

Лекция № 5

Процессы переноса

**Алексей Викторович
Гуденко**

08/10/2012

План лекции

1. Диффузия, теплопроводность, вязкость.
2. Длина свободного пробега
3. Связь диффузии с подвижностью частицы.
4. Броуновское движение как процесс диффузии.
5. Эффузия разреженного газа

Типы процессов переноса: диффузия, теплопроводность, вязкость

- **Диффузия** – процесс выравнивания концентрации растворённого вещества. Закон Фика: диффузионный поток пропорционален градиенту концентрации

$$j = -D \frac{dn}{dz}; \quad D - \text{коэффициент диффузии}; \quad [D] = \frac{\text{см}^2}{\text{сек}}$$

- **Теплопроводность** – процесс выравнивания температуры. Закон Фурье: поток тепла пропорционален градиенту температуры

$$q = -\kappa \frac{dT}{dz}; \quad \kappa - \text{коэффициент теплопроводности}; \quad [\kappa] = \frac{\text{Дж}}{\text{см} \cdot \text{сек} \cdot \text{К}}$$

- **Вязкость** – процесс выравнивания скоростей происходит из-за вязкого трения. Сила вязкого трения пропорциональна градиенту скорости:

$$\tau = -\eta \frac{du}{dz}; \quad \eta - \text{коэффициент вязкости}; \quad [\eta] = \frac{\text{кг}}{\text{см} \cdot \text{сек}}$$

Коэффициенты теплопроводности различных веществ

вещество	α , Дж/см с К	вещество	α , Дж/см с К
воздух	$2,4 \cdot 10^{-4}$	алмаз	6,28
гелий	$14 \cdot 10^{-4}$	железо	0,75
вода	$6 \cdot 10^{-3}$	медь	4,0
стекло	$4-8 \cdot 10^{-3}$	серебро	4,2

- Теплопроводность металлов на 2-3 порядка выше теплопроводности неметаллов.
- Алмаз проводит тепло лучше меди и серебра!

Вязкость жидкостей и газов

вещество	η , кг/м · сек
воздух	$1,8 \cdot 10^{-5}$
вода	$1,0 \cdot 10^{-3}$
кровь	$4,5 \cdot 10^{-3}$
глицерин	1,5
мёд	500 ÷ 1000

За какое время расплавится ледышка? (Овчинкин, № 10.28)

- Радиус ледышки: $R_0 = 1$ см
температура окружающей воды: $t = 10$ °С
теплопроводность воды: $\kappa = 6 \cdot 10^{-3}$ Дж/см·с·К
удельная теплота плавления льда: $q = 335$ Дж/г
- Решение: плотность потока тепла $j = -\kappa \frac{dT}{dr}$
мощность теплоотвода: $N = 4\pi r^2 j = 4\pi r^2 \kappa \frac{dT}{dr} \Rightarrow$
 $\frac{dT}{dr} = \frac{N}{4\pi r^2 \kappa} \Rightarrow N = 4\pi r \kappa (t - t_0) = 4\pi r \kappa \Delta t$
 \Rightarrow скорость плавления: $dV/dt = 4\pi r^2 dr/dt = N/\rho q$
 \Rightarrow время таяния:
 $\tau = \rho q R_0^2 / 2\kappa \Delta t = 0,9 \cdot 335 \cdot 1^2 / 2 \cdot 6 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \approx 42$ мин.

