

Концепции и модели физики

Кузьмичев Сергей Дмитриевич



СОДЕРЖАНИЕ ЛЕКЦИИ №7

- 1. Закон всемирного тяготения. Напряжённость гравитационного поля. Потенциальная энергия.**
- 2. Теорема Гаусса.**
- 3. Гравитационное поле Земли: напряжённость, потенциал.**
- 4. Движение в центральном поле тяготения. Искусственные спутники и планеты. Законы Кеплера. Космические скорости. Параметры орбит.**
- 5. Примеры.**

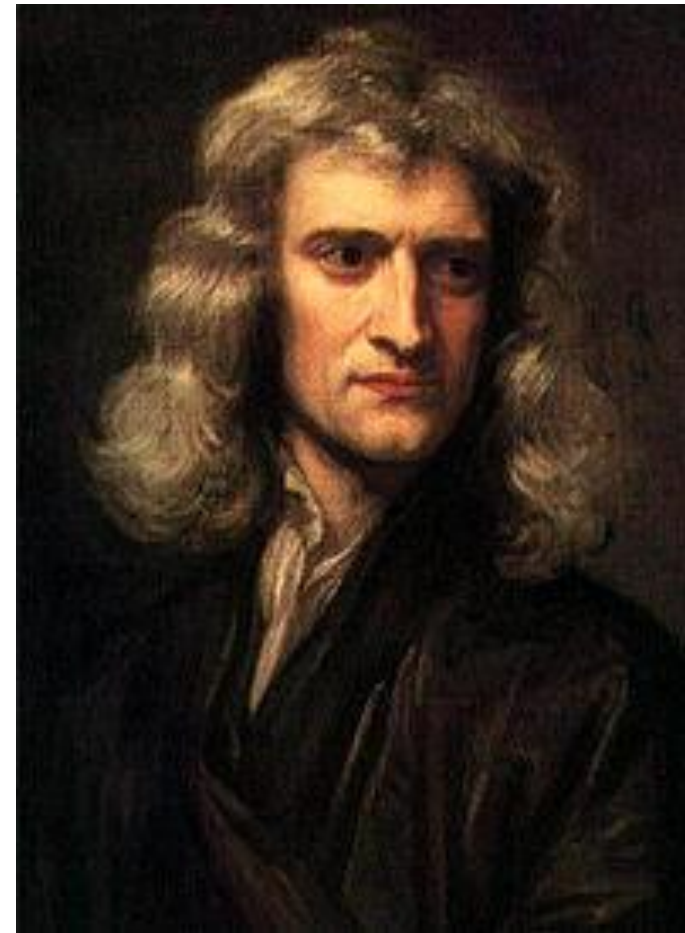
Закон всемирного тяготения

Закон всемирного тяготения: любые два тела (материальные точки) притягиваются друг к другу с силами, пропорциональными произведению их масс и обратно пропорционально квадрату расстояния между ними:

