Концепции и модели физики

Кузьмичев Сергей Дмитриевич

МФТИ
Московский Физико-Технический Институт

СОДЕРЖАНИЕ ЛЕКЦИИ №11

Механические колебания.

1. Гармонический осциллятор: математический, пружинный, крутильный маятник, физический маятник. Превращения энергия при гармонических колебаниях.
2. Затухающие колебания. Декремент затухания, добротность.
3. Фазовая плоскость. Фазовая траектория маятника без затухания и с затуханием.
4. Вынужденные колебания. Резонанс.
5. Параметрический резонанс. Автоколебания.

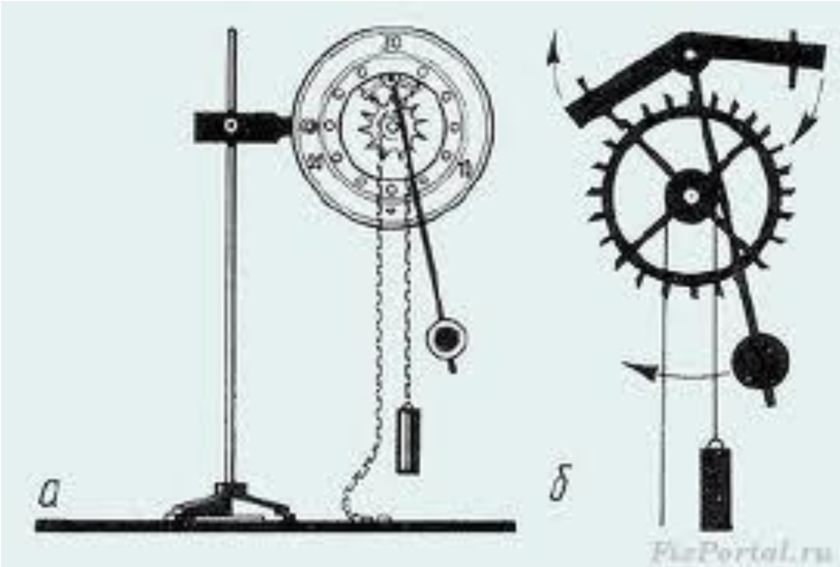
1. Гармонический осциллятор.

Механические колебания – периодические или почти периодические изменения физической величины f, описывающей механическое движение (координата, угол, скорость, ускорение, кинетическая и потенциальная энергии).

$f(t+T)=f(t)$ для любого момента времени t

T - период колебаний (минимальная положительная величина).

Примеры: груз на нити, груз на пружине, маятник механических часов, струна музыкального инструмента.


а
б
FizPortal.ru

Частотой ν периодических колебаний называется число колебаний в единицу времени

$$\nu = \frac{1}{T}$$

Пусть периодически колеблющаяся физическая величина f изменяется в пределах от

$f_0 - A$ до $f_0 + A$, где $A > 0$.

Тогда говорят, что величина f колеблется с амплитудой A около значения f_0 .

Гармонические колебания – изменения во времени t физической величины f по закону

$$f(t) = A \cdot cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad A > 0, \ \omega_0 > 0$$

A - амплитуда колебаний,

$\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$ - фаза колебаний,

φ_0 - начальная фаза колебаний,

ω_0 - циклическая частота колебаний.

Частота колебаний ω_0 не зависит от способа возбуждения колебаний, определяется свойствами колебательной системы (**изохронность**).

$$\omega_0 = 2\pi / T = 2\pi\nu$$

Значения амплитуды A и начальной фазы φ_0 определяются **начальными условиями**, т.е. способом возбуждения колебаний.

Кинематика гармонических колебаний материальной точки вдоль прямой.

Смещение (отклонение) от положения равновесия

$$x(t) = A \cdot cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Проекция скорости

$$v_x(t) = \dot{x} = -A\omega_0 \cdot sin(\omega_0 t + \varphi_0) =$$
$$= v_0 \cdot cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi / 2)$$

$v_0 = A\omega_0$ - амплитудное значение скорости. Скорость опережает смещение по фазе на $\pi / 2$.

Проекция ускорения

$$a_x(t)=\dot{v}_x=\ddot{x}=-A\omega_0^2\cdot\cos(\omega_0 t+\varphi_0)=$$

$$=a_0\cdot\cos(\omega_0 t+\varphi_0+\pi)=-\omega_0^2 x(t)$$

$a_0=A\omega_0^2=v_0\omega_0$ - амплитудное значение ускорения. Ускорение опережает смещение по фазе на π (в противофазе).

