ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ КУРСА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ: МЕХАНИКА

Учебно-методическое пособие
по курсу *Общая физика*

МОСКВА
МФТИ
2011

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Кафедра общей физики

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ КУРСА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ: МЕХАНИКА

Учебно-методическое пособие
по курсу *Общая физика*

МОСКВА
МФТИ
2011

УДК 530.1

Р е ц е н з е н т
Кандидат физико-математических наук, доцент *Г. А. Никитаева*

Избранные задачи курса общей физики: механика: учебно-методическое пособие по курсу Общая физика. — М. : МФТИ, 2011. — 32 с.

Представлены общефизические задачи по механике различной сложности, отобранные для студентов МФТИ, изучающих физику в рамках направления «Прикладная математика и информатика».

Введение

Сборник содержит избранные задачи по курсу механики, предназначенные для студентов, изучающих общую физику в МФТИ по программам информационных направлений «Прикладная математика и информатика», «Компьютерная безопасность» и др. При выборе задач составители исходили из того, что, начиная изучать физику в четвёртом семестре, студенты имеют достаточно хорошую математическую подготовку. Ставилась задача показать, как применение различных математических методов к простым физическим моделям позволяет наглядно описать явления окружающего мира.

Задачи по каждой теме разбиты на 4 группы. В нулевой группе представлены наиболее простые задачи, которые решаются «в одну строчку» и используются студентами для подготовки к семинару на соответствующую тему. В I-ю группу вошли задачи, предназначенные для разбора преподавателями на семинарах. Задачи II-й и III-й групп предназначены для самостоятельной домашней работы студентов после семинара, причём в III-й группе собраны задачи повышенной сложности. Бóльшая часть задач взята из «Сборника задач по общему курсу физики» под ред. В. А. Овчинкина (соответствующие номера отмечены в скобках), при этом условия некоторых задач были изменены в целях упрощения.

В работе над сборником приняли участие преподаватели кафедры общей физики МФТИ А. Д. Гладун, М. Г. Гладуш, А. В. Гуденко, Ю. Н. Извекова, С. Д. Кузьмичев, А. В. Максимычев, П. В. Попов, Ю. Н. Филатов.

Составители

1. Кинематика материальной точки

0

Рис. 1

1.1. (1.2) Начертить графики зависимости пути и ускорения некоторого тела от времени, если скорость этого тела как функция времени представлена графиком на рис. 1.

1.2. Камень бросают горизонтально с вершины горы с уклоном 45° с начальной скоростью $v = 10$ м/с. Какое расстояние вдоль склона пролетит камень до падения и какая у него будет скорость в момент падения? (Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.)

1.3. (1.10) Как показали радиолокационные измерения, Венера вращается вокруг своей оси в направлении, обратном её орбитальному движению. Период осевого вращения Венеры (относительно звёзд) $T_1 = 243$ земных суток. Венера обращается вокруг Солнца с периодом $T_2 = 225$ земных суток. Определить продолжительность солнечных суток на Венере.

I

1.4. Материальная точка начинает двигаться по круговой траектории так, что её радиус-вектор вращается с угловым ускорением ε. Найти зависимость угла между вектором скорости и вектором ускорения этой точки от времени.

1.5. (1.11) Определить скорость, с которой движется тень Луны по земной поверхности во время полного солнечного затмения, если оно наблюдается на экваторе. Для простоты считать, что Солнце, Земля и Луна находятся в одной плоскости, а земная ось к этой плоскости перпендикулярна. Скорость света считать бесконечно большой по сравнению с остальными скоростями. Радиус лунной орбиты $R_{\text{Л}} = 3{,}8 \cdot 10^5$ км.

1.6. (1.13) Колесо радиуса R катится без скольжения по горизонтальной дороге со скоростью v_0. Найти вектор скорости произвольной точки на ободе колеса (проекции v_x, v_y, модуль v и угол α относительно горизонтального направления). Построить график распределения скоростей всех точек на вертикальном диаметре (в фиксированный момент времени) катящегося без скольжения колеса.

1.7. Самолёт детектируется при помощи радара. При определении его координат известны расстояние r от радара до самолёта и угол поворота φ радара относительно некоторого начального положения. Пусть расстояние и угол растут линейно со временем: $r = v_0 t$, $\varphi = \omega_0 t$, где v_0

и ω_0 — некоторые константы. Найти в произвольный момент времени $t > 0$ положение самолёта в декартовых координатах, его скорость, ускорение и радиус кривизны траектории. Высоту самолёта над землёй считать пренебрежимо малой, а траекторию самолёта — плоской.

II

1.8. (1.20) Колесо радиуса R движется горизонтально со скоростью v_0 и вращается с угловой скоростью ω. Найти радиус кривизны траектории ρ, которую описывает некоторая точка на ободе в момент, когда точка находится на уровне центра колеса (см. рис. 2).

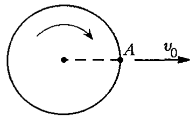

Рис. 2

1.9. (1.4) Миномётная батарея расположена у подножья горы с наклоном к горизонту 45°. Под каким углом α к горизонту надо установить ствол орудия, чтобы мина достигла склона на максимальной высоте? Сопротивление воздуха не учитывать.

III

1.10. В сферической лунке прыгает шарик, упруго ударяясь о её стенки в двух точка, расположенных на одной горизонтали. Промежуток времени между ударами при движении шарика слева направо всегда равен T_1, а при движении справа налево T_2, $T_2 \neq T_1$. Определить радиус лунки.

1.11. Утка летела по горизонтальной прямой с постоянной скоростью u. В неё бросил камень неопытный «охотник», причём бросок был сделан без упреждения, т. е. в момент броска скорость камня v была направлена точно на утку под углом α к горизонту (см. рис. 3). На какой высоте летела утка, если камень всё же попал в неё?

2. Динамика материальной точки

0

2.1. (2.5) На верхнем краю идеально гладкой наклонной плоскости укреплён блок, через который перекинута нить (рис. 4). На одном её конце привязан груз массы m_1, лежащий на наклонной плоскости. На другом конце висит груз массы m_2. С каким ускорением a движутся грузы и каково натяжение T нити? Наклонная плоскость образует с горизонтом угол α.

2.2. (2.44) Каков должен быть минимальный коэффициент трения скольжения k между шинами автомобиля и асфальтом, чтобы автомо-

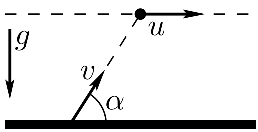

Рис. 3

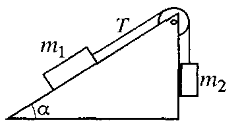

Рис. 4

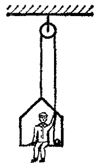

Рис. 5

биль мог пройти закругление с радиусом $R = 200$ м на скорости $v = 100$ км/ч?

2.3. Маляр работает в подвесном кресле (см. рис. 5). Ему понадобилось срочно подняться наверх. Он принимается тянуть за верёвку с такой силой, что его давление на кресло уменьшается до 400 Н. Масса маляра 72 кг, масса кресла 12 кг. а) Чему равно ускорение маляра и кресла? б) Чему равна полная нагрузка на блок?

I

2.4. (2.12) Камень массы M лежит на горизонтальной плоскости на расстоянии L от края пропасти. К камню прикреплена верёвка, перекинутая через гладкий уступ. По верёвке ползёт обезьяна массы m. С каким постоянным (относительно земли) ускорением она должна лезть, чтобы успеть подняться раньше, чем упадёт камень? Начальное расстояние обезьяны от уступа равно $H < \dfrac{M}{m}L$. Коэффициент трения камня о плоскость равен k.

2.5. Частицу массой m и положительным зарядом q отпускают без начальной скорости в вертикальном поле тяжести с ускорением свободного падения g и однородном (т. е. одинаковым во всех точках) магнитном поле $\vec{B}$, которое направлено горизонтально. Известно, что сила, действующая на заряд в магнитном поле, определяется векторным произведением скорости частицы на вектор индукции магнитного поля: $\vec{F} = q\left[\vec{v} \times \vec{B}\right]$. Найдите траекторию такой частицы.

2.6. (2.41) С палубы яхты, бороздящей океан со скоростью 10 узлов (18 км/ч), принцесса роняет в воду жемчужину массы $m = 1$ г. Как далеко от места падения в воду может оказаться жемчужина на дне океана, если при её движении в воде сила сопротивления $\vec{F} = -\beta\vec{V}$, $\beta = 10^{-4}$ кг/с?

2.7. (2.43) Брусок скользит по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью v_0 и по касательной попадает в область, ограниченную забором в форме полуокружности (на рис. 6 изображён вид сверху). Найти закон изменения скорости бруска во времени и определить время, через которое брусок покинет эту область. Радиус забора R, коэффициент трения скольжения бруска о поверхность забора k. Трением бруска о горизонтальную поверхность пренебречь, размеры бруска много меньше R.

II

2.8. (2.42) Колобок, желая полакомиться подсолнечным маслом из бочонка, свалился туда и через $\Delta t = 2$ с достиг дна. Масса Колобка $m = 200$ г, плотность его в 1,05 раза больше плотности масла, а сила сопротивления при перемещении Колобка в масле $\vec{F} = -\beta\vec{V}$, $\beta = 0{,}1\,$кг/с. Оценить высоту бочонка H, если он был залит до краёв.

