

ИЗМЕРЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Возможно, самый важный раздел физики — электромагнитные взаимодействия. Эти взаимодействия не только объясняют все электрические явления, но и обеспечивают силы, благодаря которым вещество на атомном и молекулярном уровне существуют как целое.

Сделаем предварительное замечание. Физики на основе опыта говорят, что в мире или в каждой ограниченной его части существует нечто, что может быть «понято», что в природе существует структура. «Понять» — значит соотнести эту структуру с некоторой структурой в нашем сознании, структурой мысленного образа, структурой порождённой нашим сознанием. В физике эта структура мысленного объекта есть математическая структура. Тогда понятие часть физического мира означает отобразить его структуру на математическую структуру. Построить физическую теорию означает, следовательно, построить математический образ физической системы, под которой понимается любая ограниченная соответствующим образом область физического мира. В области макроскопической электродинамики математическими структурами являются векторные и тензорные поля; в области квантовой физики — алгебры операторов в линейных пространствах. Но гораздо легче начать с основных опытных фактов и предположений и показать, что вытекающие из них следствия действительно описывают некоторую часть природы. Именно этот путь мы и выберем.

Сила электрического взаимодействия имеет простейший вид в том случае, когда заряженные тела неподвижны и находятся в вакууме. Это электростатическая сила, она порождается электрическим зарядом. Масса и заряд тела имеют определённые численные значения, которые свидетельствуют о том, насколько сильно на тело действуют соответственно гравитационная и электростатическая силы. Эти силы действуют независимо друг от друга, и между зарядом тела и его массой не существует определённого соотношения. Сила, действующая между двумя заряженными частицами, пропорциональна произведению зарядов q_1 и q_2 и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними (закон Кулона)

$$F = k_0 \frac{q_1 q_2}{r^2}; \quad [q] = L^{3/2} T^{-1} M^{1/2}. \quad (1)$$

Здесь k_0 — коэффициент пропорциональности, определяемой из эксперимента.

В системе единиц СГС для определения единицы заряда используется выражение (1), в котором k_0 полагается равным единице: единичный заряд по определению взаимодействует с равным электрическим зарядом,

расположенным от него на расстоянии 1 см, с силой в 1 дину. Это абсолютная электростатическая единица количества электричества и обозначается 1 ед. СГСЭ.

В системе СИ заряд определяется через магнитную силу, действующую между двумя одинаковыми элементами токов; это приводит к значительно большей величине единичного заряда, которая связана с единицей СГСЭ через скорость света. Единица заряда в системе СИ называется кулоном (Кл). Кулон и единица СГСЭ заряда связаны соотношением

$$1 \text{ Кл} = 2,998 \cdot 10^9 \text{ ед. СГСЭ},$$

где коэффициент перехода в точности равен скорости света (в СИ), умноженной на 10.

Постоянную k_0 в системе СИ теперь находим из (1):

$$k_0 = 8,988 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}.$$

Это значение обеспечивает надлежащую точность и легко запоминается. В системе СИ k_0 обычно записывают в виде $1/(4\pi\epsilon_0)$, где $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ и называется *электрической постоянной*.

Поскольку между заряженными телами действуют электрические силы, то, следовательно, заряженное тело создаёт вокруг себя некоторое силовое поле. Это поле называется электрическим и характеризуется вектором напряжённости \mathbf{E} , имеющим размерность

$$[E] = \frac{[F]}{[q]} = L^{-1/2} T^{-1} M^{1/2}.$$

\mathbf{E} — силовая (динамическая) характеристика электростатического поля.

В теории электромагнетизма мы постоянно имеем дело с заряженными поверхностями. Они непременно входят в устройства электрических конденсаторов, антенн, линий передач, волноводов и т.п. Чтобы вычислить величину заряда и создаваемого им потенциала, нужно прежде всего уметь вычислять электрические поля, создаваемые распределениями зарядов. Для этой цели удобно применять теорему Гаусса в интегральной или дифференциальной формах

$$\oint \mathbf{E} ds = 4\pi k_0 q; \quad \text{div } \mathbf{E} = 4\pi k_0 \rho. \quad (2)$$

Здесь q — полный заряд внутри замкнутой поверхности S , ρ — плотность заряда.