$$F_{\text{тяг}} = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

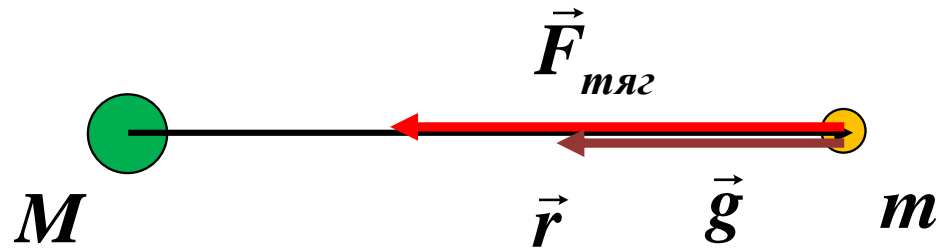
Гравитационная постоянная

$$G = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$$



Is. Newton

Напряжённость поля тяготения



$$\vec{F}_{\text{тяг}} = -G \frac{Mm}{r^3} \cdot \vec{r}$$

Напряжённость поля тяготения массы
точечной массы M

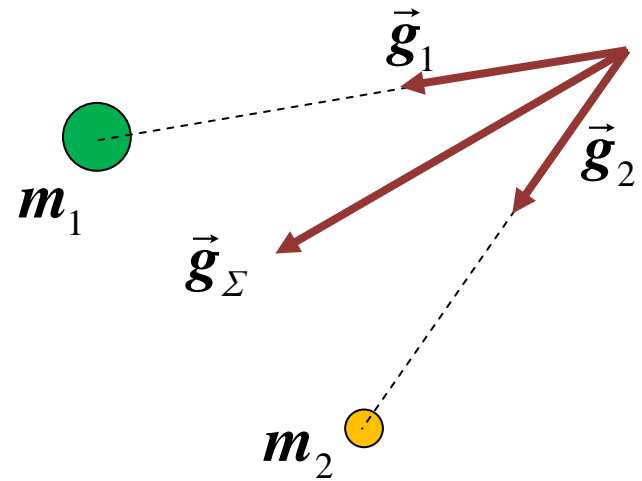
$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_{\text{тяг}}}{m} = -G \frac{M}{r^3} \cdot \vec{r}$$

Принцип суперпозиции

Гравитационное поле, возбуждаемое какой-либо массой, не зависит от наличия других масс.

Напряжённость гравитационного поля создаваемого несколькими телами, равно геометрической сумме напряженностей полей, возбуждаемых этими телами в отдельности:

$$\vec{g}_{\Sigma} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \dots + \vec{g}_N$$



Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия

Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух точечных масс

$$\Pi = -G \frac{m_1 m_2}{r}$$

Полная энергия «легкой» материальной точки массой m , движущейся в поле тяготения «тяжелой» материальной точки массой M ($M \gg m$)

$$E = K + \Pi = \frac{mv^2}{2} - G \frac{Mm}{r}$$

2. Теорема Гаусса

Поток вектора напряжённости \vec{g} гравитационного поля через замкнутую поверхность равен

$$\Phi = \oint \vec{g} d\vec{S} = -4\pi Gm,$$

m - масса внутри замкнутой поверхности.



A handwritten signature of Carl Friedrich Gauss in cursive script.

Примеры применения теоремы Гаусса

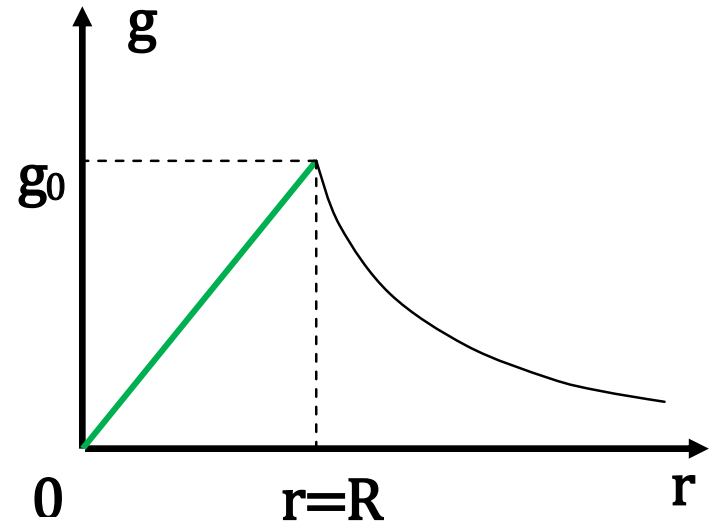
а) Сферическая симметрия:
однородный шар радиусом R ,
массой m и постоянной
плотности ρ

- при $r < R$ (внутри шара)

$$\vec{g} = -\frac{4\pi G\rho}{3} \cdot \vec{r}, \quad g = g_0 \frac{r}{R}, \quad g_0 = \frac{Gm}{R^2}$$

- при $r > R$ (вне шара)

$$\vec{g} = -\frac{Gm}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \quad g = g_0 \frac{R^2}{r^2}$$



б) Симметрия относительно плоскости: однородный слой толщиной d и постоянной плотности ρ

