Работа 2.1
Исследование затухающих колебаний в колебательном контуре

Цель работы: изучение параметров и характеристик колебательного контура.

Приборы и оборудование: генератор звуковых сигналов, осциллограф, модуль с колебательным контуром ФПЭ–10, преобразователь импульсов ФПЭ–08, источник питания, магазин сопротивлений.

Введение

Если зарядить конденсатор C от батареи до некоторого напряжения U_0, а затем замкнуть его на катушку индуктивности L, то конденсатор начнет разряжаться через катушку и в контуре (рис. 1) возникнут электромагнитные колебания. Рассмотрим, как происходят эти колебания в контуре с нулевым сопротивлением $R = 0$. При замыкании контура, в нем появляется ток I, создающий магнитное поле. Изменение магнитного потока приводит к возникновению в цепи электродвижущей силы самоиндукции, замедляющей скорость разрядки конденсатора. При уменьшении тока возникает электродвижущая сила, направленная в ту же сторону, что и вызвавший ее появление ток. Это приводит к тому, что после разряда конденсатора ток не прекращается сразу, а в течение некоторого времени продолжает течь в том же на правлении и перезаряжает обкладки конденсатора. Затем процесс разряда начинается снова, но протекает в обратном направлении, в результате чего система возвращается в исходное состояние. Время

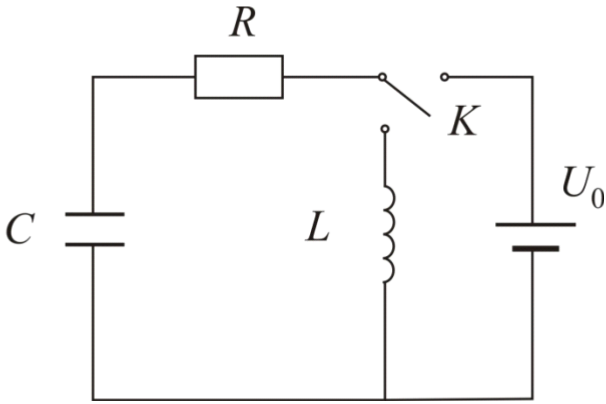

Рис. 1:

T, в течение которого конденсатор заряжается и разряжается, называется периодом собственных колебаний. В начальный момент, когда конденсатор полностью заряжен, в нем накоплена электрическая энергия: $W_E = CU_0^2/2$. Во время разряда конденсатора электрическая энергия превращается в энергию магнитного поля катушки и, когда конденсатор полностью разряжен, вся электрическая энергия переходит в магнитную: $W_M = LI_0^2/2$, где I_0 — максимальное значение тока в контуре.

Проводники контура всегда обладают электрическим сопротивлением, поэтому часть энергии в процессе колебаний расходуется на нагрев проводников. Вследствие этого амплитуда электромагнитных колебаний в контуре постепенно уменьшается и в нем происходят затухающие колебания. При достаточно большом сопротивлении или малой индуктивности колебания в нем вообще не возникают, а происходит так называемый апериодический разряд конденсатора.

