

МОДУЛИРОВАННЫЕ КОЛЕБАНИЯ, СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ, ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

Учебно-методическое пособие

МОСКВА
МФТИ
2009

Предисловие

Модулированные колебания, элементы спектрального анализа, линейная фильтрация — вопросы, которые входят в настоящее время в программу общего курса физики и являются составной частью раздела «Электричество и магнетизм». Пособие определяет круг идей, на которых следует сосредоточить внимание при изучении этих тем на семинарах, обращая внимание не только на формальные математические выкладки, но и (в большей степени) на физический смысл полученных результатов.

Модулированные колебания: здесь полезно обратить внимание на соотношение временных масштабов: характерные времена модуляции и период несущего колебания, а также на векторное изображение колебаний, модулированных по амплитуде или (и) по фазе.

При изучении *спектров колебательных процессов* следует подчеркнуть на конкретных примерах связь между шириной спектра и длительностью сигнала — соотношение неопределённостей, а также обратить внимание на важное различие спектров периодических сигналов и одиночных импульсов. На простых примерах полезно продемонстрировать, как изменяется спектр сигнала при его смещении во времени либо при умножении на несущее колебание.

Наконец, *необходимо подчеркнуть особую роль гармонических колебаний по отношению к линейным стационарным фильтрам*, на которых основан спектральный анализ линейных систем.

В пособии подробно рассмотрены некоторые задачи, включённые в задание, а также дополнительные задачи. Последний раздел пособия (Дополнение) выходит за рамки обязательных требований и предназначен в большей степени для преподавателей, однако может быть полезным и для любознательных студентов.

Авторы признательны преподавателям кафедры общей физики МФТИ Д.А. Александрову, В.Е. Белонучкину, Н.С. Берюлёвой, В.В. Лобачёву за полезные замечания, сделанные ими при чтении рукописи, и поддержку в работе.

1. Линейные фильтры. Гармонические колебания.

Частотная характеристика

Во многих случаях реальные электрические системы (например, показанные на рис. 1) ведут себя как линейные фильтры.

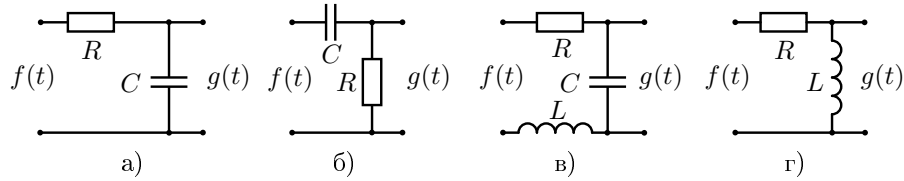


Рис. 1

Напомним, фильтр называется линейным, если имеет место принцип суперпозиции: отклик фильтра на сумму внешних воздействий равен сумме откликов на каждое воздействие.

Например, закон Кирхгофа для последовательного колебательного контура (сумма падений напряжений на всех участках замкнутого контура равна сумме ЭДС, рис. 1в) имеет вид

$$L\ddot{q} + \dot{q}R + \frac{q}{C} = f(t),$$

где $q(t)$ — заряд конденсатора, $f(t)$ — внешняя ЭДС, возбуждающая колебания в контуре. Для выходного сигнала (напряжение на конденсаторе $g(t) = q/C$) получаем уравнение

$$\ddot{g} + 2\delta\dot{g} + \omega_0^2 g = \omega_0^2 f(t),$$

где $\delta = R/2L$, $\omega_0^2 = 1/LC$.

Пусть $g_1(t)$ — выходной сигнал контура при входном сигнале (внешней ЭДС) $f_1(t)$, тогда

$$\ddot{g}_1 + 2\delta\dot{g}_1 + \omega_0^2 g_1 = \omega_0^2 f_1(t).$$

При внешней ЭДС $f_2(t)$ выходной сигнал есть $g_2(t)$

$$\ddot{g}_2 + 2\delta\dot{g}_2 + \omega_0^2 g_2 = \omega_0^2 f_2(t).$$

Пусть теперь внешняя ЭДС является линейной суперпозицией воздействий $f_1(t)$ и $f_2(t)$, т. е.

$$f(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t),$$

тогда выходной сигнал фильтра $g(t)$ подчиняется уравнению

$$\ddot{g} + 2\delta\dot{g} + \omega_0^2 g = \omega_0^2 [c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)].$$

Домножив левые и правые части уравнений для $g_1(t)$ и $g_2(t)$ на c_1 и c_2 соответственно и сложив их, получим, что сигнал $g(t)$ может быть представлен в виде

$$g(t) = c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t),$$

т. е. принцип суперпозиции справедлив.

Докажете аналогичным образом, полагая справедливым закон Кирхгофа, что все изображённые на рис. 1 фильтры являются линейными: они описываются линейными дифференциальными уравнениями, и принцип суперпозиции для них выполняется.

Обобщая сказанное, изобразим произвольную линейную систему (фильтр) с помощью блок-схемы:

$$f(t) \rightarrow \boxed{L} \rightarrow g(t),$$

где $f(t)$ — внешнее воздействие (входной сигнал фильтра), например, внешняя ЭДС, действующая на колебательный контур, $g(t)$ — выходной сигнал (отклик фильтра), например, напряжение на конденсаторе контура.

Равенство $g(t) = L[f(t)]$ означает, что выходной сигнал $g(t)$ есть результат действия линейной системы на входной сигнал $f(t)$. Тогда свойство линейности (принцип суперпозиции) можно символически записать в виде равенства

$$L[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 L[f_1(t)] + c_2 L[f_2(t)].$$

Мы будем рассматривать далее линейные стационарные фильтры, т. е. линейные фильтры с постоянными, не зависящими от времени параметрами L , C , R . Такие фильтры описываются линейными уравнениями с *постоянными* коэффициентами.

Из свойства линейности следует простое правило для нахождения отклика фильтра на произвольное внешнее воздействие $f(t)$: необходимо представить это воздействие в виде суперпозиции некоторых элементарных слагаемых, а затем найти отклик на каждое слагаемое. Окончательный результат получается суммированием откликов. В этом состоит суть спектрального подхода к решению задачи линейной фильтрации.

Выбор базиса (элементарных слагаемых) неоднозначен. Естественно попытаться разложить внешнее воздействие на такие слагаемые, отклик на которые находится наиболее простым образом. Такими слагаемыми являются так называемые **собственные функции фильтра**, т. е. функции $\Psi_n(t)$, удовлетворяющие равенству

$$L[\Psi_n(t)] = H_n \Psi_n(t).$$

Это равенство означает, что если внешнее воздействие описывается собственной функцией, то отклик описывается той же функцией (с некоторым множителем H_n , который математики называют собственным значением).

Для линейных стационарных фильтров такими собственными функциями являются функции $e^{i\omega t}$ — гармонические колебания, записанные в комплексной форме:

$$L[e^{i\omega t}] = H(\omega)e^{i\omega t},$$

причём каждой частоте ω соответствует своё собственное значение (т. е. множитель H является функцией частоты ω : $H = H(\omega)$). Эту в общем случае комплексную функцию $H(\omega) = A(\omega)e^{i\varphi(\omega)}$ называют в физике частотной характеристикой (или передаточной функцией) фильтра.

Функцию $A(\omega) = |H(\omega)|$ называют амплитудной характеристикой фильтра (амплитуда вынужденных колебаний в функции частоты ω), а функцию $\varphi(\omega) = \arg H(\omega)$ называют фазовой характеристикой (сдвиг по фазе вынужденных колебаний относительно внешнего гармонического воздействия $e^{i\omega t}$).

Задача 1. Найти частотные характеристики $H(\omega)$ фильтров, изображённых на рис. 1. Показать, что функции $e^{i\omega t}$ являются собственными функциями этих фильтров.

Частотная характеристика определяет отклик на входной гармонический сигнал единичной амплитуды — внешнюю ЭДС $e^{i\omega t}$.

1. RC -фильтр (рис. 1а). Закон Кирхгофа имеет вид

$$\dot{q}R + \frac{q}{C} = e^{i\omega t}.$$

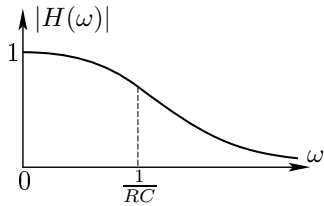


Рис. 2

Для рис. 1а выходной сигнал — напряжение на конденсаторе $g(t) = \frac{q}{C}$, поэтому имеем

$$\dot{g} + \frac{1}{RC}g = \frac{1}{RC}e^{i\omega t}. \quad (1)$$

Ищем решение (1) в виде

$$g(t) = H(\omega)e^{i\omega t}.$$

Подставляя в (1), получаем (поскольку $\dot{g} = H(\omega)(i\omega)e^{i\omega t}$) после сокращения на $e^{i\omega t}$:

$$H(\omega)(i\omega) + \frac{1}{RC}H(\omega) = \frac{1}{RC},$$

откуда

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega RC}, \quad |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}, \quad \varphi(\omega) = \arctg(\omega RC).$$

Амплитудная характеристика RC -фильтра показана на рис. 2.

2. Для рис. 1б выходной сигнал — напряжение на сопротивлении $g(t) = \dot{q}R$. Поскольку напряжение на конденсаторе изменяется по закону $H(\omega)e^{i\omega t}$, то заряд на конденсаторе: $q(t) = CH(\omega)e^{i\omega t}$ и выходной сигнал: $g(t) = \dot{q}R = i\omega RCH(\omega)e^{i\omega t}$. Окончательно получаем

$$H_R(\omega) = \frac{i\omega RC}{1 + i\omega RC}, \quad |H_R(\omega)| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}, \quad \varphi(\omega) = \arctg \frac{1}{\omega RC}.$$

3. Колебательный контур (рис. 1в). Закон Кирхгофа:

$$\dot{q}R + \frac{q}{C} + L\ddot{q} = e^{i\omega t}.$$

Для выходного сигнала $g(t) = \frac{q}{C}$ получаем уравнение

$$\ddot{g} + 2\delta\dot{g} + \omega_0^2 g = \omega_0^2 e^{i\omega t}. \quad (2)$$

Ищем решение (2) в виде

$$g(t) = H(\omega)e^{i\omega t}.$$

Подставляя в (2), имеем (поскольку $\dot{g}(t) = i\omega H(\omega)e^{i\omega t}$, $\ddot{g} = (i\omega)^2 H(\omega)e^{i\omega t}$):

$$-\omega^2 H(\omega) + 2\delta(i\omega)H(\omega) + \omega_0^2 H(\omega) = \omega_0^2.$$

Окончательно находим :

$$H(\omega) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\delta\omega},$$

$$|H(\omega)| = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \quad (\text{рис. 3}), \quad \varphi(\omega) = -\arctg \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

4. RL -фильтр (рис. 1г). Закон Кирхгофа:

$$RI + L\dot{I} = e^{i\omega t}. \quad (3)$$

Ищем решение в виде $I = H_I(\omega)e^{i\omega t}$. Подставляя в (3), получаем

$$RH_I(\omega)e^{i\omega t} + Li\omega H_I(\omega)e^{i\omega t} = e^{i\omega t},$$

следовательно:

$$H_I(\omega) = \frac{1}{R + i\omega L}.$$

Итак,

$$I = \frac{1}{R + i\omega L} e^{i\omega t}.$$

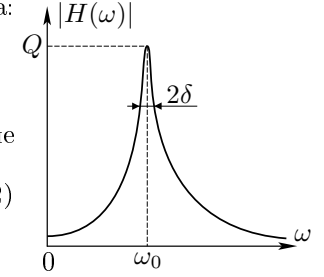


Рис. 3

Выходной сигнал

$$g(t) = LI = \frac{i\omega L}{R + i\omega L} e^{i\omega t},$$

$$H(\omega) = \frac{i\omega L}{R + i\omega L}, \quad |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{R}{\omega L})^2}}, \quad \varphi(\omega) = \arctg \frac{R}{\omega L}.$$

2. Векторное представление гармонических колебаний

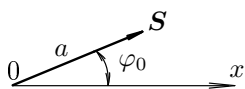


Рис. 4

Напомним, что гармоническое колебание

$$f(t) = a \cos(\omega t + \varphi_0)$$

изображают вектором \mathbf{S} , длина которого равна амплитуде колебания a , а угол между вектором и горизонтальной осью x — начальной фазе колебания φ_0 (рис. 4). При этом частота ω гармонического колебания предполагается заданной. Смысл этого представления состоит в следующем.

