

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

Кафедра общей физики

ИЗУЧЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ

Лабораторная работа 1.4.5
по курсу «Общая физика»

Составители: *П.В. Попов*
О.И. Смирнова

МОСКВА
МФТИ
2021

Содержание

Введение	3
Уравнение волны на струне	3
Бегущие волны	5
Собственные колебания струны. Стоячие волны	6
Возбуждение колебаний струны. Резонанс	8
Экспериментальная установка	9
Принцип работы датчиков	10
Измерения с помощью осциллографа	11
ЗАДАНИЕ	12
I. Визуальное наблюдение стоячих волн	12
II. Регистрация стоячих волн с помощью осциллографа	12
Обработка результатов измерений	14
Контрольные вопросы	15
Приложение. Нелинейные эффекты	15
Литература	16

Цель работы: изучить поперечные стоячие волны на тонкой натянутой струне; измерить собственные частоты колебаний струны и проверить условие образования стоячих волн; измерить скорость распространения поперечных волн на струне и исследовать её зависимость от натяжения струны.

В работе используются: закрепленная на станине стальная струна, набор грузов, электромагнитные датчики, звуковой генератор, двухканальный осциллограф, частотомер.

Введение

Струной в акустике называют однородную тонкую гибкую упругую нить. Примерами могут служить сильно натянутый шнур или трос, струны гитары, скрипки и других музыкальных инструментов. В данной работе изучаются поперечные колебания стальной гитарной струны, натянутой горизонтально и закрепленной между двумя неподвижными зажимами.

Основное свойство струны — *гибкость* — обусловлено тем, что её поперечные размеры малы по сравнению с длиной. Это означает, что напряжение в струне может быть направлено только вдоль неё, и позволяет не учитывать изгибные напряжения, которые могли бы возникать при поперечных деформациях (то есть при изгибе струны)*.

В *натянутой* струне возникает *поперечная упругость*, т.е. способность сопротивляться всякому изменению формы, происходящему без изменения объема. При вертикальном смещении произвольного элемента струны, возникают силы, действующие на соседние элементы, и в результате вся струна приходит в движение в вертикальной плоскости, т.е. возбуждение «бежит» по струне. Передача возбуждения представляет собой *поперечные бегущие волны*, распространяющиеся с некоторой скоростью в обе стороны от места возбуждения. В ненапрянутом состоянии струна не обладает свойством поперечной упругости, и поперечные волны на ней невозможны.

Уравнение волны на струне

Рассмотрим гибкую однородную струну, в которой создано натяжение T , и получим дифференциальное уравнение, описывающее её малые поперечные свободные колебания. Отметим, что, если струна расположена горизонтально в поле тяжести, величина T должна быть достаточна для того, чтобы в состоянии равновесия струна *не провисала*, т.е. сила натяжения должна существенно превышать вес струны.

* Следует подчеркнуть, что поперечные колебания *тонких стержней* отличаются от колебаний струны, что связано именно с возникновением изгибных напряжений. К примеру, гитарная струна диаметром $\sim 0,3$ мм и длиной 1 м является гибким объектом, а изготовленный из той же стали метровый стержень при диаметре 3–4 мм уже не обладает гибкостью. В нем существенную роль играют внутренние изгибные напряжения, препятствующие изменению его формы, поэтому его нельзя рассматривать как струну (см. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VII. Теория упругости. Гл. 3.*)

Направим ось x вдоль струны в положении равновесия. Форму струны будем описывать функцией $y(x, t)$, определяющей её вертикальное смещение в точке x в момент времени t (см. рис. 1). Угол наклона касательной к струне в точке x относительно горизонтального направления обозначим как α . В любой момент этот угол совпадает с углом наклона касательной к графику функции $y(x)$, то есть $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$.