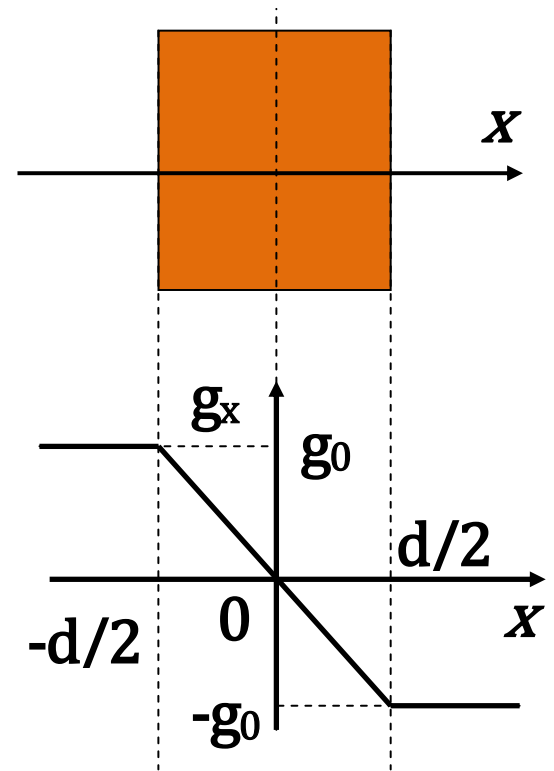
- при $|x| < d / 2$ (внутри слоя)

$$g_x = -4\pi G\rho x, \quad g_0 = 2\pi G\rho d$$

- при $|x| > d / 2$ (вне слоя)

$$g_x = -g_0, \quad x > d / 2,$$

$$g_x = g_0, \quad x < -d / 2$$



3. Гравитационное поле Земли: напряженность и потенциал.

Напряженность

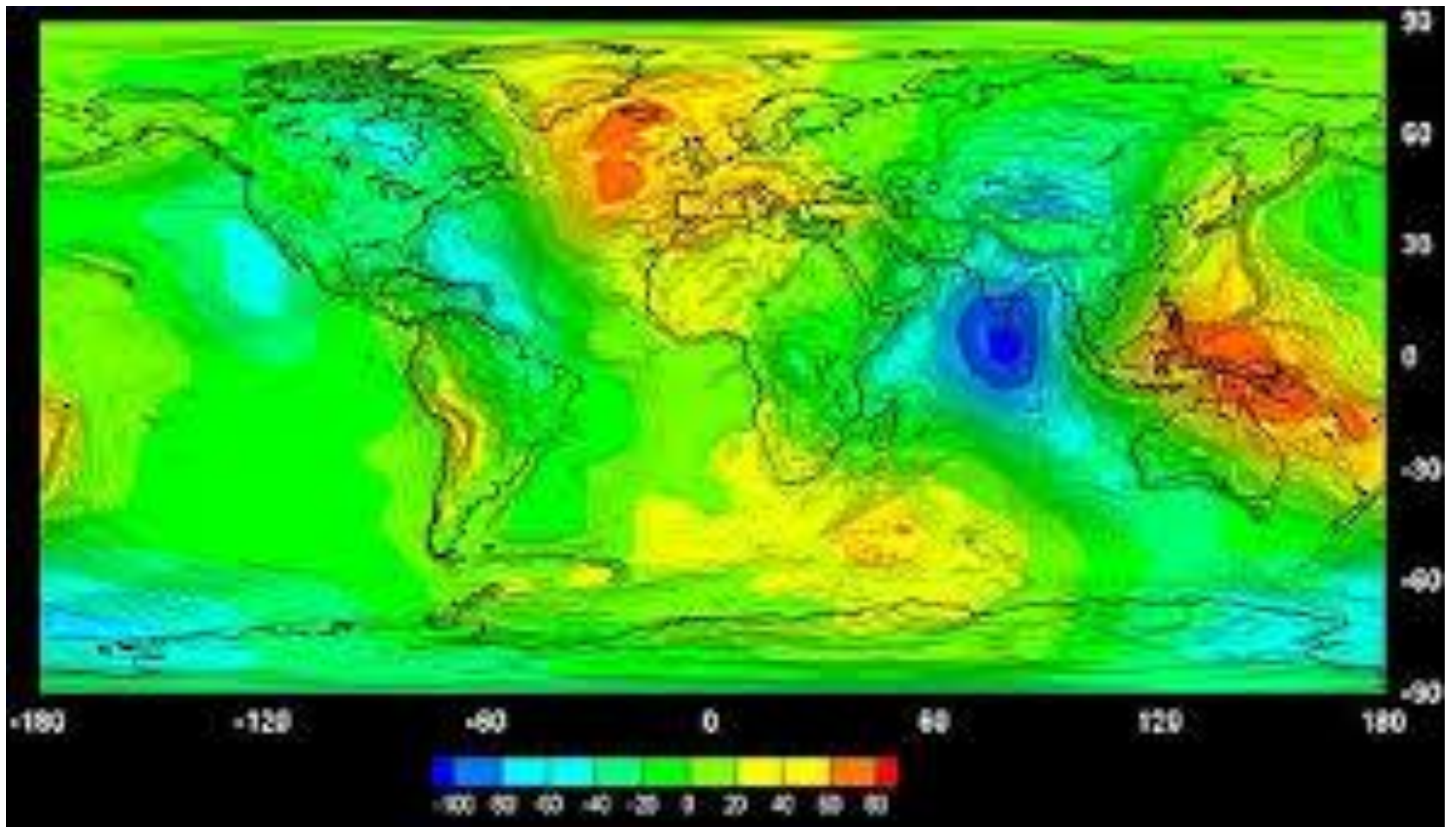
$$\vec{g} = -\frac{GM_3}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \quad r > R_3$$