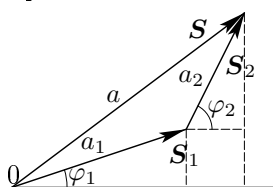


Рис. 5

Вообразим, что вектор \mathbf{S} вращается вокруг точки O с угловой скоростью ω против часовой стрелки (а мы сделали мгновенную фотографию в момент $t = 0$, когда угол наклона вектора $\Phi(t) = \omega t + \varphi_0$ равен φ_0). Заметим, что проекция вектора \mathbf{S} на ось x при вращении изменяется по закону $f(t) = a \cos(\omega t + \varphi_0)$, т. е. совершает гармонические колебания.

Геометрическое изображение гармонического колебания $f(t)$ в виде вектора \mathbf{S} удобно использовать при решении задачи сложения колебаний. Пусть мы имеем две скалярные величины f_1 и f_2 , изменяющихся по гармоническому закону с одинаковой частотой ω :

$$f_1(t) = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad f_2(t) = a_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

Необходимо найти колебание $f(t)$ (скалярную величину), являющееся суммой колебаний $f_1(t)$ и $f_2(t)$:

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t).$$

Изобразим колебания $f_1(t)$ и $f_2(t)$ в виде векторов \mathbf{S}_1 и \mathbf{S}_2 (рис. 5), вектор \mathbf{S} — суммарный вектор. Векторы \mathbf{S}_1 , \mathbf{S}_2 , \mathbf{S} образуют треугольник, причём внешний угол треугольника (угол $\Delta\varphi$ между векторами \mathbf{S}_1 и \mathbf{S}_2) равен разности фаз колебаний f_1 и f_2 . Представим себе, что векторы \mathbf{S}_1 и \mathbf{S}_2 вращаются с одной и той же угловой скоростью ω против часовой стрелки. Ясно, что угол φ между векторами \mathbf{S}_1 и \mathbf{S}_2 остаётся при таком вращении неизменным, а суммарный вектор \mathbf{S} повернётся за время t (как и \mathbf{S}_1 и \mathbf{S}_2) на угол ωt , т. е.

весь треугольник векторов вращается как одно целое. Причём очевидно, что проекция суммарного вектора \mathbf{S} на ось x в произвольный момент времени t равна сумме проекций векторов \mathbf{S}_1 и \mathbf{S}_2 :

$$a \cos(\omega t + \varphi) = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + a_2 \cos(\omega t + \varphi_2),$$

здесь a — длина вектора \mathbf{S} , а φ — его угол наклона при $t = 0$.

Итак, сумма гармонических колебаний одинаковой частоты является гармоническим колебанием той же частоты. Амплитуда a суммарного колебания может быть найдена из треугольника векторов по теореме косинусов:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (4)$$

3. Модулированные колебания. Амплитудная и фазовая модуляции

Для передачи сигналов — музыки, речи, телевизионного изображения — необходимо нарушение синусоидальности. Отклонение от синусоидальности и выражает содержание передаваемой информации. Колебательный процесс, отличный от гармонического, назовём модулированным колебанием. Примеры таких процессов (их осциллограммы) приведены на рис. 6.

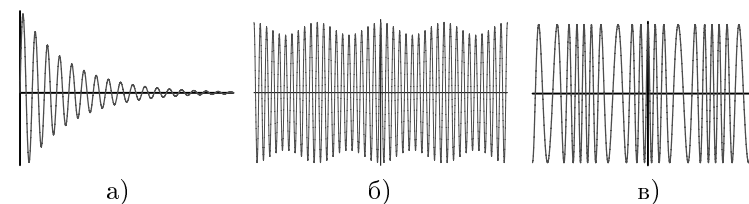


Рис. 6

Будем записывать модулированные колебания в виде

$$f(t) = a(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)). \quad (5)$$

В отличие от гармонического колебания, здесь $a(t)$ и $\varphi(t)$ — меняющиеся во времени величины. Форма записи (5) особенно целесообразна в том случае, когда $a(t)$ и $\varphi(t)$ — медленно меняющиеся функции времени, т. е. на интервалах времени τ , существенно превышающих период гармонического (так называемого «несущего») колебания частоты ω_0 :

$$\tau \gg \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad (6)$$

эти функции остаются практически неизменными: $a(t) \approx a_0$ и $\varphi(t) \approx \varphi_0$. Такое колебание называется квазигармоническим. В этом случае медленно меняющиеся величины $a(t)$ и $\varphi(t)$ принято называть амплитудой и начальной фазой модулированного колебания.

Итак, квазигармоническое колебание можно характеризовать двумя параметрами: периодом несущего колебания $T_0 = 2\pi/\omega_0$ и временем $\tau \gg T_0$, характеризующим быстроту изменения амплитуды $a(t)$ и (или) начальной фазы $\varphi(t)$.

Для передачи радиосигналов используются высокочастотные несущие колебания (от сотен килогерц до сотен мегагерц), в то время как модуляционные отклонения от синусоидальности, которые описываются функциями $a(t)$ и $\varphi(t)$, характеризуются своей медленностью, т. е. сравнительно низкими звуковыми частотами (от десятков до тысяч герц), таким образом, неравенство (6) выполняется, как правило, с большим запасом. Для описания модулированных колебаний используется следующая терминология: говорят, что функция $a(t)$ описывает закон амплитудной модуляции, а функция $\varphi(t)$ — закон фазовой модуляции. Именно в этих функциях и заложена передаваемая информация.

Если $\varphi(t) = \varphi_0 = \text{const}$, то

$$f(t) = a(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (7)$$

где $a(t) \geq 0$. Такое колебание называют модулированным по амплитуде.

Если $a(t) = a_0 = \text{const}$, то

$$f(t) = a_0 \cos(\omega_0 t + \varphi(t)). \quad (8)$$

Такое колебание называют модулированным по фазе.

В общем случае имеем как амплитудную, так и фазовую модуляцию, т. е. колебание вида (5).

Поставим в соответствие реальному модулированному колебанию (5) комплексную функцию

$$z(t) = a(t)e^{i[\omega_0 t + \varphi(t)]}. \quad (9)$$

Колебание (5) является действительной частью комплексной функции $z(t)$: $f(t) = \text{Re } z(t)$. Функция $z(t)$ представляется в виде произведения функции $f_0(t) = a(t)e^{i\varphi(t)}$, содержащей всю информацию о законах модуляции $a(t)$ и $\varphi(t)$, и функции $e^{i\omega_0 t}$ — гармонического несущего колебания (записанного в комплексной форме)

$$z(t) = f_0(t)e^{i\omega_0 t}.$$

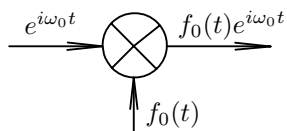


Рис. 7

Операцию модуляции — перемножение модулирующего сигнала $f_0(t)$ на модулируемое высокочастотное гармоническое колебание $e^{i\omega_0 t}$ — принято изображать в виде блок-схемы (рис. 7).

Таким образом, неизменными составными частями любой передающей радиостанции являются: генератор высокочастотного гармонического колебания $e^{i\omega_0 t}$, источник сигнала $f_0(t)$, содержащего передаваемую информацию, и модулятор — устройство, осуществляющее их перемножение.

Так же, как и гармонические колебания, квазигармонические процессы изображают в виде векторов. Если гармоническое колебание

$$f(t) = a_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (10)$$

изображается вектором S_0 , имеющим фиксированную длину a_0 и направление φ_0 , то

модулированное колебание на той же векторной диаграмме естественно изобразить в виде вектора, длина которого $a(t)$ и (или) угол наклона — $\varphi(t)$ медленно изменяются (медленно — если речь идёт о квазигармоническом колебании). В частности, амплитудно-модулированное колебание (7) изображается вектором неизменного направления φ_0 , длина которого изменяется (рис. 8а), а колебание (8), модулированное по фазе, — вектором неизменной длины, угол наклона которого $\varphi(t)$ изменяется (качания вектора на рис. 8б).

Аргумент косинуса в (8) называют фазой модулированного колебания $\Phi(t) = \omega_0 t + \varphi(t)$, причём в отличие от гармонического колебания скорость изменения фазы $\dot{\Phi}$ (величина, которую можно назвать частотой ω) является функцией времени

$$\omega(t) = \dot{\Phi}(t) = \omega_0 + \dot{\varphi}(t). \quad (11)$$

Если выполнено условие квазигармоничности (6), то $\dot{\varphi}(t) \ll \omega_0$, т. е. меняющаяся во времени частота $\omega(t)$ мало отклоняется от частоты ω_0 гармонического колебания (10).

Отметим также, что если $\varphi(t)$ меняется по линейному закону $\varphi(t) = \Omega t$, то мы получаем из (11)

$$\omega = \omega_0 + \Omega, \quad (12)$$

т. е. гармоническое колебание со смещённой частотой, причём $\Omega \ll \omega_0$ при условии (6).

В системе координат, в которой гармоническое колебание частоты ω_0 изображается неподвижным вектором, колебание с частотой $\omega = \omega_0 + \Omega$ изображается вектором, медленно вращающимся против часовой стрелки с частотой Ω , если $\Omega > 0$ и по часовой стрелке при $\Omega < 0$.

Оциллограммы процессов на рис. 8а, б являются примерами амплитудно-модулированных колебаний, а на рис. 8в — пример колебания, модулированного по фазе.

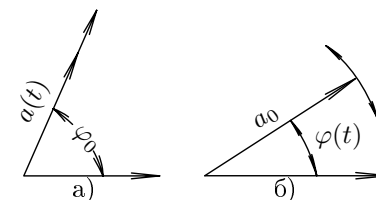


Рис. 8

4. Спектральное разложение

4.1. Действительная и комплексная форма спектральных разложений

Итак, при изучении линейных систем (фильтров) возникает необходимость представления произвольного сигнала (модулированного колебания) $f(t)$ в виде

$$f(t) = \sum c_n e^{i\omega_n t}. \quad (13)$$

Представление (13) называется разложением сигнала $f(t)$ в ряд Фурье, а отдельные слагаемые ряда (составляющие гармонические колебания) $c_n e^{i\omega_n t}$ называют гармониками. Совокупность коэффициентов c_n называется спектром функции $f(t)$, при этом $|c_n|$ определяет амплитуду гармоники частоты ω_n , а $\arg c_n$ — начальную фазу.

Равенство (13) утверждает, что можно подобрать амплитуды и фазы слагаемых гармонических колебаний, а также их частоты так, чтобы получить в сумме заданный сигнал $f(t)$. В дальнейшем мы будем говорить (если не делается специальных оговорок) о сигналах, описываемых *действительными функциями* $f(t)$. Подробнее условия, налагаемые на функции $f(t)$, при выполнении которых возможно разложение (13), изучаются в курсах математики. Здесь же отметим замечательные математические свойства гармонических функций.

Во-первых, гармоническое колебание $e^{i\omega_0 t}$ частоты ω_0 не может быть представлено суперпозицией гармонических колебаний $\sum c_n e^{i\omega_n t}$ других частот $\omega_n \neq \omega_0$, какие бы коэффициенты c_n , т. е. амплитуды и фазы слагаемых гармоник, мы ни старались подобрать. Математически это свойство называют ортогональностью: функция $e^{i\omega_0 t}$ не имеет «проекции» на любую другую функцию $e^{i\omega_n t}$ при $\omega_0 \neq \omega_n$, подобно тому как вектор, параллельный оси z , невозможно представить в виде суммы векторов, параллельных осям x и y .

Второе важнейшее математическое свойство — единственность представления (13): существует единственный набор необходимых частот ω_n и единственный набор отвечающих этим частотам амплитуд a_n и фаз φ_n , обеспечивающих представление функции $f(t)$ в виде суперпозиции гармонических функций. Наконец, не вдаваясь в математические детали, отметим ещё одно важное обстоятельство: любой физически реализуемый колебательный процесс может быть представлен в виде суммы (быть может, в виде непрерывной суммы — интеграла) гармонических колебаний.