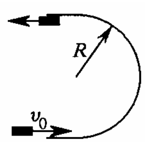

Рис. 6

2.9. (2.20) Брусок массы m лежит на доске массы M. Коэффициент трения между доской и грузом равен k. По грузу производят горизонтальный удар, после чего он начинает скользить с начальной скоростью v_0. Определить время, через которое прекратится скольжение блока по доске. Трением доски о нижнюю опору можно пренебречь.

III

2.10. (2.29) Лодка под парусом развила скорость v_0. Как будет убывать во времени скорость движения лодки в стоячей воде после спуска паруса, если сопротивление воды движению лодки можно считать пропорциональным квадрату скорости? Как долго будет двигаться лодка? Какой путь она пройдёт до полной остановки?

2.11. (2.54) На внутренней поверхности конической воронки с углом 2α при вершине (рис. 7) на высоте h от вершины находится малое тело. Коэффициент трения между телом и поверхностью воронки равен k. Найти минимальную угловую скорость вращения конуса вокруг вертикальной оси, при которой тело будет неподвижно относительно воронки.

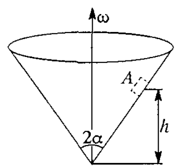

Рис. 7

3. Динамика системы частиц

0

3.1. (4.14) Две лодки идут навстречу параллельными курсами. Когда лодки находятся друг против друга, с каждой лодки на встречную перебрасывается мешок массы 50 кг, в результате чего первая лодка останавливается, а вторая идёт со скоростью 8,5 м/с в прежнем направлении. Каковы были скорости лодок до обмена мешками, если массы лодок с грузом равны 500 кг и 1 т соответственно?

3.2. Лягушка прыгает с одного конца длинной доски, лежащей на гладкой поверхности, и допрыгивает до противоположного конца. Массы доски и лягушки одинаковы, длина доски L. 1) На сколько сместится доска относительно поверхности земли к моменту, когда лягушка приземлится? 2) Найдите начальную скорость лягушки относительно земли, необходимую для такого прыжка, если она прыгнула под углом α к горизонту.

3.3. (3.6) В одном изобретении предлагается на ходу наполнять платформы поезда углём, падающим вертикально на платформу из соответствующим образом устроенного бункера. Какова должна быть приложенная к платформе сила тяги (без учёта силы трения), если на неё погружают 10 т угля за 2 с, и за это время она проходит примерно 10 м?

I

3.4. (4.25) На дне маленькой запаянной пробирки, подвешенной над столом на нити, сидит муха, масса которой равна массе пробирки, а расстояние от дна до поверхности равно длине пробирки l. Нить пережигают, и за время падения муха перелетает со дна в верхний конец пробирки. Определить время, по истечении которого нижний конец пробирки стукнется о стол.

3.5. С какой силой пожарный должен удерживать пожарный шланг, вода из которого выбрасывается в виде потока мелких капель в количестве $Q = 10$ кг/с и может добивать до высоты $h = 10$ м? Оцените, какая сила будет действовать на стену, если на неё направить струю из этого шланга под углом 45° (оценку провести в двух предельных случаях — для упругого и для неупругого соударения капель со стенкой).

3.6. (3.11) По горизонтальным рельсам без трения движутся параллельно две тележки с дворниками. Интенсивность падения снега на тележку (масса снега в единицу времени) равна μ [кг/с]. В момент времени $t = 0$ массы тележек равны m_0, а скорости — v_0. Начиная с момента $t = 0$, один из дворников начинает сметать с тележки снег, так что масса её в дальнейшем останется постоянной. Снег сметается в направлении, перпендикулярном движению тележки. Определить зависимость скоростей тележек от времени и найти расстояния, которые преодолеет каждая из тележек до остановки.

3.7. (3.21) Найти связь между массой ракеты $m(t)$, достигнутой ею скоростью $v(t)$ и временем t, если ракета движется вертикально вверх в поле тяжести Земли. Скорость газовой струи относительно ракеты u считать постоянной. Сопротивление воздуха и изменение ускорения свободного падения g с высотой не учитывать. Какую массу газов $\mu(t)$ должна ежесекундно выбрасывать ракета, чтобы оставаться неподвижной относительно Земли?

II

3.8. (4.10) Из пушки, свободно соскальзывающей по наклонной плоскости и прошедшей уже путь l, производится выстрел в горизонтальном направлении. Какова должна быть скорость v снаряда для того, чтобы пушка остановилась после выстрела? Выразить искомую скорость v через массу снаряда m, массу пушки M и угол α наклона плоскости к горизонту. Учесть, что $m \ll M$.

3.9. (3.27) По каком закону должен изменяться расход топлива $\mu(t)$, чтобы в поле тяжести с постоянным g ракета двигалась вертикально вверх с постоянным ускорением a? Скорость истечения газов относительно ракеты постоянна и равна u.

III

3.10. (3.42) Космический корабль движется с постоянной по величине скоростью v. Для изменения направления его полёта включается двигатель, выбрасывающий струю газа со скоростью u относительно корабля в направлении, перпендикулярном к его траектории. Определить угол α, на который повернётся вектор скорости корабля, если начальная масса его m_0, конечная m, а скорость u постоянна.

3.11. (3.41) Ракета начинает двигаться в облаке пыли. Пылинки неподвижны и прилипают к ракете при ударе. Начальная скорость ракеты равна нулю, скорость истечения газов относительно ракеты равна u, массой корпуса ракеты по сравнению со стартовой массой топлива можно пренебречь. Кроме того известно, что в любой момент полёта ракеты масса израсходованного топлива равна массе налипшей пыли. Найти в таком облаке максимальную скорость ракеты.

4. Работа и энергия

0

4.1. Груз, висящий вертикально в поле тяжести на лёгкой пружине, растягивает её на величину $x = 3$ см. Сила натяжения пружины подчиняется закону Гука $F = -k(x - x_0)$, где жёсткость $k = 400$ Н/м, а x_0 — длина пружины в отсутствие натяжения (т. е. в не деформированном состоянии). Какую работу надо затратить, чтобы утроить удлинение пружины, прикладывая к грузу вертикальную силу?

4.2. Математический маятник (груз малых размеров на лёгком подвесе длиной l) находится в положении равновесия. Определите, какую скорость u надо сообщить грузу, чтобы он мог совершить полный оборот, для двух случаев: груз подвешен а) на жёстком стержне и б) на нерастяжимой нити.

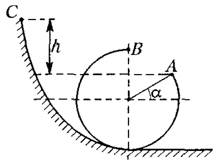

Рис. 8

4.3. Бильярдный шар, движущийся со скоростью v, испытывает лобовое столкновение (центральный удар) с другим таким же покоящимся бильярдным шаром. Найдите скорости шаров после столкновения, если а) столкновение абсолютно упругое, б) столкновение абсолютно неупругое и шары слипаются.

I

4.4. Сила взаимодействия между молекулами может быть представлена в виде комбинации сил отталкивания на малых расстояниях и сил притяжения на больших. В одной из моделей энергия взаимодействия между двумя молекулами, находящимися на расстоянии r, может быть записана в виде $U = a/r^{12} - b/r^6$, где a и b — заданные константы. Найдите 1) силу взаимодействия молекул, когда они находятся на произвольном расстоянии r друг от друга, 2) положение равновесия двух молекул r_0 при колебаниях вдоль одной прямой, 3) энергию связи между молекулами.

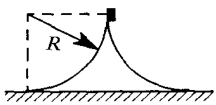

Рис. 9

4.5. (4.37) Малое тело скользит без начальной скорости из точки C по гладкому жёлобу в виде мёртвой петли с разрывом (рис. 8). При каких начальных высотах (относительно точки A) тело, достигнув этой точки, пролетит после свободного полёта ниже верхней точки B петли, т. е. сможет попасть обратно в жёлоб?

4.6. (4.30) Гладкие боковые поверхности стоящего на плоскости однородного клина представляют собой четверть окружности радиуса $R = 1$ м (рис. 9). Из верхней точки клина начинает скользить без начальной скорости небольшое тело, масса которого равна массе клина. Определить, на какие расстояния сместятся по горизонтали оба тела к моменту, когда соскользнувшее тело прекратит движение. Коэффициент трения между соскользнувшим телом и плоскостью $k = 0{,}2$, а трением между клином и плоскостью можно пренебречь.

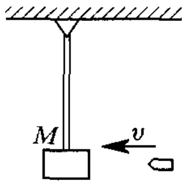

Рис. 10

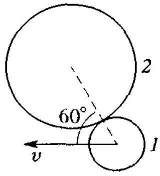

Рис. 11

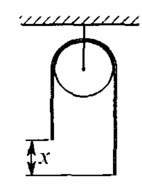

Рис. 12

4.7. (4.66) Баллистический маятник — это маятник, используемый для определения скорости снаряда. Принцип его действия заключается в том, что снаряд, скорость которого следует измерить, ударяется в тело маятника (рис. 10). Если известны условия удара и массы снаряда и маятника, то по углу отклонения маятника α можно вычислить скорость v снаряда до удара. Показать, как это сделать для следующих различных случаев: 1) снаряд после удара застревает в маятнике; 2) снаряд отскакивает после удара со скоростью v' назад; 3) снаряд падает вниз, потеряв свою скорость. Масса маятника M и масса снаряда m известны; баллистический маятник можно рассматривать как математический длины l.