Рассмотрим электрический контур, состоящий из последовательно соединенных конденсатора С, катушки индуктивности L и резистора R. Обозначим разность потенциалов на конденсаторе через U. Мы будем рассматривать колебания при относительно низких частотах, когда выполняется условие квазистационарности. Квазистационарность означает, что мгновенные значения тока I практически одинаковы во всех проводниках, соединяющих элементы цепи, а изменения во времени происходят настолько медленно, что распространение электродинамических взаимодействий можно считать мгновенным. Такие взаимодействия распространяются со скоростью близкой к скорости света в вакууме c. Обозначим через l длину контура нашей цепи (практически эта длина совпадает с длиной провода, из которого изготовлена обмотка катушки самоиндукции). Время распространения электромагнитного возмущения на расстояние l равно $\tau_0 = l/c$. Условие квазистационарности будет выполнено, если это время значительно меньше периода T колебаний тока в контуре: $\tau_0 \ll T$, или частота колебаний $\nu_0 = 1/T \ll 1/\tau_0$. При $l \sim 1$ м условие квазистационарности хорошо выполняется при частотах $\nu_0 \ll 3{\cdot}10^8$ Гц. Выполнение условия квазистационарности позволяет при расчёте цепей переменного тока пользоваться законом Ома для замкнутой цепи и законом сохранения заряда, как и в случае расчёта цепей постоянного тока. Следствием этих законов являются правила Кирхгофа. Первое правило Кирхгофа: в каждой точке разветвления цепи алгебраическая сумма токов равна нулю. Второе правило: для любого замкнутого контура сумма падений напряжений на отдельных участках контура равна алгебраической сумме $\mathcal{E}$ в этом контуре.

Запишем второе правило Кирхгофа для последовательного колебательного контура (рис. 1):

$$U + IR = -L\frac{dI}{dt}.$$

Используя связь заряда на конденсаторе с напряжением и током: $q = CU$ и $I = \frac{dq}{dt}$, получим дифференциальное уравнение, описывающее затухающие колебания:

$$\frac{d^2U}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dU}{dt} + \frac{U}{LC} = 0. \tag{1}$$

Несложно показать, что такой же вид имеют дифференциальные уравнения для заряда q и тока I. Студентам предлагается убедиться в этом самостоятельно. Линейными дифференциальными уравнениями второго порядка вида (1) описывается обширный

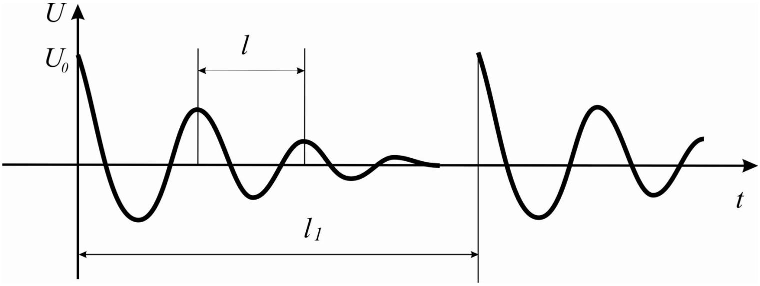

Рис. 2: Затухающие колебания

класс колебательных систем как электрических, так и механических. Вводя коэффициент затухания $\gamma = R/(2L)$ и собственную частоту $\omega_0^2 = 1/(LC)$, перепишем уравнение (1) в виде:

$$\frac{d^2U}{dt^2} + 2\gamma\frac{dU}{dt} + \omega_0^2 U = 0. \tag{2}$$

Как известно, решение уравнения (2) имеет вид:

$$U = U_0 e^{-\gamma t}\cos\omega t, \tag{3}$$

где $\omega = 2\pi/T$ — циклическая частота свободных колебаний:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, \tag{4}$$

Из формул (3) и (4) следует, что в контуре возможны колебания лишь в случае, когда $\omega_0 > \gamma$. В обратном случае $\omega_0 < \gamma$, когда частота и период — мнимые, колебаний нет и происходит апериодический разряд конденсатора. Режим, соответствующий условию $\omega_0 = \gamma$, называется критическим. Ему соответствует критическое сопротивление:

$$R_{\text{кр}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

При $R > R_{\text{кр}}$ процесс имеет апериодический, при $R < R_{\text{кр}}$ — колебательный характер.

В случае, когда затухание мало, о затухающих колебаниях можно говорить, как о гармонических. В этом случае аргумент косинуса называют фазой, а коэффициент $U_0 e^{-\gamma t}$ — амплитудой колебаний. Величина γ определяет затухание колебаний: $\gamma = 1/\tau$, где τ — время, в течение которого амплитуда уменьшается в e раз. Заметим, что при $\gamma \neq 0$ напряжение не является строго периодической функцией времени, поскольку $U(t) \neq U(t+T)$. Говорить о периоде этой функции можно только в том смысле, что она принимает нулевые значения через равные промежутки времени. Зависимость напряжения от времени в режиме свободных затухающих колебаний представлена на рис. 2.

