

# Концепции и модели физики

Кузьмичев Сергей Дмитриевич



# СОДЕРЖАНИЕ ЛЕКЦИИ №6

1. Релятивистский импульс. Релятивистская энергия. Связь между энергией и импульсом частицы. Динамический инвариант.
2. Примеры из релятивистской динамики.
3. Момент импульса частицы и системы частиц относительно точки и оси. Момент силы.
4. Уравнение моментов.
5. Закон сохранения момента импульса для частицы и системы частиц.
6. Частица в поле центральных сил.
7. Уравнение момента импульса для вращения вокруг неподвижной оси. Момент инерции.
8. Работа и кинетическая энергия при вращательном движении. Аналогии между поступательным и вращательным движениями.
9. Скамья Жуковского.

# Релятивистский импульс.

Релятивистский импульс частицы

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} = \gamma m_0 \vec{v}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \gamma m_0 \frac{d\vec{v}}{dt} + m_0 \vec{v} \frac{d\gamma}{dt} =$$

$$= \gamma m_0 \vec{a} + \frac{m_0}{c^2} \gamma^3 \vec{v} (\vec{v} \vec{a}).$$

$$\vec{v} \vec{F} = m_0 \gamma^3 (\vec{v} \vec{a})$$

# Релятивистский импульс.

$$\vec{F} = \gamma m_0 \vec{a} + \frac{m_0}{c^2} \gamma^3 \vec{v} (\vec{v} \vec{a})$$

$$\vec{F} = (F_x, 0, 0), \quad \vec{v} = (v_x, 0, 0)$$

$$a_x = \frac{F_x}{\gamma m_0 \left(1 + \gamma^2 v_x^2 / c^2\right)} = \frac{F_x}{\gamma^3 m_0}$$

$$\vec{F} \perp \vec{v}$$

$$\vec{a}_{\parallel} = \frac{\vec{F}}{\gamma m_0}$$

# Энергия релятивистской частицы

Кинетическая энергия  $K$  частицы

$$\text{(вывод для } \vec{F} \parallel \vec{v} \text{)} \quad \vec{v}\vec{F} = m_0\gamma^3 (\vec{v}\vec{a})$$

$$dA = dK = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{F} \cdot \vec{v}dt = m_0\gamma^3 v dv$$

$$K = \int_0^v \frac{m_0 d(v^2)}{2(1 - v^2/c^2)^{3/2}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 c^2$$

$$K = E - m_0 c^2, \quad E = m_0 c^2 + K$$

для малых скоростей (  $v \ll c$  )

$$K \approx \frac{m_0 v^2}{2}$$

# Связь между энергией и импульсом релятивистской частицы

$$\vec{p} = \frac{E\vec{v}}{c^2}$$
$$E^2 = (m_0c^2)^2 + (pc)^2$$

Для безмассовых частиц ( $m_0 = 0$ )

$$E = pc, \quad v = c$$

# Динамический инвариант.

Величина

$$E^2 - (pc)^2$$

является инвариантом как для отдельной частицы, так и для системы частиц, (т.е. не зависит от системы отсчета)

$$E^2 - (pc)^2 = \text{inv}$$

# Примеры из релятивистской динамики

Энергии покоя частиц  $(1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж})$

электрон  $m_e c^2 = 0,511 \text{ МэВ}$

протон  $m_p c^2 = 938,28 \text{ МэВ}$

нейтрон  $m_n c^2 = 939,57 \text{ МэВ}$

Протоны на Большом Адронном Коллайдере

$$E = 14 \cdot 10^{12} \text{ эВ} \gg m_p c^2 = 938,28 \text{ МэВ}$$

$$c - v \approx 0,67 \text{ м / с}$$



При превращениях частиц (например, при ядерных реакциях) не выполняется закон сохранения массы. Примеры:

- Электрон и позитрон, каждый из которых обладает массой, могут аннигилировать в фотоны, не имеющие массы поодиночке.
- Масса дейтрона (ядра изотопа водорода), состоящего из одного протона и одного нейтрона, не равна сумме масс своих составляющих, поскольку следует учесть энергию взаимодействия частиц.

