# Концепции и модели физики

Кузьмичев Сергей Дмитриевич

МФТИ
Московский Физико-Технический Институт

# СОДЕРЖАНИЕ ЛЕКЦИИ №12

## Волны.

1. Гармоническая волна, её характеристики. Волновое уравнение. Стоячая волна.
2. Продольные упругие волны в твердом теле.
3. Упругие волны в жидкостях и газах.
4. Поперечные волны в струне.
5. Плотность и поток энергии в упругой волне. Интенсивность звука. Связь интенсивности звука с амплитудой давления.

# 1. Гармоническая волна, её характеристики. Волновое уравнение. Стоячая волна.

В физике **волной** называют всякое <u>изменяющееся во времени пространственное</u> чередование максимумов и минимумов **любой физической величины**, например, плотности вещества, давления, температуры, напряженности электрического поля и т.д.

Примеры: звуковые (упругие) волны, волны на воде, сейсмические, электромагнитные волны.

$S(z,t)$ - одномерное волновое **возмущение**, сохраняя пространственную форму, перемещается вдоль оси $z$ .

$$\Delta z = v \cdot \Delta t, \qquad v > 0$$

$$S(z,t) = S(z + \Delta z, t + \Delta t)$$

$$S(z,t) = S(z - vt), \qquad \xi = z - vt$$

Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0$$

$S_{\pm}(z,t) = S(z \mp vt)$ - волны, бегущие в положительном $S_{+}(z,t)$ и отрицательном $S_{-}(z,t)$ направлениях оси $z$ .

Плоская монохроматическая волна

$$S(z,t) = a \cdot \cos(\omega t - kz)$$

Волновое число $$k = \frac{\omega}{v}$$

Фаза волны $$\Phi = \omega t - kz$$

Поверхность, на которой колебания величины происходят $S$ синфазно, т.е.

$$\Phi = const$$

для всех точек данной поверхности, называется **волновой поверхностью (волновым фронтом)**.

Плоская волновая поверхность

$$\Phi = \omega t - kz = const$$

Скорость, с которой перемещается волновая поверхность, называется **фазовой скоростью**

$$\Phi = \omega t - kz = const$$

$$\frac{dz}{dt} = V_{\Phi} = \frac{\omega}{k}$$

Расстояние между волновыми поверхностями, колебания на которых происходят с разностью фаз $\Delta\Phi = 2\pi$ называется **длиной волны**

$$\Delta z = \frac{2\pi}{k}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega} v = vT$$

$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ - период колебаний

**Стоячая волна.**

$$S_1(z,t) = a \cdot cos(\omega t - kz)$$

$$S_2(z,t) = a \cdot cos(\omega t + kz)$$

$$S = S_1 + S_2 = 2a \cdot cos(kz) \cdot cos(\omega t)$$

**Узлы** стоячей волны (точки нулевой амплитуды)

$$z_n = \frac{\lambda}{4} \cdot (2n+1), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...; \; |z_{n+1} - z_n| = \frac{\lambda}{2}$$

**Сферическая волна**

$$S(r,t) = \frac{a}{r} \cdot cos(\omega t - kr)$$

Волновая поверхность – сфера.

# <u>Продольные и поперечные звуковые волны</u>

*Продольная волна:* частицы среды совершают колебания вдоль направления распространения волны. Возникают при деформациях растяжения или сжатия. Возможны в твердых, жидких и газообразных средах.

*Поперечная волна:* частицы среды совершают колебания перпендикулярно направлению распространения волны. Возникают при деформациях сдвига. Возможны только в твердых средах.

# 2. Продольные упругие волны в твердом теле.

$z$ - координата сечения стержня

$\xi$ - смещение сечения, $\xi(z,t)$

Относительная продольная деформация

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial z}$$

Закон Гука

$$\sigma = E\varepsilon$$

$\sigma$ - напряжение

$E$ - модуль Юнга

Масса и ускорение участка стержня

$$m = \rho_0 S \Delta z, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = a$$

Второй закон Ньютона для участка стержня

$$\rho_0 S \Delta z \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = S \cdot \sigma(z + dz) - S \cdot \sigma(z)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial z} = E \frac{\partial \varepsilon}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}$$

Волновое уравнение для $\xi$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{\left(E / \rho_0\right)} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Смещение $\xi\left(z,t\right)$ распространяется по стержню в виде волн вида

$$\xi = \xi\left(z \pm v t\right)$$

со скоростью (скорость звука в стержне)

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$$

# Скорость звука в стали

$$E = 21{,}2 \cdot 10^{10}\ Н/м^2, \quad \mu = 0{,}29, \quad \rho = 7{,}8 \cdot 10^3\ кг/м^3$$

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 5{,}2 \cdot 10^3\ м/с$$ - в тонком стержне

Скорость звука в толстом стальном стержне (возмущение только продольное)

$$v_{\parallel} = \sqrt{\frac{E'}{\rho}}, \quad E' = \frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}E$$

$$v_{\parallel} = \sqrt{\frac{E'}{\rho}} = 6{,}0 \cdot 10^3\ м/с$$

# 3. Упругие волны в жидкостях и газах.

$P_0$ - давление в газе, находящемся в равновесном невозмущенном состоянии

$$P(z) = P_0 + \Delta P(z),$$

$$P(z+\Delta z) = P_0 + \Delta P(z+\Delta z), \quad \Delta P \ll P_0$$

Второй закон Ньютона для порции газа

$$\rho S \Delta z \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = S \cdot \left( \Delta P(z) - \Delta P(z+dz) \right)$$

$\xi(z,t)$ - смещение центра масс порции газа

$P = P(\rho, T)$ - давление в газе зависит от плотности газа и его температуры.