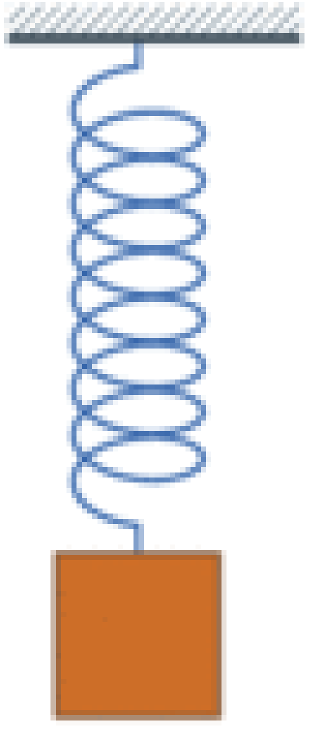
Свободными (или собственными) называются колебания, которые возникают в системе в результате *вывода её из положения равновесия, после чего система предоставляется самой себе.*

Незатухающие свободные колебания (колебания с постоянной амплитудой) возможны в системах, где нет потерь энергии.

Свободные колебания реальных систем – затухающие.

Гармонические колебания груза на пружине.

Постановка задачи: груз массой m висит в вертикальном положении на легкой пружине с жесткостью k. Груз смещают вниз на расстояние A_0 относительно положения равновесия и отпускают. Получить уравнение колебаний, найти период и частоту колебаний, найти решение уравнения колебаний с учетом начальных условий. Трением пренебречь.



$$l = l_0 + \Delta l_0$$

$$mg = k \cdot \left(l - l_0 \right) = k \cdot \Delta l_0 ,$$

$$l = l_0 + \Delta l_0 + x$$

$$ma_x = m\ddot{x} = -k \cdot \left(l - l_0 \right) + mg = -kx$$

Дифференциальное уравнение гармонических колебаний:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Общее решение $x\left(t\right) = A \cdot cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right)$

Решение с учетом начальных условий

$$x\left(t\right) = A_0 \cdot cos\left(\omega_0 t\right), \quad x\left(0\right) = A_0, \quad \dot{x}\left(0\right) = 0$$

$$v_x\left(t\right) = -A_0 \omega_0 \cdot sin\left(\omega_0 t\right)$$

Кинетическая и потенциальная энергии при гармонических колебаниях на примере горизонтальных колебаний груза на пружине.

Кинетическая энергия

$$K=\frac{m\dot{x}^2}{2}=\frac{1}{2}m\omega_0^2A_0^2\cdot sin^2\left(\omega_0 t\right)=\frac{1}{4}m\omega_0^2A_0^2\cdot\left(1-cos\left(2\omega_0 t\right)\right)$$

Потенциальная энергия

$$\Pi=\frac{kx^2}{2}=\frac{1}{2}kA_0^2\cdot cos^2\left(\omega_0 t\right)=\frac{1}{4}kA_0^2\left(1+cos\left(2\omega_0 t\right)\right)$$

Полная механическая энергия

$$E=K+\Pi=\frac{1}{2}kA_0^2=\frac{1}{2}m\omega_0^2A_0^2=const$$

Для гармонических колебаний

$$\left\langle K\right\rangle=\left\langle \Pi\right\rangle=\frac{1}{4}kA_0^2=\frac{1}{2}E$$

Общий подход к описанию гармонических колебаний механических систем с одной степенью свободы.

q - обобщенная координата (угол поворота, смещение).

$\dot{q}$ - обобщенная скорость (угловая скорость, скорость смещения).

Кинетическая и потенциальная энергии

$$K = \frac{1}{2}\mu\dot{q}^2, \qquad \Pi = \frac{1}{2}\kappa q^2$$

Уравнение гармонических колебаний для обобщенной координаты q можно получить из закона сохранения энергии . Частота колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\kappa / \mu}$$

Математический маятник – тело небольших размеров, подвешенное на легкой нерастяжимой нити длиной l в поле тяжести Земли.

$q = \theta$ - угол отклонения от вертикали

$\dot{q} = \dot{\theta}$ - мгновенная угловая скорость

Кинетическая и потенциальная энергии (для малых углов)

$$K = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2, \quad \Pi = mgl\left(1 - \cos\theta\right) \approx \frac{1}{2} mgl\theta^2$$

Энергия системы

$$E = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} mgl\theta^2 = const$$

Уравнение колебаний и период колебаний

$$\ddot{\theta} + \left(g / l\right)\theta = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{g / l}, \quad T = 2\pi\sqrt{l / g}$$

Ангармонический математический маятник.

