



Лабораторная работа 1.2.2
по курсу «Общая физика»

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ
ПРОВЕРКА ЗАКОНА
ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ
НА КРЕСТООБРАЗНОМ
МАЯТНИКЕ**

Дополнительное описание

Из лаборатории не выносить!
Электронная версия — на сайте кафедры общей физики
physics.mipt.ru/S_I/lab

Долгопрудный
МФТИ
2016

Основное уравнение вращательного движения тела вокруг закреплённой оси:

$$I\ddot{\varphi} = M, \quad (1)$$

где $\ddot{\varphi} \equiv \dot{\omega} \equiv \beta$ — угловое ускорение (ω — угловая скорость), I — полный момент инерции тела относительно оси вращения, M — суммарный момент внешних сил относительно этой оси.

Цель работы — экспериментально проверить уравнение (1), получив зависимость углового ускорения от момента инерции и момента прикладываемых к системе сил, а также проанализировать влияние сил трения, действующих в оси вращения.

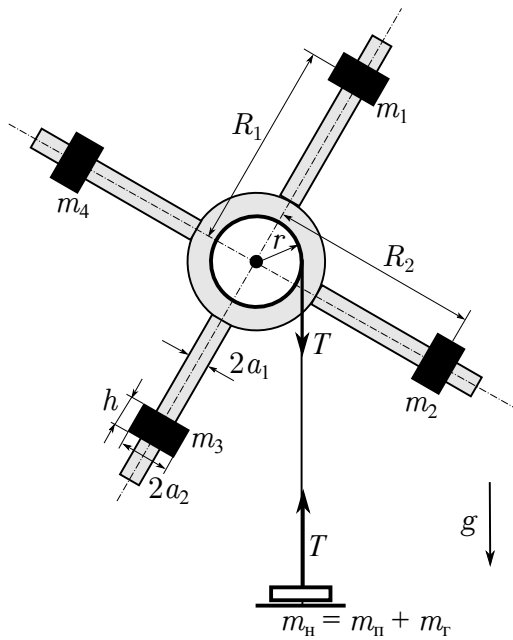


Рис. 1. Крестообразный маятник Обербека

Экспериментальная установка. Для экспериментального исследования закона вращательного движения (1) в работе используется крестообразный «маятник», устройство которого изображено на рис. 1. Маятник состоит из четырех тонких стержней радиуса a , укрепленных

на втулке под прямым углом друг к другу. Втулка и два шкива различных радиусов (r_1 и r_2) насажены на общую ось. Ось закреплена в подшипниках, так что вся система может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси. Момент инерции I маятника можно изменять, передвигая грузы m_i ($i = 1..4$) вдоль стержней и меняя R_i . На один из шкивов маятника навита тонкая нить. Привязанная к ней легкая платформа известной массы $m_{\text{п}}$ служит для размещения перегрузков $m_{\text{Г}}$.

Установка оснащена датчиком, позволяющим фиксировать моменты времени прохождения концов стержней через него. Данные с датчика передаются на компьютер для последующей обработки и получения зависимостей угла поворота $\varphi(t)$, угловой скорости $\omega \equiv \dot{\varphi}$ и углового ускорения маятника $\beta \equiv \ddot{\varphi}$ от времени, а также углового ускорения от угловой скорости $\beta(\omega)$.

Вывод уравнения движения маятника. Рассмотрим силы, действующие на маятник. Основной вращающий момент создаётся подвешенным на нити перегрузком. Непосредственно на маятник действует момент силы натяжения нити: $M_{\text{н}} = rT$, где r — радиус шкива (r_1 или r_2). Силу T выразим из уравнения движения платформы: $m_{\text{н}}\ddot{y} = m_{\text{н}}g - T$, где $m_{\text{н}} = m_{\text{п}} + m_{\text{Г}}$ — масса платформы с перегрузком. Ускорение платформы связано с угловым ускорением маятника условием нерастяжимости нити $\ddot{y} = \beta r$. Отсюда момент силы натяжения нити

$$M_{\text{н}} = m_{\text{н}}r(g - \beta r). \quad (2)$$

Вращению маятника препятствует момент силы трения в оси $M_{\text{тр}}$. Таким образом, с учетом (2) уравнение (1) может быть записано как

$$(I + m_{\text{н}}r^2)\beta = m_{\text{н}}gr - M_{\text{тр}}. \quad (3)$$

Заметим, что в наших опытах, как правило, $m_{\text{н}}r^2 \ll I$, и соответственно $M_{\text{н}} \approx m_{\text{н}}gr$. Если трение мало, $M_{\text{тр}} \ll m_{\text{н}}gr$, то маятник будет раскручиваться с постоянным угловым ускорением $\beta_0 \approx m_{\text{н}}gr/I$.