Наряду с разложением (13) часто используется разложение действительных функций в ряд Фурье вида

$$f(t) = \sum a_n \cos(\omega_n t + \varphi_n). \quad (14)$$

Какова связь между коэффициентами этих разложений: комплексным коэффициентом c_n и действительными числами a_n, φ_n ? Каждое слагаемое ряда (14) можно с помощью формулы Эйлера:

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

представить в виде

$$a_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) = \frac{a_n}{2} e^{i\varphi_n} e^{i\omega_n t} + \frac{a_n}{2} e^{-i\varphi_n} e^{-i\omega_n t},$$

откуда ясно, что разложения (13) и (14) будут тождественны, если суммирование в (13) проводить как по положительным частотам ω_n (имеющим понятный физический смысл), так и по отрицательным (формально введённым) частотам $-\omega_n$, причём соответствующие коэффициенты имеют вид

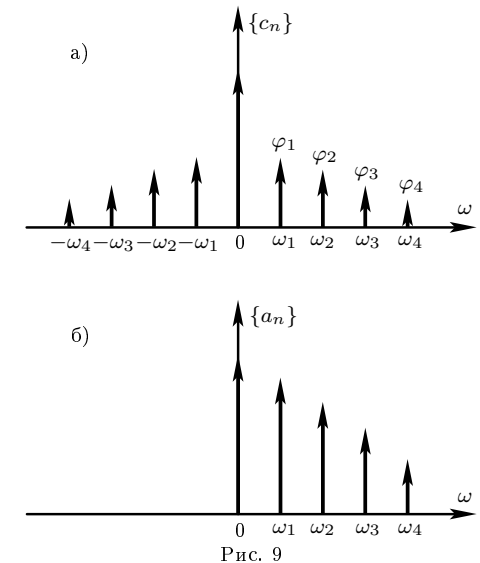
$$c_n = \frac{1}{2} a_n e^{i\varphi_n}, \quad c_{-n} = \frac{1}{2} a_n e^{-i\varphi_n} \quad (15)$$

(коэффициенты c_{-n} соответствуют отрицательным частотам $-\omega_n$), т. е. каждому слагаемому $a_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$ ряда (13) соответствуют два слагаемых $c_n e^{i\omega_n t}$ и $c_{-n} e^{-i\omega_n t}$ ряда (14).

Мы видим, что при разложении действительных функций $f(t)$ в ряд Фурье коэффициенты разложения c_{-n} на отрицательных частотах связаны с коэффициентами c_n простым соотношением $c_n = c_{-n}^*$, т. е. являются комплексно-сопряжёнными. Таким образом, гармоники с отрицательными частотами не несут какой-либо дополнительной информации о сигнале $f(t)$.

Спектр функции $f(t)$ принято изображать в виде графика (рис. 9): длина стрелочки на каждой частоте ω_n определяется модулем коэффициента c_n (т. е. амплитудой соответствующего гармонического колебания). Следует указать также фазы φ_n спектральных компонент.

Соответствующее разложение (14) (в ряд косинусов) представлено на графике рис. 9б: здесь нет отрицательных частот, а длины стрелочек на положительных частотах в соответствии с (15) удваиваются. При этом постоянные



составляющие (на частоте $\omega = 0$) в разложениях (13) и (14) одинаковы: $a_0 = c_0$.

Подчёркнём ещё раз, что мы говорим о разложении в ряд Фурье (либо ряд (13), либо ряд (14)) *действительных* функций $f(t)$.

Рассмотрим вначале лишь несколько простых физически интересных примеров.

4.2. Примеры спектральных разложений

Задача 2. $f(t) = a_0 \cos^2 \omega_0 t$. Используя известное тригонометрическое тождество, запишем

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{a_0}{2} \cos 2\omega_0 t = \frac{a_0}{2} + \frac{a_0}{4} e^{i2\omega_0 t} + \frac{a_0}{4} e^{-i2\omega_0 t}. \quad (16)$$

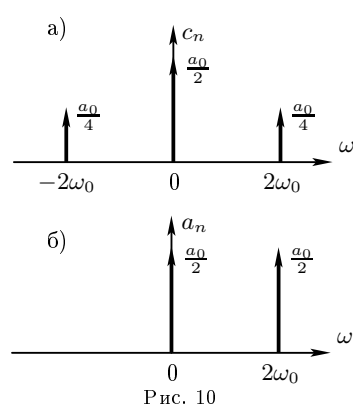


Рис. 10

Первое из равенств (16) — разложение в ряд (14), второе — в ряд (13). Константу $a_0/2$ можно рассматривать как гармоническое колебание нулевой частоты, поэтому равенство (16) — это есть представление колебания $f(t)$ в виде суммы двух гармонических колебаний одинаковой амплитуды $a_0/2$ с частотами $\omega_1 = 0$ и $\omega_2 = 2\omega_0$ (во втором случае с частотами $2\omega_0$ и $-2\omega_0$). Спектр процесса $f(t)$ представлен на рис. 10а (разложение в ряд (13)) и на рис. 10б (разложение в ряд (14)).

Задача 3. Рассмотрим амплитудно-модулированное колебание

$$f(t) = a(t) \cos \omega_0 t, \quad \text{где } a(t) = a_0(1 + m \cos \Omega t). \quad (17)$$

Константа $m < 1$ называется глубиной модуляции. Мы имеем

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t = \\ &= a_0 \cos \omega_0 t + \frac{ma_0}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{ma_0}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t. \end{aligned} \quad (18)$$

Итак, амплитудно-модулированное колебание с законом модуляции (17) представляется в виде суммы трёх гармонических колебаний (трёх гармоник):

$$f_0(t) = a_0 \cos \omega_0 t, \quad f_1(t) = \frac{ma_0}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t, \quad f_2(t) = \frac{ma_0}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t$$

с частотами соответственно ω_0 , $\omega_0 + \Omega$, $\omega_0 - \Omega$ и амплитудами a_0 , $\frac{ma_0}{2}$, $\frac{ma_0}{2}$. Колебание $f_0(t)$ называется несущим колебанием, а $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — боковыми гармониками. Условие квазигармоничности колебания $f(t)$: $\Omega \ll \omega_0$. В

этом случае целесообразно рассматривать колебания $f_1(t)$ и $f_2(t)$ как колебания частоты ω_0 , начальная фаза которых меняется по закону $\varphi_1(t) = +\Omega t$ и $\varphi_2(t) = -\Omega t$. Другими словами, на векторной диаграмме, где несущее колебание изображается неподвижным вектором \mathbf{S}_0 , колебания $f_1(t)$, $f_2(t)$ изображаются соответственно векторами \mathbf{S}_1 и \mathbf{S}_2 , которые вращаются (против и по часовой стрелке) с угловой скоростью Ω (с периодом $T = 2\pi/\Omega$).

На рис. 11 показаны последовательные стадии векторного сложения несущего колебания с боковыми гармониками.

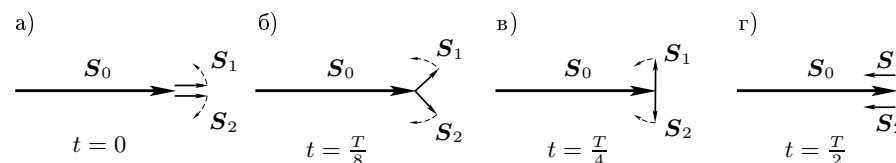


Рис. 11

В процессе колебаний остаётся неизменным направление суммарного вектора $\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$, изменяется лишь его длина (от максимального значения $a_0(1 + m)$ до минимального значения $a_0(1 - m)$), что соответствует амплитудной модуляции.

Задача 4. Рассмотрим теперь пример фазовой модуляции (колебание, модулированное по фазе):

$$f(t) = a_0 \cos(\omega_0 t + \varphi(t)), \quad \text{где } \varphi(t) = m \cos \Omega t. \quad (19)$$

Константа m — глубина модуляции фазы — определяет диапазон изменения начальной фазы (от $-m$ до $+m$) или (если обратиться к векторной диаграмме) «амплитуду качания» вектора \mathbf{S} (рис. 8б). Используя известное тригонометрическое тождество

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

запишем $f(t)$ в виде

$$f(t) = a_0(\cos \omega_0 t \cos \varphi(t) - \sin \omega_0 t \sin \varphi(t)).$$

В общем случае закон модуляции (19) приводит к довольно сложному спектру (с большим числом слагаемых гармонических колебаний). Мы рассмотрим случай $m \ll 1$ (малая глубина модуляции фазы), когда можно использовать приближённые выражения: $\cos \varphi(t) \approx 1$, $\sin \varphi(t) \approx \varphi(t)$ (мы отбрасываем величины порядка m^2 и выше). Тогда

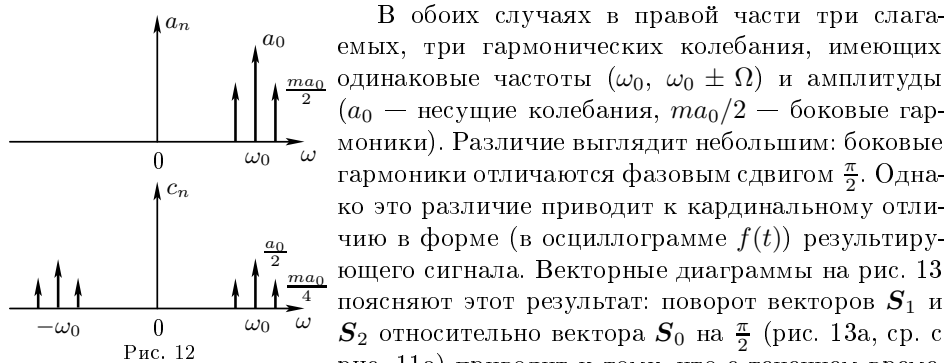
$$f(t) = a_0 \cos \omega_0 t - a_0 m \sin \omega_0 t \cos \Omega t,$$

или (т. к. $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$):

$$f(t) = a_0 \cos \omega_0 t + \frac{ma_0}{2} \cos \left((\omega_0 + \Omega)t + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{ma_0}{2} \cos \left((\omega_0 - \Omega)t + \frac{\pi}{2} \right). \quad (20)$$

Это и есть искомое представление колебания $f(t)$ в виде суммы гармонических колебаний.

Сравним формулы (18) и (20). Первая из них — разложение в спектр колебания, модулированного по амплитуде, вторая — колебания, модулированного по фазе. Эти колебания сильно различаются по форме (сравните осциллограммы на рис. 6б и 6в), однако их спектры весьма похожи (рис. 12).



В обоих случаях в правой части три слагаемых, три гармонических колебания, имеющих одинаковые частоты (ω_0 , $\omega_0 \pm \Omega$) и амплитуды (a_0 — несущие колебания, $ma_0/2$ — боковые гармоники). Различие выглядит небольшим: боковые гармоники отличаются фазовым сдвигом $\frac{\pi}{2}$. Однако это различие приводит к кардинальному отличию в форме (в осциллограмме $f(t)$) результирующего сигнала. Векторные диаграммы на рис. 13 поясняют этот результат: поворот векторов \mathbf{S}_1 и \mathbf{S}_2 относительно вектора \mathbf{S}_0 на $\frac{\pi}{2}$ (рис. 13а, ср. с рис. 11а) приводит к тому, что с течением времени (рис. 13б, в, г) суммарный вектор (изображён пунктиром) изменяет угол наклона, не изменяя (с точностью до величины порядка m^2) своей длины, что и соответствует фазовой модуляции. Этот пример подчёркивает, какую огромную роль играют фазовые соотношения при сложении колебаний.

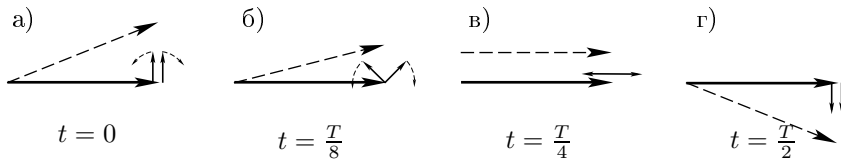


Рис. 13

Итак, изменив фазу несущего колебания (или боковых гармоник) на $\frac{\pi}{2}$, мы можем преобразовать колебание, модулированное по фазе, в амплитудно-модулированное колебание. Это известный в радиотехнике «приём с изменением фазы несущей».

Читатель может самостоятельно проанализировать «приём без несущей»: что представляет собой модулированное колебание $f(t)$, если «убрать» первое слагаемое — несущее колебание $a_0 \cos \omega_0 t$?