II

4.8. (4.75) Шайба массы m, скользя по льду, сталкивается с неподвижной шайбой массы $3m$. Считая удар упругим и центральным, определить, на какое расстояние S разлетятся шайбы, если скорость первой шайбы перед ударом была v, а коэффициент трения между шайбами и льдом равен k.

4.9. (4.31) На нити длины l подвешен груз массы m. Определить, на какую минимальную высоту надо поднять груз массы m, чтобы он, падая, разорвал нить, если минимальный покоящийся груз массой M, разрывающий нить, растягивает её перед разрывом на 1%. Считать, что сила, с которой нить действует на груз, пропорциональна растяжению нити вплоть до её разрыва.

III

4.10. (4.81) Шар *1*, летящий со скоростью v, ударяется в покоящийся шар *2*, масса которого в 3 раза больше массы налетающего (рис. 11). Найти скорости шаров после удара, если в момент столкновения угол между линией, соединяющей центры шаров, и скоростью налетающего шара до удара равен 60°. Удар абсолютно упругий. Трения нет.

4.11. (4.56) Тяжёлая однородная верёвка длины l перекинута через невесомый блок (рис. 12). Определите скорость верёвки в зависимости от расстояния x между её концами, если в начальный момент оно равно Δl (при этом верёвка неподвижна).

5. Динамика релятивистской частицы

0

5.1. Вычислить импульс частицы массы m с кинетической энергией, равной её энергии покоя, $K = mc^2$. Сравнить результат с расчётом по классическим (нерелятивистским) формулам. При какой энергии частицы можно для расчёта её движения пользоваться классическими формулами?

5.2. (8.71) Исходя из табличного значения массы электрона, найти скорость электрона, имеющего кинетическую энергию, равную: 1) 1 эВ, 2) 1 МэВ.

5.3. (8.62) До какой минимальной кинетической энергии необходимо разогнать встречные протон-протонные пучки для того, чтобы могли рождаться протон-антипротонные пары (реакция $p+p \to p+p+p+\tilde{p}$)? Энергия покоя протона и антипротона $m_pc^2 \approx 0,94$ ГэВ.

I

5.4. Через пенал длиной $l = 8$ см пролетает со скоростью $v = 0{,}6\,c$ карандаш, собственная длина которого равна $l = 10$ см. Может ли карандаш оказаться внутри пенала?

5.5. (8.59) Два протона, ускоренные до одной энергии $E = 10$ ГэВ, движутся навстречу друг другу и сталкиваются между собой. Рассмотрев тот же процесс в системе отсчёта, связанной с одной из частиц, определить энергию E' второй частицы в этой системе.

5.6. (8.61) Частица массой m_1 сталкивается с покоящейся частицей с массой m_2. В результате столкновения рождается n частиц с массами $m'_1, m'_2, \ldots, m'_n$. Определить минимальную кинетическую энергию налетающей частицы, при которой возможна эта реакция.

5.7. (8.74) Выразить ускорение $\vec{a}$ релятивистской частицы через её массу m, скорость $\vec{v}$ и действующую на неё силу $\vec{F}$ в случаях: а) скорость частицы изменяется только по направлению, сила направлена перпендикулярно скорости ($\vec{F} \perp \vec{v}$); б) скорость частицы меняется только по величине, сила направлена по скорости ($\vec{F} \parallel \vec{v}$).

II

5.8. Рождённый в результате некоторой реакции мюон массой m_μ оставил на фотоплёнке в регистрационной камере трек длиной l, после чего распался. Зная время жизни неподвижного мюона τ_0 и пренебрегая изменением скорости частицы за время пролёта, определите а) скорость мюона v_μ в лабораторной системе отсчёта, б) его кинетическую энергию K_μ.

5.9. (8.51) Покоящийся пион ($m_\pi = 273\,m_e$) распадается на мюон ($m_\mu = 207\,m_e$) и нейтрино. Найти их кинетические энергии и импульсы.

III

5.10. (8.30) Вслед космическому кораблю, удаляющемуся от Земли со скоростью $v = 0{,}8\,c$, каждую секунду посылают сигналы точного времени. Какое время между поступлением двух сигналов будет проходить по корабельным часам?

5.11. (8.32) Определить время жизни мюона с энергией $E = 1$ ГэВ (в лабораторной системе отсчёта). Время жизни покоящегося мюона $\tau_0 = 2,2 \cdot 10^{-6}$ с, масса мюона $m \approx 207\,m_e$ (m_e — масса электрона, $m_e c^2 \approx 0{,}5$ МэВ).

6. Момент силы. Момент импульса

0

6.1. Два одинаковых маленьких шарика массой m каждый скреплены невесомым стержнем длиной l. Одному шарику коротким ударом сообщают импульс p перпендикулярно стержню. Найдите угловую скорость вращения системы и скорость движения центра масс после удара.

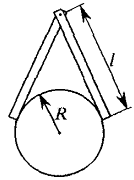

Рис. 13

6.2. Однородный обруч радиуса R катится без проскальзывания по столу со скоростью v. Определите момент импульса некоторой точечной массы m на обруче, находящейся на высоте $h < 2R$ от поверхности земли, относительно точки касания колесом земли а) в системе отсчёта, связанной с колесом, и б) в системе отсчёта, связанной с землёй.

6.3. Лестницу приставляют к гладкой вертикальной стене. Коэффициент трения лестницы о пол равен $k = 0{,}1$. Каким должен быть угол между лестницей и полом, чтобы лестница не соскользнула под действием собственного веса?

I

6.4. (2.63) Бревно массы m и радиуса R пытаются удержать на весу при помощи двух скреплённых шарниром досок массы M и длины l каждая (рис. 13). При каких значениях коэффициента трения между бревном и досками это возможно?

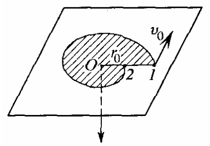

Рис. 14

6.5. Небольшое тело, привязанное к нитке, продетой через отверстие в гладком горизонтальном столе, движется равномерно со скоростью v_0 на расстоянии r_0 от отверстия (см. рис. 14). В момент t_0 нить начинают плавно протягивать через отверстие, и за время τ тело делает оборот, описав заштрихованную на рисунке фигуру. Найти её площадь.

6.6. (6.8) По внутренней поверхности конической воронки, стоящей вертикально, без трения скользит маленький шарик (рис. 15). В начальный момент шарик находился на высоте h_0, а скорость его v_0 была горизонтальна. Найти v_0, если известно, что при дальнейшем движении шарик поднимается до высоты h, а затем начинает опускаться. Найти также скорость v шарика в наивысшем положении.

6.7. (6.15) Три одинаковых маленьких шарика, соединённые невесомыми, жёсткими спицами равной длины, расположены на гладком горизонтальном столе вдоль одной прямой. В крайний шарик абсолютно упруго ударяется такой же шарик, движущийся по столу со скоростью v_0, перпендикулярно спицам. Определить скорость всех шариков сразу после удара, а также угловую скорость вращения системы.

II

6.8. (2.64) Катушку ниток радиусом R пытаются, прислонив к стене, удержать на весу с помощью собственной нитки, отмотанной на длину l (рис. 16). При каких значениях коэффициента трения между катушкой и стеной это возможно?

6.9. (6.4) Длинная жёсткая доска может свободно вращаться вокруг оси, делящей её длину в отношении $1:2$. На длинный конец доски с высоты $h = 1,5$ м прыгает мальчик, масса которого $m = 40$ кг. На коротком плече стоит мужчина массы $M = 80$ кг (рис. 17). На какую высоту x подбросит доска мужчину после прыжка мальчика? Массой доски пренебречь. Доска расположена невысоко над полом.

III

6.10. На концах лёгкой спицы длиной L закреплены два массивных груза массой m. Конструкция подвешена за центр спицы и может вра-

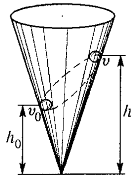

Рис. 15

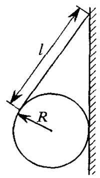

Рис. 16

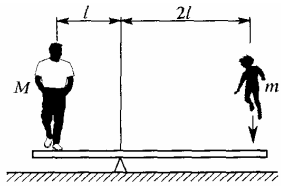

Рис. 17

щаться в горизонтальной плоскости. Прикладывая внешнюю силу с моментом M, конструкцию удалось раскрутить до угловой скорости ω_0. Считая, что сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости, найдите, сколько оборотов сделает конструкция до остановки, если перестать прикладывать внешнюю силу.

6.11. (6.5) Расположенная горизонтально система из трёх одинаковых маленьких шариков, соединённая невесомыми жёсткими спицами длиной l, падает с постоянной скоростью v_0 и ударяется левым шариком о массивный выступ с горизонтальной верхней поверхностью (рис. 18). Определить угловую скорость вращения системы сразу после удара, считая его абсолютно упругим.

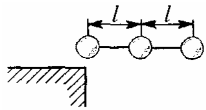

Рис. 18

7. Всемирное тяготение

0

7.1. Используя значение ускорения свободного падения на поверхности Земли и полагая её радиус равным $R \approx 6{,}4 \cdot 10^3$ км, оценить массу Земли и её среднюю плотность.

7.2. Геостационарной называется круговая орбита, расположенная над экватором Земли, находясь на которой искусственный спутник постоянно находится над одной и той же точкой на земной поверхности. Найдите параметры такой орбиты: её радиус и скорость движения спутника на ней.

7.3. Дайте определения первой и второй космических скоростей. Рассчитайте значения этих скоростей для Земли.