Кинетическая и потенциальная энергии

$$K = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2, \qquad П = mgl\left(1 - \cos\theta\right)$$

Энергия системы

$$E = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl \cdot \left(1 - \cos\theta\right) = const$$

Уравнение колебаний

$$\ddot{\theta} + \left(g / l\right) \cdot \sin\theta = 0$$

Период колебаний зависит от амплитуды θ_{max} .

Приближенная формула для периода колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\theta_{max}^2}{16}\right)$$

Физический маятник – твердое тело, которое может качаться вокруг неподвижной горизонтальной оси.

$q = \theta$ - угол отклонения от вертикали

$\dot{q} = \dot{\theta}$ - мгновенная угловая скорость

Кинетическая энергия

$$K = \frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2, \qquad I_O = I_C + ma^2$$

I_O и I_C- моменты инерции маятника относительно оси вращения и параллельной ей оси, проходящей через центр масс, a - расстояние между центром масс и точкой подвеса.

Потенциальная энергии (для малых углов)

$$\Pi = mga\left(1 - \cos\theta\right) \approx \frac{1}{2} mga\theta^2$$

Энергия системы

$$E = \frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} mga\theta^2$$

Уравнение колебаний и период колебаний

$$\ddot{\theta} + \frac{mga}{I_O}\theta = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{I_O}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{mga}}$$

Приведенная длина физического маятника

$$l_{пр} = \frac{I_O}{ma}, \quad T_{мат} = 2\pi\sqrt{\frac{l_{пр}}{g}} = T_{физ} = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{mag}}$$

Центр качания – математическая точка, в которой надо сосредоточить всю массу физического маятника, чтобы период колебаний остался без изменения. Центр качания находится от точки подвеса на расстоянии

$$l_{пр} = \frac{I_O}{ma} = a + \frac{I_C}{ma}$$

Теорема Гюйгенса: если маятник подвесить за центр качания, то его период не изменится и прежняя точка подвеса станет новым центром качания.

Крутильный маятник (тело, подвешенное на проволоке, и способное совершать крутильные колебания вокруг вертикальной оси).

$q = \varphi$ - угол поворота тела, угол закручивания проволоки.

$\ddot{q} = \ddot{\varphi}$ - угловое ускорение.

$M = -f\varphi$ - момент сил, возникающий при закручивании проволоки, f - модуль кручения.

Уравнение колебаний и период колебаний

$$I\ddot{\varphi} = -f\varphi, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{f}}$$

I - момент инерции тела относительно вертикальной оси

2. Затухающие колебания. Декремент затухания, добротность.

«Тормозящая сила» - сила вязкого трения

$$F_{тр,x} = -\beta v_x = -\beta \dot{x}, \qquad \beta > 0$$

Уравнение движения (второй закон Ньютона) для груза на пружине, совершающего движение под действием силы упругости и силы вязкого трения

$$ma_x = m\ddot{x} = -kx - \beta \dot{x},$$

$$m\ddot{x} + \beta \dot{x} + kx = 0$$

Дифференциальное уравнение колебаний с затуханием

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\delta = \frac{\beta}{2m}$$ - коэффициент затухания

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$ - собственная частота осциллятора

Осциллятор с малым затуханием $\left(\delta \ll \omega_0\right)$.
Общее решение уравнения затухающих колебаний

$$x(t) = A_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot cos\left(\omega t + \varphi_0\right)$$

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ - «частота» затухающих колебаний

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\delta t}$$

- «амплитуда» затухающих колебаний

Для момента времени $t_n: \quad cos\left(\omega t_n + \varphi_0\right) = 1$

$$A\left(t_n\right) = A_0 \cdot e^{-\delta \cdot t_n}$$

Для момента времени

$$t_n + \tau: \quad cos\left(\omega t_n + \omega \tau + \varphi_0\right) = 1$$

$$A\left(t_n + \tau\right) = A_0 \cdot e^{-\delta \cdot \left(t_n + \tau\right)}$$

$$\frac{A\left(t_n+\tau\right)}{A\left(t_n\right)}=e^{-\delta\cdot\tau}$$

Амплитуда колебаний уменьшается в e раз через промежуток времени $\tau = 1/\delta$. Интервал времени τ - постоянная времени осциллятора.