В силу малой теплопроводности газов и жидкостей процесс сжатия и разряжения происходит адиабатически, т.е. без теплообмена с соседними участками.

$$\Delta P = \left(\frac{dP}{d\rho}\right)_{адиаб} \Delta\rho$$

Масса рассматриваемой порции газа не изменяется

$$m = \rho V = (\rho + \Delta\rho)(V + \Delta V)$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon \approx -\frac{\Delta\rho}{\rho}$$

$$\Delta P = -\rho \left( \frac{dP}{d\rho} \right)_{адиаб} \varepsilon$$

Роль модуля Юнга играет величина

$$\rho \left( \frac{dP}{d\rho} \right)_{адиаб}$$

Волновое уравнение для звуковых волн

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{\left( \partial P / \partial \rho \right)_{адиаб}} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Скорость звука

$$v_{зв} = \sqrt{\left(\frac{dP}{d\rho}\right)_{адиаб}}$$

Для идеального газа

$$P = \frac{\rho RT}{M}, \quad v_{зв} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}}$$

$\gamma = \dfrac{C_P}{C_V}$ - показатель адиабаты

Для воздуха $\gamma = 1,4$

Скорость звука в воде (при $20^0 C$ )

$$\text{æ} = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right) = 46{,}8 \cdot 10^{-6}\ атм^{-1}$$

$$v_{зв} = \frac{1}{\sqrt{\rho \text{æ}}} \approx 1462\ м/с$$

Скорость звука в водороде и в воздухе при нормальных условиях

$$v_{водород} = 1286\ м/с, \quad v_{воздух} = 331\ м/с$$

# 4. Поперечные волны в струне.

Натяжение постоянно в любом сечении

$$\sigma(z)=\sigma(z+dz)=\sigma=const$$

Уравнение движения для отрезка струны (из второго закона Ньютона)

$$\rho_0 S\Delta z\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=S\cdot\sigma\cdot\left(\sin\alpha(z+dz)-\sin\alpha(z)\right)$$

$$tg\alpha=\frac{\partial\eta}{\partial z}$$

Для малых отклонений

$$\sin\alpha \approx tg\alpha \approx \frac{\partial\eta}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2} = \frac{\rho}{\sigma} \cdot \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}$$

Скорость распространения упругих волн в струне

$$v = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} = \sqrt{\frac{T}{\rho_l}}$$

$T = \sigma S$ - сила натяжения струны

$\rho_l = \rho S$ - погонная плотность

# 5. Плотность и поток энергии в упругой волне.

В волнах в направлении их распространения не происходит переноса вещества.

$u$ - скорость участка стержня

$$w_K = \frac{\rho u^2}{2}$$ - объёмная плотность кинетической энергии

$$w_П = \frac{E\varepsilon^2}{2}$$ - объёмная плотность потенциальной энергии

Для гармонической волны

$$\xi = \xi(z,t) = a \cdot cos(\omega t - kz),$$

$$u(z,t) = \frac{\partial \xi}{\partial t} = -a\omega \cdot sin(\omega t - kz),$$

$$\varepsilon(z,t) = \frac{\partial \xi}{\partial z} = ak \cdot sin(\omega t - kz)$$

Общая плотность энергии

$$w = w_К + w_П = \frac{\rho u^2}{2} + \frac{E\varepsilon^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\rho\omega^2 + Ek^2\right)a^2 \cdot sin^2(\omega t - kz) =$$

$$= \rho\omega^2 a^2 \cdot sin^2(\omega t - kz), \qquad \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{E}{\rho}$$

Средняя за период плотность энергии

$$\langle w\rangle = \frac{1}{2}\rho a^2\omega^2$$

Интенсивность или сила звука - средняя величина потока энергии, переносимого звуковой волной в единицу времени через единичную площадку (в направлении нормали):

<u>в твердых телах</u>

$$I = \langle \sigma u\rangle = \frac{1}{2}a^2\omega^2\sqrt{\rho E} = \frac{1}{2}a^2\omega^2\rho v$$

в жидкостях и газах

$$I = \langle \Delta P \cdot u \rangle = \frac{1}{2} a^2 \omega^2 \sqrt{\left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)} = \frac{1}{2} a^2 \omega^2 \rho v$$

Амплитуда акустического давления

$$\Delta P_0 = \sqrt{2 \rho v I}$$

Порог слышимости $I_0 = 10^{-12}\ Вт / м^2$

«Болевой порог» $10^{12} I_0 = 1\ Вт / м^2$

Амплитуда акустического давления при «болевом пороге» $\Delta P_0 = 30\ Па$

Интенсивность звука в децибеллах

$$\beta = 10 \lg \left( I / I_0 \right)$$

В воде при интенсивности звука

$$I = 10^5 \ Вт / м^2$$

амплитуда акустического давления составляет

$$\Delta P_0 \simeq 6 \ атм$$

***Кавитация.*** Большие градиенты акустического давления, возникающие при распространении ультразвуковых волн могут приводить к разрывам жидкости (образование пустот).

При частоте ультразвука $10^6 \ Гц$ градиент акустического давления составляет

$$2{,}4 \cdot 10^4 \ атм / м$$