I

7.4. (7.2) Ракета с космонавтом стартует с поверхности Земли и движется вертикально вверх так, что космонавт испытывает все время постоянную перегрузку $n = 2$. После того как скорость ракеты стала равной первой космической скорости, двигатели выключают. Определить, покинет ли ракета пределы Земли или упадёт на неё. Перегрузкой n называют отношение $n = (P - P_0)/P_0$, где P_0 — вес космонавта на Земле, P — вес, который показали бы пружинные весы при взвешивании космонавта в полете.

7.5. (7.28) Среднее время обращения советского корабля-спутника «Восток», на котором Ю. А. Гагарин 12 апреля 1961 г. впервые облетел вокруг земного шара, $T_1 = 89{,}2$ мин при средней высоте полёта над земной поверхностью $h = 254$ км. Ближайший спутник Марса — Фобос — обращается вокруг планеты за время $T_2 = 7$ ч 39 мин, находясь от центра Марса в среднем на расстоянии $R_2 = 9350$ км. Определить отношение массы Марса M_2 к массе Земли M_1, если средний радиус земного шара $R = 6370$ км.

7.6. (7.61) Космический корабль движется вокруг Солнца по той же круговой орбите, что и Земля ($R_З = 1{,}5 \cdot 10^8$ м), причём настолько далеко от Земли, что ее влиянием можно пренебречь. Корабль получает в направлении своего движения дополнительную скорость Δv, достаточную для достижения орбиты Марса по траектории, касающейся орбиты Марса. Марс вращается вокруг Солнца по круговой орбите радиуса $R_М = 2{,}28 \cdot 10^8$ км. Определить время перелёта и величину Δv. Для Солнца $\gamma M_С = 1325 \cdot 10^8$ км^3/с^2.

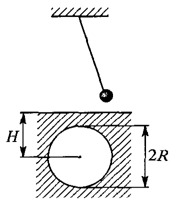

Рис. 19

7.7. (7.136) Математический маятник расположен на поверхности Земли над тоннелем метро. Тоннель находится на глубине $H = 15$ м, а его диаметр $2R = 10$ м. Принимая среднюю плотность грунта равной $\rho = 2$ г/см^3, оценить относительное изменение периодов колебаний $\delta T/T$ маятника, вызванное наличием тоннеля (рис. 19).

II

7.8. (7.29) Показать, что период спутника, обращающегося вокруг планеты (или любого другого тела со сферически симметричным распределением масс) в непосредственной близости от её поверхности, зависит только от средней плотности планеты ρ. Оценить в приближении классической физики период такого спутника и скорость на орбите для нейтронной звезды радиусом $R \sim 20$ км. Правомерно ли такое приближение при данных параметрах звезды? Плотность вещества нейтронной звезды такая же, как и плотность вещества внутри атомных ядер ($\rho \approx 10^{17}$ кг/см^3).

7.9. (7.85) По направлению к уединённому космическому телу, имеющему массу и размеры такие же, как у Земли, из глубин космоса движется рой метеоритов, скорость которых на значительном удалении от тела равна $v = 5$ км/с. Поперечные размеры этого метеоритного облака много больше диаметра тела, глубина облака (по направлению движения) составляет $h = 1000$ км, средняя концентрация метеоритов в облаке $n = 0{,}1$ км$^{-3}$, а центр облака движется в направлении центра тела. Найдите максимальное значение прицельного параметра b отдельного метеорита (т. е. расстояние до прямой, проходящей через центр притягивающего тела и параллельной скорости налетающей частицы), при котором он будет «задевать» притягивающее тело. Каково общее число метеоритов, которые попадут на тело?

III

7.10. (7.44) Со спутника, движущегося по круговой орбите со скоростью v_0, стреляют в направлении, составляющем угол $120°$ к курсу. Какой должна быть скорость пули относительно спутника, чтобы пуля могла улететь бесконечно далеко?

7.11. (7.137) В одном из проектов предлагалось использовать для движения поездов силу земного тяготения, соединив пункты отправления и назначения прямым подземным тоннелем. Считая плотность Земля постоянной и пренебрегая трением, найти время, за которое поезд (без двигателя) пройдёт тоннель.

8. Силы инерции

0

8.1. Автобус движется по ровной горизонтальной дороге с ускорением $\vec{a}$. Определите угол и направление отклонения отвеса, подвешенного в центре автобуса, от вертикального положения. Рассмотрите случаи, когда а) автобус движется с ускорением поступательно, б) ускорение возникает из-за того, что автобус поворачивает по дуге (радиус дуги считать много большим размеров автобуса).

8.2. Оцените, на сколько процентов вес тела в Москве (на широте $\alpha = 56°$) меньше силы гравитационного притяжения к Земле.

8.3. Поезд массой $M = 1000$ тонн движется вдоль меридиана с юга на север со скоростью $v = 72$ км/ч. Найдите модуль и направление силы, с которой поезд действует на рельсы в направлении, перпендикулярном ходу поезда, когда он находится в северном полушарии на широте $60°$.

I

8.4. Вдоль радиуса карусели, равномерно вращающейся с угловой скоростью $\omega = 0{,}5$ рад/с, от периферии к центру идёт человек с постоянной скоростью относительно карусели $v = 1$ м/с. Как должен наклониться человек, чтобы не упасть? Какую работу должен совершить человек, чтобы пройти от периферии к центру карусели, если радиус карусели $R = 5$ м, масса человека $m = 70$ кг. Зависит ли работа от формы пути?

8.5. (12.19) Стрелок и мишень находятся в диаметрально противоположных точках карусели радиуса $R = 5$ м, равномерно вращающейся вокруг вертикальной оси. Период вращения карусели $T = 10$ с, скорость пули $v = 300$ м/с. Пренебрегая максимальной линейной скоростью вращающейся карусели ωR по сравнению со скоростью пули, определить приближённо, под каким углом α к диаметру карусели должен целиться стрелок, чтобы поразить мишень. Задачу рассмотреть как с точки зрения вращающейся, так и с точки зрения неподвижной системы, и сравнить результаты.

8.6. (12.7) Из ружья произведён выстрел строго вверх (т. е. параллельно линии отвеса). Начальная скорость пули $V_0 = 100$ м/с, географическая широта места $\varphi = 60°$. Учитывая осевое вращение Земли, определить приближённо, насколько восточнее или западнее от места выстрела упадёт пуля. Сопротивление воздуха не учитывать.

8.7. Циклон представляет из себя атмосферный вихрь большого размера (от сотен километров) с пониженным давлением в центре. Строение циклона, находящегося вдали от экватора, определяется балансом сил Кориолиса и перепада давления (силы Архимеда). В какую сторону вращается такой циклон в Северном полушарии? Для циклона с характерным перепадом давления $dP\big/dr = 1$ Па/км оцените характерную скорость ветра на широте Москвы. Плотность воздуха принять равной $\rho = 1{,}2$ кг/м^3.

II

8.8. (12.27) С какой скоростью v_0 должен идти человек по салону автобуса по направлению к кабине водителя, чтобы «взлететь» (потерять вес). Автобус преодолевает вершину холма с радиусом кривизны $R = 42$ м. Скорость автобуса $u = 72$ км/ч. Считать, что человек находится в центре автобуса.

8.9. Таракан массы $m = 1$ г бежит по краю вращающегося в горизонтальной плоскости диска в направлении вращения диска. Радиус диска $R = 20$ см, угловая скорость вращения диска $\omega = 0{,}5$ рад/с. С какой максимальной скоростью относительно диска может двигаться таракан, если коэффициент трения его о диск равен $\mu = 0{,}1$? Рассмотреть задачу в инерциальной и неинерциальной системах отсчёта.

III

8.10. Ноги циркового гимнаста прикреплены в точке O к вертикально расположенному стержню OA, который вращается вокруг оси OA с постоянной угловой скоростью $\Omega = 3{,}1$ с$^{-1}$. Определить угол α между гимнастом и вертикалью, а также силу реакции опоры в точке O. Гимнаста можно моделировать однородным стержнем длиной $l = 1{,}75$ м.

8.11. Длинная трубка, расположенная горизонтально, закреплена одним концом на вертикальной оси, вокруг которой она вращается с угловой скоростью ω. В начальный момент времени грузу массой m, помещённому в трубку на оси вращения, сообщена начальная скорость v_0. Коэффициент трения груза о трубку μ. Найдите закон движения груза в трубке, пренебрегая силой тяжести и центробежной силой. Оцените, через какое время после начала движения пренебрежение центробежной силой будет неправомерно.

9. Вращение твердого тела

0

9.1. Найти момент инерции однородного цилиндра радиусом R, длиной L, массой M относительно оси, проходящей через его центр перпендикулярно его оси симметрии.

9.2. На массивный блок массой M и радиусом R намотана невесомая нить, к которой прикреплён грузик массой m. Под действием веса грузика нить разматывается. Найти зависимость угла поворота блока от времени.

9.3. (9.111) Гимнаст на перекладине выполняет большой оборот из стойки на руках, т. е. вращается, не сгибаясь, вокруг перекладины под действием собственного веса. Оценить приближённо наибольшую нагрузку F на его руки, пренебрегая трением ладоней о перекладину.

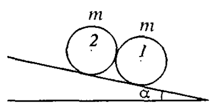

Рис. 20

I

9.4. Раскрученное до угловой скорости ω колесо радиуса R и массы M с моментом инерции относительно центра I_0 ставят на шероховатую поверхность. Коэффициент трения скольжения равен μ. Найти время установления чистого качения и установившуюся скорость колеса.