Логарифмический декремент затухания

$$d = ln\left(\frac{A\left(t_n\right)}{A\left(t_n+T\right)}\right)=\delta\cdot T=\frac{T}{\tau}$$

Число колебаний, после которых амплитуда уменьшается в e раз

$$N=\frac{\tau}{T}=\frac{1}{d}$$

Для малого затухания $N \gg 1$

Энергетические превращения при затухающих колебаниях груза, колеблющегося на пружине. Полная энергия колебаний уменьшается за счет работы силы трения

$$m\ddot{x} + kx = -\beta\dot{x},$$

$$m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = -\beta\dot{x}^2,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}\right) = \frac{dE}{dt} = -\beta\dot{x}^2 < 0$$

Потеря энергии за период колебаний

$$\int_t^{t+T} dE = E(t+T) - E(t) = -\Delta E, \quad \Delta E > 0$$

Работа силы трения за период

$$A_{тр} = -\int_t^{t+T} \beta\dot{x}^2 dt$$

$$A_{тр} = -\int_{t}^{t+T} \beta \dot{x}^2 dt = -\frac{2\beta T}{m}\left(\frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} \frac{m\dot{x}^2}{2} dt\right)$$

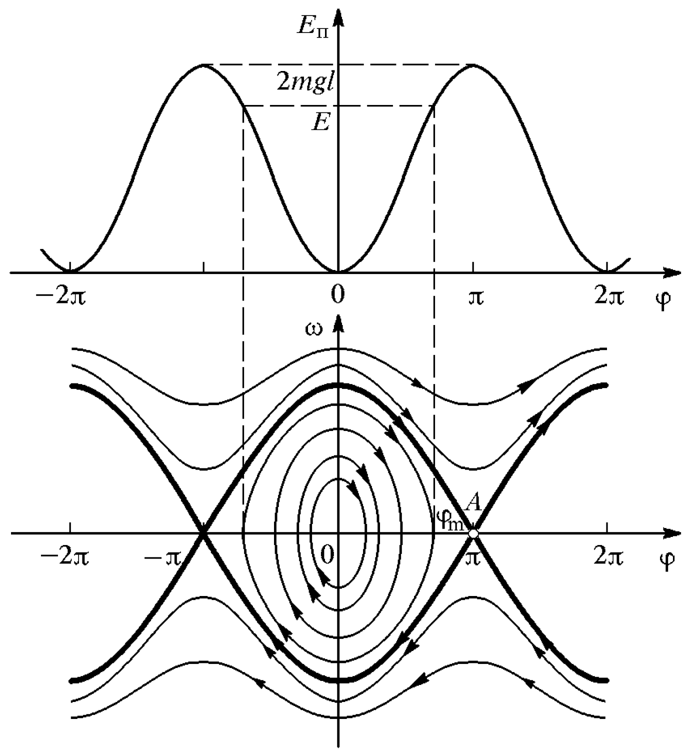
При малом затухании средняя за период кинетическая энергия равна средней за период потенциальной энергии, а полная энергия равна их сумме

$$\frac{E}{\Delta E} = \frac{m}{\beta T} = \frac{1}{2\delta T}$$

«Быстрота» затухания колебаний осциллятора характеризуется его добротностью Q

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E} = \frac{\pi}{d} = \frac{\pi}{\delta \cdot T} = \pi N$$

3. Фазовая плоскость. Фазовая траектория маятника без затухания и с затуханием.



Потенциальная энергия и фазовая плоскость для математического маятника

4. Вынужденные колебания гармонического осциллятора. Резонанс.

Вынужденные колебания – это колебания, происходящие под действием внешней силы.

$$F_{внеш,x} = F_0 \cdot cos(\omega t)$$

Уравнение колебаний (из второго закона Ньютона)

$$m\ddot{x} + \beta \dot{x} + kx = F_0 \cdot cos(\omega t)$$

<u>Вынужденные колебания происходят с частотой вынуждающей силы</u>. Их амплитуда и фаза зависят от частоты вынуждающей силы.

$$x(t) = A(\omega) \cdot cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} =$$

$$= \frac{F_0}{m\omega_0^2} \cdot \frac{Q}{\sqrt{Q^2(1 - \omega^2 / \omega_0^2)^2 + \omega^2 / \omega_0^2}}$$

$$\varphi(\omega) = arctg\left(\frac{2\delta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\right)$$

Резонанс – возрастание амплитуды колебаний при приближении частоты внешней силы к характерной частоте колебательной системы.