4.3. Спектр периодического процесса

Рассмотрим теперь периодический колебательный процесс общего вида $f(t) = f(t+T)$, где T — период процесса. В этом случае функция $f(t)$ может быть представлена суммой гармонических колебаний с кратными частотами $\omega_n = n\omega_0$, где $T = 2\pi/\omega_0$:

$$f(t) = \sum_n c_n e^{in\omega_0 t}. \quad (21)$$

Действительно, для любого t функция (21) повторяет своё значение через время T , поскольку

$$e^{in\omega_0(t+T)} = e^{in\omega_0 t} e^{in\omega_0 T} = e^{i2\pi n} e^{in\omega_0 t} = e^{in\omega_0 t}.$$

Спектр $\{c_n\}$ можно найти следующим образом: домножим обе части равенства (21) на $e^{-im\omega_0 t}$ и проинтегрируем по t за время, равное периоду (от $-\frac{T}{2}$ до $+\frac{T}{2}$). Получим

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-im\omega_0 t} dt = \sum_n c_n \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(n-m)\omega_0 t} dt.$$

Легко проверить, что интеграл в правой части равенства есть

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{i(n-m)\omega_0 t} dt = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m, \\ T & \text{при } n = m. \end{cases}$$

(Интеграл от функций $\cos(n-m)\omega_0 t$ и $\sin(n-m)\omega_0 t$ за время T , равное целому числу периодов колебания этих функций, равен 0 при $n \neq m$.) Следовательно, получаем

$$c_m = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-im\omega_0 t} dt. \quad (22)$$

Формула (22) даёт правило нахождения коэффициентов разложения периодической функции в ряд Фурье.

Задача 5. Найти спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов длительности τ с периодом следования импульсов $T > \tau$ (рис. 14).

Используя (22), находим

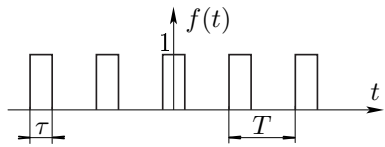


Рис. 14

(на интервале интегрирования $T/2 \leq t \leq T/2$ функция $f(t)$ отлична от нуля и равна единице лишь в области $|t| < \tau/2$). Далее

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} 1 \cdot e^{-in\omega_0 t} dt$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \frac{e^{-in\omega_0 t}}{-in\omega_0} d(-in\omega_0 t) = \frac{1}{T} \frac{1}{-in\omega_0} e^{-in\omega_0 t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} =$$

$$= \frac{\tau}{2T} \left[\frac{e^{in\omega_0 \tau/2} - e^{-in\omega_0 \tau/2}}{2in\omega_0 \tau/2} \right].$$

Окончательно находим

$$c_n = \frac{\tau}{T} \left(\frac{\sin n\omega_0 \tau/2}{n\omega_0 \tau/2} \right). \quad (23)$$

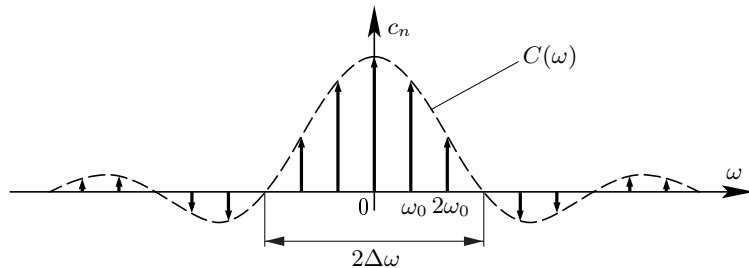


Рис. 15

Спектр $\{c_n\}$ показан на рис. 15. Пунктирной кривой изображена функция

$$C(\omega) = \frac{\tau}{T} \left(\frac{\sin \omega \tau/2}{\omega \tau/2} \right).$$

Очевидно, при $\omega = n\omega_0$ эта функция принимает значение, равное c_n : $c_n = C(n\omega_0)$. Полуширина $\Delta\omega$ главного максимума этой функции определяется условием $\sin \omega \tau/2 = 0$:

$$\Delta\omega \cdot \frac{\tau}{2} = \pi \quad \text{или} \quad \Delta\omega \cdot \tau = 2\pi.$$

Рисунок соответствует ситуации, когда $3\omega_0 = \Delta\omega$, $T = 3\tau$. Как видно из рисунка, спектральные гармоники, имеющие заметную амплитуду, сосредоточены в интервале частот $|\omega| \lesssim \Delta\omega = 2\pi/\tau$.

4.4. Спектр непериодического сигнала

Рассмотрим задачу разложения в спектр произвольного сигнала $f(t)$.

Оказывается, что произвольный сигнал не может быть представлен в виде (13) либо (14), т. е. в виде суммы гармонических колебаний с дискретным набором частот ω_n . В общем случае необходим непрерывный набор гармоник, необходимо суммировать гармонические колебания, частоты которых непрерывно заполняют некоторый (быть может, бесконечный) интервал частот. То есть необходимо иметь не только колебания с частотами $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, но также и все частоты в промежутке между ними. При этом ряд (13) заменяется интегралом Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (24)$$

Множитель $C(\omega) = a(\omega) e^{i\varphi(\omega)}$ показывает, с каким весом (т. е. с какой амплитудой $a(\omega)$ и с какой начальной фазой $\varphi(\omega)$) необходимо складывать гармонические колебания разных частот, чтобы при суммировании (интегрировании) образовать заданный сигнал $f(t)$. Функция $C(\omega)$ называется спектром (или преобразованием Фурье) сигнала $f(t)$.

Как найти спектр, если сигнал $f(t)$ известен? Приведём формулу, вывод которой дан в п. 8.3:

$$C(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (25)$$

Соотношение (25) математики называют прямым преобразованием Фурье, а формулу (24) — обратным преобразованием Фурье. Связь (24) между функциями $f(t)$ и $C(\omega)$ символически записывается в виде $f(t) \leftrightarrow C(\omega)$.

Как ясно из (25), спектр действительной функции ($f(t) \equiv f^*(t)$) обладает определённой симметрией: $C(\omega) = C^*(-\omega)$ и, следовательно, $|C(\omega)| = |C(-\omega)|$ (* — знак комплексного сопряжения). Математики называют это свойство эрмитовостью.

Задача 6. Разложение в спектр прямоугольного импульса длительности τ (рис. 16а). Используя (25), получаем

$$C(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{-i\omega} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-i\omega t} d(-i\omega t) = \tau \frac{\sin \omega \tau/2}{\omega \tau/2}.$$

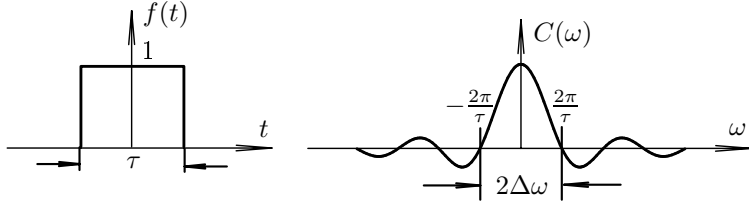


Рис. 16

Функция $C(\omega)$ показана на рис. 16б.

Полезно сравнить спектр отдельного импульса со спектром периодической последовательности одинаковых импульсов (рис. 15): спектр импульса $C(\omega)$ (с множителем $1/T$) представляет собой «огibaющую» частоту спектральных компонент c_n периодической последовательности импульсов. Вместо дискретного спектра $\{c_n\}$ получаем непрерывный спектр $C(\omega)$.

Модуль функции $C(\omega)$ определяет амплитуды гармонических колебаний разных частот, сумма которых образует импульс $f(t)$. Как видно из графика, основной вклад дают гармонические колебания, частоты которых заполняют интервал $|\Delta\omega| < \frac{2\pi}{\tau}$. Это — полуширина главного максимума функции $\frac{\sin \omega\tau/2}{\omega\tau/2}$. Диапазон частот $\Delta\omega$ можно назвать шириной спектра $C(\omega)$.

Мы получили замечательное соотношение, связывающее между собой длительность сигнала с шириной его спектра:

$$\tau \cdot \Delta\omega \approx 2\pi. \quad (26)$$

Это соотношение имеет универсальный характер. Оно оказывается справедливым по порядку величины для произвольного сигнала $f(t)$. Чем больше длительность сигнала (либо больше интервал времени, в течение которого происходит его заметное изменение), тем уже спектр сигнала $\Delta\omega$, и, наоборот, чем короче сигнал (или быстрее происходит изменение сигнала), тем шире его спектр, т. е. требуется более широкий интервал частот гармонических колебаний, образующих в сумме данный сигнал. В этом состоит смысл замечательного соотношения (26), которое называется соотношением неопределённостей.

Задача 7. Спектр функции $f_0(t)$ есть $C_0(\omega)$: $f_0(t) \leftrightarrow C_0(\omega)$. Найти спектр $Z(\omega)$ комплексной функции $z(t) = f_0(t)e^{i\omega_0 t}$.

Согласно (25) запишем

$$Z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(t)e^{i\omega_0 t} \cdot e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(t)e^{-i(\omega-\omega_0)t} dt = C_0(\omega - \omega_0). \quad (27)$$

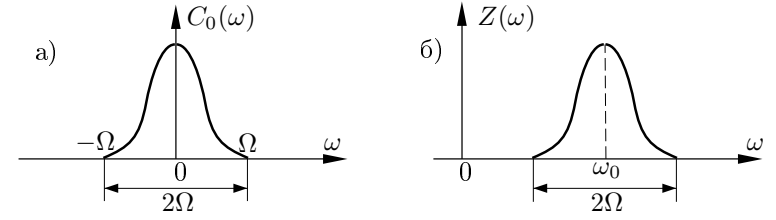


Рис. 17

т. е. спектр переносится по оси частот на величину ω_0 (рис. 17).

Из формулы (27) ясно, что если спектр функции $f_0(t)$ локализован в области частот $|\omega| \leq \Omega$ (рис. 17а), то спектр комплексной функции $z(t)$ не содержит отрицательных частот (рис. 17б) $Z(\omega) \equiv 0$ при $\omega < 0$, если $\omega_0 > \Omega$.

Задача 8. Найти связь между спектром модулированного колебания

$$f(t) = a(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$$

и спектром комплексной функции

$$z(t) = a(t)e^{i[\omega_0 t + \varphi(t)]} = f_0(t)e^{i\omega_0 t}, \quad f(t) = \operatorname{Re} z(t),$$

где $f_0(t) = a(t)e^{i\varphi(t)}$ — комплексная функция, содержащая всю информацию о медленно меняющихся законах модуляции $\tau > 2\pi/\omega_0$. Получаем, что спектр $C_0(\omega)$ функции $f_0(t)$ отличен от нуля лишь в области частот $|\omega| \leq \Omega \simeq 2\pi/\tau$, причём $\omega_0 > \Omega$.

Отметим, что сами функции $f(t)$ и $z(t)$, согласно формуле Эйлера, связаны очевидным равенством:

$$f(t) = \operatorname{Re} z(t) = \frac{1}{2}[z(t) + z^*(t)].$$

Поскольку $Z(\omega) \equiv 0$ при $\omega < 0$, то $z(t)$ можно записать в виде

$$z(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(\omega)e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} Z(\omega)e^{i\omega t} d\omega.$$

Тогда для комплексно-сопряжённой функции $z^*(t)$ имеем

$$z^*(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} Z^*(\omega)e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 Z^*(-\omega)e^{i\omega t} d\omega,$$

откуда ясно, что функция $z^*(t)$ имеет спектр $Z^*(-\omega)$, отличный от нуля лишь в области частот $\omega < 0$. Складывая левые и правые части двух последних равенств, находим

$$2f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [Z(\omega) + Z^*(-\omega)] e^{i\omega t} d\omega.$$

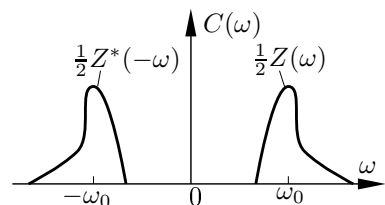


Рис. 18

Таким образом, спектр $C(\omega)$ модулированного колебания $f(t)$ имеет вид

$$C(\omega) = \frac{1}{2} Z(\omega) + \frac{1}{2} Z^*(-\omega),$$

т. е. равен сумме двух неперекрывающихся спектров (рис. 18).

Соответственно

$$Z(\omega) = \begin{cases} 2C(\omega) & \text{при } \omega > 0, \\ 0 & \text{при } \omega < 0. \end{cases}$$

Во многих случаях целесообразно решать задачу разложения в спектр реального модулированного колебания

$$f(t) = a(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)],$$

найдя спектр комплексной функции

$$z(t) = a(t) e^{i[\omega_0 t + \varphi(t)]},$$

который не содержит отрицательных частот, если речь идёт о медленно меняющихся во времени законах модуляции $a(t)$ и $\varphi(t)$. Тогда спектр $C(\omega)$ реального колебательного процесса совпадает (с точностью до множителя $1/2$) со спектром комплексного сигнала $z(t)$ при $\omega > 0$. Спектр же $C(\omega)$ при $\omega < 0$ в силу свойства эрмитовости фурье-образа действительной функции находится с помощью равенства $C(-\omega) = C^*(\omega)$.

