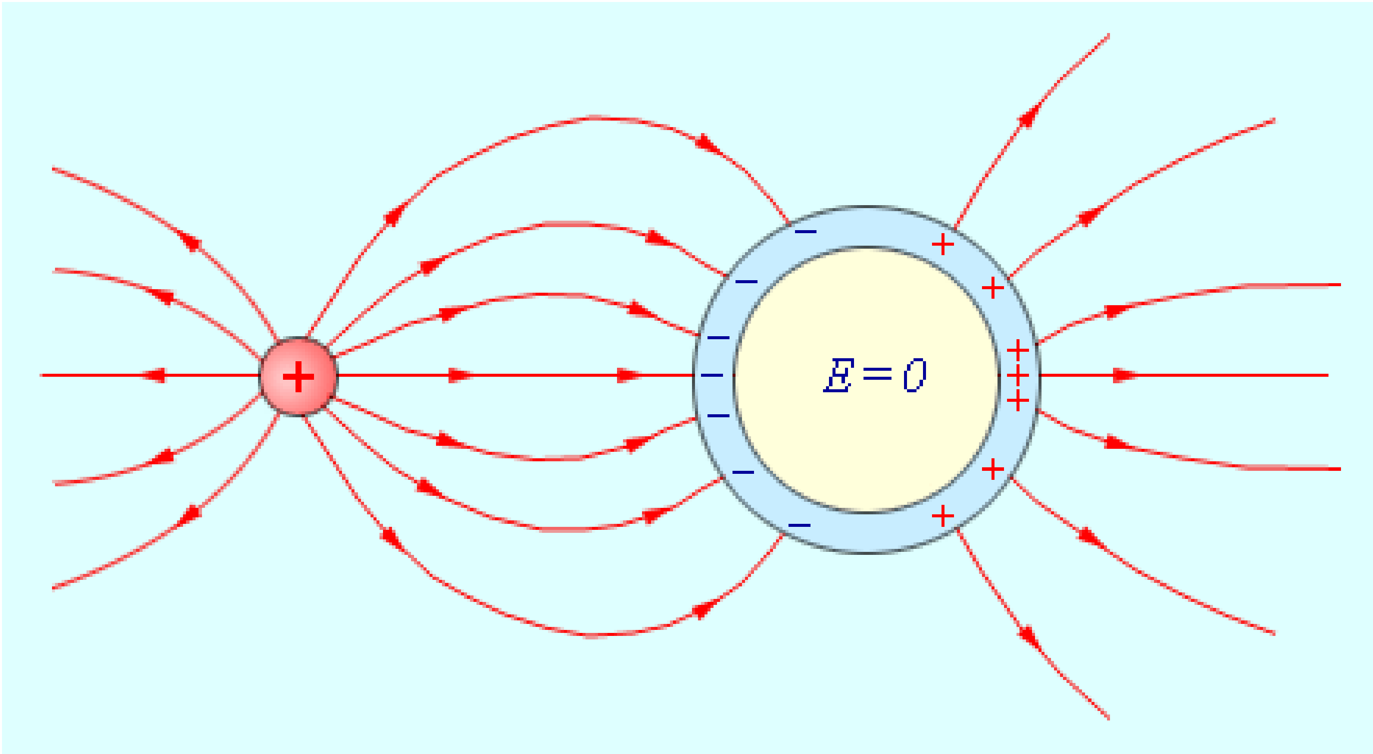
- Касательная составляющая вектора **E** при переходе через границу непрерывна

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}$$

Проводник в электрическом поле

- Проводник – это вещество, способное проводить электрический ток. Ток переносят *свободные заряды*.
- В условиях равновесия (ток $I = 0$) напряжённость поля в проводнике $E = 0$ ⇨
  - Объёмная плотность заряда в проводнике $\rho = 0$. нескомпенсированные заряды распределены по поверхности.
  - Потенциал всех точек проводника $\varphi = const$: проводник – эквипотенциальная область, поверхность проводника – эквипотенциальная поверхность.
  - Поле **E** ⊥ поверхности; $E = 4\pi\sigma$

Электростатическая защита



Электрическое поле в диэлектриках

- В электрическом поле диэлектрик поляризуется – в объёме и на поверхности появляются *связанные заряды* ⇨ диэлектрик приобретает дипольный момент.
- Поляризованность **P** – дипольный момент единицы объёма
  $\mathbf{P} = \sum \mathbf{p}_i / V$
- Поверхностная плотность поляризационных зарядов
  $\sigma_{пол} = P_n$
- $P_{n1} - P_{n2} = \sigma_{пол}$ – граничное условие для вектора **P**

