Производство энтропии в процессе теплопроводности в твёрдых телах

Булыгин В.С.

29 апреля 2011 г.

Как известно, при протекании в термодинамической системе неравновесных (необратимых) процессов энтропия системы возрастает. Теплопроводность представляет собой необратимый процесс, т. к. тепло самопроизвольно всегда передаётся только в одном направлении: от более нагретых областей в пространстве к менее нагретым, но не наоборот. Даже если неоднородный нагрев некоторого тела за счёт внешнего воздействия является стационарным (т. е. его температурное поле не изменяется во времени) и, следовательно, состояние тела и все функции состояния, включая энтропию, остаются неизменными, то из-за неравновесности происходящих внутри тела процессов теплопроводности энтропия, в целом, всё равно должна возрастать, т. е. внутри неоднородного нагретого тела должна возникать энтропия, выносимая из него с той же скоростью, с какай она в нём вырабатывается. Проанализируем процесс производства энтропии в процессе теплопроводности с количественной стороны.

Рассмотрим сначала процесс одномерной стационарной теплопроводности в стержне с теплоизолированной боковой поверхностью, обусловленный только разностью температур (т. е. без внутренних тепловых источников в стержне). Выделим в стержне элемент длиной dx (см. рис. 1), где для определённости сделано предположение, что температура внутри этой элементарной части стержня возрастает в положительном направлении оси x.

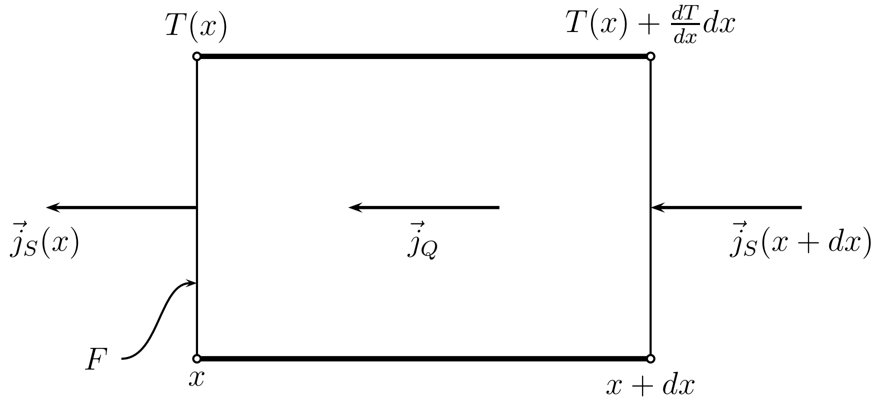

Рис. 1: Элемент теплопроводящего стержня длиной dx

Наряду с тепловым потоком (плотность которого $\vec{j}_Q = \mathrm{const}$ по условию стационарности), в стержне будут существовать и потоки энтропии с плотностью $\vec{j}_S = \frac{1}{T}\vec{j}_Q$, равной энтропии, переносимой в единицу времени через единичное поперечное сечение (температура на котором равна T). Из рассматриваемого элемента стержня выходит поток энтропии с плотностью $j_S(x) = \frac{1}{T(x)} j_Q$, а в этот элемент из правой части стержня входит поток энтропии с плотностью

$$j_S(x+dx) = \frac{j_Q}{T(x) + \frac{dT}{dx}dx} = \frac{j_Q}{T(x)\left(1 + \frac{1}{T(x)}\frac{dT}{dx}dx\right)} = \frac{j_Q}{T(x)}\left(1 - \frac{1}{T(x)}\frac{dT}{dx}dx\right).$$

Так как входящий и выходящий потоки различны, то внутри рассматриваемого элемента стержня возникает энтропия. Скорость возникновения энтропии в объёме элемента будет равна:

$$\delta \dot{S} = F \cdot [j_S(x) - j_S(x+dx)] = F \frac{j_Q}{T(x)} \frac{1}{T(x)} \frac{dT}{dx} dx = \frac{j_Q}{T^2} \frac{dT}{dx} dV,$$