Задача 9. Спектр функции $f_0(t)$ есть $C_0(\omega)$: $f_0(t) \leftrightarrow C_0(\omega)$. Найти спектр функции $f(t) = f_0(t - \tau)$.

Имеем

$$C(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(t - \tau) e^{-i\omega t} dt.$$

После замены переменных $t' = t - \tau$ ($dt = dt'$) получаем

$$C(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(t') e^{-i\omega(t'+\tau)} dt'.$$

Множитель $e^{-i\omega\tau}$ (не зависящий от переменной интегрирования t') выносится из-под знака интеграла:

$$C(\omega) = e^{-i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(t') e^{-i\omega t'} dt' = C_0(\omega) \cdot e^{-i\omega\tau}, \quad (28)$$

или символически $f_0(t - \tau) \leftrightarrow C_0(\omega) e^{-i\omega\tau}$, т. е. сдвиг сигнала во времени на τ (запаздывание) приводит к умножению его спектра на $e^{-i\omega\tau}$ (теорема сдвига).

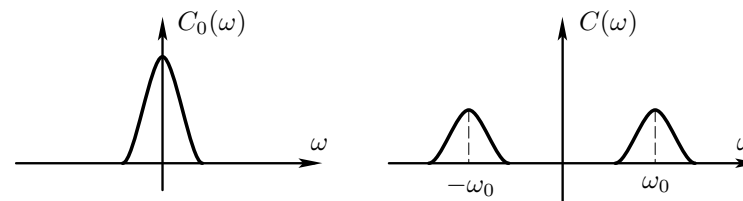


Рис. 19

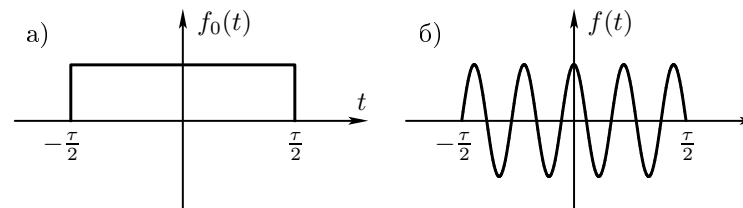


Рис. 20

Задача 10. Пусть $f_0(t) \leftrightarrow C_0(\omega)$. Найти спектр $C(\omega)$ функции $f(t) = f_0(t) \cos \omega_0 t$.

Используя формулу Эйлера, запишем

$$f(t) = \frac{1}{2} f_0(t) e^{i\omega_0 t} + \frac{1}{2} f_0(t) e^{-i\omega_0 t}.$$

Согласно решению задачи 7, имеем

$$C(\omega) = \frac{1}{2} C_0(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} C_0(\omega + \omega_0), \quad (29)$$

т. е. спектр $C_0(\omega)$ (умноженный на $1/2$) переносится по оси частот влево и вправо на несущую частоту ω_0 (рис. 19). В частности, пусть $f_0(t)$ — прямоугольный импульс длительности τ (рис. 20а):

$$f_0(t) = P_\tau(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } |t| \leq \tau/2, \\ 0 & \text{при } |t| > \tau/2. \end{cases}$$

Тогда $f(t) = f_0(t) \cos \omega_0 t$ — обрывок косинусоиды (цуг) длительности τ (рис. 20б). Согласно (29), получаем

$$C(\omega) = \frac{\tau}{2} \left[\frac{\sin(\omega - \omega_0)\tau/2}{(\omega - \omega_0)\tau/2} \right] + \frac{\tau}{2} \left[\frac{\sin(\omega + \omega_0)\tau/2}{(\omega + \omega_0)\tau/2} \right],$$

где $C_0(\omega) = \tau \left[\frac{\sin \omega\tau/2}{\omega\tau/2} \right]$ — спектр импульса $f_0(t)$ (см. задачу 6).

Спектры $C_0(\omega)$ и $C(\omega)$ представлены на рис. 21.

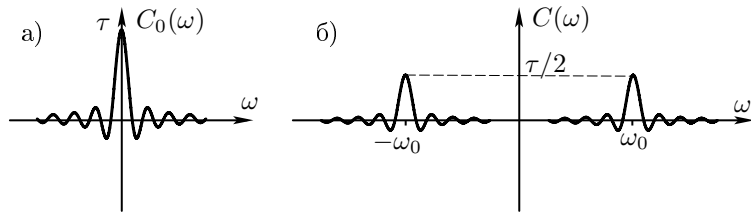


Рис. 21

Задача 11. Найти спектр $C(\omega)$ сигнала $f(t)$, являющегося периодическим повторением сигнала $f_0(t) \leftrightarrow C_0(\omega)$:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{N-1} f_0(t - nT) \quad (\text{при конечном } N).$$

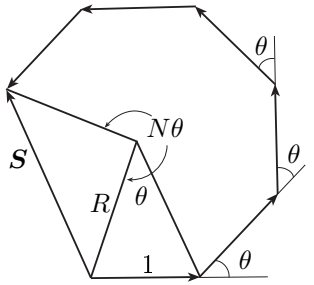


Рис. 22

Используя теорему смещения (28), получаем

$$C(\omega) = C_0(\omega) \sum_{n=0}^{N-1} e^{-in\omega T}.$$

Выражение

$$S = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-in\theta} \quad (\theta = \omega T)$$

можно интерпретировать как сумму колебаний, фазы которых составляют арифметическую прогрессию. На векторной диаграмме каждый последующий вектор единичной длины повернут на угол θ по отношению к предыдущему. Получаем часть многоугольника, вписанного в окружность, радиус R которой равен (рис. 22)

$$R = \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}}.$$

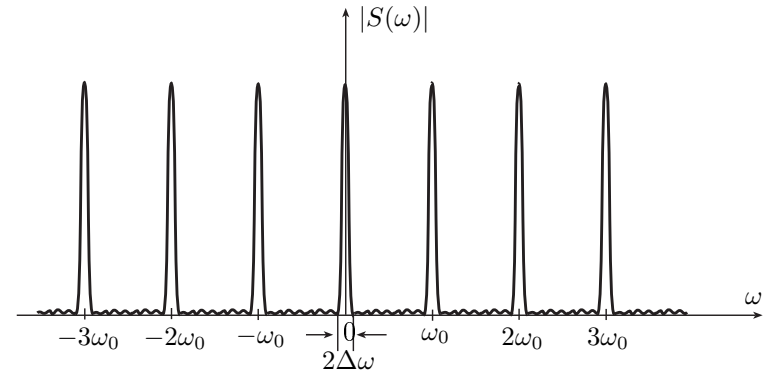


Рис. 23

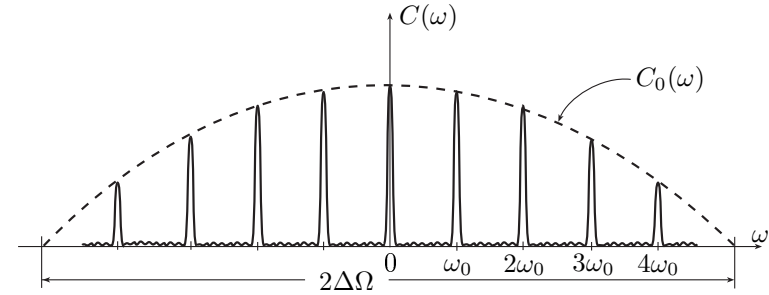


Рис. 24

Суммарный вектор имеет длину

$$|S| = 2R \sin \frac{2\pi - N\theta}{2} = \frac{\sin \frac{N\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

Угол поворота вектора $\varphi = (N-1)\frac{\theta}{2}$. Получаем

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{in\omega T} = \frac{\sin \frac{N\omega T}{2}}{\sin \frac{\omega T}{2}} e^{i\frac{N-1}{2}\omega T}.$$

Окончательно имеем

$$C(\omega) = C_0(\omega) \frac{\sin \frac{N\omega T}{2}}{\sin \frac{\omega T}{2}} e^{i\frac{N-1}{2}\omega T}.$$

Получаем набор узких (при $N \gg 1$) спектральных максимумов высотой, равной N (т. к. $\frac{\sin \frac{N\omega T}{2}}{\sin \frac{\omega T}{2}} = N$ на частотах $\omega_n = n\omega_0$, кратных $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$),

с полушириной $\Delta\omega = \frac{2\pi}{NT}$, которую можно найти из условия $\sin \frac{N\omega T}{2} = 0$ (рис. 23). Максимумы промодулированы «огibaющей» — функцией $C_0(\omega)$, спектральная ширина которой определяется длительностью сигнала $f_0(t)$: $\Delta\omega \simeq \frac{2\pi}{T}$. Функция $C(\omega)$ имеет вид, показанный на рис. 24 (функция $C_0(\omega)$ изображена на рисунке пунктиром).

При $N \rightarrow \infty$ высота спектральных максимумов стремится к бесконечности, а их ширина $\Delta\omega$ — к нулю: мы получаем «частоток» δ -функций.

5. Линейная фильтрация (спектральный метод)

Ещё раз опишем алгоритм решения задачи линейной фильтрации (спектральный метод).

1. Первый шаг — представление входного сигнала фильтра в виде суперпозиции гармонических колебаний: либо в виде ряда Фурье (13), либо интеграла Фурье (24). Спектр $C(\omega)$ входного сигнала $f(t)$ находится с помощью соотношений (22) или (25).

В случае дискретного спектра, например периодической функции $f(t)$, находим набор коэффициентов c_n ряда Фурье с помощью формулы (22).

2. Второй шаг — нахождение частотной характеристики фильтра $H(\omega)$, т. е. отклика фильтра на гармоническое внешнее воздействие единичной амплитуды:

$$e^{i\omega t} \rightarrow \boxed{L} \rightarrow H(\omega)e^{i\omega t}.$$

3. Суммируя отклики на каждое гармоническое слагаемое входного сигнала $c_n e^{i\omega_n t}$

$$c_n e^{i\omega_n t} \rightarrow \boxed{L} \rightarrow c_n H(\omega_n) e^{i\omega_n t},$$

находим результирующий выходной сигнал фильтра $g(t)$ (отклик на заданное входное воздействие $f(t)$):

$$g(t) = \sum_n c_n H(\omega_n) e^{i\omega_n t}. \quad (30)$$

В случае непрерывного спектра:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

отклик на каждое гармоническое слагаемое входного сигнала $\frac{1}{2\pi} C(\omega_n) e^{i\omega_n t} d\omega$ есть

$$\frac{1}{2\pi} C(\omega_n) e^{i\omega_n t} d\omega \rightarrow \boxed{L} \rightarrow \frac{1}{2\pi} C(\omega_n) H(\omega_n) e^{i\omega_n t} d\omega.$$

Суммируя отклики, получаем

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int C(\omega) H(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (31)$$

Выходной сигнал фильтра $g(t)$ (как и любой сигнал) можно представить либо в виде ряда Фурье:

$$g(t) = \sum b_n e^{i\omega_n t}, \quad (32)$$

либо в виде интеграла Фурье:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int B(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (33)$$

Из сравнения (30) и (32), (31) и (33) следует, что спектр выходного сигнала (набор коэффициентов разложения b_n в случае дискретного спектра) либо функция $B(\omega)$ (в случае непрерывного спектра) находятся с помощью равенств

$$b_n = c_n H(\omega_n), \quad B(\omega) = C(\omega) \cdot H(\omega), \quad (34)$$

которые лежат в основе спектрального метода решения задачи линейной фильтрации.

В частности, равенства (34) подсказывают путь решения задачи селекции, которая возникает при приёме радиосигналов. Пусть на вход колебательного контура приёмника поступают сигналы двух радиостанций, ведущих передачи на несущих частотах ω_0 и ω_1 . Это — модулированные колебания

$$f_s(t) = a(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_1(t))$$

и

$$f_n(t) = a(t) \cos(\omega_1 t + \varphi_2(t)).$$

Их спектры $C_s(\omega)$ и $C_n(\omega)$. Требуется выделить полезный сигнал $f_s(t)$ и отсеять помехи (сигнал $f_n(t)$).