В колебательном режиме потери в контуре принято характеризовать добротностью и логарифмическим декрементом затухания. Назовем добротностью величину

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W_T},$$

где W — запасенная в контуре энергия, а ΔW_T — потери энергии за период. Из уравнения (3) найдём

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{CU_0^2}{2} e^{-2\gamma t}$$

Потеря энергии за период равна

$$\Delta W_T = \frac{CU_0^2}{2} \left(e^{-2\gamma t} - e^{-2\gamma (t+T)} \right) = W \left(1 - e^{-2\gamma T} \right)$$

Полагая $2\gamma T \ll 1$ (слабое затухание), найдём среднюю потерю энергии за время изменения фазы на один радиан:

$$\Delta W = \frac{1}{2\pi} \Delta W_T = \frac{\gamma T}{\pi} W.$$

Поэтому добротность

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W_T} = \frac{W}{\Delta W} = \frac{\pi}{\gamma T} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}. \qquad (5)$$

При написании цепочки (5) были использованы выражения для собственной частоты $\omega_0^2 = 1/\left(LC\right)$ и коэффициента затухания $\gamma = R/\left(2L\right)$.

Средняя потеря энергии ΔW за время изменения фазы на один радиан в 2π раз меньше, чем ΔW_T. Таким образом, добротность контура Q показывает, *во сколько раз запасённая в контуре энергия превосходит среднюю потерю энергии за время, в течение которого фаза колебаний изменяется на один радиан.*

Введем **логарифмический декремент затухания** λ — логарифм отношения двух последовательных максимальных отклонений в одну сторону. Из (3) имеем

$$\lambda = \ln \frac{U_n}{U_{n+1}} = \ln e^{\gamma T} = \gamma T. \tag{6}$$

Можно определить физический смысл логарифмического декремента затухания — *это величина, обратная числу периодов n_e, за которое амплитуда колебаний падает в е раз.*

Сравнивая (5) и (6) , найдем:

$$Q = \frac{\pi}{\gamma T} = \frac{\pi}{\lambda}.$$

В ряде случаев удобно изучать колебательный процесс в системе координат I и U, т. е. откладывая по оси абсцисс величину тока в контуре в заданный момент времени, а по оси ординат – напряжение на конденсаторе в тот же момент времени. Плоскость U–I носит название плоскости состояний или **фазовой плоскости**, а кривая, изображающая зависимость напряжения от тока, называется **фазовой кривой**.

Найдем фазовую кривую для контура, сопротивление которого $R = 0$. В этом случае $\gamma = 0$и из (3) следует

$$U = U_0 \cos \omega_0 t, \; I = C \frac{dU}{dt} = -C U_0 \omega_0 \sin \omega_0 t. \tag{7}$$

Уравнения (7) описывают незатухающие колебания. Исключая из них время t, получим уравнение фазовой кривой:

$$\left(\frac{U}{U_0}\right)^2 + \left(\frac{I}{C U_0 \omega_0}\right)^2 = 1.$$

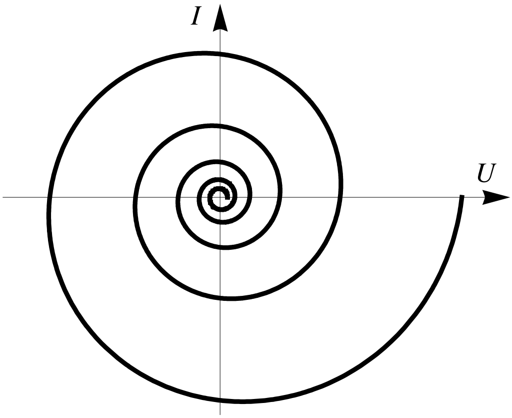

Рис. 3: Фазовая кривая осциллятора с затуханием

Это уравнение эллипса. Эллипс получается в результате сложения двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний (7), сдвинутых на четверть периода. В контуре, сопротивление которого $R > 0$, происходят затухающие колебания напряжения (3) и тока:

$$I = C\frac{dU}{dt} = -CU_0e^{-\gamma t}\left(\gamma\cos\omega t + \omega\sin\omega t\right).$$

В этом случае амплитуды напряжения и тока в контуре непрерывно убывают и фазовая кривая получается незамкнутой (рис. 3).

Экспериментальная установка

Принципиальная схема установки изображена на рис. 4. В работе для получения колебаний в контуре используется модуль ФПЭ–10 с контуром, изображенном на рис. 5. Кроме модулей ФПЭ–10 и преобразователя импульсов ФПЭ-08 на рис. 4 отмечены магазин сопротивлений (МС), источник питания (ИП), звуковой генератор ЗГ–118 и осциллограф GOS–620.

Происходящие в контуре колебания (см. рис. 2) наблюдаются на экране осциллографа. Длительность одного импульса опреде-

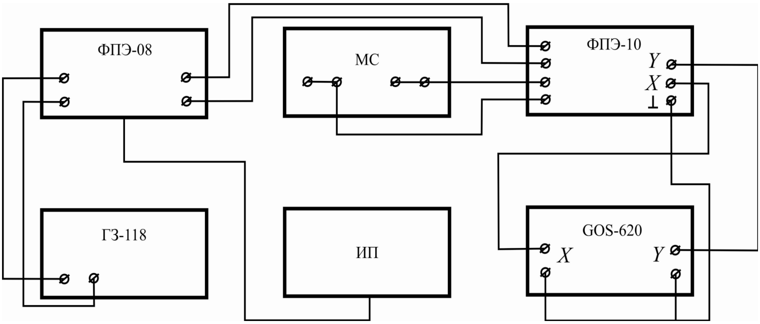

Рис. 4: Принципиальная схема экспериментальной установки

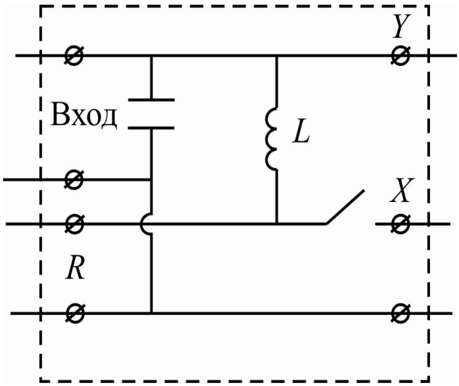

Рис. 5: Схематическое устройство модуля ФПЭ–10, обеспечивающего колебания в контуре

ляется временем $1/\nu$, где ν — частота, задаваемая звуковым генератором. На экране осциллографа ему соответствует отрезок l_1. Это позволяет определить период T затухающих колебаний, которому на рис. 2 соответствует отрезок l. Очевидно, что $T = l/(l_1\nu)$.

ЗАДАНИЕ

I. Измерение периода, логарифмического декремента и параметров колебательного контура.

1. Подготовить приборы к работе.

   а) Установить на звуковом генераторе частоту 250 Гц;

   б) на преобразователе импульсов ФПЭ-08 нажать клавишу "прямоугольные импульсы"и правую клавишу «скважность грубо»;

   в) выставить на магазине сопротивлений 100 Ом;

   г) включить лабораторный стенд и приборы.

2. Настроить осциллограф согласно техническому описанию. Получить на экране осциллографа устойчивую картину колебаний (см. рис. 2).