9.5. (9.71) С шероховатой наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, скатываются без проскальзывания два цилиндра, имеющие одинаковую массу m и один и тот же радиус (рис. 20). Один из них сплошной, другой — полый, тонкостенный. Коэффициент трения между цилиндрами k. Как следует расположить полый цилиндр — впереди сплошного или за ним, чтобы цилиндры скатывались вместе? Найти ускорение a цилиндров и силу давления N одного на другой.

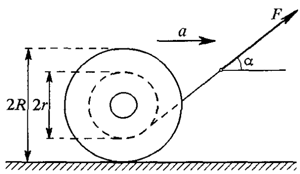

Рис. 21

9.6. (9.37) На горизонтальной плоскости лежит катушка ниток. С каким ускорением a будет двигаться ось катушки, если тянуть за нитку с силой F (рис. 21)? Каким образом надо тянуть за нитку для того, чтобы катушка двигалась в сторону натянутой нитки? Катушка движется по поверхности стола без скольжения. Найти силу трения между катушкой и столом.

9.7. (9.79) Бильярдный шар катится без скольжения по горизонтальной плоскости со скоростью v и ударяется в покоящийся такой же бильярдный шар, причём линия центров параллельна скорости движения. Определить скорости обоих шаров после того, как их движение перейдёт в чистое качение. Какая доля первоначальной кинетической энергии перейдёт в тепло? Считать, что при столкновении шаров передачи вращательного движения не происходит. Потерей энергии на трение при чистом качении пренебречь.

II

9.8. (9.5) Схема демонстрационного прибора (диск Максвелла) изображена на рис. 22. На валик радиуса r наглухо насажен сплошной диск радиуса R и массы M. Валик и диск сделаны из одного материала, причём выступающие из диска части оси имеют массу m. К валику прикреплены нити одинаковой длины, при помощи которых прибор подвешивается к штативу. На валик симметрично наматываются нити в один ряд, благодаря чему диск поднимается. Затем диску предоставляют возможность свободно опускаться. Найти ускорение, с которым опускается диск.

9.9. (9.131) Оценить, сколько раз перевернётся человек, падая по стойке «смирно» (рис. 23) с десятиметровой вышки?

III

9.10. (9.80) Как надо ударить кием по бильярдному шару, чтобы сила трения шара о сукно бильярдного стола заставляла его двигаться: а) ускоренно; б) замедленно; в) равномерно? Предполагается, что удар наносится горизонтально в вертикальной плоскости, проходящей через центр шара и точку касания его с плоскостью бильярдного стола.

9.11. (9.117) В доску массы M, лежащую на горизонтальном столе, попадает пуля массы m, летевшая перпендикулярно к доске и параллельно плоскости стола со скоростью V_0. Определить кинетическую энергию K, перешедшую во внутреннюю энергию (тепло) системы, если точка попадания пули находится от конца доски на расстоянии $^1/_4$ ее длины. Массу пули по сравнению с массой доски считать пренебрежимо малой, шириной доски пренебречь.

10. Механические колебания

0

10.1. Нарисуйте характерный график зависимости координаты x тела, совершающего гармонические колебания без затухания от его скорости $\dot{x}$ (фазовая траектория) для нескольких значений энергии системы. То же самое для осциллятора с затуханием.

10.2. Зная период колебаний T и время уменьшения амплитуды колебаний в 2 раза $\tau_{1/2}$, найдите добротность колебательной системы.

10.3. Найти период колебаний однородного стержня длины $l = 50$ см, если ось вращения проходит через точку, находящуюся на расстоянии $d = 10$ см от его верхнего конца.

I

10.4. Свободные колебания математического маятника массы m, длиной l испытывают затухание из-за трения о воздух. Сила трения пропорциональна скорости с коэффициентом пропорциональности β. Для

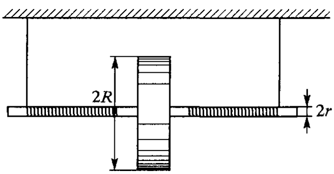

Рис. 22

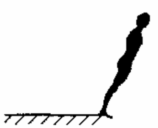

Рис. 23

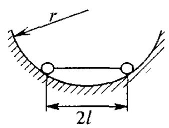

Рис. 24

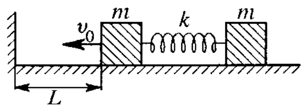

Рис. 25

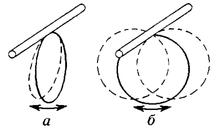

Рис. 26

поддержания колебаний маятник раскачивают периодическими толчками — один раз за период в момент максимального отклонения маятника ему сообщают дополнительную скорость u. Найдите значение u, при котором амплитуда колебаний A маятника будет стационарна, и нарисуйте фазовую траекторию для этого случая.

10.5. (5.22) Гантель длины $2l$ скользит без трения по сферической поверхности радиуса r (рис. 24). Гантель представляет собой две точечные массы, соединённые невесомым стержнем. Вычислить период малых колебаний при движении: а) в перпендикулярном плоскости рисунка направлении; б) в плоскости рисунка.

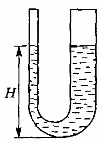

Рис. 27

10.6. (14.3) U-образная трубка, которая имеет колена разных сечений (рис. 27), залита жидкостью до высоты H от нижнего сочленения. Найти период малых колебаний уровней жидкости. Вязкостью пренебречь. Поперечные размеры трубки малы по сравнению с H.

10.7. (10.48) Ось дверцы шкафа образует с вертикалью угол α. Ширина дверцы b. Считая дверцу однородной тонкой пластиной и пренебрегая трением, найти период её малых колебаний относительно положения равновесия.

II

10.8. (5.49) По гладкой доске без трения скользят со скоростью v_0 два груза равной массы m, соединённые пружиной жёсткости k, находящейся в несжатом состоянии (рис. 25). В момент $t = 0$ левый груз находится на расстоянии L от вертикальной стенки, в направлении к которой они оба движутся. Через какое время t центр масс окажется в том же положении, что и в момент $t = 0$? Удар о стенку считать мгновенным и абсолютно упругим.

10.9. (10.1) Кольцо из тонкой проволоки совершает малые колебания, как маятник около горизонтальной оси. В одном случае ось лежит в плоскости кольца (рис. 26а), в другом — перпендикулярна к ней (рис. 26б). Определить отношение периодов T_1 и T_2 малых колебаний для этих двух случаев.

III

10.10. (12.81) Ноги циркового гимнаста прикреплены в точке O к вертикально расположенному стержню OA, который вращается вокруг оси OA с постоянной угловой скоростью Ω. Гимнаст описывает круговой конус. Угол между гимнастом и вертикальной осью $\alpha = 30^\circ$. Определить частоту малых колебаний гимнаста ω в вертикальной плоскости около положения равновесия. Гимнаста можно моделировать однородным стержнем длиной $l = 1{,}75$ м.

10.11. (10.34) На горизонтальной плоскости находится однородный цилиндр массы m. К оси цилиндра прикреплены две одинаковые горизонтально расположенные пружины, другие концы которых закреплены в стене (рис. 28). Коэффициент жёсткости каждой пружины равен k. Найти период малых колебаний цилиндра, если он при этом катится по горизонтальной без проскальзывания.

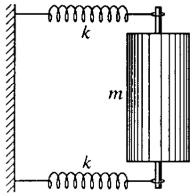

Рис. 28

11. Элементы теории упругости

0

11.1. (13.1) Стальной канат, который выдерживает вес неподвижной кабины лифта, имеет диаметр 9 мм. Какой диаметр должен иметь канат, если кабина лифта может иметь ускорение до $8g$?

11.2. При повышении температуры сталь расширяется по закону $l = l_0(1+\beta\Delta T)$, где $\beta = 12\cdot10^{-6}$ К$^{-1}$ — коэффициент линейного теплового расширения стали, модуль Юнга $E = 2\cdot10^{11}$ Н/м^2. Какое давление p необходимо приложить к концам стального цилиндра, чтобы длина его оставалась неизменной при повышении температуры на $\Delta T = 100$ К?

11.3. (13.17) На вертикально расположенный резиновый жгут диаметра d_0 насажено лёгкое стальное кольцо слегка меньшего диаметра $d < d_0$ (плоскость кольца перпендикулярна оси жгута). Считая известным модуль Юнга E и коэффициент Пуассона μ для резины, определить, с каким усилием F нужно растягивать жгут, чтобы кольцо с него соскочило. В расчётах весом резинового жгута пренебречь.

I

11.4. (13.9) Толстая недеформированная резиновая палочка имеет длину $L = 12$ см. Определить изменение её длины, если она закреплена вертикально в сечении, находящемся на расстоянии $h = 4$ см от верхнего конца. Плотность резины $\rho = 1{,}2$ г/см^3, модуль Юнга E $= 100$ Н/см^2.

11.5. (13.8) Определить отношение энергий деформации стального и пластмассового цилиндров, поставленных рядом друг с другом и сжатых между параллельными плоскостями, если до деформации они имели одинаковые размеры. Модуль Юнга для стали $2 \cdot 10^5$ Н/мм^2, для пластмассы — 10^2 Н/мм^2. Определить это же отношение для случая, когда цилиндры поставлены друг на друга и сжаты такими же плоскостями.