$$3,343583 \cdot 10^{-27} \text{ кг} < 1,672621 \cdot 10^{-27} \text{ кг} + 1,674927 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = \\ = 3,347549 \cdot 10^{-27}$$

Антипротонный порог (пороговая энергия)

$$p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$$

а) Неподвижная мишень. В лабораторной системе

$$inv_{до} = \left[ m_p c^2 + \left( m_p^2 c^4 + p^2 c^2 \right)^{1/2} \right]^2 - p^2 c^2$$

б) В системе центра масс (протоны и антипротон неподвижны друг относительно друга)

$$inv_{до} = inv_{после} = \left( 4m_p c^2 \right)^2$$

$$\left[ m_p c^2 + \left( m_p^2 c^4 + p^2 c^2 \right)^{1/2} \right]^2 - p^2 c^2 = \left( 4m_p c^2 \right)^2$$

$$E = \left( m_p^2 c^4 + p^2 c^2 \right)^{1/2} = 7m_p c^2$$

$$K_{пор,л} = E - m_p c^2 = 6m_p c^2$$

в) встречные пучки протонов одинаковых энергий

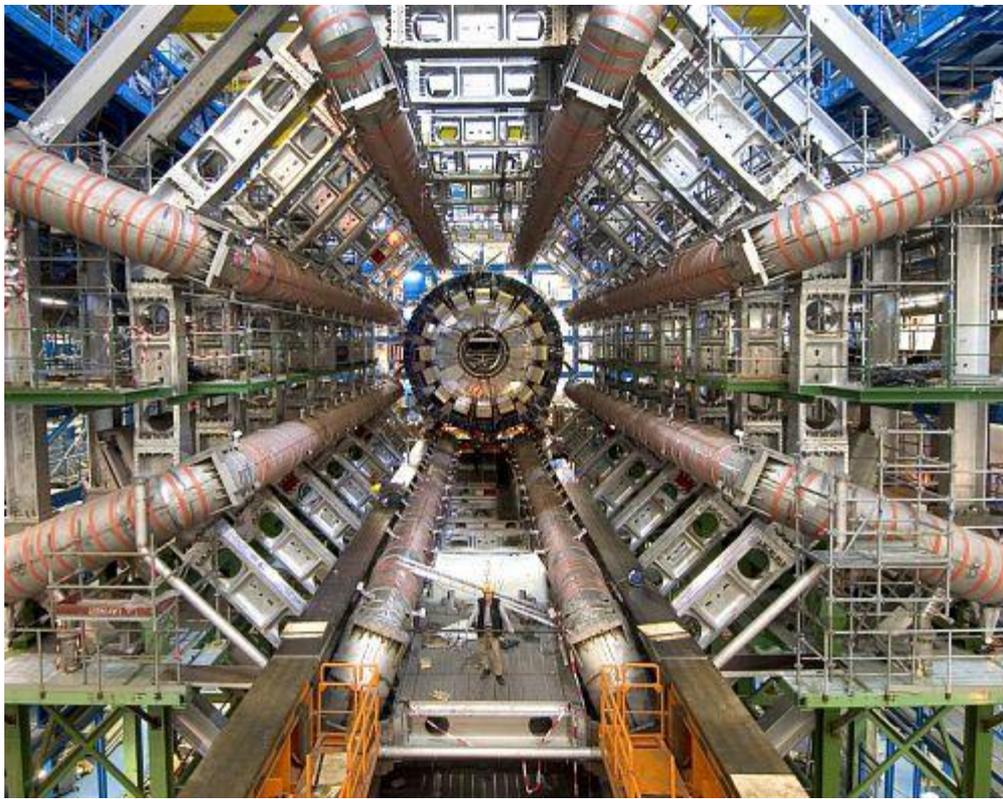
В лабораторной системе

$$in\nu_{до} = \left[ 2 \left( m_p^2 c^4 + p^2 c^2 \right)^{1/2} \right]^2$$

$$in\nu_{до} = in\nu_{после} = \left( 4m_p c^2 \right)^2$$

$$E = \left( m_p^2 c^4 + p^2 c^2 \right)^{1/2} = 2m_p c^2$$

