# Теплоёмкость идеального газа в различных термодинамических процессах

В.С. Булыгин

27 февраля 2014 г.

С помощью 1-го начала термодинамики для $\nu$ молей идеального газа:

$$\delta Q = dU + \delta A = \nu\, C_V dT + P\, dV\,,$$

где $C_V$ — молярная теплоёмкость при постоянном объёме, а давление $P$, объём $V$ и абсолютная температура $T$ связаны уравнением Клапейрона–Менделеева

$$PV = \nu RT \tag{1}$$

получаем выражение для теплоёмкости $\nu$ молей идеального газа

$$C \equiv \frac{\delta Q}{dT} = \nu\, C_V + \frac{P\, dV}{dT}\,. \tag{2}$$

После дифференцирования (1): $d(PV) = \nu R\, dT$ находим:

$$P\, dV + V\, dP = \nu R\, dT\,, \tag{3}$$

откуда

$$P\, dV = \nu R\, dT - V\, dP\,,$$

что с помощью (2) и соотношения Майера $C_P = C_V + R$ даёт ещё одно выражение для теплоёмкости $\nu$ молей идеального газа:

$$C = \nu\, C_V + \nu R - \frac{V\, dP}{dT} = \nu\, C_P - V\,\frac{dP}{dT}\,. \tag{4}$$

Получим из этих соотношений выражения для теплоёмкости $\nu$ молей идеального газа для всех возможных типов равновесных процессов.

## Процесс $V = V(T)$

Из выражений (2) и (1) следует:

$$C(T) = \nu\, C_V + P\,\frac{dV}{dT} = \nu\left[C_V + \frac{RT}{V}\frac{dV}{dT}\right] = \nu\left[C_V + RT\,\frac{d(\ln V)}{dT}\right] = \nu\left[C_V + R\,\frac{d(\ln V)}{d(\ln T)}\right]. \tag{5}$$

## Процесс $T = T(V)$

Из 2-й части выражения (5) получаем:

$$C(V) = \nu\left[C_V + \frac{RT}{V\frac{dT}{dV}}\right] = \nu\left[C_V + \frac{R}{V\frac{d(\ln T)}{dV}}\right] = \nu\left[C_V + R\left(\frac{d(\ln T)}{d(\ln V)}\right)^{-1}\right]. \tag{6}$$

## Процесс $P = P(T)$

Из выражений (4) и (1) следует:

$$C(T) = \nu\left[C_P - \frac{RT}{P}\frac{dP}{dT}\right] = \nu\left[C_P - RT\,\frac{d(\ln P)}{dT}\right] = \nu\left[C_P - R\,\frac{d(\ln P)}{d(\ln T)}\right]. \tag{7}$$

## Процесс $T = T(P)$

Из 1-й части выражения (7) получаем:

$$C(P) = \nu\left[C_P - \frac{RT}{P\frac{dT}{dP}}\right] = \nu\left[C_P - \frac{R}{P\frac{d(\ln T)}{dP}}\right] = \nu\left[C_P - R\left(\frac{d(\ln T)}{d(\ln V)}\right)^{-1}\right]. \tag{8}$$

## Процесс $P = P(V)$

Из выражения (3), переписанного в виде

$$\left(1 + \frac{V}{P}\frac{dP}{dV}\right) P\,dV = \nu R\,dT\,,$$

находим выражение для элементарной работы идеального газа:

$$P\,dV = \frac{\nu R\,dT}{1 + \frac{V}{P}\frac{dP}{dV}}\,,$$

подстановка которого в (2) даёт искомое выражение для теплоёмкости в этом процессе:

$$C(V) = \nu\left[C_V + \frac{R}{1 + \frac{V}{P}\frac{dP}{dV}}\right] = \nu\left[C_V + \frac{R}{1 + V\,\frac{d(\ln P)}{dV}}\right] = \nu\left[C_V + \frac{R}{1 + \frac{d(\ln P)}{d(\ln V)}}\right]. \tag{9}$$

## Процесс $V = V(P)$

Из 1-й части выражения (9) получаем:

$$C(P) = \nu\left[C_V + \frac{R}{1 + \frac{V}{P\frac{dV}{dP}}}\right] = \nu\left[C_V + \frac{R}{1 + \left(P\,\frac{d(\ln V)}{dP}\right)^{-1}}\right] = \nu\left[C_V + \frac{R}{1 + \left(\frac{d(\ln V)}{d(\ln P)}\right)^{-1}}\right]. \tag{10}$$

С помощью полученных выражений найдём решения задач на нахождение теплоёмкости идеальных газов, взятых из задачника [1].