Амплитуда вынужденных колебаний максимальна на частоте

$$\omega_{max} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

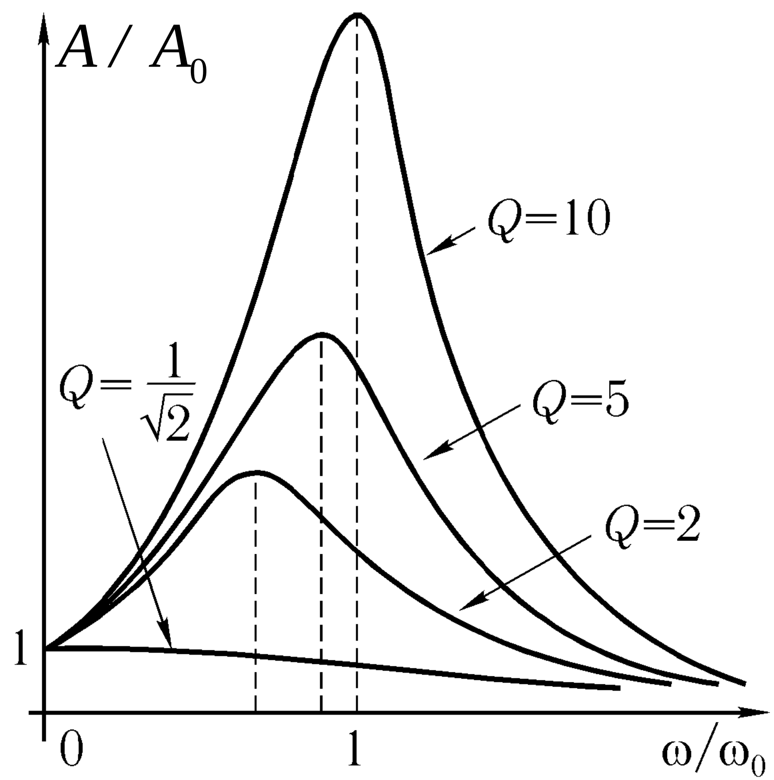
$$A_{max}\left(\omega_{max}\right) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \cdot \frac{Q}{\sqrt{1 - 1/\left(4Q^2\right)}} > A\left(\omega_0\right) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \cdot Q$$

Сравнение максимальной амплитуды колебаний с величиной смещения от положения равновесия в статике

$$A_{max}\left(\omega_{max}\right) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 1/\left(4Q^2\right)}} = A\left(\omega = 0\right) \cdot Q$$

«Острота» резонансной кривой определяется её шириной на уровне $1/\sqrt{2}$

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = 2\delta$$




ВОЛГОГРАД
20 МАЯ 2010 Г.
5
МОСТ-ФЕНОМЕН

5. Параметрический резонанс. Автоколебания.

Параметрический резонанс – возбуждение колебаний при периодическом изменении параметров колебательной системы в результате внешнего воздействия.

Пример: качели.

$$\boldsymbol{\Pi_1 = mgl\cdot\left(1 - \cos\varphi_1\right) \approx \frac{1}{2}mgl\varphi_1^2 = K_1 = \frac{mv_1^2}{2}}$$

$$\boldsymbol{A_{внеш} = mgh + \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}}$$

Сохранение момента импульса:

$$L_1 = mv_1 l = L_2 = mv_2 \left(l - h\right), \quad h \ll l$$

$$v_2 = \frac{v_1 l}{l - h} \approx v_1 \cdot \left(1 + \frac{h}{l}\right)$$

$$K = \frac{mv_2^2}{2} \approx \frac{mv_1^2}{2}\left(1 + 2\frac{h}{l}\right)$$

$$\Pi_2 = mg\left(l - h\right)\cdot\left(1 - \cos\varphi_2\right) \approx \frac{1}{2}mg\left(l - h\right)\varphi_2^2 = \frac{1}{2}mgl\left(1 - \frac{h}{l}\right)\varphi_2^2$$