$$K_{пор,вст} = E - m_p c^2 = m_p c^2 = K_{пор,л} / 6$$

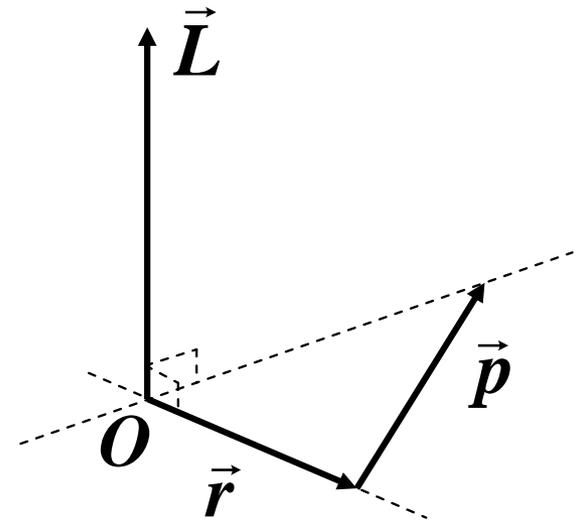


### 3. Момент импульса частицы и системы частиц относительно точки и оси. Момент силы.

Момент импульса материальной точки относительно точки  $O$

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$$

Момент импульса относительно оси есть проекция на эту ось его момента относительно точки, лежащей на той же оси.





Моментом импульса системы материальных точек называется векторная сумма моментов импульсов всех материальных точек

$$\vec{L}_{\Sigma} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i [\vec{r}_i, \vec{p}_i]$$

Момент импульса системы материальных точек

$$\vec{L}_{\Sigma} = \vec{L}_{отн,С} + [\vec{R}_C, \vec{p}_{\Sigma}]$$

$\vec{L}_{отн,С}$  - момент импульса относительно центра масс,

$\vec{R}_C$  - радиус вектор центра масс,

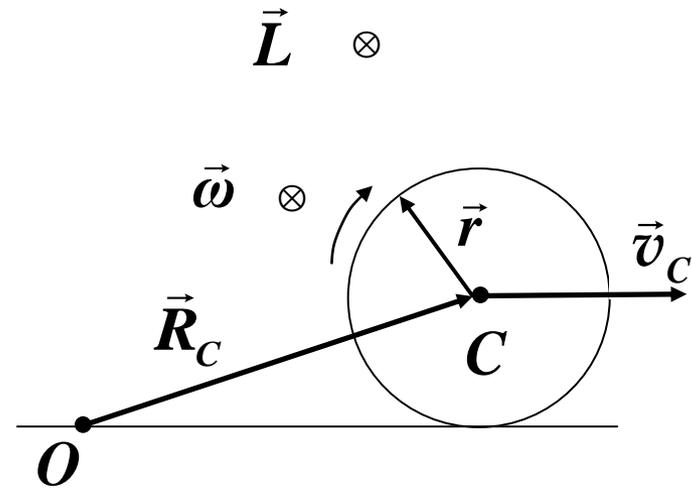
$\vec{p}_{\Sigma}$  - суммарный импульс системы

# Пример: момент импульса обруча

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{отн, C} + [\vec{R}_C, m\vec{v}_C]$$