Вектор электрической индукции D = E + 4πP

$$q_{\text{пол}} = -\oint P_n dS = -\oint \vec{P} d\vec{S}$$

$$div\vec{P} = -\rho_{\text{пол}}$$

$$div\vec{E} = 4\pi(\rho + \rho_{\text{пол}}) = 4\pi(\rho - div\vec{P}) \Rightarrow$$

$$div(\vec{E} + 4\pi\vec{P}) = 4\pi\rho$$

$$div\vec{D} = 4\pi\rho$$

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$$

Поляризуемость и диэлектрическая проницаемость

- Для линейных однородных изотропных диэлектриков
  $\mathbf{P} = \alpha\mathbf{E}$ α – поляризуемость ⇨
- $D = E + 4\pi P = (1 + 4\pi\alpha)E = \varepsilon E$
- $\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha$ – диэлектрическая проницаемость диэлетрика
- Для вакуума $\alpha = 0$ ⇨ $\varepsilon = 1$

Теорема Гаусса для диэлектриков

- Поток вектора **D** сквозь замкнутую поверхность равен алгебраической сумме *свободных* зарядов внутри этой поверхности, умноженной на 4π:

$$\oint \vec{D} d\vec{S} = 4\pi q$$

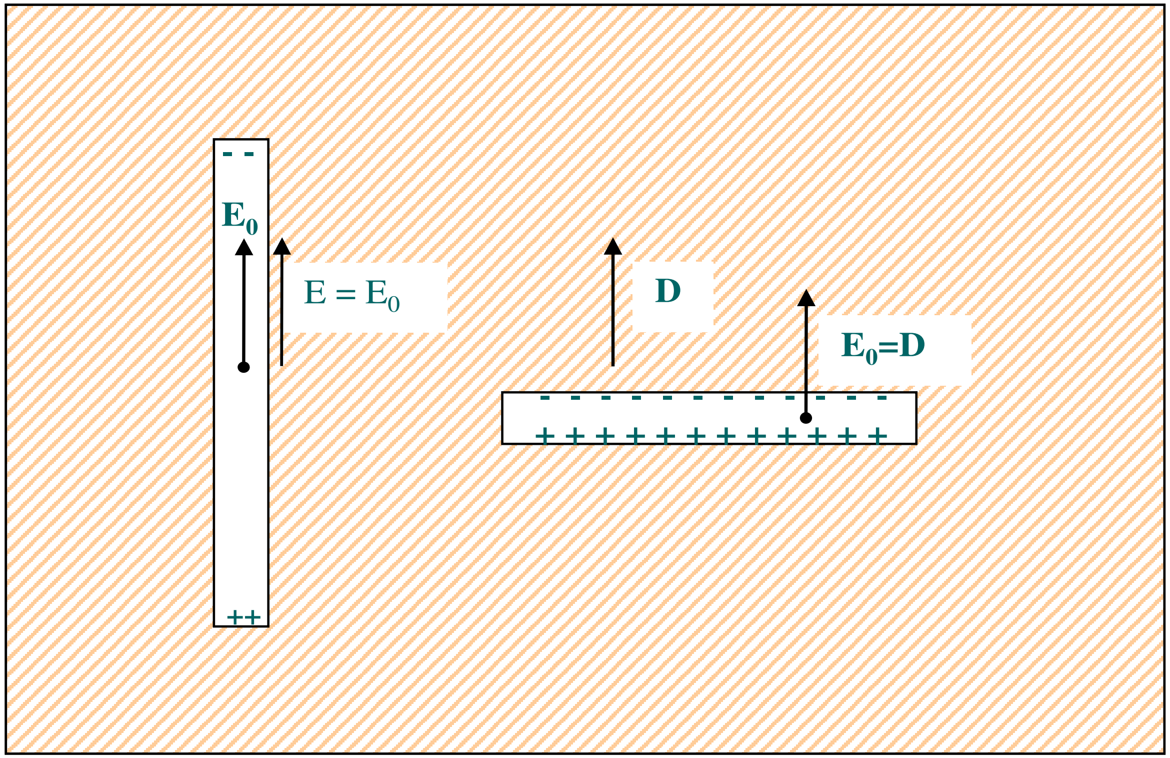
- Граничные условия для вектора **D:**

$$D_{n2} - D_{n1} = 4\pi\sigma$$

- Для незаряженнои поверхности диэлектрика:

$$D_{n2} = D_{n1}$$

Как измерить D и E



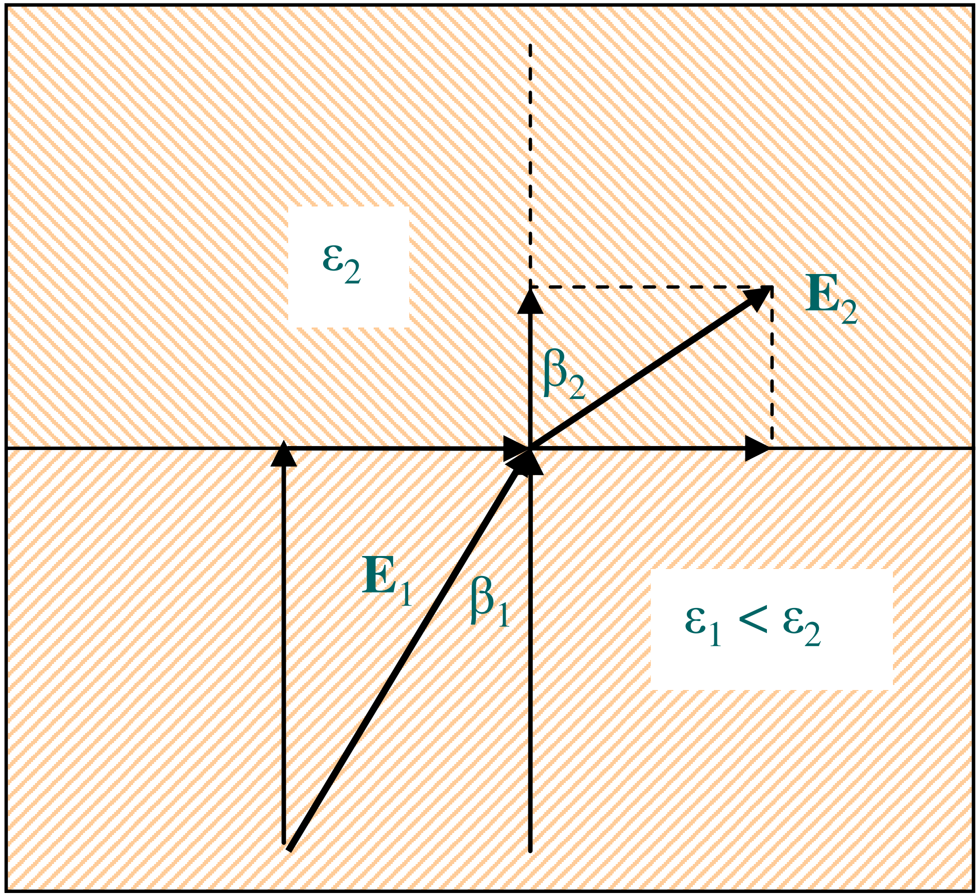
- В узком цилиндрическом канале $E_0 = E$
- В коротком цилиндре $E_0 = D$

Диэлектрическая проницаемость ртутного пара (Овчинкин № 3.1)

- Концентрация металлических шариков n
- Радиус шариков – r
- $\varepsilon = ?$
- *Решение*:
  1. каждый шарик в поле **E** превращается в диполь $\mathbf{p} = r^3\mathbf{E}$
  2. Вектор поляризации $\mathbf{P} = n\mathbf{p} = nr^3\mathbf{E} = \alpha\mathbf{E}$
     $\alpha = nr^3$ – поляризуемость пара
  3. $\mathbf{D} = E + 4\pi\mathbf{P} = (1 + 4\pi\alpha)\mathbf{E} = \varepsilon\mathbf{E}$
- *Ответ*: $\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha = 1 + 4\pi nr^3$

Преломление силовых линий на границе диэлектриков

- $E_{t1} = E_{t2}$
- $D_{n1}=D_{n2} \Rightarrow \varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2}$
- $\mathrm{tg}\beta_1 = E_{t1}/E_{n1}$
- $\mathrm{tg}\beta_2 = E_{t2}/E_{n2}$
- $\mathrm{tg}\beta_2/\mathrm{tg}\beta_1 = E_{n1}/E_{n2} = \varepsilon_2/\varepsilon_1$



Связь потенциала с напряжённостью поля

- Убыль потенциала равна работе поля:

  $\varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = \mathbf{E}d\mathbf{r} = E_x dx + E_y dy + E_z dz \Rightarrow$

  $E_x = -\partial\varphi/\partial x$; $E_y = -\partial\varphi/\partial y$; $E_z = -\partial\varphi/\partial z \Rightarrow$

  $\mathbf{E} = -\,\mathrm{grad}\varphi$

$$\vec{E} = -grad\,\varphi = -\nabla\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x};\frac{\partial\varphi}{\partial y};\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

Соотношения между электрическими единицами СИ и СГСЭ

- Заряд:
  1 Кулон = 1 Кл = $3 \cdot 10^9$ единиц СГСЭ
- Потенциал:
  1 Вольт = 1 В = 1/300 единиц СГСЭ

1 В = 1 Дж /1 Кл = 10^7 эрг/3 10^9 = 1/300 единиц СГСЭ потенциала