$$g_3 = \frac{GM_3}{R_3^2} = 9,8 \text{ м / с}^2$$

Потенциал и потенциальная энергия

$$\varphi = -\frac{GM_3}{r}, \quad r > R_3,$$

$$\Pi = m\varphi = -\frac{GM_3 m}{r}$$



4. Движение в центральном поле тяготения. Искусственные спутники и планеты. Законы Кеплера. Космические скорости. Параметры орбит.

Полная энергия планеты (или спутника) массой m в поле тяготения «неподвижного тяжелого центра» массой M ($M \gg m$)

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} = \text{const}$$

Момент импульса \vec{L} планеты относительно «центра тяготения» сохраняется .

$$\vec{L} = [\vec{r}, m\vec{v}] = \left[\vec{r}, m(\vec{v}_r + \vec{v}_\varphi) \right] = \mathit{const},$$

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}, \quad v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2,$$

$$|\vec{L}| = L = mr^2\dot{\varphi} = \mathit{const}$$

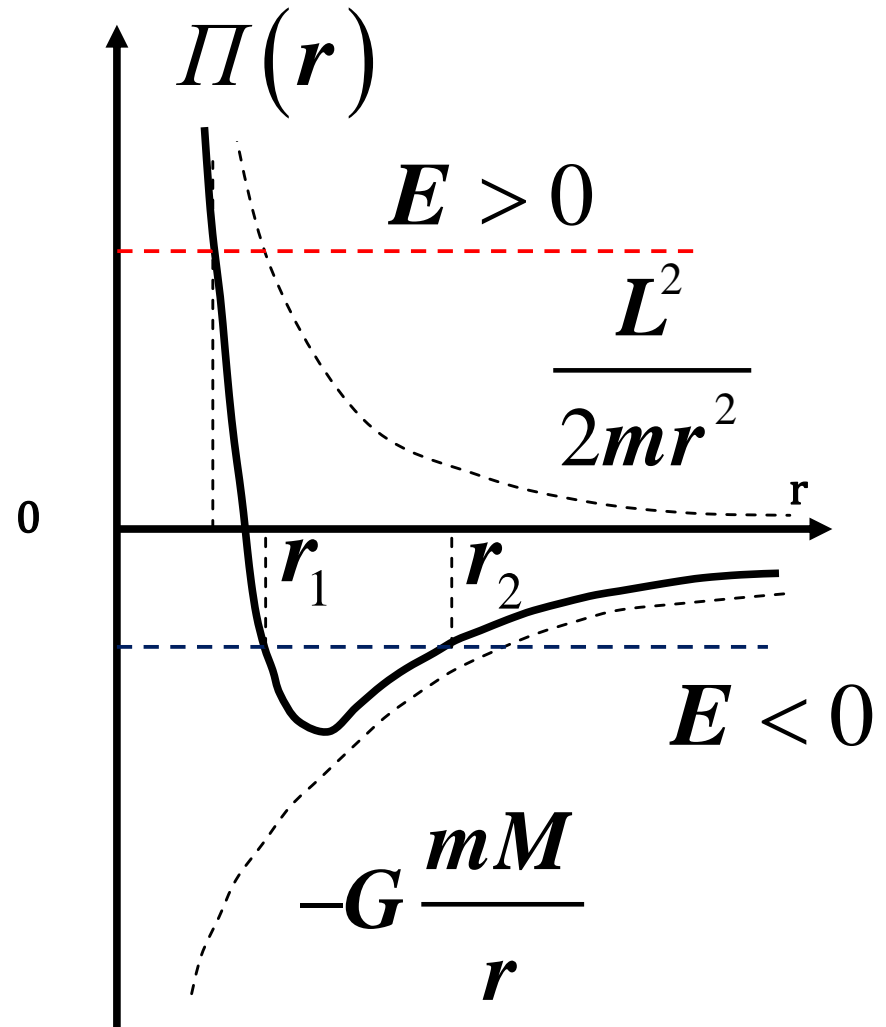
Полную энергию можно записать как сумму кинетической энергии «радиального» движения и «эффективной» потенциальной энергии