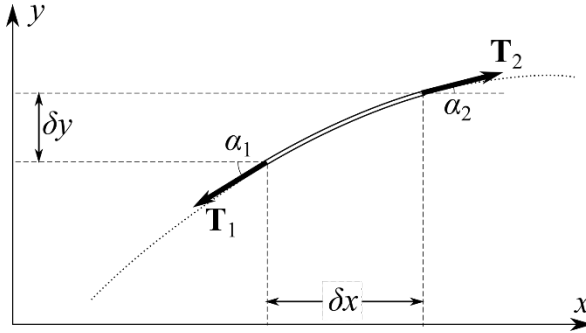


Рис. 1. К выводу уравнения колебаний струны

Рассмотрим элементарный участок струны, находящийся в точке x , имеющий длину δx и массу $\delta m = \rho_l \delta x$, где ρ_l [кг/м] — *погонная плотность струны* (масса на единицу длины). При отклонении от равновесия на выделенный элемент действуют силы натяжения \mathbf{T}_1 и \mathbf{T}_2 , направленные по касательной к струне. Их вертикальная составляющая будет стремиться вернуть рассматриваемый участок струны к положению равновесия, придавая элементу некоторое вертикальное ускорение $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$. Заметим, что угол α зависит от координаты x вдоль струны и различен в точках приложения сил \mathbf{T}_1 и \mathbf{T}_2 . Таким образом, второй закон Ньютона для вертикального движения элемента струны запишется в следующем виде:

$$\delta m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T_1 \sin \alpha_1 + T_2 \sin \alpha_2. \quad (1)$$

Основываясь на предположении, что отклонения струны от положения равновесия малы, можем сделать ряд упрощений:

1. Длина участка струны в смещенном состоянии практически равна длине участка в положении равновесия*, поэтому добавочным напряжением вследствие *удлинения* струны при деформации можно

* Нетрудно убедиться, что поправка к длине элемента имеет второй (квадратичный) порядок малости по углу α : $\delta l = \sqrt{\delta y^2 + \delta x^2} = \delta x \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \approx \delta x \left(1 + \frac{1}{2} \alpha^2\right) \approx \delta x$.

пренебречь. Следовательно, силы T_1 и T_2 по модулю равны силе натяжения струны: $T_1 \approx T_2 \approx T$.

2. Углы наклона α малы, поэтому $\operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$, и, следовательно, можно положить $\alpha \approx \frac{\partial y}{\partial x}$.

Разделим обе части уравнения движения (1) на δx и устремим размер элемента к нулю, $\delta x \rightarrow 0$. Тогда правая часть (1) примет вид

$$\rho_l \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T_2 \sin \alpha_2 - T_1 \sin \alpha_1}{\delta x} \approx T \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\delta x} \rightarrow T \frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

(в последнем переходе использовано определение производной функции как предела отношения приращения функции к приращению аргумента).

Наконец, подставляя $\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$ и вводя величину с размерностью скорости

$$u = \sqrt{\frac{T}{\rho_l}}, \quad (2)$$

находим окончательно уравнение свободных малых поперечных колебаний струны:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (3)$$

Уравнение (3) называют *волновым уравнением*. Оно играет крайне важную роль в физике и кроме волн на струне может описывать волновые процессы в самых разных системах, в том числе волны в сплошных средах (звук), электромагнитные волны и т.п.

Бегущие волны

Покажем, что введённая выше величина u есть *скорость распространения волны* на струне. Рассмотрим произвольную функцию вида $y = f(x - ut)$. Подставляя её в уравнение (3), убеждаемся, что она является его решением при любом f :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = (-u)^2 f'' = u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

где штрих обозначает производную по аргументу $\xi = x - ut$.

Как нетрудно видеть, наша функция $f(x - ut)$ описывает возмущение струны произвольной формы, которое смещается поступательно со скоростью u вдоль оси x не меняя своей формы. Действительно, считая аргумент функции f постоянным $x - ut = \text{const}$ и дифференцируя его по времени, получим: $dx - u dt = 0$, откуда $\frac{dx}{dt} = u$ (при $u > 0$ волна бежит в положительном направлении по x).

Как показывается в математических курсах, *общее* решение дифференциального уравнения в частных производных (3) представимо в виде

суммы двух волн произвольной формы, бегущих в противоположные стороны со скоростями $\pm u$:

$$y(x, t) = y_1(x - ut) + y_2(x + ut), \quad (4)$$

где u — скорость волны (2), y_1 и y_2 — произвольные функции, вид которых в конкретной задаче определяется из начальных и граничных условий.

Особый интерес представляет случай *гармонических волн*^{*}:

$$\begin{aligned} y(x, t) &= a \cos[k(x - ut)] + b \cos[k(x + ut)] = \\ &= a \cos(\omega t - kx) + b \cos(\omega t + kx). \end{aligned} \quad (5)$$

Выражение (5) представляет собой линейную комбинацию (суперпозицию) двух гармонических волн с амплитудами a и b , бегущих навстречу друг другу со скоростью

$$u = \frac{\omega}{k} = v\lambda. \quad (6)$$

Здесь *длина волны* $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, *частота* $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$. Величина $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ называется *волновым числом* или *пространственной частотой* волны. При возбуждении струны периодической гармонической силой (как в нашей работе) её колебания будут описывать именно формулой (5).