11.6. (13.30) Кабина лифта массы $m = 1000$ кг равномерно опускается со скоростью $v_0 = 1$ м/с. Когда лифт опустился на расстояние $l = 10$ м, барабан заклинило. Оценить максимальную силу, действующую на трос, из-за внезапной остановки лифта, если площадь поперечного сечения троса $S = 20$ см^2, а модуль Юнга троса $E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м^2 (l — длина недеформированного троса). Изменением сечения троса пренебречь.

11.7. (13.39) Два одинаковых тонких стальных бруска длины $l = 10$ см ($\rho = 7{,}8$ г/см^3, $E = 2 \cdot 10^5$ Н/мм^2) сталкиваются торцами. Рассматривая упругие волны, определить время соударения брусков. При каких скоростях возникнут неупругие явления, если предел упругости стали составляет $T_у = 200$ Н/мм^2?

II

11.8. (13.5) Определить относительное удлинение $\Delta l/l$ тонкого стержня, подвешенного за один конец, под влиянием собственного веса, если скорость звука в тонком стержне $V = 3140$ м/с. Начальная длина стержня $l_0 = 2$ м.

11.9. (13.18) Определить максимальное давление, которое может произвести вода при замерзании. Плотность льда $\rho = 0{,}917$ г/см^3, модуль Юнга E $= 2{,}8 \cdot 10^{10}$ Н/м^2, коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}3$.

III

11.10. (13.37) На астероиде Веста (радиус $R = 280$ км, ускорение силы тяжести на поверхности планеты $g = 0{,}24$ м/с^2) решено установить межпланетную ретрансляционную станцию. Основой конструкции служит цилиндрическая труба, длина которой должна равняться радиусу планеты. На Весту завезли ровно 280 км титановых труб. Насколько окажется ниже проектной высоты конструкция, когда она будет собрана в вертикальном положении? Считать Весту однородным невращающимся шаром. Плотность титана $\rho = 4500$ кг/м^3, модуль Юнга $E = 1{,}12 \cdot 10^{11}$ Па.

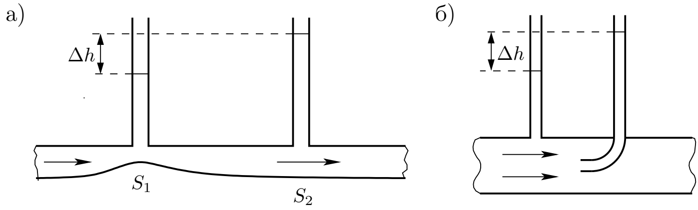

Рис. 29

11.11. Воду, текущую по водопроводной трубе со скоростью $v = 2$ м/с, быстро перекрывают жёсткой заслонкой. Определите силу, действующую на заслонку при остановке воды, если скорость звука в воде $c = 1{,}4$ км/с. Сечение трубы $S = 5\ \text{см}^2$.

12. Элементы гидродинамики

0

12.1. Лёд в форме кубика со стороной 1 см плавает в стакане с водой. Какая часть кубика льда находится над водой? Как изменится уровень воды в стакане, когда лёд растает? Плотность льда $\rho_{\text{Л}} = 0{,}9\ \text{г/см}^3$.

12.2. На горизонтальной поверхности стола стоит цилиндрический сосуд, в который налита вода до уровня H (относительно поверхности стола). На какой высоте h надо сделать отверстие в боковой стенке сосуда, чтобы струя воды била на максимальное расстояние от сосуда? Каково это расстояние?

12.3. Вода подаётся в здание по трубе диаметром $d_0 = 15$ см под давлением $P_0 = 4$ атм. Найдите скорости истечения и расход воды (в литрах в секунду) из крана диаметром $d = 15$ мм на высоте 25 м (при условии, что все остальные краны в доме закрыты). Потерями на трение пренебречь, течение считать ламинарным.

I

12.4. Цилиндрический сосуд с водой вращают вокруг его вертикальной оси с угловой скоростью ω. Найти: а) форму свободной поверхности воды, б) распределение давления воды на дне сосуда вдоль его радиуса, если давление в центре дна равно p_0.

12.5. Простейшими устройствами для измерения расхода при течении жидкостей являются расходомеры, основанные на измерении перепада давления, представляющие из себя две трубки, одна из которых либо установлена на участке с меньшим сечением трубы (расходомер

Вентури, рис. 29а), либо погружена в поток (расходомер Пито, рис. 29б). Определите расход жидкости по разностям высот в трубках Δh, зная плотность жидкости ρ и площади сечения трубок S_1, S_2.

12.6. Трубка диаметром $d = 1$ мм подсоединена к баку с водой высотой $h = 1$ м. Трубка расположена горизонтально. Вязкость воды $\eta = 10^{-3}$ Па $\cdot$ с. Оцените расход воды для трубки длиной 1) $l = 10$ см и 2) $l = 10$ м, считая течение ламинарным в обоих случаях.

12.7. Оцените силу лобового сопротивления движению шарика радиуса $r = 1$ см со скоростью $v_1 = 1$ мм/с и $v_2 = 1$ см/с в воде (вязкость $\eta = 0{,}9 \cdot 10^{-3}$ Па·с). При обтекании шара переход к турбулентному обтеканию происходит при $\mathrm{Re}_{cr} \sim 25$. Для турбулентного случая при $\mathrm{Re} \gg \mathrm{Re}_{cr}$ сила сопротивления грубо может быть оценена в предположении, что шарику передаётся весь импульс налетающего на него потока вещества.

II

12.8. (14.25) Вода течёт по сплюснутой трубке длины $l = 1$ м под напором $\Delta P = 1$ атм. Ширина трубки $a = 1$ см, высота $b = 0{,}1$ мм. Вязкость воды $\eta = 10^{-3}$ Па $\cdot$ с. Определить объем воды Q, протекающей по трубке в единицу времени.

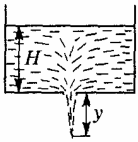

Рис. 30

12.9. (14.11) В сосуд налита вода до высоты H. В дне сосуда проделано круглое отверстие радиуса r_0 (рис. 30). Найти радиус струи воды $r(y)$, вытекающей из отверстия, в зависимости от расстояния y от дна сосуда.

III

12.10. Тонкий слой жидкости с плотностью ρ и вязкостью η течёт по наклонной плоскости. Толщина слоя всюду одинакова и равна h, угол наклона плоскости относительно горизонта $\alpha \ll 1$. Найти профиль скорости (т. е. зависимость её от высоты в сечении, перпендикулярном заданной плоскости) и среднюю скорость потока. (*Указание:* граничное условие на свободной (верхней) поверхности жидкости есть равенство нулю касательного напряжения.)

12.11. (14.12) Цилиндрический сосуд высоты h погружён в воду на глубину h_0. В дне сосуда площади S появилось маленькое отверстие площади σ. Определить время t, через которое сосуд утонет.

Ответы

▷ **1.2**. $L \approx 28$ м, $V \approx 22{,}4$ м/с. **1.3**. $T = \dfrac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} \approx 116$ земных суток. **1.4**. $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\varepsilon t^2\right)$. **1.5**. Тень движется с запада на восток со скоростью $v = 2\pi\left(\dfrac{R_{\text{Л}}}{T_{\text{мес}}} - \dfrac{R_{\text{З}}}{T_{\text{сут}}}\right) \approx 0{,}47$км/с. **1.6**. $v_x = v_0\left(1 + \cos\varphi\right)$, $v_y = -v_0 \sin\varphi$, $v = 2v_0 \sin\left(\varphi/2\right)$, $\alpha = \varphi/2$, где φ — угол между радиус-вектором выбранной точки и вертикальным направлением. **1.7**. $x = v_0 t \cdot \cos\left(\omega_0 t\right)$, $y = v_0 t \cdot \sin\left(\omega_0 t\right)$, $v = v_0 \sqrt{1 + \left(\omega_0 t\right)^2}$, $a = v_0 \omega_0 \sqrt{4 + \left(\omega_0 t\right)^2}$, $\rho = \dfrac{v_0}{\omega_0} \dfrac{\left(1 + \left(\omega_0 t\right)^2\right)^{3/2}}{2 + \left(\omega_0 t\right)^2}$. **1.8**. $\rho = \dfrac{\left(v_0^2 + \omega^2 R^2\right)^{3/2}}{\omega^3 R^2}$. **1.9**. $\alpha = 3\pi/8$. **1.10**. $R = \dfrac{g T_1 T_2}{2\sqrt{2}}$. **1.11**. $H = \dfrac{2u}{g}\left(v \cos\alpha - u\right) \operatorname{tg}^2 \alpha$.