Электрическое поле неподвижных и не изменяющихся со временем электрических зарядов обладают важным свойством — оно является потенциальным. Это означает, что работа сил такого поля (электростатического) при перемещении пробного электрического заряда, q по произвольному замкнутому контуру равна нулю

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0. \quad (3)$$

Интеграл от поля по замкнутому контуру называется циркуляцией поля по этому контуру.

Электрический потенциал φ определяется как электрическая потенциальная энергия единицы заряда

$$\varphi = \frac{W}{q}, \quad W = k_0 \frac{qQ}{r}.$$

W — потенциальная энергия точечных зарядов Q и q .

Единицей измерения электрического потенциала является Дж/Кл; она называется вольт и в СИ обозначается как В ($1 \text{ В} = 1/300 \text{ ед. СГСЭ}$). Электрический потенциал равен потенциальной энергии, приходящейся на единицу заряда, подобно тому, как электрическое поле равно силе, действующей на единицу заряда. Разность потенциалов между двумя точками представляет собой работу, которую необходимо затратить при перемещении единичного заряда из одной точки в другую. Величину разности потенциалов принято также называть электрическим напряжением или просто напряжением

$$\varphi_b - \varphi_a = - \int_a^b \mathbf{E} d\mathbf{l}. \quad (4)$$

Из формулы (4) следует

$$d\varphi = -\mathbf{E} d\mathbf{l} = -E_l d\mathbf{l}, \quad E_l = -\frac{d\varphi}{d\mathbf{l}},$$

т.е. проекция напряжённости поля на какое-либо направление равна взятой с обратным знаком производной от электростатического потенциала вдоль этого направления. В векторной форме приведённое соотношение записывается в виде

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (5)$$

Итак, электрическое поле можно измерять либо в вольтах на метр (В/м), либо в ньютонах на кулон (Н/Кл), и поле направлено в сторону уменьшения потенциала.

Теорема Гаусса (2) применяется не только для нахождения поля при симметричном расположении зарядов. С её помощью можно вывести очень важное дифференциальное соотношение, связывающее потенциал в данной точке с объёмной плотностью зарядов в этой же точке. Действительно, т.к. формулы (2) и (4) можно представить в виде

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z};$$

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

то получаем

$$\Delta \varphi \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -4\pi\rho. \quad (6)$$

Это соотношение известно под названием уравнения Пуассона и представляет собой искомое локальное соотношение между потенциалом и плотностью заряда. Если в некоторой области пространства нет электрических зарядов, то потенциал в этой области удовлетворяет уравнению

$$\Delta \varphi = 0. \quad (7)$$

Это соотношение называется *уравнением Лапласа*. Оно обладает замечательным свойством. Если требуется найти его решение в какой-то области пространства, то для этого достаточно знать потенциал в различных точках замкнутой поверхности, окружающей интересующую нас область пространства. Найденное решение — единственное, т.к. для уравнения справедлива теорема единственности. Моделирование плоских электростатических полей предполагает знание свойств уравнения Лапласа.

Внутренние заряды в проводниках в отличие от диэлектриков могут перемещаться под действием приложенного электрического поля. Движение заряженных частиц в проводниках под действием приложенного электрического поля называется электрическим током, а способность проводников проводить ток — электропроводностью.

Количественной характеристикой тока является вектор плотности тока или просто плотность тока \mathbf{j} .

$$\mathbf{j} = nq\mathbf{v}.$$

Здесь q — заряд частицы, n — плотность частиц, \mathbf{v} — средняя скорость направленного движения частиц. Величина \mathbf{j} определяет количество электричества, протекающего за 1 с через 1 см^2 , ориентированную перпендикулярно \mathbf{j} . Если задана какая-либо поверхность S , то через неё в единицу времени проходит количество электричества

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s}.$$

Эта величина называется силой тока и имеет размерность

$$[I] = \frac{[q]}{[t]} = L^{3/2}T^{-2}M^{1/2}.$$

Поэтому единицей силы тока в СГСЭ будет $1 \text{ г}^{1/2}\text{см}^{3/2}\text{с}^{-2}$. Эта величина, однако, очень мала, и на практике пользуются большей единицей — ампером (А).

$$1 \text{ А} = 1 \frac{\text{Кл}}{\text{с}} = 3 \cdot 10^9 \text{ единиц СГСЭ силы тока.}$$

Плотность тока имеет размерность

$$[j] = M^{1/2}L^{-1/2}T^{-2}$$

и на практике измеряется в $\text{А}/\text{см}^2$.