$$|\vec{L}_{отн, C}| = m v_{вращ} r = m \omega^2 r$$

$$|[\vec{R}_C, m\vec{v}_C]| = m r v_C$$



При качении без  
проскальзывания

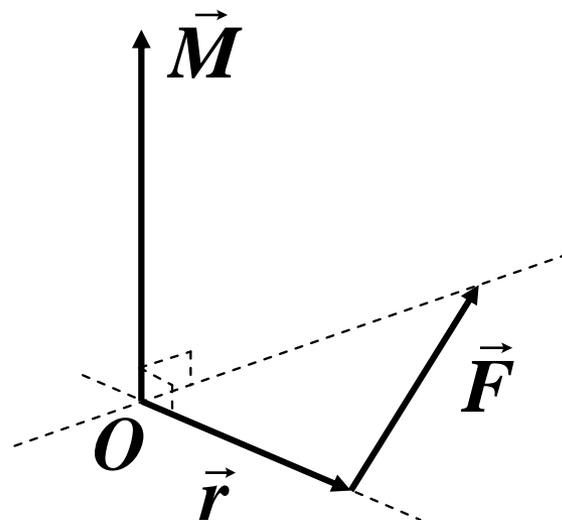
$$v_C = \omega r$$

$$|\vec{L}| = 2m r v_C = 2m \omega^2 r$$



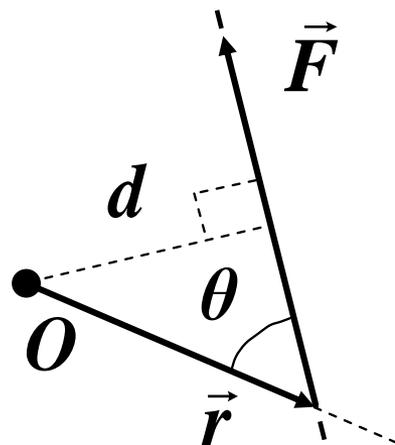
# Момент силы $\vec{F}$ относительно точки $O$

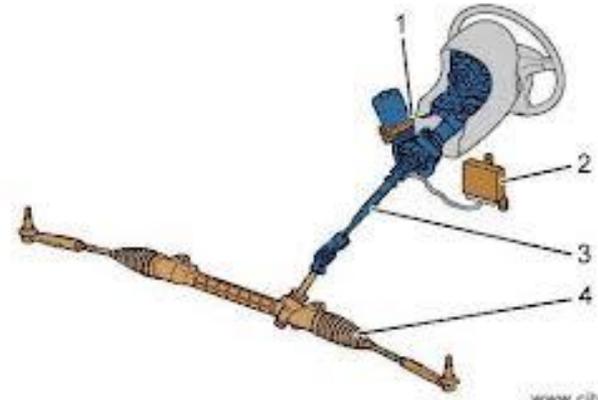
$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$$



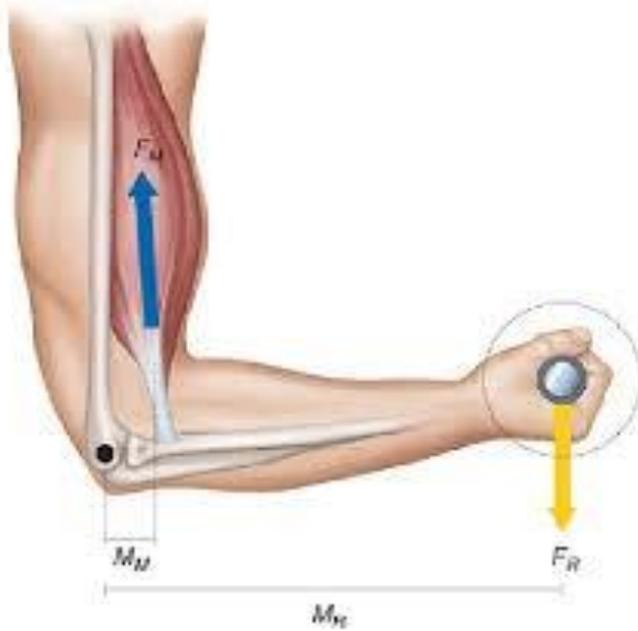
Плечо силы

$$d = r \cdot \sin \theta$$





[www.citroen-sto.ru](http://www.citroen-sto.ru)



## 4. Уравнение моментов.

Уравнение моментов относительно неподвижного начала для материальной точки

$$\dot{\vec{L}} = \left[ \dot{\vec{r}}, \vec{p} \right] + \left[ \vec{r}, \dot{\vec{p}} \right] = \left[ \vec{r}, \vec{F} \right] = \vec{M}$$