Поскольку зависимость момента силы трения от нагрузки на маятник и скорости его вращения не известна (её исследование — отдельная экспериментальная задача), методика измерения должна быть построена так, чтобы минимизировать или вовсе исключить влияние $M_{\text{тр}}$. Можно высказать следующие качественные соображения о природе и величине $M_{\text{тр}}$. Она может иметь как составляющую, пропорциональную силе реакции в оси N (сухое трение в подшипниках), так и составляющую, пропорциональную угловой скорости ω вращения маятника (вязкое трение в подшипниках и сопротивление возду-

ха¹). Учитывая, что сила реакции уравновешенного маятника равна $N = m_m g + T \approx (m_m + m_n)g \approx m_m g$, где m_m — масса маятника (как правило, $m_m \gg m_n$), можно записать

$$M_{\text{тр}} \simeq \left(1 + \frac{m_n}{m_m}\right) M_0 + \eta\omega \approx M_0 + \eta\omega, \quad (4)$$

где M_0 — момент сил трения для покоящегося маятника при нулевой массе подвеса (минимальное значение силы трения), η — некоторый коэффициент, отвечающий за вязкое трение.

Методика эксперимента. Малость величины трения $M_{\text{тр}}$ в работе обеспечивается за счёт использования в креплении подшипников качения. Однако учёт трения всё же оказывается необходим, поскольку оно существенно влияет на результаты опыта как при малых массах перегрузков (когда $m_n \sim M_0/gr$), так и при больших, поскольку при увеличении m_n возрастает сила реакции в оси и угловая скорость вращения маятника, а с ней и вязкое трение.

Влияние вязкой составляющей трения можно исключить следующим образом. Экспериментальная установка позволяет измерять зависимость углового ускорения от угловой скорости $\beta(\omega)$. Если верны высказанные выше соображения о величине силы трения, из (3) и (4) следует, что угловое ускорение должно быть линейной функцией угловой скорости: $\beta(\omega) = \beta_0 + k\omega$. В таком случае, определив по экспериментальным данным (с помощью расчётной программы) коэффициенты прямой, можно найти начальное угловое ускорение β_0 , значение которого и используется при проверке основного соотношения (3) при различных параметрах системы (m_n, I, r).

В работе предлагается провести следующие измерения.

1. Исследовать вращательное движение маятника под действием различных перегрузков при постоянном моменте инерции системы I (положения R_i грузов фиксированы). Результатом будет зависимость начального углового ускорения β_0 от нагрузки m_n , откуда согласно (3) может быть определён момент инерции системы I и минимальный момент силы трения M_0 .

2. Затем предлагается изучить вращательное движение маятника при различных значениях момента инерции системы (фиксирована масса m_n). Момент инерции можно варьировать, изменяя расстояния R_i центров масс грузов от оси вращения. Измеренные значения I сравниваются с расчётными. Для расчётов можно воспользоваться тем,

¹Заметим, что при достаточно больших скоростях вращения сила сопротивления воздуха зависит от ω квадратично.

что грузы m_i имеют форму полых цилиндров с внутренним и внешним радиусами a_1 и a_2 соответственно и образующей h , так что момент инерции всей системы вычисляется по теореме Гюйгенса–Штейнера:

$$I = I_0 + \sum_{i=1}^4 (I_i + m_i R_i^2), \quad (5)$$

где I_0 – момент инерции системы без грузов,

$$I_i = \frac{1}{12} m_i h^2 + \frac{1}{4} m_i (a_1^2 + a_2^2) \quad (6)$$

– момент инерции i -го груза относительно оси, проходящей через его центр масс (перпендикулярно плоскости рис. 1). Вывод формулы (6) предоставляем читателю в качестве упражнения (обратите внимание на знак «+» в последнем слагаемом).

Балансировка маятника. Для применимости соотношений (2)–(4) необходимо, чтобы маятник был *уравновешен* – то есть его центр масс

должен находиться строго на оси вращения. Несбалансированность приводит к следующим эффектам: во-первых, появляется зависимость момента силы тяжести от угла поворота маятника; во-вторых, возникают дополнительные пульсации силы реакции N (из-за центростремительного ускорения центра масс) и, следовательно, момента силы трения в подшипниках $M_{тр}$. Оба фактора могут привести к существенному отклонению от линейной зависимости измеряемой функции $\beta(\omega)$ (см. рис. 2).