где F — площадь поперечного сечения элемента стержня и $dV = F\,dx$ — его объём. Поскольку по закону Фурье величина плотности теплового потока равна $j_Q = \varkappa \frac{dT}{dx}$, где $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности, то для локального производства энтропии σ (объёмной плотности скорости генерации энтропии) для случая одномерной теплопроводности без внутренних тепловых источников получаем:

$$\sigma = \frac{\delta \dot{S}}{dV} = \varkappa \left(\frac{1}{T} \frac{dT}{dx} \right)^2 = \varkappa \left(\frac{d}{dx} \ln T \right)^2 . \tag{1}$$

Рассмотрим теперь общий случай нестационарной теплопроводности в неоднородной нелинейной (т. е. свойства которой зависят от температуры) пространственной твёрдой среде. Из уравнения баланса энтропии [1, форм.(13.16)] имеем для локального производства энтропии:

$$\sigma = \mathrm{div} \vec{j}_S + \varrho(T,x,y,z) \frac{\partial s}{\partial t} = \vec{\nabla} \vec{j}_S + \varrho \frac{\partial s}{\partial t} \ . \tag{2}$$

Здесь $\vec{\nabla}$ — оператор Гамильтона „набла“ ($\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ — единичные координатные вектора)

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \ ,$$

ϱ — плотность среды, s — удельная (на ед. массы) энтропия среды; для твёрдого тела $\partial s = \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T} c(T,x,y,z)\, \partial T$, где c — удельная теплоёмкость. Поскольку в этом случае (с учётом закона Фурье: $\vec{j}_Q = -\varkappa(T,x,y,z)\, \mathrm{grad} T = -\varkappa \vec{\nabla} T$) плотность потока энтропии $\vec{j}_S = \frac{1}{T} \vec{j}_Q = -\frac{\varkappa}{T} \vec{\nabla} T$, то из (2) получаем

$$\begin{aligned} \sigma &= -\vec{\nabla} \left(\frac{\varkappa \vec{\nabla} T}{T} \right) + \frac{c\varrho}{T} \frac{\partial T}{\partial t} = -\varkappa \vec{\nabla} T \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{T} \right) - \frac{\vec{\nabla}(\varkappa \vec{\nabla} T)}{T} + \frac{c\varrho}{T} \frac{\partial T}{\partial t} = \\ &= \varkappa \left(\frac{\vec{\nabla} T}{T} \right)^2 + \frac{1}{T} \left[c\varrho \frac{\partial T}{\partial t} - \vec{\nabla}(\varkappa \vec{\nabla} T) \right] \ . \end{aligned} \tag{3}$$

Учитывая, что температурное поле в среде подчиняется уравнению теплопроводности [2]

$$c\varrho \frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla}(\varkappa \vec{\nabla} T) + q$$

(здесь $q(x,y,z,t)$ — объёмная плотность тепловых источников в среде), выражение (3) для локального производства энтропии в процессе нестационарной теплопроводности в неоднородной и нелинейной пространственной среде может быть также переписано в виде:

$$\sigma = \varkappa \left(\frac{\vec{\nabla} T}{T} \right)^2 + \frac{q}{T} = \frac{\varkappa}{T^2} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{q}{T} = \varkappa \left(\vec{\nabla} \ln T \right)^2 + \frac{q}{T} \ . \tag{4}$$

Как теперь можно заметить, выражение (1), в которое переходит общее выражение (4) в случае одномерной теплопроводности вдоль оси x ($\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0$) и при отсутствие тепловых источников ($q = 0$), остаётся справедливым и без предположения о стационарности процесса теплопроводности, сделанного при выводе выражения (1).

Список литературы

[1] Базаров И.П. Термодинамика. — М.: Высшая школа, 1983. С. 239.

[2] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966. С. 184.