Требования, предъявляемые к частотной характеристике контура, вытекают из соотношений (34). Во-первых, контур необходимо настроить на несущую частоту сигнала $f_s(t)$, т. е. резонансная частота контура ω_p должна совпадать с ω_0 : $\omega_p \simeq \omega_0$. При этом добротность контура Q должна быть достаточно большой, чтобы в пределы полосы пропускания контура $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ не попали спектральные компоненты помех ω_1 , $|\omega_1 - \omega_0| > \Delta\omega_k$. С другой стороны, чтобы полезный сигнал был принят без искажений, необходимо, чтобы полоса частот полезного сигнала $\Delta\Omega$, определяемая характерным временем τ изменения функций $a(t)$ и $\varphi(t)$, описывающих закон модуляции ($\Delta\Omega \cdot \tau \approx 2\pi$ — соотношение неопределённости), была меньше полосы пропускания контура $\Delta\Omega \ll \Delta\omega_k$. Всем этим условиям удовлетворяет частотная характеристика,

изображённая на рис. 25 (показаны сигналы $f_s(t)$ и $f_n(\omega)$ с дискретными спектрами $C_s(\omega)$ и $C_n(\omega)$).

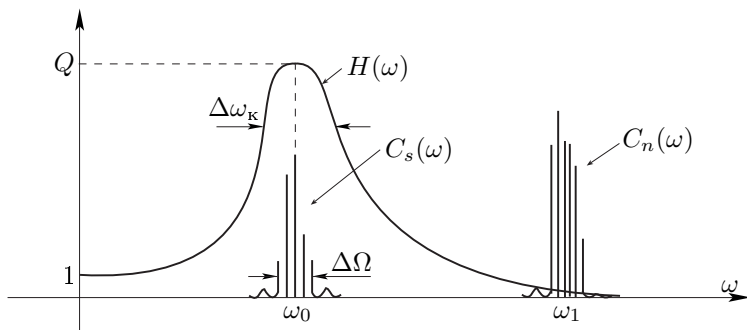


Рис. 25

Спектр выходного сигнала находим с помощью (34):

$$B(\omega) = [F_s(\omega) + F_n(\omega)] \cdot H(\omega) \simeq F_s(\omega) \cdot H(\omega_p) \simeq Q \cdot C_s(\omega).$$

Спектральные компоненты на частотах $\omega \approx \omega_1$ оказываются подавленными, поскольку $B(\omega) = C_n(\omega) \cdot H(\omega) \simeq 0$. Действительно, из выражения для частотной характеристики резонансного контура (см. задачу 1) следует (при $Q \gg 1$): $H(\omega) \approx 1$ при $\omega \ll \omega_p$, $H(\omega) \approx Q$ при $\omega \approx \omega_p = \omega_0$ и $H(\omega) \approx (\omega_k/\omega)^2$ при $\omega \gg \omega_p$. Поэтому первое слагаемое

$$C_s(\omega)H(\omega) \simeq C_s(\omega)Q,$$

а второе

$$C_n(\omega)H(\omega) \simeq C_n(\omega) \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$$

при $\omega \gg \omega_0$ пренебрежимо мало.

6. Дифференцирующие и интегрирующие цепочки

1. Рассмотрим RC -цепочку, изображённую на рис. 16. Её частотная характеристика (см. задачу 1, с. 6)

$$H(\omega) = \frac{i\omega RC}{1 + i\omega RC}$$

при $\omega RC \ll 1$ (т. е. при $\omega \ll \frac{1}{RC}$) есть $H(\omega) \approx i\omega RC$. Тогда выходной сигнал (напряжение на сопротивлении)

$$g(t) = \int H(\omega)C(\omega)e^{i\omega t} d\omega \approx RC \int (i\omega)C(\omega)e^{i\omega t} d\omega.$$

Входной сигнал

$$f(t) = \int C(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

и

$$\frac{df}{dt} = \int i\omega C(\omega)e^{i\omega t} d\omega.$$

Таким образом, имеем дифференцирующую цепочку:

$$g(t) \approx RC \frac{df}{dt} \quad \text{при} \quad \omega \ll \frac{1}{RC}.$$

2. Для RC -цепочки на рис. 1а (выходной сигнал $g(t)$ — напряжение на конденсаторе) имеем (см. с. 6)

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega RC},$$

и при $\omega RC \gg 1$ ($\omega \gg \frac{1}{RC}$) получаем $H(\omega) \approx \frac{1}{i\omega RC}$. Выходной сигнал

$$g(t) \approx \frac{1}{RC} \int \frac{1}{i\omega} C(\omega)e^{i\omega t} d\omega.$$

Входной сигнал

$$f(t) = \int C(\omega)e^{i\omega t} d\omega,$$

поэтому

$$\int_0^t f(t') dt' = \int C(\omega) \left[\int_0^t e^{i\omega t'} dt' \right] d\omega = \int \frac{1}{i\omega} C(\omega)e^{i\omega t} d\omega.$$

Таким образом, имеем интегрирующую цепочку:

$$g(t) \approx \frac{1}{RC} \int_0^t f(t') dt' \quad \text{при} \quad \omega \gg \frac{1}{RC}$$

(полагаем $f(0) = 0$).

7. Демодуляция и квадратичное детектирование

После того как с помощью линейного фильтра осуществлена задача селекции — выделение из множества сигналов интересующего нас полезного сигнала $f(t) = a(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t))$ (модулированного колебания), необходимо

решить проблему демодуляции — преобразования высокочастотного колебательного процесса $f(t)$ (гармонические составляющие которого заполняют интервал частот $\omega_0 - \Delta\Omega < \omega < \omega_0 + \Delta\Omega$ в окрестности несущей частоты ω_0) — в низкочастотные «звуковые» колебания $a(t)$ и $\varphi(t)$, содержащие непосредственно передаваемую информацию (речь, музыка, телевизионное изображение и т. п.). Такую трансформацию частот невозможно осуществить с помощью линейного фильтра. Мы рассмотрим метод **квадратичного детектирования**. Идеальный квадратичный детектор имеет вольт-амперную характеристику $i = \text{const} \cdot V^2$. Демодулятор должен включать в себя также инерционное устройство, реагирующее на низкочастотные колебания, из которых состоят законы модуляции $a(t)$ и $\varphi(t)$, но не успевающее следить за колебаниями, происходящими с частотами порядка ω_0 .

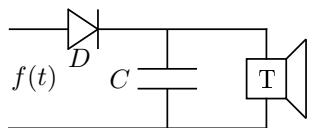


Рис. 26

Пусть функция $a(t)$, описывающая закон амплитудной модуляции, содержит низкочастотные колебания

$$a(t) = \sum c_n e^{in\Omega t}.$$

Тогда модулированное колебание

$$f(t) = a(t) \cos \omega_0 t$$

содержит частоты $\omega_0 \pm n\Omega$:

$$f(t) = \sum c_n e^{i(\omega_0 + n\Omega)t},$$

а ток детектора (пропорциональный $f^2(t)$) есть

$$i(t) = \sum c_n e^{i(\omega_0 + n\Omega)t} \cdot \sum c_m e^{i(\omega_0 + m\Omega)t}.$$

Он содержит комбинационные частоты вида $(\omega_0 + n\Omega) \pm (\omega_0 + m\Omega)$, которые распадаются на высокие частоты $2\omega_0 + (n + m)\Omega$ и низкие частоты $(n - m)\Omega$, за которыми только и может следить регистрирующий прибор (телефон). На рис. 23 телефон шунтируется ёмкостью, пропускающей высокочастотную часть тока.

Мы не будем далее интересоваться конкретным устройством демодулятора — квадратичного детектора и будем полагать, что сигнал на выходе детектора представляет собой квадрат входного сигнала, усреднённый за некоторое время Δt , определяемое инерционностью регистрирующего устройства

$$f(t) \rightarrow \boxed{D} \rightarrow g(t) = \overline{f^2(t)} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t - \frac{\Delta t}{2}}^{t + \frac{\Delta t}{2}} f^2(t) dt. \quad (35)$$

Будем полагать, что время усреднения Δt удовлетворяет условию

$$\frac{2\pi}{\omega_0} \ll \Delta t \ll \tau, \quad (36)$$

где τ — характерное время изменения функций $a(t)$ и $\varphi(t)$, описывающих закон модуляции сигнала $f(t)$.

Рассмотрим примеры.

Задача 12. На вход квадратичного детектора подано амплитудно-модулированное колебание $f(t) = a(t) \cos \omega_0 t$. Найти сигнал на выходе детектора.

$$g(t) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t - \frac{\Delta t}{2}}^{t + \frac{\Delta t}{2}} a^2(t') \cos^2 \omega_0 t' dt'.$$

Поскольку $\Delta t \ll \tau$ (τ — время, в течение которого функция $a(t)$ может заметно измениться), то на интервале усреднения Δt функцию $a^2(t')$ можно считать константой, равной значению $a^2(t)$ в середине интервала усреднения: $a^2(t') \approx a^2(t)$ при $t - \frac{\Delta t}{2} < t' < t + \frac{\Delta t}{2}$. Тогда получаем

$$\begin{aligned} g(t) &\simeq a^2(t) \cdot \frac{1}{\Delta t} \int_{t - \frac{\Delta t}{2}}^{t + \frac{\Delta t}{2}} \cos^2 \omega_0 t' dt' = \\ &= a^2(t) \frac{1}{\Delta t} \int_{t - \frac{\Delta t}{2}}^{t + \frac{\Delta t}{2}} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\omega_0 t') dt' = \\ &= \frac{1}{2} a^2(t) + \frac{1}{2} a^2(t) \frac{1}{\Delta t} \int_{t - \frac{\Delta t}{2}}^{t + \frac{\Delta t}{2}} \cos 2\omega_0 t' dt'. \end{aligned}$$

Последнее слагаемое пренебрежимо мало по сравнению с первым, если интервал усреднения содержит большое число периодов знакопеременной функции $\cos 2\omega_0 t'$ (т. е. при $\Delta t \gg \frac{\pi}{\omega_0}$). Окончательно получаем

$$g(t) \simeq \frac{1}{2} a^2(t), \quad (37)$$

т. е. сигнал на выходе детектора содержит информацию о законе амплитудной модуляции входного сигнала.

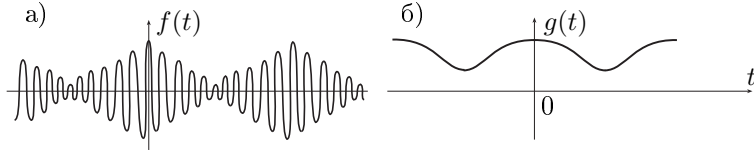


Рис. 27

На рис. 27б изображено колебание $g(t)$ на выходе квадратичного детектора при $a(t) = a_0(1 + m \cos \Omega t)$.

Пусть на вход квадратичного детектора поступает фазово-модулированное колебание

$$f(t) = a_0 \cos(\omega_0 t + \varphi(t)).$$

Сигнал на выходе детектора

$$g(t) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} a_0^2 \cos^2(\omega_0 t' + \varphi(t')) dt'.$$

Поскольку на интервале усреднения функция $\varphi(t')$, описывающая закон фазовой модуляции, остаётся константой (равной значению $\varphi(t)$ в середине интервала усреднения $\varphi(t') \approx \varphi(t) \approx \varphi_0$), то получаем

$$g(t) \simeq \frac{1}{2} a_0^2 = \text{const},$$

т. е. закон фазовой модуляции оказывается утерянным при квадратичном детектировании.

Решить проблему можно, исказив определённым образом амплитудно-фазовые соотношения в спектре фазово-модулированного колебания (превратив таким образом колебание, модулированное по фазе в амплитудно-модулированное колебание), после чего искажённый таким образом сигнал можно подать на вход квадратичного детектора.