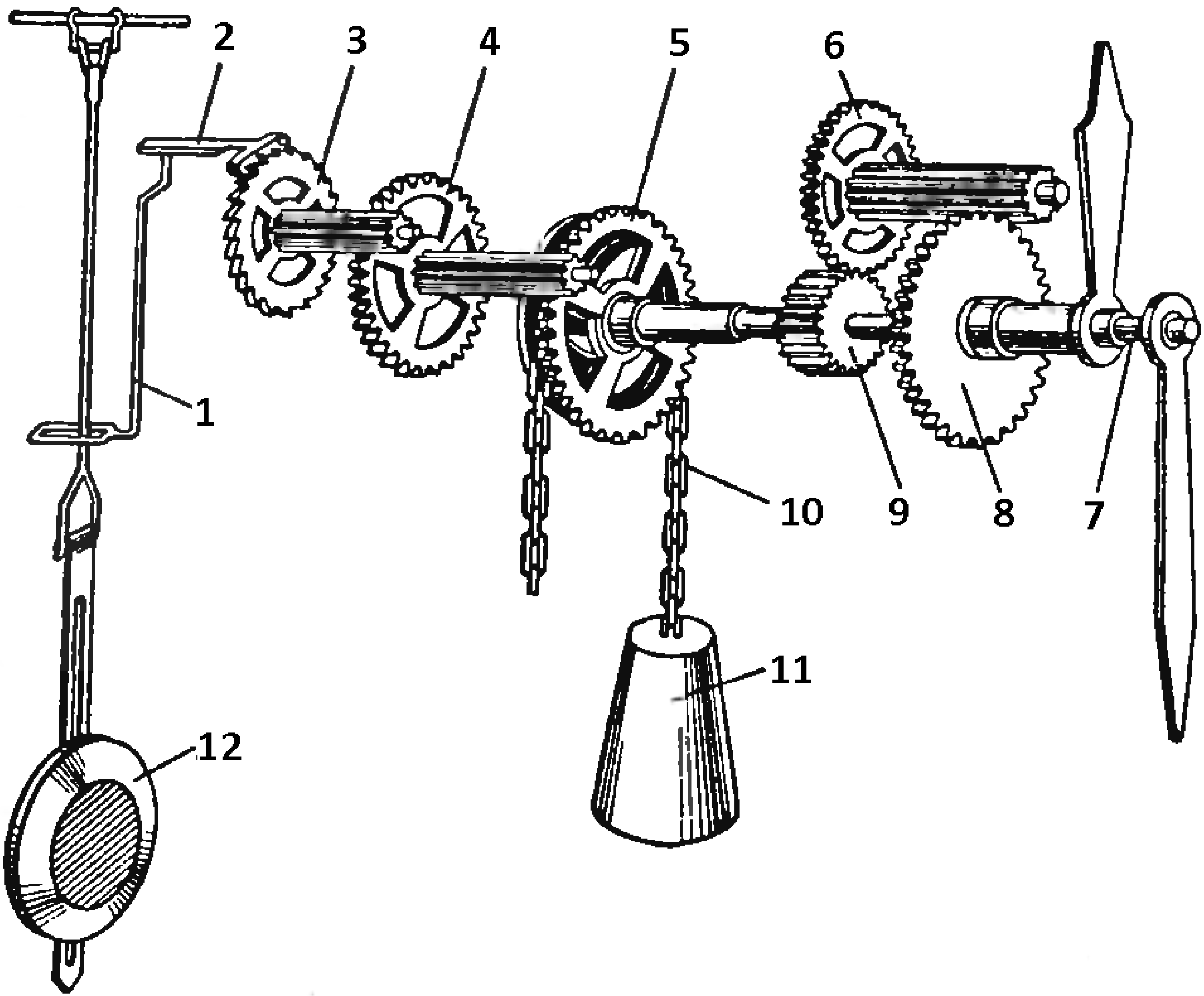
$$\Pi_2 = \frac{1}{2}mgl\left(1 - \frac{h}{l}\right)\varphi_2^2 = K = \frac{mgl}{2}\left(1 + 2\frac{h}{l}\right)\varphi_1^2$$

$\varphi_2 \approx \varphi_1\left(1 + \dfrac{3h}{2l}\right)$ - увеличение угловой амплитуды колебаний (раскачка колебаний)

Автоколебания возникают в системах, где имеется постоянный, не изменяющийся во времени, источник энергии и механизм, обеспечивающий **периодический характер поступления энергии** от источника к элементу, совершающему колебания.

Амплитуда автоколебаний в установившемся режиме не зависит от начальных условий.

Примеры: маятниковые часы с гирей («ходики»), электрический звонок, струна, крыло самолета, гейзер.


2
3
4
5
6
1
10
9
8
7
11
12