Уравнение моментов относительно неподвижного начала

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M}_{\text{ВНЕШ}} -$$

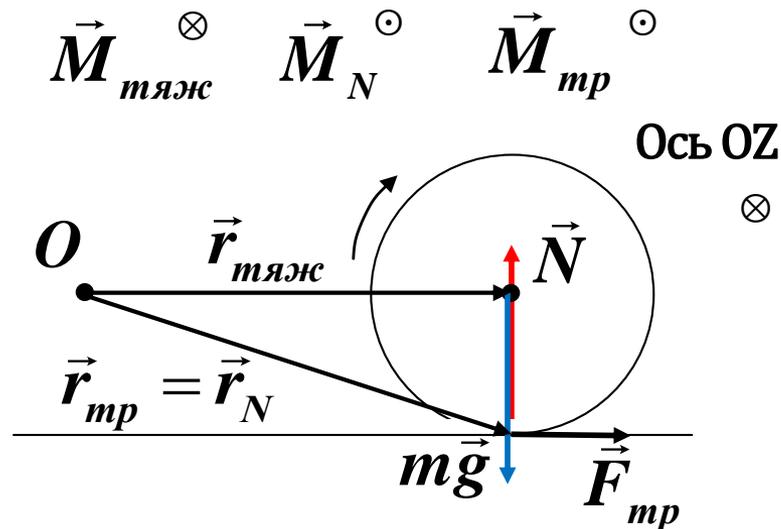
производная по времени от момента импульса системы материальных точек относительно произвольного начала равна геометрической сумме моментов всех внешних сил относительно того же начала.

# Пример: уравнение моментов для обруча

$$|\vec{M}_{\text{тяж}}| = |\vec{M}_N| = mgr_{\text{тяж}} = Nr_{\text{тяж}}$$

$$\vec{M}_{\text{тяж}} = -\vec{M}_N$$

$$|\vec{M}_{\text{тр}}| = F_{\text{тр}}r$$



$$\dot{\vec{L}} = \vec{M}_{\text{тяж}} + \vec{M}_N + \vec{M}_{\text{тр}} = \vec{M}_{\text{тр}}$$

$$\frac{dL_z}{dt} = -M_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}}r < 0$$

## 5. Закон сохранения момента импульса.

Если момент внешних сил относительно неподвижного начала равен нулю, то момент импульса системы относительно того же начала остается постоянным во времени.

Если момент импульса внешних сил относительно какой либо неподвижной оси равен нулю, то момент импульса относительно той же оси остаётся постоянным.

Условия равновесия твёрдого тела:

Тело будет оставаться в покое\*, если:

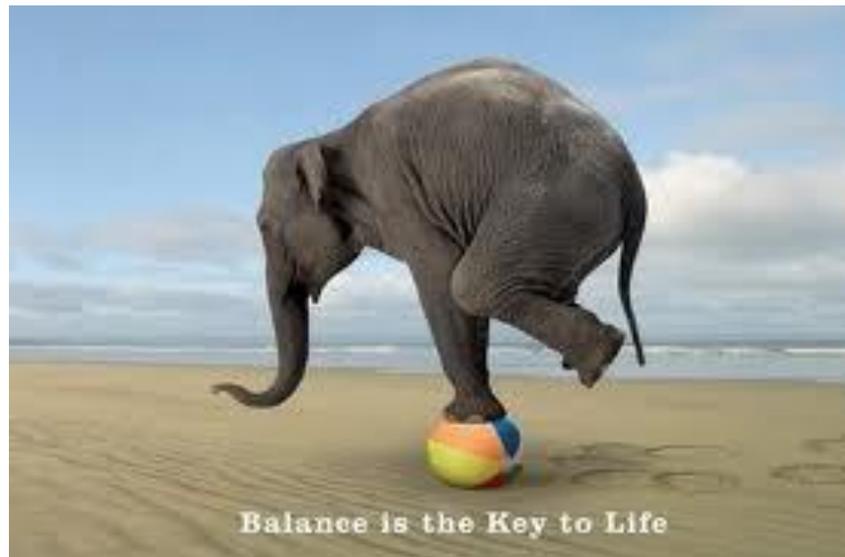
1. Равнодействующая всех сил, приложенных к телу, равна нулю:

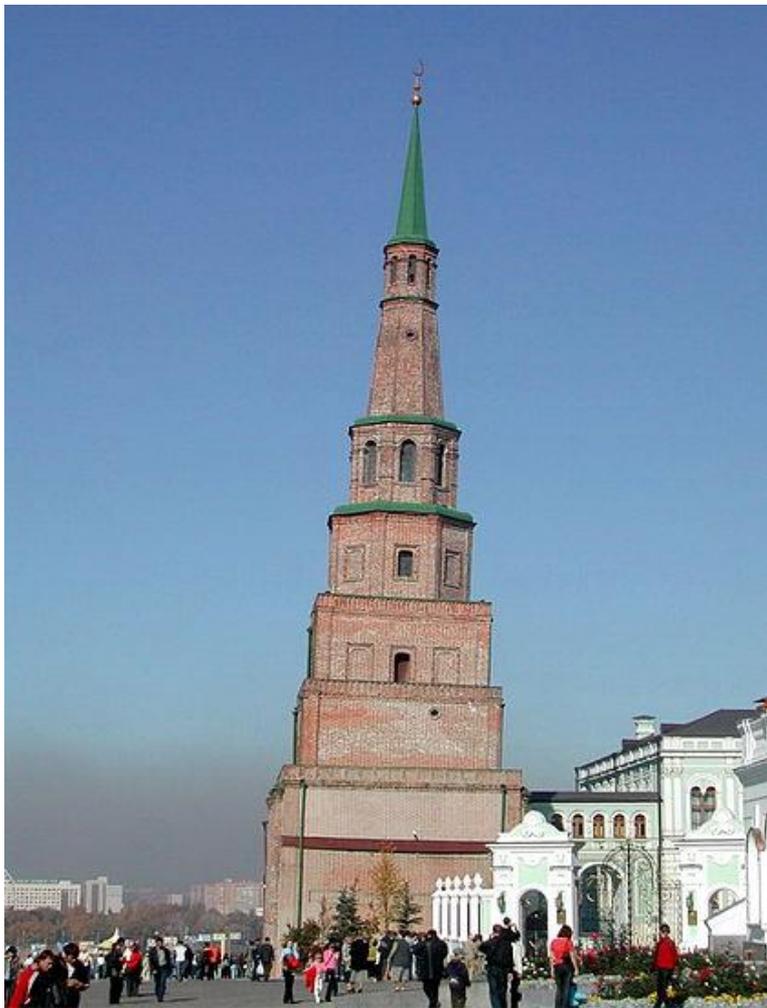
$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = 0$$

2. Суммарный момент сил относительно любой точки равен нулю:

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = 0$$

\*Примечания: а) центр масс может двигаться прямолинейно и равномерно; б) тело может равномерно вращаться.





## Башня Сююмбике (Казань).

Наклон в северо-восточную сторону шпилья от вертикали составляет 1,98 м.

## 6. Движение в поле центральных сил.

Сила, действующая на материальную точку, называется центральной, если она зависит только от расстояния до силового центра и направлена вдоль прямой, соединяющей точку и силовой центр.

Примеры: сила гравитационного притяжения двух точечных тел, сила кулоновского взаимодействия между двумя покоящимися точечными зарядами в вакууме.

Момент центральной силы относительно силового центра равен нулю (равно нулю плечо этой силы).

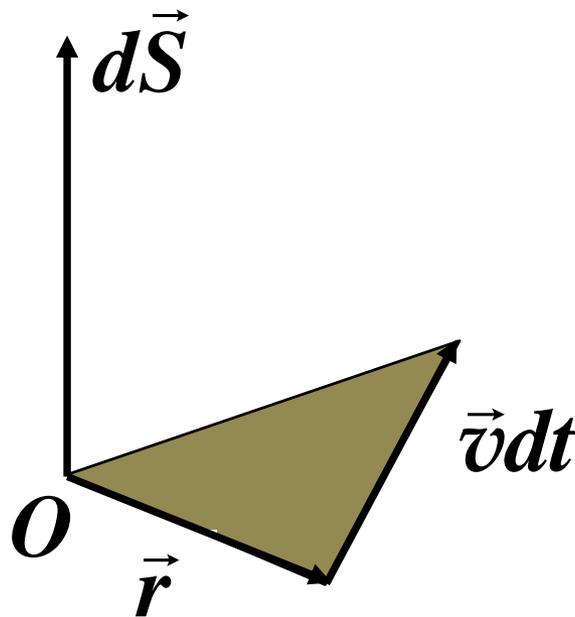
# Секториальная скорость и момент импульса