Заметим, что согласно (2) скорость u распространения поперечных волн на струне зависит *только* от силы натяжения струны T и её погонной плотности ρ_l и не зависит, во-первых, от модуля Юнга струны (струна считается нерастяжимой!) и, во-вторых, от внешних параметров, таких как амплитуда или частота возбуждающей силы. Однако, как видно из проведенного вывода, это справедливо только для *малых* амплитуд колебаний. Если амплитуда колебаний струны достаточно велика, то уже нельзя не учитывать изменение натяжения струны из-за её растяжения при деформации, что, в свою очередь, приведет к зависимости скорости волны от её амплитуды и другим *нелинейным* эффектам (подробнее см. приложение к работе).

Собственные колебания струны. Стоячие волны

Найдем вид свободных колебаний струны с *закрепленными концами*. Пусть струна закреплена в точках $x = 0$ и $x = L$. Концы струны не колеблются, поэтому $y(0, t) = 0$ и $y(L, t) = 0$ для любых t . Используя (5), найдем

$$y(0, t) = a \cos \omega t + b \cos \omega t = 0,$$

откуда следует, что $a = -b$. Тогда после тригонометрических преобразований выражение (5) примет вид

$$y(x, t) = 2a \sin kx \cdot \sin \omega t. \quad (7)$$

^{*} Известно, что *любую* периодическую функцию можно представить в виде суперпозиции гармонических функций («гармоник») с разными частотами (*теорема Фурье*).

Колебания струны, описываемые функцией (7), называются *стоячими волнами*. Видно, что стоячая волна может быть получена как суперпозиция двух гармонических бегущих навстречу друг другу волн с равными амплитудами.

Как видно из (7), точки струны, в которых $\sin kx = 0$, в любой момент времени неподвижны. Такие точки называются *узлами* стоячей волны. Остальные участки струны совершают в вертикальной плоскости гармонические колебания с частотой $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{u}{\lambda}$. Амплитуда колебаний распределена вдоль струны по гармоническому закону: $y_0(x) = 2a \sin kx$. В точках, где $\sin kx = 1$, амплитуда колебаний максимальна, такие точки называются *пучностями*. Между двумя соседними узлами все участки струны колеблются в *фазе* (их скорости имеют одинаковое направление), а при переходе через узел фаза колебаний меняется на π вследствие изменения знака $\sin kx$.

Используя второе граничное условие $y(L, t) = 0$ (точки крепления струны должны быть узлами стоячей волны), найдём условие образования стоячих волн на струне: $y(x, t) = 2a \sin kL \sin \omega t = 0$, откуда

$$\sin kL = 0 \quad \rightarrow \quad kL = n \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, стоячие волны на струне с закреплёнными концами образуются, только если *на длине струны укладывается целое число полуволн*:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}. \quad (8)$$

На рис. 2 показана картина стоячих волн для $n = 1, 2, 3$. Заметим, что число n определяет число пучностей (но не узлов!) колеблющейся струны.

Поскольку длина волны однозначно связана с её частотой, струна может колебаться только с определёнными частотами:

$$\nu_n = \frac{u}{\lambda_n} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho_l}}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Набор (*спектр*) разрешённых частот ν_n называют *собственными частотами* колебаний струны. Режим колебаний, соответствующий каждой из частот ν_n , называется *собственной* (или *нормальной*) *модой* колебаний (от англ. *mode* — режим). Произвольное колебание струны может быть представлено в виде суперпозиции её собственных колебаний. Наименьшая частота ν_1 называется также *основным тоном* (или *первой гармоникой*), а остальные ($\nu_2 = 2\nu_1$, $\nu_3 = 3\nu_1$, ...) — *обертонами* (*высшими гармониками*). Здесь термин *гармоника* мы употребляем в обобщенном смысле — как элементарную гармоническую составляющую сложного колебательного процесса.

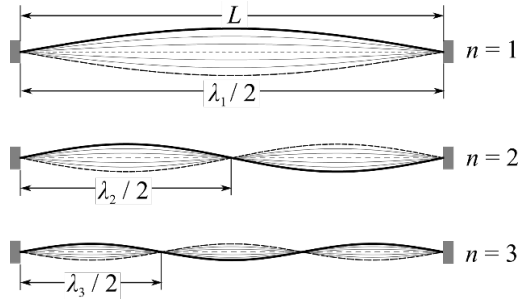


Рис. 2. Стоячие волны (собственные моды колебаний струны) для $n = 1, 2, 3$

Таким образом, *спектр собственных частот* тонкой струны определён её погонной плотностью ρ_l , внешней силой натяжения T и длиной струны L и не зависит от модуля Юнга материала струны.