Слишком грубая балансировка делает формулы (2)–(4) полностью неприменимыми.

Таким образом, для корректного проведения опыта необходима тщательная балансировка маятника при любом изменении положений грузов m_i на стержнях. Маятник является сбалансированным, если он находится в безразличном положении равновесия. Для проверки балансировки необходимо привести маятник (без подвеса!) во вращение с небольшой угловой скоростью, дав ему возможность остановиться. Если движение маятника не имеет колебательного характера (является аperiodическим), систему можно считать сбалансированной. Кроме

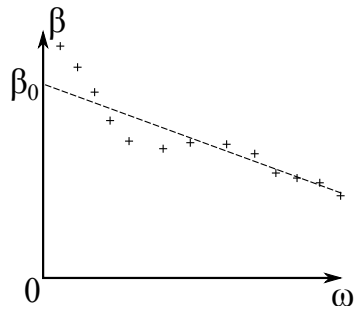


Рис. 2. Пульсации при вращении несбалансированного маятника

того, при быстром вращении несбалансированность маятника может быть определена по стуку в оси крепления.

ЗАДАНИЕ

1. Установите грузы m_i на некотором (среднем) расстоянии R от оси шкива, так чтобы маятник оказался в положении безразличного равновесия. Тщательно проведите балансировку, незначительно изменяя положения грузов (см. п. «Балансировка маятника»). Рекомендуется сперва сбалансировать маятник с двумя грузами из четырех, и лишь затем со всеми грузами. Платформа для подвешивания перегрузков должна при балансировке быть убрана! После балансировки измерьте положения каждого груза R_i .

2. Оцените момент силы трения покоя M_0 в подшипниках. Для этого намотайте на меньший из шкивов нить в один слой и подвесьте на ней к маятнику пустую платформу. Аккуратно нагрузите платформу так, чтобы маятник пришел в движение и запишите граничное значение M_0 . Повторите измерение при других углах поворота маятника. Если маятник начинает совершать колебательные движения или необходимая для приведения маятника в движение масса зависит от угла поворота маятника — еще раз тщательно уточните балансировку. Если маятник приходит во вращение без перегрузков, значит момент сил мал, $M_0 < m_{пг}g$, и таким методом его измерить невозможно — переходите к следующему пункту.

Замечание. Добиться идеальной балансировки не просто, и на это может потребоваться довольно много времени. Рекомендуется на выполнение п. 1 и 2 отвести не менее 10, но не более 20 минут.

3. Включите компьютер и запустите расчетно-измерительную программу «Kinematic». Ознакомьтесь с краткой инструкцией по работе с программой (см. Приложение). При необходимости обратитесь к полной инструкции (на столах) или справке внутри программы.

4. Намотайте нить в один слой на больший из шкивов и поместите перегрузок ($m_{г} \sim 50$ г) на платформу. Проведите опыт: с помощью программы измерьте зависимость угла поворота маятника от времени в процессе опускания платформы из верхнего в нижнее положение.

Внимание!

Хорошо закрепите грузы, так что бы они не соскакивали при вращении маятника. *Контролируйте* опускание и (особенно) подъём платфор-

мы, так чтобы она не ударилась о стол — это может привести к обрыву нити и выходу установки из строя. Рекомендуемый максимальный вес перегрузка — 200 г.

По завершении опыта перейдите в раздел «Определение углового ускорения». На экране будет представлен график зависимости углового ускорения от угловой скорости $\beta(\omega)$. Программа проводит через экспериментальные точки прямую методом наименьших квадратов (МНК). Запишите полученные коэффициенты β_0 и k прямой $\beta = \beta_0 + k\omega$ и их погрешности (рассчитанные также по МНК).

При необходимости программа позволяет провести отбор экспериментальных точек, которые используются для проведения прямой. Из рассмотрения следует исключить несколько начальных точек (поскольку для них существенно влияние силы трения покоя), а также, возможно, конечные точки, соответствующие изменению направления движения платформы. При наличии резких выбросов (ошибки срабатывания датчика) опыт следует переделать.

Если на полученном графике существенны колебания зависимости $\beta(\omega)$ относительно прямой, уточните балансировку и повторите измерение. Если дальнейшее уточнение балансировки затруднено, оцените (грубо) погрешность, вносимую этими колебаниями в результат опыта.

5. Для оценки случайной погрешности опыта проведите 6–8 измерений по п. 4 для фиксированных значений массы и момента инерции маятника. По результатам оцените случайную ошибку σ_β .