$$E = K_r + \Pi_{\text{эфф}},$$

$$K_r = \frac{mv_r^2}{2}, \quad \Pi_{\text{эфф}} = -G \frac{mM}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

Условия эллиптического, параболического и гиперболического движений

$E > 0$ -
гиперболическое
движение,
 $E = 0$ -
параболическое
движение,
 $E < 0$ -
эллиптическое
движение



Параметры эллиптической орбиты

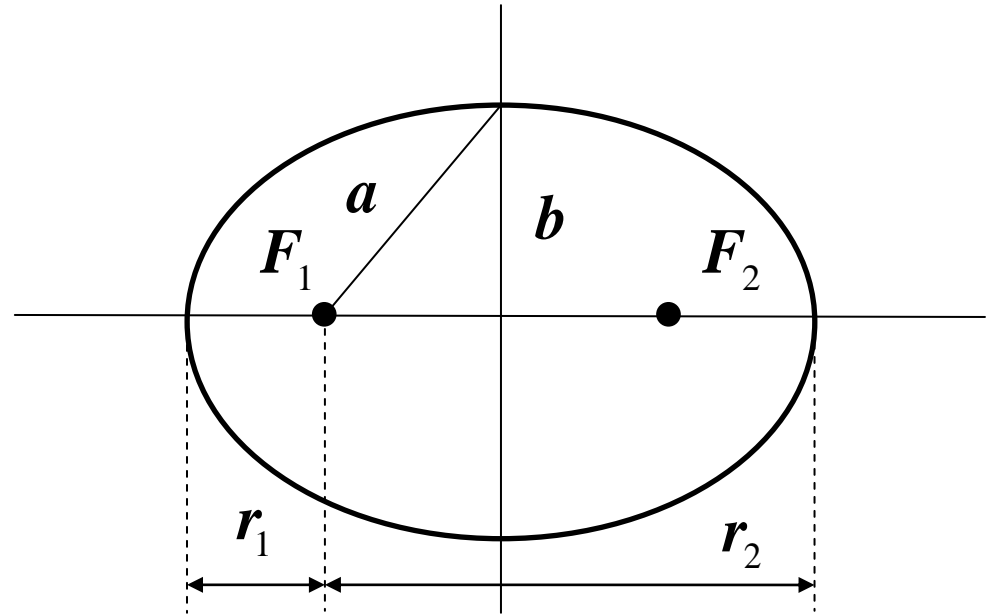
Большая полуось
эллипса

$$a = -GMm / (2E),$$

$$E < 0$$

Малая полуось
эллипса

$$b = L / \sqrt{(-2Em)}$$



Период обращения по эллипсу

$$T = \frac{S}{\dot{S}_{сек}} = \frac{\pi ab}{L / 2m}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$

Законы Кеплера

I. Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

II. Радиус-вектор планеты в равные времена описывает равные площади.

III. Квадраты времен обращения планет относятся как кубы больших осей эллиптических орбит, по которым они движутся вокруг Солнца.



$$\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{a_1^3}$$

Космические скорости

I. Первая космическая скорость - скорость движения спутника по круговой орбите радиусом, равном радиусу Земли

$$v_{1,K} = \sqrt{\frac{GM}{R_3}} = \sqrt{gR_3} \approx 7,9 \text{ км / с}$$

II. Вторая космическая скорость – минимальная скорость, которую нужно сообщить телу, чтобы оно никогда не вернулось на Землю*

$$v_{2,K} = \sqrt{2\frac{GM}{R_3}} = \sqrt{2gR_3} \approx 11,2 \text{ км / с}$$

5. Примеры.