- В задаче 1.47: $P = \mathrm{const}\cdot V$, в задаче 1.54:

  $$P = P_0 + \frac{F_{\text{упр}}}{S_\perp} = P_0 + \frac{k_{\text{упр}}\frac{V-V_0}{S_\perp}}{S_\perp} = P_0 + \frac{P_0 S_\perp^2}{V_0}\frac{V-V_0}{S_\perp^2} = \frac{P_0}{V_0}V\,,$$

  т. е. снова $P = \mathrm{const}\cdot V$. Так как $\ln P = \ln\mathrm{const} + \ln V$, то $\frac{d(\ln P)}{d(\ln V)} = 1$ и из (9) при $\nu = 1$ следует ответ:

  $$C = C_V + \frac{R}{2}\,.$$

Соответственно в задаче 1.53, где также $P \sim V$ и $C_V = \frac{5R}{2}$ получаем:

$$C = C_V + \frac{R}{2} = \frac{5R}{2} + \frac{R}{2} = 3R\,.$$

- В задаче 1.49: $\nu = 1$, $C_V = \frac{R}{\gamma - 1}$, где $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$; $P = \frac{P_0}{V_0}(V_0 - V)$, $\frac{dP}{dV} = -\frac{P_0}{V_0}$, $\frac{V}{P} = \frac{VV_0}{P_0(V_0 - V)}$ и из (9) получаем:

$$C(V, V_0) = R\left[\frac{1}{\gamma - 1} + \frac{1}{1 - \frac{VV_0}{P_0(V_0 - V)}\frac{P_0}{V_0}}\right] = R\left[\frac{1}{\gamma - 1} + \frac{V_0 - V}{V_0 - 2V}\right] = R\,\frac{\gamma V_0 - (\gamma + 1)V}{(\gamma - 1)(V_0 - 2V)} =$$
$$= R\,\frac{\gamma - (\gamma + 1)\frac{V}{V_0}}{(\gamma - 1)(1 - 2\frac{V}{V_0})}\,.$$

- В задаче 1.55: 1) *изотермический процесс* в верхней части цилиндра (над поршнем): общее давление $P$ в обеих частях цилиндра: $P = \frac{P_0 V_{20}}{V_2} = \frac{P_0 V_{20}}{V_{10} + V_{20} - V}$, где $V \equiv V_1$ — объём нижней части цилиндра (под поршнем). Отсюда $\frac{d(\ln P)}{dV} = \frac{1}{V_{10} + V_{20} - V} = \frac{1}{V_2}$ и теплоёмкость газа в нижней части цилиндра, согласно (9) при $\nu = 1$ и с учётом соотношения Майера $C_P = C_V + R$ равна

$$C(V_1, V_2) = C_V + \frac{R}{1 + \frac{V_1}{V_2}} = \frac{C_P + C_V\frac{V_1}{V_2}}{1 + \frac{V_1}{V_2}} = C_V\,\frac{\gamma + \frac{V_1}{V_2}}{1 + \frac{V_1}{V_2}}\,;$$

2) при *адиабатическом процессе* в верхней части цилиндра: $P = P_0 V_{20}^{\gamma} \cdot V_2^{-\gamma} = P_0 V_{20}^{\gamma} \cdot (V_{10} + V_{20} - V)^{-\gamma}$, откуда $\frac{d(\ln P)}{dV} = \frac{\gamma}{V_{10} + V_{20} - V} = \frac{\gamma}{V_2}$ и теплоёмкость газа в нижней части цилиндра, согласно (9), равна:

$$C(V_1, V_2) = C_V + \frac{R}{1 + \gamma\frac{V_1}{V_2}} = \frac{C_P + \gamma C_V\frac{V_1}{V_2}}{1 + \gamma\frac{V_1}{V_2}} = \gamma C_V\,\frac{1 + \frac{V_1}{V_2}}{1 + \gamma\frac{V_1}{V_2}}\,,$$

соответственно в задаче 1.56 (также с адиабатическим процессом), где $V_1 = 2V_0 - V_2$, $\gamma = \frac{5}{3}$ и $C_V = \frac{3}{2}R$, откуда $R = \frac{2}{3}C_V$, получаем:

$$C(V_2) = C_V + \frac{\frac{2}{3}C_V}{1 + \frac{5}{3}\frac{2V_0 - V_2}{V_2}} = C_V\left[1 + \frac{2}{3 + 5\,\frac{2V_0 - V_2}{V_2}}\right] = C_V\left[1 + \frac{1}{\frac{5V_0}{V_2} - 1}\right] = \frac{C_V}{1 - \frac{V_2}{5V_0}}\,.$$

- В задаче 1.59: $\ln V = -\frac{2C_V}{R}\ln T + \text{const}$, $\frac{d(\ln V)}{d(\ln T)} = -\frac{2C_V}{R}$ и из выражения (5) при $\nu = 1$ находим:

$$C = C_V + R\,\frac{d(\ln V)}{d(\ln T)} = C_V - 2C_V = -C_V\,.$$

# Список литературы

[1] Заикин Д.А., Овчинкин В.А., Прут Э.В. СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ОБЩЕМУ КУРСУ ФИЗИКИ: Учеб. пособие для вузов / В трёх частях. Ч.1. Механика. Термодинамика и молекулярная физика / Под ред. В.А. Овчинкина. (3-е изд., испр. и доп.) — М.: Физматкнига, 2013.