# Лекция № 12
# Уравнения Максвелла. Электромагнитные волны.

Алексей Викторович
Гуденко

26/11/2012

# План лекции

1. Ток смещения. Ток смещения  в конденсаторе и при стекании заряда с шара.
2. Система уравнений Максвелла.
3. Волновое уравнение для плоской электромагнитной волны.
4. Вектор Пойнтинга и импульс плоской электромагнитной волны. Давление света.

# Индуктивность

- $\Phi = 1/c\ LI$
  L – индуктивность (коэффициент самоиндукции)
- Соленоид:
  $B = \mu H = 4\pi\mu i/c = 4\pi\mu IN/\ell c$
- $\Phi_1 = BS = (4\pi\mu NS/\ell c)\ I$
- $\Phi = N\Phi_1 = (1/c)\ (4\pi\mu N^2 S/\ell)\ I = 1/c\ LI$
- $L = (4\pi\mu N^2 S/\ell)$
- СГС: [L] = см
- СИ: [L] = Гн (Генри) = $10^9$ см

# Энергия соленоида

- $I(0) = I_0$
- $\varepsilon_{инд} = IR \Rightarrow -1/c^2\, LdI/dt = IR \Rightarrow dI/I = -\,c^2Rdt \Rightarrow$
  $I = I_0 e^{-t/\tau}$, $\tau = L/c^2R$ $([R] = с/см)$
- $W = \int I^2Rdt = LI^2/2c^2 = I\Phi/2c = \Phi^2/2L$
- $W = I\Phi/2c = 4\pi i\ell\, BS/8\pi c = (HB/8\pi)\, V \Rightarrow$
- $w = HB/8\pi$ – плотность магнитной энергии
- $w = \mu H^2/8\pi = HB/8\pi = B^2/8\pi\mu$

# Стекание заряда с шара во внешнюю среду.

- Заряд шара q.
- Какое поле индуцируется при стекании заряда?

Из симметрии – $\mathbf{B} \equiv 0$, но тогда $\mathbf{j} \equiv 0$ ($\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = 0$)

- $\mathbf{j}_{см} = 1/4\pi\ \partial D/\partial t = 1/4\pi r^2\ \partial q/\partial t = -\ \mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{j} + \mathbf{j}_{см} = 0$

# Конденсатор

- Ток смещения в заряжающемся конденсаторе:
  $j_{см} = 1/4\pi\ \partial D/\partial t = (1/4\pi)\partial(4\pi\sigma)/\partial t = 1/s\ \partial q/\partial t$
  $I_{см} = j_{см}s = \partial q/\partial t = I$
- $\int H d\ell = (4\pi/c)\ (I + I_{см})$
- Вне конденсатора
  $\int H d\ell = (4\pi/c) I \quad (I_{см} = 0)$
- Внутри конденсатора
  $\int H d\ell = (4\pi/c)\ I_{см} \quad (I = 0)$

# Ток смещения

- Уравнение непрерывности: $\partial\rho/\partial t + \mathrm{div}\mathbf{j} = 0$
- Ток смещения: $\mathrm{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho \Rightarrow \partial\rho/\partial t = (1/4\pi)\mathrm{div}\partial\mathbf{D}/\partial t = \mathrm{div}\,\{(1/4\pi)\,\partial\mathbf{D}/\partial t\} = \mathrm{div}\mathbf{j}_{см}$
- $(1/4\pi)\,\partial\mathbf{D}/\partial t = \mathbf{j}_{см}$ – плотность тока смещения
- $\mathrm{div}(\mathbf{j} + \mathbf{j}_{см}) = 0$
- Магнитное поле создаётся как электрическими токами $\mathbf{j}$, так и токами смещения $\mathbf{j}_{см}$:
  $\mathrm{rot}\mathbf{H} = 4\pi/c\,(\mathbf{j} + \mathbf{j}_{см}) = (4\pi/c)\,j + 1/c\,\partial\mathbf{D}/\partial t$

# Система уравнений Максвелла в интегральной форме

- Источники электрического поля – электрические заряды или переменные магнитные поля
- Источники магнитного поля – движущиеся заряды или переменные электрические поля

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = 4\pi \int_V \rho dV$$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \vec{B}}{dt} d\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{dt} d\vec{S}$$

# Система уравнений Максвелла в дифференциальной форме

1. Теорема Гаусса для электрического поля:
$$div\vec{D} = 4\pi\rho$$

2. Теорема о циркуляции для электрического поля:
$$rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{dt}$$

3. Теорема Гаусса для магнитного поля:
$$div\vec{B} = 0$$

4. Теорема о циркуляции для магнитного поля:
$$rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{dt}$$

# Материальные уравнения

1. Определение вектора электрической индукции: $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$
   Линейные диэлектрики:
   $\vec{P} = \alpha\vec{E},\ \alpha$ – поляризуемость
   $\vec{D} = \varepsilon\vec{E},\ \varepsilon = 1 + 4\pi\alpha$ – диэлектрическая проницаемость
2. Определение вектора напряжённости магнитного поля: $\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{P}_m$
   Для линейных магнетиков:
   $\vec{P}_m = \kappa\vec{H},\ \kappa$ – магнитная восприимчивость
   $\vec{B} = \mu\vec{H},\ \mu = 1 + 4\pi\kappa$ – магнитная проницаемость
3. Закон Ома: $\vec{j} = \lambda\vec{E}$

# Граничные условия

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma$$

$$E_{2t} = E_{1t}$$

$$B_{2n} = B_{1n}$$

$$H_{2t} - H_{1t} = \frac{4\pi}{c} i_N$$

# Электромагнитные волны

- Волновое уравнение: $\partial^2 x/\partial t^2 = v^2\, \partial^2 x/\partial z^2$
- Для упругих волн в стержне: $\partial^2 x/\partial t^2 = (E/\rho)\, \partial^2 x/\partial z^2$
- Из уравнений Максвелла:
  $E = E_x(z)$; $H = H_y(z)$

$$\frac{\partial E}{\partial z} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E}{\partial t}$$

- Волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}$$

- Решение волнового уравнения:

$$v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$$

$$E = E_0 \cos(\omega t - kz)$$

$$H = H_0 \cos(\omega t - kz)$$

# Вектор Пойнтинга плоской волны

- Для амплитуд: $\sqrt{\varepsilon}E_0 = \sqrt{\mu}H_0$
- В бегущей плоской волне электрическая энергия в любой момент равна магнитной: $\frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \frac{\mu H^2}{8\pi}$
- Плотность полной энергии: $w = w_E + w_H = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} + \frac{\mu H^2}{8\pi} = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}EH}{4\pi}$
- Поток энергии: $S = vw = \frac{c}{4\pi}EH$
- Вектор Пойнтинга – плотность потока энергии: $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{H}$

# Импульс электромагнитного поля. Давление света

- Импульс релятивисткой частицы: $\mathbf{p} = (W/c^2)\mathbf{v}$
- Плотность импульса электромагнитного поля: $$\vec{g} = \frac{w\vec{v}}{c^2} = \frac{\vec{S}}{c^2} = \frac{1}{4\pi c}\vec{E}\times\vec{H}$$
- Давление света: $$P = c\overline{g} = \overline{w} = \frac{\overline{w}c}{c} = \frac{I}{c}$$
- Если коэффициент отражения R, то: $$P = (1+R)\frac{I}{c}$$
- Давление солнечного света: $$I_c = 1{,}5\,\text{кВт/м}^2$$ $$P = I/c = 5\cdot 10^{-6}\,\text{Па}$$