Пример 1. На большом расстоянии от Земли метеорит движется относительно неё со скоростью v_0 . При каком наибольшем расстоянии l метеорит будет «захвачен» Землей?

Закон сохранения энергии:
$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} - mgR$$

Закон сохранения момента импульса
(для касательной траектории):

$$mv_0 l = mvR$$

$$l = R \sqrt{1 + \frac{2gR}{v_0^2}} = R \sqrt{1 + \frac{v_{2,K}^2}{v_0^2}}$$



Пример 2. Кто дальше? С полюса Земли запускают две ракеты, одну вертикально вверх, другую горизонтально. Начальные скорости обеих ракет равны v_0 , причем больше первой космической скорости и меньше второй. Какая из ракет удалится дальше от центра Земли? Сопротивлением воздуха пренебречь.

а) Первая ракета. Из закона сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} - mgR_3 = -mg \frac{R_3^2}{r_1},$$

$$r_1 = \frac{2gR_3^2}{2gR_3 - v_0^2}.$$

б) Вторая ракета. Точка наибольшего удаления от центра Земли – апогей.

Из закона сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} - mgR_3 = \frac{mv_2^2}{2} - mg \frac{R_3^2}{r_2}$$

Из закона сохранения момента импульса

$$mv_0 R_3 = mv_2 r_2$$

$$r_2 = \frac{v_0^2 R_3}{2gR_3 - v_0^2}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{2gR_3}{v_0^2} = \left(\frac{v_{2,K}}{v_0} \right)^2 > 1$$

Пример 3. Орбита космического корабля «ВОСТОК», на котором летал Ю. Гагарин, имела высоту в перигее $r_n = 181 \text{ км}$, а в апогее – $r_a = 327 \text{ км}$.
 Определите период обращения корабля вокруг Земли.

Период обращения спутника вокруг Земли при движении с первой космической скоростью

$$T_0 = \frac{2\pi R_3}{v_{1,K}} = 2\pi \sqrt{\frac{R_3}{g}} = 1 \text{ ч } 24,4 \text{ мин}$$

По третьему закону Кеплера

$$\frac{T_1^2}{T_0^2} T = T_0 \frac{(2a_1)^{3/2}}{(2a_0)^{3/2}} = T_0 \frac{(2R_3 + r_n + r_a)^{3/2}}{(2R_3)^{3/2}} = 1 \text{ ч } 29,1 \text{ мин}$$

Пример 4. Космический корабль движется вокруг Солнца по той же круговой орбите, что и Земля, причем настолько далеко от Земли, что её влиянием можно пренебречь. Какую дополнительную скорость в направлении своего движения нужно сообщить кораблю, чтобы он смог достичь орбиты Марса, двигаясь по траектории, касающейся орбиты Марса? Радиус орбиты Земли $R_1 = 1,5 \cdot 10^8$ км, радиус орбиты Марса $R_2 = 2,28 \cdot 10^8$ км.

1) Скорость корабля на круговой орбите вокруг Солнца

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_c}{R_1}} \approx 30 \text{ км / с}, \quad E_1 = -\frac{GM_c m}{2R_1}$$

2) Так как отношение длин больших осей эллипсов орбит обратно пропорционально отношению энергий, то

$$-\frac{GM_c m}{2R_1}$$

$$\frac{2a_2}{2a_1} = \frac{R_1 + R_2}{2R_1} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{GM_c m}{2R_1}}{\frac{mv_2^2}{2} - \frac{GM_c m}{R_1}}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM_c R_2}{R_1 (R_1 + R_2)}}$$

$$\Delta v = v_2 - v_1 \approx 2,9 \text{ км / с}$$

Время перелёта $\tau = 0,5T_{3M}$. По третьему закону Кеплера

$$\frac{T_{3M}}{T_3} = \frac{(2a_{3M})^{3/2}}{(2a_3)^{3/2}} = \frac{(R_1 + R_2)^{3/2}}{(2R_1)^{3/2}}, \quad \tau \approx 260 \text{ суток}$$