▷ **2.1**. $a = \dfrac{m_1 \sin\alpha - m_2}{m_1 + m_2} g$, $T = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(1 + \sin\alpha\right) g$. **2.2**. $k = \dfrac{v^2}{Rg} \approx 0{,}4$. **2.3**. $a \approx 3{,}5$ м/с^2, $F_{\text{нагр}} \approx 1120\ H$. **2.4**. При $k < \dfrac{m}{M}$, $a \geqslant \dfrac{\left(m - kM\right) gH}{ML - mH}$, при $k \geqslant \dfrac{m}{M}$ ускорение любое. **2.5**. Если ось OY направлена вертикально вниз, вектор индукции магнитного поля направлен по оси OZ, то координаты частицы определяются уравнениями $x = -R \cdot \sin\left(\omega t\right) + \dfrac{mg}{qB} t$, $y = R\left(1 - \cos\left(\omega t\right)\right)$, $R = \dfrac{m^2 g}{\left(qB\right)^2}$, $\omega = \dfrac{qB}{m}$. **2.6**. $x\left(t\right) = \dfrac{mV_0}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t/m}\right)$, т.е. если глубина океана не ограничивает времени падения $x_{\max} = \dfrac{mV_0}{\beta} = 50$ м. **2.7**. $v(t) = V_0\left(\dfrac{kV_0}{R} t + 1\right)^{-1}$, $t = \dfrac{R}{v_0 k}\left(e^{\pi k} - 1\right)$. **2.8**. С точностью до размеров колобка $H = \left(\dfrac{m}{\beta}\right)^2 \dfrac{g'}{e} \approx 0{,}7$ м, где $g' = \dfrac{g}{21}$ — «ускорение свободного падения» с учётом архимедовой силы. **2.9**. $t = \dfrac{v_0}{kg\left(1 + m/M\right)}$. **2.10**. $v = \dfrac{mv_0}{m + kv_0 t}$, m — масса лодки, k — коэффициент сопротивления воды. При сделанном предположении о зависимости силы сопротивления от скорости лодка должна двигаться бесконечно долго, и пройденный ею путь также будет стремиться к бесконечности: $s = \dfrac{m}{k} \ln\left(1 + \dfrac{rv_0}{m} t\right)$. **2.11**. $\omega^2 = \dfrac{g\left(\cos\alpha - k \sin\alpha\right)}{h \operatorname{tg}\alpha\left(\sin\alpha + k \cos\alpha\right)}$.

▷ **3.1**. 9 м/с и 1 м/с. **3.2**. 1) $L/2$, 2) $v = \sqrt{\dfrac{gL}{2\sin 2\alpha}}$. **3.3**. $F \approx 25$ кН. **3.4**. $t = \sqrt{l/g}$. **3.5**. $F_1 = Q\sqrt{2gh} \approx 140\ H$, $F_{\text{упр}} = \sqrt{2} F_1 \approx 200$ Н, $F_{\text{ну}} = F_1/\sqrt{2} \approx 100$ Н. **3.6**. $v_1 = v_0 \cdot \exp\left(-\dfrac{\mu t}{m_0}\right)$, $v_2 = \dfrac{v_0 m_0}{m_0 + \mu t}$, $s_1 = v_0 m_0/\mu$,

$s_2 \to \infty$. **3.7**. $v(t) = u \cdot \ln\left(\dfrac{m_0}{m(t)}\right) - gt$, $\mu(t) = -\dfrac{dm}{dt} = \dfrac{m_0 g}{u} \exp\left(-\dfrac{g}{u}t\right)$. **3.8**. $v = \dfrac{M}{m} \cdot \dfrac{\sqrt{2gl\sin\alpha}}{\cos\alpha}$. **3.9**. $\mu = -\dfrac{dm}{dt} = \dfrac{m_0\,(g+a)}{u} \exp\left(-\dfrac{(g+a)}{u}t\right)$. **3.10**. $\alpha = \dfrac{u}{v}\ln\left(\dfrac{m_0}{m}\right)$. **3.11**. $v_{\max} = u\left(1 - e^{-1}\right)$.

▷ **4.1**. $A_{\min} = 2kx^2 = 0{,}72$ Дж. **4.2**. $v_1 = 2\sqrt{gl}$, $v_2 = \sqrt{5gl}$. **4.3**. а) $v_1 = 0$, $v_2 = v$, б) $v_1 = v_2 = v/2$. **4.4**. $F = \left|\dfrac{12a}{r^{13}} - \dfrac{6b}{r^7}\right|$, $r_0 = \sqrt[6]{2a/b}$, $E_{\text{св}} = \dfrac{b^2}{4a}$. **4.5**. $\dfrac{R}{2}\sin\alpha \leqslant h \leqslant \dfrac{R}{4}\dfrac{1+\sin\alpha}{\sin\alpha}$. **4.6**. $l_{\text{т}} = \dfrac{R}{2}\left(1 + \dfrac{1}{k}\right) = 3$ м, $l_{\text{кл}} = R\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{k}\right) = 5{,}5$ м. **4.7**. 1) $v = 2\dfrac{M+m}{m}\sqrt{gl} \cdot \sin(\alpha/2)$, 2) $v = 2\dfrac{M\sqrt{gl}\sin(\alpha/2) - mv'}{m}$, 3) $v = 2\dfrac{M\sqrt{gl} \cdot \sin(\alpha/2)}{m}$. **4.8**. $S = \dfrac{v^2}{4kg}$. **4.9**. $h = 0,005\dfrac{M}{m}l$. **4.10**. $v_1 = v\dfrac{\sqrt{13}}{4}$, $v_2 = \dfrac{v}{4}$. **4.11**. $v = \sqrt{\dfrac{g}{2l}\left[x^2 - (\Delta l)^2\right]}$.

▷ **5.1**. $p_{\text{кл}} = \sqrt{2Km} = mc\sqrt{2}$, $p_{\text{рел}} = \dfrac{1}{c}\sqrt{\left(K + mc^2\right)^2 - \left(mc^2\right)^2} = mc\sqrt{3}$. **5.2**. $v_1 = 590$ км/ч, $v_2 = 280\,000$ км/с. **5.3**. Суммарная энергия двух протонов $K_{\min} \approx 1{,}9$ ГэВ. **5.4**. Нет, не сможет. (Указание: учесть относительность одновременности прохождения концов карандаша через границы пенала.) **5.5**. $E' = 2\dfrac{E^2}{E_0} - E_0 \approx 213$ ГэВ, $E_0 = m_p c^2$. **5.6**. $K_{\min} = Q\left(1 + \dfrac{m_1}{m_2} + \dfrac{Q}{2m_2c^2}\right)$, где $Q = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i{}'c^2 - (m_1 + m_2)\,c^2$. **5.7**. а) $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}_\perp}{m}\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}$, б) $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}_{||}}{m}\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}$. **5.8**. $v = \dfrac{c}{\sqrt{1 + \left(c\tau_0/l\right)^2}}$, $K = m_\mu c^2\left(\sqrt{1 + \left(l/c\tau_0\right)^2} - 1\right)$. **5.9**. $K_\nu = 29{,}7$ МэВ, $K_\mu = 4{,}25$ МэВ, $p_\nu = p_\mu = \dfrac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} = 29{,}7\ \dfrac{\text{МэВ}}{c}$. **5.10**. $\Delta t' = \Delta t\sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}} = 3$ с. **5.11**. $\tau = \dfrac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \dfrac{E}{mc^2}\tau_0 \approx 2{,}1 \cdot 10^{-5}$ с.

▷ **6.1**. $v_c = \dfrac{p}{2m}$, $\omega = \dfrac{p}{ml}$. **6.2**. а) $L = 2hv$, б) $L = hv$. **6.3**. $\alpha > \alpha_{\text{пр}}$, $\operatorname{tg}\alpha_{\text{пр}} = \dfrac{1}{2k}$. **6.4**. $k \geqslant \dfrac{R}{l} + \dfrac{m}{M}\dfrac{\left(l^2 + R^2\right)}{lR}$ **6.5**. $S = \dfrac{r_0 v_0 \tau}{2}$ **6.6**. $v_0^2 = \dfrac{2gh^2}{h + h_0}$, $v^2 = \dfrac{2gh_0^2}{h + h_0}$. **6.7**. $v_1 = \dfrac{10}{11}v_0$, $v_2 = \dfrac{4}{11}v_0$, $v_3 = \dfrac{2}{11}v_0$, $v' = \dfrac{1}{11}v_0$, $\omega = \dfrac{6}{11}\dfrac{v_0}{l}$.

6.8. $k \geq \dfrac{l}{2R} + \dfrac{R}{2l}$. **6.9**. $x = 4h\left(\dfrac{m}{4m+M}\right)^2 = 0,167$ м. **6.10**. $n = \dfrac{m\omega_0^2 l^2}{4\pi M}$
6.11. $\omega = \dfrac{6v_0}{5l}$.

▷ **7.1**. $M_З = \dfrac{gR_З^2}{\gamma} \approx 6 \cdot 10^{24}$ кг, $\rho_З = \dfrac{3g}{4\pi\gamma R_З} \approx 5{,}5$ г/см^3. **7.2**. $R = R_З\left(\dfrac{gT_З^2}{4\pi^2 R_З}\right)^{1/3} \approx 42 \cdot 10^6$ м, $v = \dfrac{2\pi R}{T_З} \approx 0{,}39 v_I \approx 3$ км/с. **7.3**. $v_I = \sqrt{gR_З} = \sqrt{\gamma M_З / R_З} \approx 7,9$ км/с, $v_{II} = \sqrt{2}\, v_I \approx 11{,}2$ км/с. **7.4**. Ракета не покинет пределов Земли. **7.5**. $\dfrac{M_2}{M_1} = \left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)^3 \left(\dfrac{T_1}{T_2}\right)^2 \approx 0{,}11$, где $R_1 = R + h = 6625$ км. **7.6**. $\Delta v = v_k - v_З \approx 2,9$ км/с, где $v_З = \sqrt{\dfrac{\gamma M_C}{R_З}} = 29{,}7$ км/с — орбитальная скорость Земли, а $v_k = \sqrt{\dfrac{2\gamma M_C R_M}{R_З(R_З + R_M)}} = 32,6$ км/с — требуемая скорость корабля. Время перелета $\tau = \dfrac{1}{4\sqrt{2}} T_З \left(1 + \dfrac{R_M}{R_З}\right)^{3/2} \approx 261$ сут. **7.7**. $\dfrac{\Delta T}{T} \approx \dfrac{\pi R^2 \gamma\rho}{gH} \approx 10^{-7}$ **7.8**. $T = \sqrt{\dfrac{3\pi}{\gamma\rho}}$; для спутника нейтронной звезды $T \approx 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ с, $v \approx 10^8$ м/с. **7.9**. $b = r\sqrt{1 + \dfrac{gR_з}{v^2}}$, $N = \pi R_З^2 hn\left(1 + \dfrac{2gR_З}{v^2}\right) = 7,75 \cdot 10^{10}$ **7.10**. $v = \dfrac{v_0(1+\sqrt{5})}{2}$ **7.11**. $\tau \approx \pi\sqrt{\dfrac{R_З}{g}} \approx 42$ мин.