6. Проведите опыт п. 4. для 6–8 значений момента силы натяжения нити, используя перегрузки m_T в диапазоне от 20 до 200 г на разных шкивах.

7. Измерьте зависимость углового ускорения от момента инерции системы. Для этого при одном из значений массы перегрузка из предыдущего пункта ($m_T \sim 100$ г) проведите измерения β_0 и k при 4–5 различных значениях расстояния R от оси системы до центров масс грузов. После перемещения грузов не забывайте проводить балансировку.

8. Снимите грузы со стержней и проведите несколько опытов по опусканию грузов для определения момента инерции пустой конструкции I_0 .

Обработка результатов измерений

9. По результатам п. 6 проверьте справедливость формулы (3). Для этого постройте график зависимости начального углового ускорения $\beta_0(M_n)$ от момента силы натяжения нити (2). Убедитесь, что экспериментальные точки ложатся на прямую линию. По наклону прямой определите момент инерции I , а по пересечению с осью абсцисс — минимальную силу трения M_0 . Сравните M_0 с измеренным в п. 2. Оцените погрешности результатов.

10. Пользуясь формулой (3) и величиной M_0 , полученной в п. 9, рассчитайте по результатам п. 7 моменты инерции I системы при различных R . Оцените погрешность измерения I . Постройте график зависимости $I(R^2)$. Используя график и формулы (5)–(6), определите момент инерции конструкции без грузов I_0 и сравните его с измеренным в п. 8.

Вопросы к сдаче работы

1. Получите формулы (5) и (6).
2. Исходя из параметров вашей установки оцените максимальный момент силы тяжести, возникающий при смещении одного из грузов на 1 мм от положения идеальной балансировки.
3. Исходя из параметров проведенного вами опыта оцените максимальное относительное увеличение значения силы реакции опоры при смещении одного из грузов на 1 мм от положения идеальной балансировки.
4. Предложите метод измерения сил трения в оси крестообразного маятника, не используя платформу с перегрузками.
5. Предложите метод измерения момента инерции пустой конструкции I_0 , не используя платформу с перегрузками.
6. По результатам проведенных измерений оцените коэффициент сухого трения μ в оси маятника.
7. Получите закон движения маятника $\varphi(t)$ в случае, когда доминирует «вязкая» составляющая сил трения $M_{тр} = \eta\omega$.
8. По результатам опыта оцените максимально возможную угловую скорость вращения маятника. При какой массе перегрузка она может быть достигнута на данной установке?

ПРИЛОЖЕНИЕ

Краткое руководство пользования программой «Kinematic»

1. Включите компьютер и дождитесь загрузки (программа загружается автоматически) и появления заставки. Нажмите «пробел» — появится текст описания программы. Нажмите «Esc» для выхода в основное меню.

2. Для инициализация нового опыта нажмите «1». Задайте параметры опыта (не обязательно) и число оборотов: $n \geq 10$ для большого шкива, или $n \geq 15$ для малого. Не вводите число оборотов $n < 10$ (программа может зависнуть).

3. Для проведения опыта нажмите «4» — программа перейдёт в режим ожидания запуска. Для запуска отсчёта времени нажмите клавишу «пробел» одновременно с началом движения маятника. Отсчёт завершится после того, как маятник совершит заданное в предыдущем пункте число оборотов (после того, как произойдёт $4n$ перекрытий луча датчика спицей маятника).

Внимание! Не размещайте грузы на краях спиц (в области пересечения с лучом датчика) — возможно некорректное срабатывание датчика.

4. После завершения измерений программа вернётся в основное меню. Для просмотра результатов нажмите «5».

5. Для нахождения зависимости ускорения от угловой скорости $\beta(\omega)$ нажмите «Enter». Для выбора экспериментальных точек, используемых для построения линейной аппроксимации $\beta = \beta_0 + k\omega$, нажмите «Enter» ещё раз. Точки выбираются клавишей «Пробел», переход между точками осуществляется стрелками «→», «←». После выбора нужных для расчёта точек снова нажмите «Enter».

6. Запишите рассчитанные коэффициенты β_0 , k и максимальную угловую скорость в опыте ω_{\max} .

7. Выйдите в основное меню (клавиша «Esc»). Для проведения следующего опыта нажмите «4», после чего нажмите «Y» для сброса результатов предыдущего опыта. Далее переходите к п. 3 (если необходимо изменить число оборотов n , вернитесь к п. 2).

8. По окончании работы выключите компьютер.

12.10.2016