Вернёмся в качестве примера к модулированному колебанию с законом фазовой модуляции $\varphi(t) = m \cos \Omega t$ (при $m \ll 1$). Разложение в спектр этого колебания имеет вид (формула (20))

$$f(t) = a_0 \cos \omega_0 t + \frac{ma_0}{2} \cos \left((\omega_0 + \Omega)t + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{ma_0}{2} \cos \left((\omega_0 - \Omega)t + \frac{\pi}{2} \right).$$

Задача 13. Рассмотрим приём без несущей. После устранения несущего колебания $a_0 \cos \omega_0 t$ получаем сигнал

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t) &= \frac{ma_0}{2} \cos \left((\omega_0 + \Omega)t + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{ma_0}{2} \cos \left((\omega_0 - \Omega)t + \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= ma_0 \cos \Omega t \sin \omega_0 t. \end{aligned}$$

На выходе квадратичного детектора имеем

$$g(t) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \tilde{f}^2(t') dt' \simeq \frac{m^2 a_0^2}{2} \cos^2 \Omega t,$$

закон фазовой модуляции (правда в искажённом виде) выявлен: изменение выходного сигнала детектора происходит с удвоенной частотой:

$$g(t) = \frac{m^2 a_0^2}{4} (1 + \cos 2\Omega t). \quad (38)$$

Задача 14. Приём с изменением фазы несущей. После изменения фазы несущего колебания на $\frac{\pi}{2}$:

$$a_0 \cos \omega_0 t \rightarrow a_0 \cos \left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2} \right),$$

имеем

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t) &= a_0 \cos \left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2} \right) + \\ &+ \frac{ma_0}{2} \cos \left((\omega_0 + \Omega)t + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{ma_0}{2} \cos \left((\omega_0 - \Omega)t + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Теперь фазовые соотношения между всеми гармониками оказались такими же, как и в амплитудно-модулированном колебании (17). Действительно, после простых преобразований получаем

$$\tilde{f}(t) = -a_0(1 + m \cos \Omega t) \sin \omega_0 t.$$

Мы преобразовали колебание, модулированное по фазе (с законом фазовой модуляции $\varphi(t) = m \cos \Omega t$) в амплитудно-модулированное колебание $\tilde{f}(t)$ с законом модуляции

$$a(t) = a_0(1 + m \cos \Omega t).$$

На выходе квадратичного детектора, согласно (37), получаем

$$g(t) \simeq \frac{1}{2} a^2(t) = \frac{1}{2} a_0^2 (1 + m \cos \Omega t)^2 \simeq \frac{1}{2} a_0^2 + a_0^2 m \cos \Omega t, \quad (39)$$

т. е. переменная составляющая сигнала на выходе детектора воспроизводит без искажения закон фазовой модуляции исходного сигнала $f(t)$.

8. Дополнение

8.1. Представление о δ -функции

δ -функция — это математическая идеализация реального очень «сильного» и короткого импульса. Рассмотрим прямоугольный импульс длительности τ и высотой $1/\tau$, так что «площадь» импульса $\tau \cdot 1/\tau$ равняется 1. Будем

постепенно уменьшать длительность импульса τ , увеличивая его «высоту» так, что площадь остаётся константой, равной 1 (рис. 28).

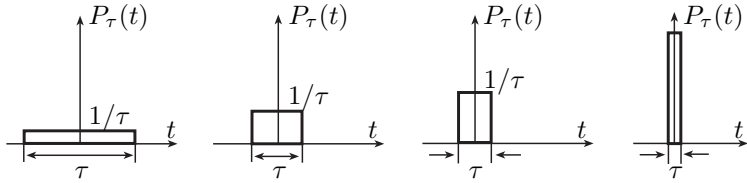


Рис. 28

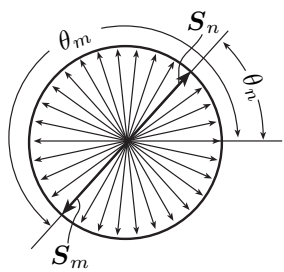


Рис. 29

В пределе при $\tau \rightarrow 0$ получаем идеализированный сигнал, называемый δ -импульсом: функция $\delta(t)$ равна нулю всюду, кроме момента времени $t = 0$, где эта функция равна бесконечности, при этом

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1.$$

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} P_\tau(t),$$

где $P_\tau(t)$ обозначена функция

$$P_\tau(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} & \text{при } |t| \leq \frac{\tau}{2}, \\ 0 & \text{при } |t| > \frac{\tau}{2}. \end{cases} \quad (40)$$

Можно получить δ -функцию и в другом предельном переходе, например:

$$\delta(t) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sin at}{\pi t}.$$

Имеет место важная формула:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega, \quad (41)$$

т. е. δ -функция может быть представлена суммой гармонических колебаний всевозможных частот, причём все колебания суммируются с одинаковым «весом».

Поясним смысл формулы (41). Рассмотрим интегральную сумму

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{in\Delta\omega t} \Delta\omega,$$

пределом которой (при $\Delta\omega \rightarrow 0$) является интеграл (41). Её геометрическая интерпретация — сумма векторов, изображённых на рис. 29: каждое слагаемое $\frac{1}{2\pi} e^{in\Delta\omega t} \Delta\omega$ (при фиксированном $t \neq 0$) изображается вектором длины $\frac{1}{2\pi} \Delta\omega$ с углом наклона $\theta_n = n\Delta\omega t$. Угол между двумя соседними векторами $\Delta\theta = \Delta\omega t$ стремится к нулю при $\Delta\omega \rightarrow 0$, и мы получаем сплошной веер векторов, в котором для каждого вектора S_n с углом наклона θ_n найдётся антиколлинеарный вектор S_m с углом наклона $\theta_m = \theta_n + \pi$, поэтому сумма всех этих векторов равна нулю для любого $t \neq 0$. Очевидно, что при $t = 0$ все векторы складываются коллинеарно и интеграл (41) равен бесконечности. Мы получаем, таким образом,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega = \begin{cases} \infty & \text{при } t = 0, \\ 0 & \text{при } t \neq 0. \end{cases}$$

Множитель $\frac{1}{2\pi}$ является нормировочным. Действительно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega = \lim_{a \rightarrow \infty} 2 \left(\frac{\sin at}{t} \right) = 2\pi\delta(t),$$

поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin at}{t} dt = \pi.$$

Рассмотрим интеграл

$$\int f(t') P_\tau(t - t') dt',$$

где $P_\tau(t)$ — короткий импульс единичной площади длительности τ (формула (40)); $f(t')$ — обычная «хорошая» функция; произведение $f(t') P_\tau(t - t')$ отлично от нуля лишь в малой окрестности τ момента времени $t' = t$. Уменьшая длительность импульса τ , всегда можно добиться, чтобы в этой окрестности функция $f(t')$ была константой (равной значению в момент времени $t' = t$) (рис. 30). Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t') P_\tau(t - t') dt' \simeq f(t) \int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t+\frac{\tau}{2}} P_\tau(t - t') dt' \simeq f(t).$$

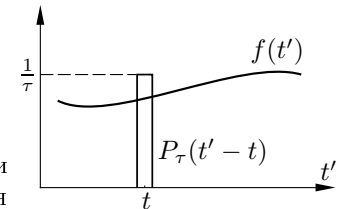


Рис. 30

В пределе при $\tau \rightarrow 0$ $P_\tau(t-t') \rightarrow \delta(t-t')$, а приближённое равенство становится точным, мы получаем

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t')\delta(t-t') dt'. \quad (42)$$

Эту формулу можно считать определением δ -функции.

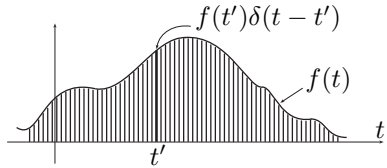


Рис. 31

Согласно (42), сигнал $f(t)$ представляется суперпозицией δ -импульсов, действующих в различные моменты времени t' , причём весами-коэффициентами в этой суперпозиции являются значения самой функции в моменты t' (переменная интегрирования t' пробегает весь интервал времени, в котором функция $f(t)$ отлична от нуля — в общем случае от $-\infty$ до $+\infty$.)

(Вертикальные линии на графике (рис. 31) изображают δ -импульсы (с весовым множителем $f(t')$), сплошь заполняющие ось времени.)

8.2. Импульсный отклик линейного фильтра. Связь между частотной характеристикой и импульсным откликом

Линейный фильтр можно характеризовать откликом $h(t)$ на δ -импульс, который называют импульсным откликом:

$$h(t) = L[\delta(t)]. \quad (43)$$

Если на линейный фильтр в момент времени $t = 0$ подействовал входной δ -импульс, то при $t > 0$ система оказывается свободной от внешнего воздействия и в ней начинается так называемый переходной процесс (например, процесс свободных затухающих колебаний) — это и есть импульсная реакция.

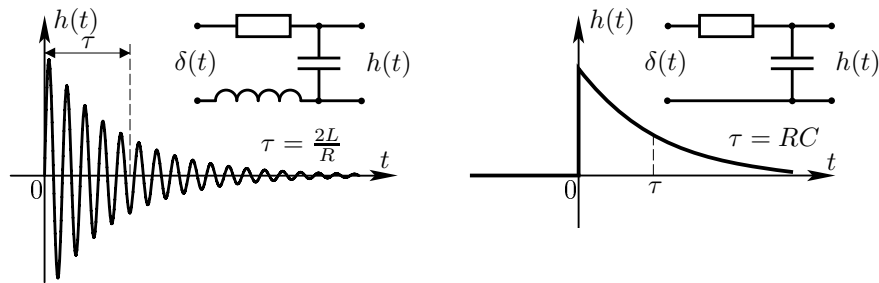


Рис. 32

Важной характеристикой импульсной реакции является её длительность, которая называется постоянной времени фильтра. Постоянная времени характеризует инерционность фильтра, его способность реагировать на быстрые изменения входного сигнала. Примеры — импульсный отклик колебательного контура и RC -фильтра — показаны на рис. 32.

Представляя δ -импульс с помощью формулы (41), имеем

$$h(t) = L \left[\frac{1}{2\pi} \int e^{i\omega t} d\omega \right] = \frac{1}{2\pi} \int L[e^{i\omega t}] d\omega$$

(здесь использовано свойство линейности) и далее, т. к.

$$L[e^{i\omega t}] = H(\omega)e^{i\omega t}$$

(по определению частотной характеристики), то окончательно

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int H(\omega)e^{i\omega t} d\omega, \quad (44)$$

т. е. частотная характеристика является преобразованием Фурье импульсного отклика: $h(t) \leftrightarrow H(\omega)$. Следовательно, ширина полосы фильтра $\Delta\omega$ связана с его инерционностью τ соотношением неопределённостей: $\Delta\omega \cdot \tau \approx 2\pi$.

Примеры: 1) колебательный контур

$$\Delta\omega \simeq \delta, \quad \tau = \frac{1}{\delta}; \quad \Delta\omega\tau \simeq 1;$$

2) RC -фильтр (см. задачу 1)

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}.$$

Полоса пропускания (на уровне $1/\sqrt{2}$) равна $\Delta\omega = \frac{1}{RC}$. Постоянная времени $\tau = RC$. Вновь получаем $\Delta\omega\tau \simeq 1$.

Следует обратить внимание, что соотношение неопределённостей вида $\Delta\omega\tau \simeq 2\pi$ справедливо только по порядку величины.

8.3. К выводу формулы прямого преобразования Фурье

Домножим обе части равенства (24) на $e^{-i\omega't}$ и проинтегрируем по t в пределах от $-\infty$ до $+\infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega't} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega)e^{i(\omega-\omega')t} d\omega dt.$$

Меняя порядок интегрирования в правой части последнего равенства, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega't} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega-\omega')t} dt \right] d\omega.$$

Используя (41), находим

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega-\omega')t} dt \right] d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega)\delta(\omega-\omega') d\omega = C(\omega').$$

Последнее равенство следует из определения δ -функции (42). Меняя далее обозначение $\omega' \rightarrow \omega$, получаем (25):

$$C(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt.$$

Формула даёт правило для нахождения спектра заданного сигнала $f(t)$ (мы пользовались ею при решении задач 6–11).

8.4. Линейная фильтрация. Временной подход к решению задачи линейной фильтрации

Представим сигнал $f(t)$, поступающий на вход линейного стационарного фильтра, с помощью (42):

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t')\delta(t-t') dt'.$$

Найдём отклик фильтра $g(t) = L[f(t)]$:

$$g(t) = L[f(t)] = L \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t')\delta(t-t') dt' \right].$$

Далее, меняя порядок линейных операций, получаем

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t')L[\delta(t-t')] dt'.$$

Результат воздействия δ -импульса $\delta(t-t')$, возникающего на входе линейной системы в момент времени $t = t'$, представляет собой импульсную

реакцию $L[\delta(t-t')] = h(t-t')$ (в силу стационарности фильтра смещение момента возникновения δ -импульса приводит к такому же смещению во времени импульсной реакции без изменения её функционального вида). Используя последнее соотношение, находим

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t')h(t-t') dt'. \quad (45)$$

Интегральная операция (45) называется свёрткой функций $f(t)$ и $h(t)$. Символически формула (45) записывается в виде

$$g(t) = f(t) \otimes h(t). \quad (46)$$

Итак, выходной сигнал линейного стационарного фильтра является свёрткой входного сигнала с импульсным откликом.

Важное (и очевидное) свойство импульсной реакции: функция $h(t-t')$ равна тождественно нулю при $t < t'$ — импульсная реакция не может возникнуть прежде, чем подействовал (в момент t') входной δ -импульс.

Ясно из (45), что выходной сигнал в момент времени t зависит лишь от значения входного сигнала в моменты времени t' , предшествующие t , — выходной сигнал не может возникнуть раньше, чем появился на входе фильтра входной сигнал (подынтегральная функция в (45) тождественно равна нулю при $t < t'$). Это свойство временных фильтров называется принципом причинности.