Вектор плотности тока в общей случае может меняться от точки к точке и зависеть от времени. Поэтому можно считать, что существует векторное поле плотности тока (*токовое поле*), а также токовые линии, т.е. линии, касательная к которым в каждой их точке имеет направление существующего в этой точке вектора \mathbf{j} . Это поле удовлетворяет важному соотношению, которое следует из закона сохранения заряда

$$\text{div } \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (8)$$

Здесь ρ — плотность заряда. Соотношение (8) называется уравнением непрерывности и выражает математически закон сохранения заряда. Сравним (8) с теоремой Гаусса

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho.$$

Можно проводить аналогию между электрическим \mathbf{E} и токовым \mathbf{j} полями, причём если источником \mathbf{E} является заряд ρ , то источником токового поля — $\partial\rho/\partial t$ — временное изменение заряда.

Электрические силовые линии начинаются и кончаются в точках, в которых плотность заряда отлична от нуля, токовые же линии начинаются там, где $(\partial\rho/\partial t) \neq 0$. Поэтому, если плотность тока не зависит от времени (такой ток называется постоянным), то ему может соответствовать только не зависящая от времени плотность заряда, т.е. токовое поле в этом случае не будем иметь источников, и, следовательно, токовые линии будут замкнутыми. Таким образом, в случае постоянного тока токовые линии всегда замкнуты.

Электрическое поле и электрический заряд связаны между собой двояко: с одной стороны поле порождается зарядом, а с другой — оказывает действие на электрический заряд.

Но не только электрическое поле связано таким образом с электрическим зарядом. Существует ещё один вид поля — магнитное поле, которое, как и электрическое, создаётся электрическим зарядом и воздействует на него. Других полей, кроме электрического и магнитного, которые были бы связаны с электрическим зарядом, в природе не существует. Оба поля органически связаны между собой и образуют единое целое — электромагнитное поле с двумя составными частями: полем электрическим и полем магнитным. Оба поля являются векторными и могут зависеть от (\mathbf{r}, t) .

Введём динамическую характеристику магнитного поля — \mathbf{B} и назовём этот вектор *вектором магнитной индукции*. Линии, касательные к которым в каждой точке направлены вдоль \mathbf{B} , называются *магнитными силовыми линиями*.

Опыт однозначно показывает, что выражение для силы, испытываемой зарядом q , движущимся в магнитном поле со скоростью \mathbf{v} , должно иметь структуру векторного произведения $[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$. Примем, что

$$\mathbf{F} = \frac{q}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{B}].$$

При таком выборе константы перед векторным произведением поля \mathbf{E} и \mathbf{B} будут иметь одинаковую размерность:

$$[B] = [E] = L^{-1/2}T^{-1}M^{1/2}$$

и измеряться в одинаковых единицах: $\text{см}^{-1/2}\text{с}^{-1}\text{г}^{1/2}$. Построенная таким образом система называется *гауссовой* (СГС). В системе СИ \mathbf{B} измеряется в единицах E , делённых на м/с: следовательно $[B] = \text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-2} = \text{Н}/(\text{А} \cdot \text{м})$. Этой единице присвоено специальное наименование *тесла* (Тл). Прежде, вместо теслы использовалась эквивалентная единица измерения вебер/м². По причинам исторического характера величину \mathbf{B}

называют *магнитной индукцией*. Однако теперь предпочитают её именовать просто *магнитным полем*. В системе СГС величина \mathbf{B} измеряется в гауссах (Гс):

$$1 \text{ тесла} = 10^4 \text{ гаусс}; \quad B_{\text{СИ}} \Leftrightarrow \frac{B_{\text{СГС}}}{c}.$$

Таким образом, любое уравнение теории электромагнетизма можно записать в системе СИ путём замены $\mathbf{B}/c \rightarrow \mathbf{B}_{\text{СИ}}$.