3. Установить картину в центре экрана. Этого можно добиться, совместив с центром экрана прямую, которая наблюдается, если переключатель AC-GND-DC осциллографа перевести в положение GND. Далее перевести переключатель в положение DC.

4. Измерить расстояния l (соответствующее периоду затухающих колебаний) и расстояние между цугами $l1$ (соответствующее частоте, задаваемой звуковым генератором) и вычислить период колебаний $T = l/\left(l_1\nu\right)$.

5. Измерить амплитуду нескольких последовательно идущих колебаний и, комбинируя их попарно, вычислить логарифмический декремент затухания $\lambda = \ln\frac{U_n}{U_{n+1}}$. Убедиться, что значение декремента не зависит от номера колебания. По формуле $\lambda = \gamma T$ определить коэффициент затухания γ. Результаты измерений и расчетов занести в таблицу.

   При измерении амплитуды двух соседних пиков колебаний удобно, меняя усиление канала по оси Y, выставлять размер первого из измеряемых пиков, равной одной и той же величине (например 4 больших деления на осцилографе). При изменении усиления канала осцилографа необходимо каждый раз проверять уровень нуля по оси Y (положение GND на соответствующем канале осцилографа.)

6. Выполнить измерения (пункт 5), включив в магазине сопротивления 100, 200, 300, 400, 500, 600 Ом.

7. Построить график зависимости логарифмического декремента затухания λ от сопротивления магазина $R_{\text{м}}$. Из полученного графика определить параметры катушки $R_{\text{к}}$ и L. Используя значения периода T (пункт 4) определить ёмкость кондесатора C. При расчётах параметров контура считать, что сопротивление контура складывается из сопротивления катушки $R_{\text{к}}$ и сопротивления магазина $R_{\text{м}}$.

8. Подобрать сопротивление магазина сопротивлений $R_{\text{мкр}}$, при котором наблюдается апериодический разряд конденсатора и сравнить с $R_{\text{кр}} = R_{\text{мкр}} + R_{\text{к}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ по полученным параметрам контура.

II. Исследование фазовых кривых

1. Включить осциллограф. Переключатель время/дел перевести в положение X–Y. При этом на вертикально отклоняющие пластины осциллографа подается напряжение с обкладок конденсатора, а на горизонтально отклоняющие – напряжение с клемм магазина сопротивлений, пропорциональное току.

2. Установить картину в центре экрана. Этого можно добиться, совместив с центром экрана точку, которая наблюдается, если переключатели AC–GND–DC осциллографа перевести в положение GND.

3. Вращая ручку магазина сопротивлений, получить фазовые кривые при различных сопротивлениях.

4. Измерить значения напряжения, разделенные периодом времени, т.е. расстояния от центра фазовой кривой до точки пересечения витков спирали с осью напряжения U и вычислить логарифмический декремент затухания. Аналогичным образом вычислить логарифмический декремент затухания по значениям тока, разделенным периодом времени. Измерения выполнить по всем виткам фазовой кривой.

5. Повторить измерения п. 4 при значениях сопротивления магазина 100, 200, 300, 400, 500, 600 Ом. Результаты занести в таблицу.

6. Зарисовать фазовую кривую при апериодическом разряде конденсатора.

7. Рассчитать погрешность определения логарифмического декремента затухания.

8. Рассчитайте добротность контура для максимального и минимального значения λ, используя формулу $Q = \pi/\lambda$, и сравните с расчетом Q через параметры контура R, L, C.

Контрольные вопросы

1. Что такое колебательный контур и как в нем возникают колебания?
2. Что такое логарифмический декремент затухания?
3. Что представляет собой апериодический разряд в контуре и при каких условиях он происходит?
4. Что такое фазовая плоскость и фазовая кривая?
5. Какова форма фазовой кривой: а) при незатухающих колебаниях, б) при затухающих колебаниях, в) при апериодическом разряде?
6. Получите формулу, связывающую добротность и логарифмический декремент затухания.