$$d\vec{S} = \frac{1}{2}[\vec{r}, \vec{v}dt]$$

$$\dot{\vec{S}} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2}[\vec{r}, \vec{v}]$$

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, \vec{v}]$$

$$\vec{L} = 2m\dot{\vec{S}}$$



$$\vec{L} = 2m\dot{\vec{S}}$$

В поле центральных сил момент сил относительно центра равен нулю ( $\vec{M} = 0$ ).  
Следовательно,

$$\vec{L} = \text{const}, \quad \dot{\vec{S}} = \text{const}$$

Следствия:

а) траектория материальной точки в поле центральных сил есть *плоская кривая*.

б) за равные промежутки времени радиус-вектор  $\vec{r}$  «заметает» (описывает) равные площади (закон площадей).

# 7. Уравнение момента импульса для вращения вокруг неподвижной оси. Момент инерции.

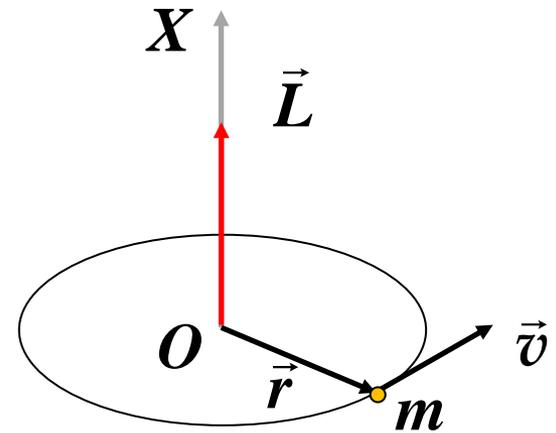
Ось  $OX$  – ось вращения. Для материальной точки

$$L_x = mvr = mr^2\omega$$

Для системы материальных точек

$$L_x = \sum_i m_i r_i^2 \omega = I\omega$$

$I = \sum_i m_i r_i^2$  - момент инерции системы материальных точек относительно оси вращения



Если  $M_x$  - момент внешних сил относительно оси вращения, то уравнение моментов относительно оси вращения имеет вид

$$\frac{d(I\omega)}{dt} = M_x$$

Если момент внешних сил относительно оси вращения равен нулю, то момент импульса относительно оси сохраняется.



# 8. Работа и кинетическая энергия при вращательном движении. Аналогии между поступательным и вращательным движениями.

Элементарная работа

$$dA = Fds = Frd\varphi = Md\varphi$$

Кинетическая энергия

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\omega r_i)^2 = \\ &= \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i r_i^2 = \frac{I\omega^2}{2} \end{aligned}$$

Аналогии (поступательное и вращательное движения).

Поступательное  
движение

$\vec{v}$  – линейная скорость  
 $\vec{a} = d\vec{v} / dt$  – линейное  
ускорение

$m$  – масса

$\vec{p} = m\vec{v}$  – импульс

$\vec{F}$  – сила

$$d\vec{p} / dt = m\vec{a} = \vec{F}$$

$$K = mv^2 / 2$$

$$dA = F \cdot ds$$

Вращательное  
движение

$\vec{\omega}$  – угловая скорость  
 $\vec{\varepsilon} = d\vec{\omega} / dt$  – угловое  
ускорение