Суммарная сила, действующая на заряд в электрическом и магнитном полях, определяется формулой

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] \right).$$

и называется *силой Лоренца*. Из этой формулы следует, что векторная природа полей \mathbf{E} и \mathbf{B} не одинакова. Для разъяснения этого важного обстоятельства, вспомним, что векторные произведения двух обычных векторов в правовинтовой (R) и левовинтовой (L) системах имеют прямо противоположные направления. Направления таких векторов, как смещение, скорость, ускорение, сила, напряжённость электрического поля, не зависят от того, пользуемся мы R - или L -системой. Это означает, что если произвести пространственное отражение, при котором направления всех трёх осей координат изменяются на обратные, то проекции вышеуказанных векторов на новые оси также изменят свой знак. Такие векторы называются *полярными*.

Но пространственное отражение представляет собой переход от R -к L -системе, при котором проекции на оси координат векторного произведения обычных, т.е. полярных, векторов не изменяют, а сохраняют свой знак. Отсюда следует, что если бы вектор \mathbf{B} имел такую же природу как и \mathbf{E} , т.е. был бы полярным, то взаимная ориентация двух составляющих силы \mathbf{F} : силы $q\mathbf{E}$ и магнитной силы $\frac{q}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$ изменялась бы при переходе от R - к L -системе. Такое изменение ориентации физически абсурдно. Следовательно, вектор \mathbf{B} не может быть полярным. Иными словами, при пространственном отражении проекции \mathbf{B} , в отличие от вектора \mathbf{E} , не должны изменяться. Поэтому \mathbf{B} следует рассматривать скорее как псевдовектор. Его называют *аксиальным вектором*. Векторное произведение двух полярных или двух аксиальных векторов всегда дают аксиальный вектор; векторное произведение полярного и аксиального векторов представляют собой полярный вектор. Если какая-либо величина является полярным вектором (например, сила \mathbf{F}), то её нельзя представить в виде суммы полярного и аксиального векторов; все слагаемые такой величины должны быть полярными векторами.

Итак, магнитное поле воздействует на движущийся электрический заряд и одновременно создаётся движущимся электрическим зарядом. Одну сторону этой связи между зарядом и магнитным полем мы рассмотрели. Переходя к рассмотрению другой стороны, предварительно заметим, что т.к. электрический ток — совокупность движущихся зарядов, то естественно, что ток должен создавать магнитное поле. Определить это поле легче, чем, поле, создаваемое отдельным зарядом. Поэтому определим магнитное поле, создаваемое постоянным электрическим током I . Это можно сделать с помощью закона Био-Савара

$$d\mathbf{B} = \frac{I}{c} \frac{[d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3}, \quad \mathbf{B} = \frac{I}{c} \oint \frac{[\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3} \quad (9)$$

или по теореме о циркуляции вектора \mathbf{B}

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I. \quad (10)$$

В дифференциальной форме (в случае постоянных полей)

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (11)$$

Здесь \mathbf{j} — вектор плотности тока движущихся зарядов.

Одного уравнения (11) недостаточно для однозначного определения магнитного поля. Для определения любого векторного поля нужно знать две его основные характеристики: дивергенцию и ротор. Т.к. магнитных зарядов в природе не существует, то

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{s} = 0, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0.$$

Итак, мы имеем два основных уравнения

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad \text{div } \mathbf{B} = 0,$$

которые полностью определяют магнитное поле, порождаемое любыми постоянными токами, и два уравнения, определяющие электрическое поле

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0; \quad \text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho,$$

порождаемое зарядами плотностью ρ . Это поля в свободном пространстве или, как обычно говорят, в вакууме. Учёт материальной среды требует знания электрических и магнитных свойств среды. С методами измерения электрических и магнитных полей Вы познакомитесь в лаборатории.