Форма сигнала на выходе фильтра существенно зависит от соотношения между постоянной времени фильтра τ и характерным временем τ_s , в течение которого входной сигнал претерпевает заметные изменения. Если за интервал времени τ , где импульсный отклик заметно отличен от нуля, входной сигнал не успевает измениться: $f(t') \simeq \text{const}$ при $|(t-t')| < \tau$ (т. е. при $\tau_s \gg \tau$), то согласно (45)

$$g(t) \simeq f(t) \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-t') dt' = K \cdot f(t),$$

где

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-t') dt' = \text{const}.$$

В этом случае сигнал на выходе фильтра повторяет форму входного сигнала. В противном случае фильтр усредняет и сглаживает быстрые изменения входного сигнала, происходящие за время $\tau_s < \tau$.

Существуют, таким образом, два подхода к решению задачи линейной фильтрации. Один подход называют **временным**: соотношение (45) связывает между собой функции времени — входной и выходной сигналы $f(t)$ и $g(t)$, при этом свойства фильтра полностью описываются импульсным откликом $h(t)$.

Другой подход (**спектральный**) приводит к соотношению

$$B(\omega) = C(\omega) \cdot H(\omega),$$

т. е. даёт связь между спектрами (преобразованиями Фурье) входного $C(\omega)$ и выходного $B(\omega)$ сигналов. При таком подходе свойства линейного фильтра описываются частотной характеристикой $H(\omega)$, которая является фурье-преобразованием импульсного отклика.

Мы доказали попутно важную теорему фурье-анализа: фурье-преобразование свёртки двух функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ равно произведению фурье-образов $C_1(\omega)$ и $C_2(\omega)$ сворачиваемых функций:

$$f_1(t) \otimes f_2(t) \leftrightarrow C_1(\omega) \cdot C_2(\omega).$$

(В нашем случае $f_1(t) = f(t)$ — входной сигнал фильтра $f_2(t) = h(t)$ — его импульсный отклик, $C_1(\omega)$ и $C_2(\omega) = H(\omega)$ соответственно их преобразования Фурье.)

8.5. Теорема Котельникова

Для целей обработки информации часто необходимо задавать сигнал $f(t)$ набором выборочных значений $f(t_n)$, взятых в дискретной совокупности моментов времени t_n . Ясно, что если выборочные значения взяты достаточно близко друг к другу, то сигнал достаточно точно аппроксимируется путём интерполирования по этим значениям. Но оказывается, что для определённого класса сигналов возможно *точное восстановление* сигнала по его выборочным значениям (т. е. набор выборочных значений в дискретные моменты времени t_n определяет *абсолютно точно* значения сигнала в любой промежуточный момент времени). Это — класс сигналов с **финитным спектром**.

Итак, пусть имеется сигнал $f(t)$, спектр которого $C(\omega)$ отличен от нуля лишь в интервале частот $|\omega| \leq \Omega$ (сигнал с финитным спектром), т. е. $C(\omega) \equiv 0$ при $|\omega| > \Omega$ ($\Omega = \omega_{\max}$ — максимальная частота в спектре $C(\omega)$).

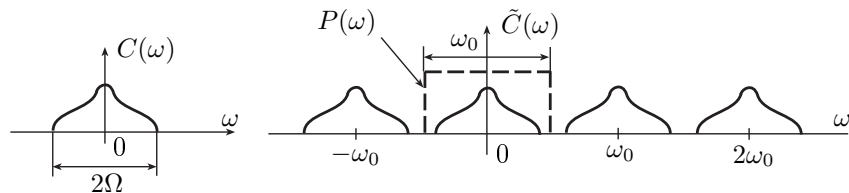


Рис. 33

Образует вспомогательный сигнал $\tilde{f}(t)$, спектр которого $\tilde{C}(\omega)$ является периодическим повторением $C(\omega)$ (рис. 33) с периодом ω_0 :

$$\tilde{C}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C(\omega - n\omega_0), \quad (47)$$

причём $\omega_0 \geq 2\Omega$, т. е. отдельные слагаемые в сумме (47) не перекрываются (рис. 33).

Очевидно, что спектр $C(\omega)$ может быть получен из $\tilde{C}(\omega)$ умножением последнего на единично-нулевую функцию:

$$P(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } |\omega| \leq \omega_0/2, \\ 0 & \text{при } |\omega| > \omega_0/2 \end{cases}$$

(функция $P(\omega)$ — прямоугольник ширины ω_0 , показанный на рисунке пунктиром):

$$C(\omega) = P(\omega) \cdot \tilde{C}(\omega). \quad (48)$$

Пусть на вход линейного фильтра с частотной характеристикой $H(\omega) = P(\omega)$ поступает сигнал $\tilde{f}(t)$, спектр которого $\tilde{C}(\omega)$. Фильтр с такой характеристикой пропускает без искажения гармоники с частотами $|\omega| \leq \omega_0/2$ и обрезает все гармоники входного сигнала при $|\omega| > \omega_0/2$. На выходе фильтра мы получаем согласно (48) сигнал $f(t)$ со спектром $C(\omega)$.

Функцию $\tilde{C}(\omega)$, как и любую периодическую функцию (её период равен ω_0), можно представить в виде ряда Фурье (21):

$$\tilde{C}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in \frac{2\pi}{\omega_0} \omega}, \quad (49)$$

где коэффициенты c_n находятся с помощью (22):

$$c_n = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\frac{\omega_0}{2}}^{\frac{\omega_0}{2}} \tilde{C}(\omega) e^{-in \frac{2\pi}{\omega_0} \omega} d\omega = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\Omega}^{\Omega} C(\omega) e^{-in \frac{2\pi}{\omega_0} \omega} d\omega \quad (50)$$

(на интервале $[-\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2}]$ функция $\tilde{C}(\omega)$ отлична от нуля лишь при $|\omega| < \Omega$ и совпадает на этом интервале с $C(\omega)$). Сравнивая последнее выражение с формулой (24), дающей разложение функции $f(t)$ в интеграл Фурье, получаем

$$c_n = \frac{2\pi}{\omega_0} f\left(n \frac{2\pi}{\omega_0}\right)$$

и, подставляя эти значения c_n в (49), имеем

$$\tilde{C}(\omega) = \frac{2\pi}{\omega_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(n\frac{2\pi}{\omega_0}\right) \cdot e^{in\frac{2\pi}{\omega_0}\omega}, \quad (51)$$

т. е. коэффициенты ряда Фурье (49) определяются значениями функции $f(t)$ в отсчётных точках $t_n = \frac{2\pi}{\omega_0}n$. Используя формулу (51) для $\tilde{C}(\omega)$, находим из (48):

$$C(\omega) = \frac{2\pi}{\omega_0} P(\omega) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(n\frac{2\pi}{\omega_0}\right) e^{in\frac{2\pi}{\omega_0}\omega}. \quad (52)$$

Найденное выражение для спектра $C(\omega)$ используем для нахождения собственно сигнала $f(t)$ (формула (24)):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int \left[\frac{2\pi}{\omega_0} P(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(n\frac{2\pi}{\omega_0}\right) e^{in\frac{2\pi}{\omega_0}\omega} \right] e^{-i\omega t} d\omega,$$

или

$$f(t) = \frac{1}{\omega_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(n\frac{2\pi}{\omega_0}\right) \int P(\omega) e^{in\frac{2\pi}{\omega_0}\omega} e^{-i\omega t} d\omega.$$

Интеграл в последнем выражении можно записать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) e^{-i\omega(t-n\frac{2\pi}{\omega_0})} d\omega = \int_{-\frac{\omega_0}{2}}^{\frac{\omega_0}{2}} e^{-i\omega(t-n\frac{2\pi}{\omega_0})} d\omega = 2 \frac{\sin \frac{\omega_0}{2}(t-n\frac{2\pi}{\omega_0})}{t-n\frac{2\pi}{\omega_0}}$$

(см. задачу 6 на с. 19).

Окончательно получаем формулу, выражающую содержание теоремы Котельникова:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(n\frac{2\pi}{\omega_0}\right) \frac{\sin \frac{\omega_0}{2}(t-n\frac{2\pi}{\omega_0})}{\frac{\omega_0}{2}(t-n\frac{2\pi}{\omega_0})}. \quad (53)$$

Из изложенного ясно, что имеется произвол в выборе интервала между отсчётными точками — лишь бы он был не больше величины $\frac{\pi}{\Omega}$; ($\frac{2\pi}{\omega_0} \leq \frac{\pi}{\Omega}$ поскольку $\omega_0 \geq 2\Omega$). В противном случае отдельные слагаемые в периодическом повторении спектра $C(\omega)$ будут «налагаться» друг на друга, и сигнал на выходе фильтра с частотной характеристикой $P(\omega)$ окажется искажённым: фильтр «пропустит» не только гармоники, содержащиеся в спектре $C(\omega)$, но и частично гармоники смещённых слагаемых $C(\omega \pm n\omega_0)$ (рис. 33).

Функции

$$\alpha_n(t) = \frac{\sin \frac{\omega_0}{2}(t-n\frac{2\pi}{\omega_0})}{\frac{\omega_0}{2}(t-n\frac{2\pi}{\omega_0})}$$

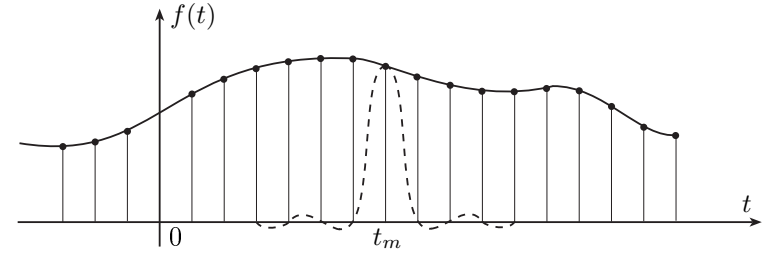


Рис. 34

называются функциями отсчётов. Они обладают замечательным свойством: в момент времени $t_m = m\frac{2\pi}{\omega_0}$ в сумме (53) оказывается отличным от нуля только одно слагаемое с $n = m$, т. е. «включается» одна из функций отсчётов, все прочие слагаемые (с $n \neq m$) обращаются в этот момент в нуль. Действительно, при $t = t_m = m\frac{2\pi}{\omega_0}$ функция $\alpha_m(t) = 1$, при этом все $\alpha_n(t_m) = 0$ при $n \neq m$. Иллюстрацией этого свойства функций отсчётов является рис. 34, где пунктиром показана функция $\alpha_m(t)$ (умноженная на значение сигнала $f(t)$ в момент времени t_m). В любой промежуточный момент времени $t \neq n\frac{2\pi}{\omega_0}$ вклад в сигнал $f(t)$ дают все слагаемые в сумме (53).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Электричество. Т. 3. — М: Наука, 1983.
2. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т. 2. № 5. — М: Мир. 1966.

Содержание

Предисловие	3
1. Линейные фильтры. Гармонические колебания. Частотная характеристика	4
2. Векторное представление гармонических колебаний	8
3. Модулированные колебания. Амплитудная и фазовая модуляции	9
4. Спектральное разложение	12
4.1. Действительная и комплексная форма спектральных разложений	12
4.2. Примеры спектральных разложений	14
4.3. Спектр периодического процесса	17
4.4. Спектр непериодического сигнала	19
5. Линейная фильтрация (спектральный метод)	26
6. Дифференцирующие и интегрирующие цепочки	28
7. Демодуляция и квадратичное детектирование	29
8. Дополнение	33
8.1. Представление о δ -функции	33
8.2. Импульсный отклик линейного фильтра. Связь между частотной характеристикой и импульсным откликом	36
8.3. К выводу формулы прямого преобразования Фурье	37
8.4. Линейная фильтрация. Временной подход к решению задачи линейной фильтрации	38
8.5. Теорема Котельникова	40

МОДУЛИРОВАННЫЕ КОЛЕБАНИЯ, СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ, ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

Учебно-методическое пособие

ЛОКШИН Геннадий Рафаилович
КОЗЕЛ Станислав Миронович

Редактор *О.П. Котова*
Корректор *И.А. Волкова*

Подписано в печать 07.05.2009. Формат 60 × 84¹/₁₆. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,8. Уч.-изд. л. 2,6. Тираж 600 экз.
Заказ № ф-037.

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт
(государственный университет)»
Отдел автоматизированных издательских систем «ФИЗТЕХ-ПОЛИГРАФ»
141 700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9