▷ **8.1**. а) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{g}$, отклонится назад; б) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{v^2}{gR}$, отклонится от центра поворота. **8.2**. $\dfrac{\Delta p}{p} = \dfrac{4\pi^2 R_З}{gT_З^2}\cos^2\theta \approx 0,1\%$ **8.3**. $N = \dfrac{4\pi}{T_З} mv \sin\theta \approx 2,5$ кН. Сила направлена с Запада на Восток (вправо). **8.4**. Человек должен наклониться вперёд на угол $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{\omega^2 r}{g}$, $\alpha_{\max} = 7,3^\circ$, а также против вращения на угол $\beta = \operatorname{arctg}\dfrac{2v\omega}{g} = 5,8^\circ$. Работа $A = \dfrac{m\omega^2 R^2}{2} \approx 219$ Дж. **8.5**. $\alpha = \dfrac{4\pi R}{vT} = 0{,}021$ рад $= 1{,}2^\circ$. **8.6**. Пуля отклонится к западу на расстояние $x = \frac{4}{3}\dfrac{v_0^3\omega}{g^2}\cos\varphi \approx 51$ см. **8.7**. Циклон вращается против часовой стрелки. $v \sim \dfrac{dP}{dr}\dfrac{T_З}{4\pi\rho\sin 56^\circ} \sim 7$ м/с. **8.8**. $v_0 \geq 0,29$ м/с. **8.9**. $v_{\max} = \sqrt{\mu g R} - \omega R = 35$ см/с. **8.10**. $\cos\alpha = \dfrac{3g}{2\omega^2 l} = 0,87$; $N = mg\sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(\dfrac{\omega^2 l}{g}\right)^2 \sin^2\alpha} \approx 1{,}1mg$.
8.11. $r(t) = \dfrac{v_0}{2\mu\omega}\left(1 - e^{-2\mu\omega t}\right)$, $t_{\max} \sim \dfrac{\ln(1+4\mu^2)}{2\mu\omega}$, при $\mu \ll 1$ $t_{\max} \sim \dfrac{2\mu}{\omega}$.

▷ **9.1**. $I = \dfrac{MR^2}{4} + \dfrac{ML^2}{12}$. **9.2**. $\varphi = \dfrac{\varepsilon t^2}{2R}\dfrac{2m}{2m+M}$ **9.3**. $F = \left(1 + \dfrac{4ma^2}{I}\right) mg$, где m — масса, I — момент инерции человека. **9.4**. $v_k = \omega R\dfrac{I_0}{I_0 + MR^2}$; $t = \dfrac{\omega R}{\mu g}\dfrac{I_0}{I_0 + MR^2}$. **9.5**. Впереди должен быть полый цилиндр. $a = \dfrac{4g\sin\alpha}{k+7}$, $N = \dfrac{mg\sin\alpha}{k+7}$. **9.6**. $a = \dfrac{F(R\cos\alpha - r)}{I + mr^2}$, где I и m — момент инерции и масса катушки; $a > 0$, если $\cos\alpha > r/R$; сила трения $f = F\cos\alpha - ma$. **9.7**. $v_1 = 2v/7, v_2 = 5v/r, \Delta E_{\text{кин}}/E_{\text{нач}} = 20/49$. **9.8**. $a = \dfrac{2(m+M)r^2}{mr^2 + MR^2 + 2(m+M)r^2}\, g$. **9.9**. Время падения $t = 1,3$ с. Число оборотов $n \approx \dfrac{\omega t + \arccos 0,6}{2\pi} \approx 0,65$. При вычислениях был принят рост человека 2 м. **9.10**. При $\rho = \rho^* = 7/5R$ — равномерное, $\rho > \rho^*$ — ускоренное, $\rho > \rho^*$ — замедленное движение шара. Здесь ρ — прицельное расстояние от кия до плоскости стола. **9.11**. $K = \dfrac{(4M - 7m)}{4M}\dfrac{mv_0^2}{2}$.

▷ **10.2**. $Q = \dfrac{\pi\tau_{1/2}}{T\ln 2}$. **10.3**. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2\left(l^2 - 3ld + 3d^2\right)}{3g\,(l-2d)}} \approx 10{,}7$ с. **10.4**. $u = A\sqrt{\dfrac{2\pi\beta}{m}\sqrt{\dfrac{g}{l}}}$. **10.5**. а) $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt[4]{r^2 - l^2}$, б) $T = \dfrac{2\pi r}{\sqrt{g\sqrt{r^2 - l^2}}}$. **10.6**. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{H}{g}}$. **10.7**. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2b}{3g\sin\alpha}}$. **10.8**. $t = \dfrac{2L}{v_0} + \pi\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$. **10.9**. $T_2/T_1 = 2/\sqrt{3}$. **10.10**. $\omega = \sin\alpha\sqrt{\dfrac{3g}{2l\cos\alpha}} = 1{,}56$ с$^{-1}$. **10.11**. $T = \pi\sqrt{\dfrac{3m}{k}}$.

▷ **11.1**. 27 мм. **11.2**. $P = 2{,}4\cdot 10^8$ Па ≈ 2400 атм. **11.3**. $F = \dfrac{\pi E}{4\mu}(d_0^2 - dd_0)$. **11.4**. $\Delta l = \dfrac{\rho g L}{2E}(L - 2h) \approx 10^{-2}$ мм. **11.5**. 1) $U_{\text{ст}}/U_{\text{пл}} = 2\cdot 10^3$, 2) $U_{\text{ст}}/U_{\text{пл}} = 5\cdot 10^{-4}$. **11.6**. $F = mg + v_0\sqrt{\dfrac{mES}{l}} \approx 2{,}1\cdot 10^5$ Н. **11.7**. $\tau = \dfrac{2l}{v_{\text{зв}}} \approx 4\cdot 10^{-5}$ с; $v = \dfrac{v_{\text{зв}} T_{\text{у}}}{E} \approx 5$ м/с. **11.8**. $\dfrac{\Delta l}{l} \sim 10^{-6}$. **11.9**. $P = E\dfrac{\rho_{\text{в}} - \rho}{3\rho_{\text{в}}(1-2\mu)} \approx 2\cdot 10^4$ атм. **11.10**. $\Delta x = \dfrac{\rho g_0 R^2}{E}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right) \approx 144$ м. **11.11**. $F = \rho v c S \approx 1{,}4$ кН.

▷ **12.1**. 10%, не изменится. **12.2**. $h = H/2$, $x_m = H$. **12.3**. $Q \sim 1{,}3$ л/с. **12.4**. $P = \rho g h = \rho(gh_0 + \frac{1}{2}\omega^2 r^2)$. **12.5**. $Q_1 = \rho\sqrt{\dfrac{2g\Delta h}{S_2^{-2} - S_1^{-2}}}$, $Q_2 = \rho S\sqrt{2g\Delta h}$. **12.6**. 1) $v \approx 4{,}4$ м/с, $Q \approx 3{,}4$ г/с; 2) $v \approx 0{,}06$ м/с, $Q \approx 0{,}024$ г/с. **12.7**. $\mathrm{Re}_1 \sim 10$, $F_1 = 6\pi\eta v r \approx 1{,}7\cdot 10^{-8}$ Н, $\mathrm{Re}_2 \sim 110$, $F_2 \sim \rho v^2 \pi r^2 \approx 10^{-5}$ Н.

12.8. $Q = \dfrac{ab^3\Delta P}{12\eta l} \approx 0{,}083\ \text{см}^3/\text{с}$. **12.9**. $r(y) = r_0\sqrt[4]{\dfrac{H}{H+y}}$. **12.10**. $v_x(y) = \dfrac{\alpha\rho g}{\eta}y(2h-y)$, $v_{\text{ср}} = \dfrac{2\alpha\rho g h^2}{3\eta}$. **12.11**. $t = \dfrac{S}{\sigma}\dfrac{h-h_0}{\sqrt{2gh_0}}$.

Учебное издание

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ КУРСА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ: МЕХАНИКА

Учебно-методическое пособие
по курсу *Общая физика*

Редактор *И. А. Волкова*. Корректор *О. П. Котова*

Подписано в печать 23.11.2011. Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$.
Усл. печ. л. 2,0. Уч.-изд. л. 1,8. Тираж 100 экз. Заказ № 126.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт (государственный университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
E-mail: rio@mail.mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9