$I$  – момент инерции

$\vec{L} = I\vec{\omega}$  – момент импульса

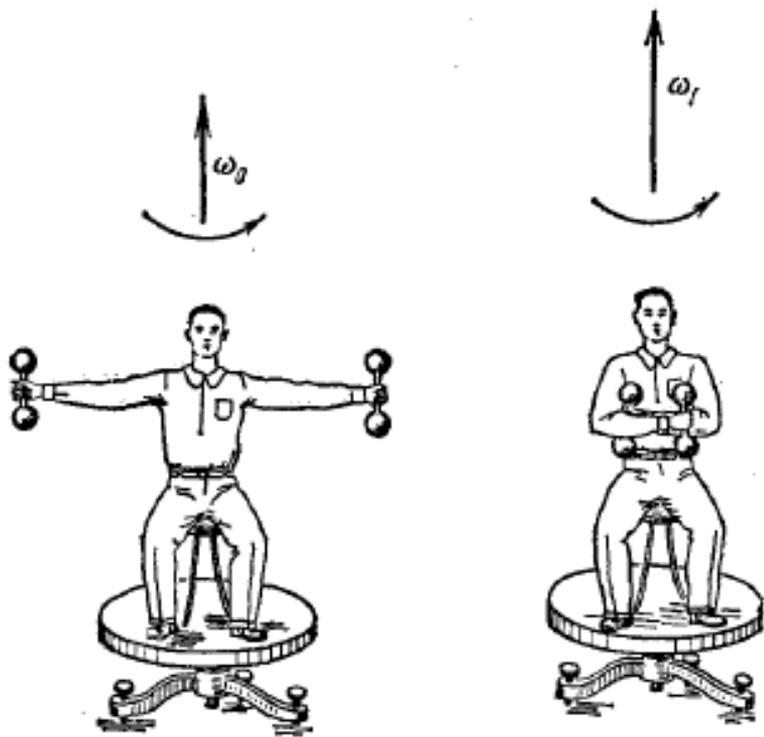
$\vec{M}$  – момент силы

$$dL_x / dt = I\varepsilon_x = M_x$$

$$K = I\omega_x^2 / 2$$

$$dA = M \cdot d\varphi$$

# 9. Скамья Жуковского



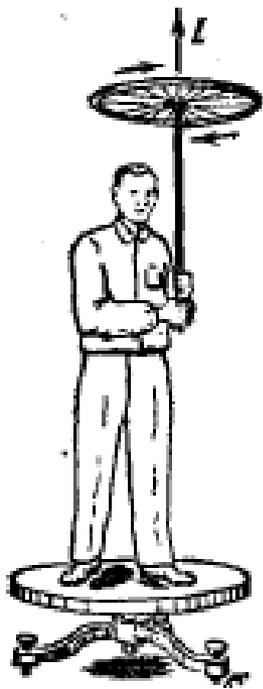
$$L_0 = I_0 \omega_0 = L_1 = I_1 \omega_1$$

$$I_0 > I_1$$

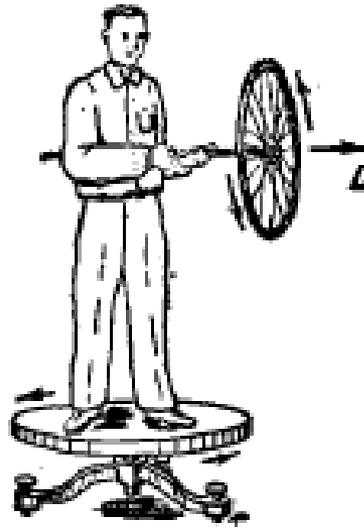
$$\omega_1 > \omega_0$$

Балерина, фигурист,  
гимнаст на перекладине,  
прыгун в воду.

$$A = K_1 - K_0 = \frac{L_1^2}{2I_1} - \frac{L_0^2}{2I_0}$$



a)



b)



c)

$$L_{z,0} = I_K \Omega, \quad L_z = I_{CK} \omega + I_K \Omega \cdot \cos \alpha,$$

$$M_z = 0 \Rightarrow L_{z,0} = I_K \Omega = L_z = I_{CK} \omega + I_K \Omega \cdot \cos \alpha,$$

$$\omega = \frac{I_K \Omega (1 - \cos \alpha)}{I_{CK}}$$