Длина свободного пробега

$$\frac{dJ}{J} = -\sigma n dz \Rightarrow J = J_0 e^{-\sigma n z} = J_0 e^{-\frac{z}{\lambda}}; \quad \lambda = \frac{1}{\sigma n}$$

$$\bar{z} = \frac{\int_0^{\infty} z e^{-\frac{z}{\lambda}} dz}{\int_0^{\infty} e^{-\frac{z}{\lambda}} dz} = \lambda = \frac{1}{\sigma n} \text{ — длина свободного пробега}$$

$$\sigma \approx \pi d^2 = 3,14 \cdot (3 \cdot 10^{-16})^2 \approx 3 \cdot 10^{-32} \text{ см}^2; n = 2,7 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{\sigma n} \approx 10^{-5} \text{ см} = 0,1 \text{ мкм} \text{ — длина свободного пробега молекул}$$

воздуха при нормальных условиях

$$\lambda = \lambda_0 \frac{p_0}{p} \Rightarrow \lambda(p = 1 \text{ мм.рт.ст}) \approx 1000 \lambda_0 = 0,1 \text{ мм}$$

$$\lambda(p = 10^{-2} \text{ мм.рт.ст}) \approx 10^5 \lambda_0 = 1 \text{ см}$$

$$\lambda(p = 10^{-6} \text{ мм.рт.ст}) \approx 10^9 \lambda_0 = 100 \text{ м}$$

Коэффициент диффузии в газах

$$j = j_+ - j_- = \frac{1}{6}vn(z - \lambda) - \frac{1}{6}vn(z + \lambda) = -\frac{1}{3}v\lambda \frac{dn}{dz}$$

$$D = \frac{1}{3}v\lambda - \text{коэффициент диффузии}$$

$$D = \frac{1}{3}v\lambda \approx \frac{1}{3} \cdot 50000 \cdot 10^{-5} \approx 0,17 \text{ см}^2 / \text{сек}$$

$$D_{\text{табл}} = 0,18 \text{ см}^2 / \text{сек}$$

Коэффициент теплопроводности и вязкости в газах

$$\kappa = \frac{1}{3} \rho c_{уд} \nu \lambda = \frac{1}{3} \rho c_{уд} \nu \lambda - \text{коэффициент теплопроводности}$$

$$\kappa = \frac{1}{3} \rho c_{уд} \nu \lambda = \frac{1}{3} \rho \frac{C}{\mu} \nu \lambda = \frac{1}{3} \cdot 1,3 \cdot 10^{-3} \frac{2,5 \cdot 8,31}{29} \cdot 50000 \cdot 10^{-5} = 1,6 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Дж}}{\text{см} \cdot \text{сек} \cdot \text{К}}$$

$$\kappa_{\text{табл}} = 2,4 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Дж}}{\text{см} \cdot \text{сек} \cdot \text{К}}$$

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \nu \lambda = \frac{1}{3} \rho \nu \lambda - \text{коэффициент вязкости}$$

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \nu \lambda = \frac{1}{3} \cdot 1,3 \cdot 10^{-3} \cdot 55000 \cdot 10^{-5} = 2,4 \cdot 10^{-4} \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{сек}}$$

$$\eta_{\text{табл}} = 1,8 \cdot 10^{-4} \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{сек}}$$

Коэффициенты переноса в газах

$$D = \frac{1}{3} \nu \lambda - \text{коэффициент диффузии}$$

$$\kappa = \frac{1}{3} \rho c_{y\partial} \nu \lambda - \text{коэффициент теплопроводности}$$

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \nu \lambda - \text{коэффициент вязкости}$$

Связь диффузии с подвижностью частицы.

- Подвижность – коэффициент пропорциональности B между скоростью регулярного движения и силой: $u = Vf$
- Формула Стокса: $f = 6\pi\eta ru \Rightarrow u = (1/6\pi\eta r)f \Rightarrow$ подвижность $B = 1/6\pi\eta r$

$$j_+ = -D \frac{dn}{dt} = -D \frac{f}{kT} n - \text{поток против силы (вверх)}$$

$$j_- = nu = nVf - \text{поток в направлении силы (вниз)}$$

$$j_+ + j_- = 0 \Rightarrow$$

- Соотношение Эйнштейна:

$$D = BkT$$

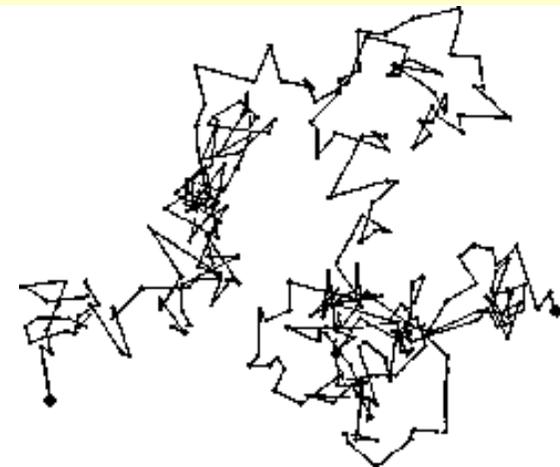
Броуновское движение как процесс диффузии

$$\vec{R} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \dots + \vec{r}_n$$

$$\overline{R^2} = \overline{(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \dots + \vec{r}_n)^2} = \sum_i \overline{r_i^2} + \overbrace{\sum_{i \neq j} \overline{r_i r_j}}^0 = n \overline{r^2} = n(2\lambda^2) = 2 \frac{t}{\tau} \lambda^2 = 2 \frac{t}{\lambda/v} \lambda^2 = 2\lambda vt = 6Dt$$

$$\overline{\Delta x^2} = \overline{\Delta y^2} = \overline{\Delta z^2} = 2Dt = 2BkTt$$

$R \sim \sqrt{t}$ – характерная особенность диффузионных процессов



Оценка диффузионного пути

- На какое расстояние удалится от своего исходного положения молекула аргона в воздухе при нормальных условиях за $t = 10$ с, за час? $D = 0.165 \text{ см}^2/\text{с}$
- $L_{\text{диф}} \sim (6Dt)^{1/2} = (6 \cdot 0,165 \cdot 10)^{1/2} = 3 \text{ см}$
- $L_{\text{диф}} \sim (6Dt)^{1/2} = (6 \cdot 0,165 \cdot 3600)^{1/2} = 60 \text{ см} !$

Как впервые измерили число Авогадро (Овчинкин, 10.90)

- $t = 5$ мин, размер частиц $r = 0,385$ мкм
температура $T = 293$ К, смещение частицы $\Delta x = 1,5$ мкм;
вязкость глицерина (раствора)
 $\eta = 0,149$ Н с/м²
- $\Delta x = (2Dt)^{1/2} = (2BkTt)^{1/2} = (kTt/3\pi\eta r)^{1/2} \Leftrightarrow$
 $k = R/N_A = 3\pi\eta r\Delta x^2/Tt \Leftrightarrow N_A = RTt/3\pi\eta r\Delta x^2 =$
 $6,02 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹

Время очистки воды от микрокапель ртути (Овчинкин, 10.139)

- В сосуде с водой взвешены частицы ртути.
- За какое время капли осядут на стенки?
- Решение: h – характерный размер сосуда;
подвижность $V = 1/6\pi\eta r$

Диффузионный путь

$$h \sim (6Dt)^{1/2} = (6VkTt)^{1/2} = (kTt/\pi\eta r)^{1/2} \Leftrightarrow$$

$$t \sim \pi\eta r h^2 / kT$$

Эффузия разреженного газа

- Разреженный газ: $\lambda \geq L$ – характерный размер сосуда, трубки, отверстия
- Эффузионный поток – поток молекул через отверстие с размерами $L \leq \lambda$
- $j_1 = j_2 \Leftrightarrow n_1 v_1 = n_2 v_2 \Leftrightarrow p_1 / (m_1 T_1)^{1/2} = p_2 / (m_2 T_2)^{1/2}$
- $p_1 = p_2; T_1 = T_2; m_1 < m_2 \Leftrightarrow j_1 > j_2$ - легкий газ быстрее проходит через пористую перегородку - изотермическая эффузия
- Разделение изотопов