Возбуждение колебаний струны. Резонанс

При колебаниях реальной струны всегда имеет место потеря энергии (часть теряется вследствие трения о воздух; другая часть уходит через неидеально закрепленные концы струны и т.д.). Поддержание незатухающих колебаний в струне может осуществляться точечным источником, в качестве которого в данной работе используется электромагнитный вибратор.

Для эффективной раскачки колебаний используется явление резонанса — вынуждающая частота ν должна совпадать с одной из собственных частот струны ν_n (в этом смысле струна аналогична обычной колебательной системе, например маятнику или грузу на пружине, только вместо единственной собственной резонансной частоты струна обладает бесконечным спектром резонансных частот ν_n). Когда потери энергии в точности компенсируются энергией, поступающей от вибратора, колебания струны становятся стационарными и на ней можно наблюдать стоячие волны.

Остановимся отдельно на вопросе переноса энергии от источника по всей струне. Строго говоря, в стоячей волне поток энергии вдоль струны *отсутствует* — колебательная энергия, заключенная в отрезке струны между двумя соседними узлами, не передаётся в другие части струны: просто в каждом отрезке струны происходит периодическое (дважды за период) превращение кинетической энергии в потенциальную и обратно. Как же тогда раскачиваются остальные части струны, расположенные вдали от вибратора?

Дело в том, что колебания реальной струны никогда не являются чисто стоячими — всегда есть небольшая примесь бегущей волны. Причина её возникновения — потеря энергии волны при отражении от креплений, из-за

которого не происходит полной компенсации падающей и отраженной волн. Поэтому к стоячей волне на струне добавляется малая бегущая компонента — именно она служит «разносчиком» энергии по всей системе. Если потери энергии за период малы по сравнению с запасом колебательной энергии в струне, то искажение стоячих волн бегущей волной не существенно — наложение бегущей волны малой амплитуды на стоячую визуально приводит к незначительному «размытию» узлов (амплитуда колебаний в узлах совпадает с амплитудой бегущей компоненты волны).

Заметим, что для достижения максимального эффекта возбуждающий «датчик» следует располагать вблизи *узловой* точки (но не строго в ней!). Это можно показать из следующих элементарных соображений. Пусть «датчик», размещённый в точке x_0 , способен раскачать соответствующий элемент струны до амплитуды A . Если частота генератора близка к одной из резонансных частот струны, то, как следует из (7), амплитуда колебаний струны в пучности будет равна $2a = \frac{A}{\sin kx_0}$. Таким образом, максимальная раскачка струны достигается, если значение $\sin kx_0$ устремить к нулю, что и соответствует положениям узлов (из идеализированной модели струны следует, что при размещении вибратора в узле амплитуда колебаний устремится к бесконечности, однако в реальности она ограничивается силами трения и нелинейными эффектами).

Заметим также, что при наблюдении стоячих волн важно, чтобы колебания происходили в одной (вертикальной) плоскости, т.е. были *линейно поляризованы*. Если боковые (горизонтальные) колебания всё же возбуждаются, их можно погасить, установив сбоку от струны ограничитель. Кроме того, важно, чтобы колебания струны происходили с малой амплитудой, поскольку при сильном возбуждении нарушаются условия применимости волнового уравнения (3), и в опыте наблюдаются искажения, связанные с нелинейными эффектами (см. приложение).

Экспериментальная установка

Схема установки приведена на рис. 3. Стальная гитарная струна **1** закрепляется в горизонтальном положении между двумя стойками с зажимами **2** и **3**, расположенными на массивной станине **4**. Один конец струны закреплен в зажиме **2** неподвижно. К противоположному концу струны, перекинутому через блок, прикреплен платформа с грузами **5**, создающими натяжение струны. Зажим **3** можно передвигать по станине, устанавливая требуемую длину струны. Возбуждение и регистрация колебаний струны осуществляются с помощью электромагнитных датчиков (вибраторов), расположенных на станине под струной. Электромагнитный датчик **6** подключен к звуковому генератору **7** и служит для возбуждения колебаний

струны, частота которых измеряется с помощью частотомера 10 (в некоторых установках частотомер встроен в генератор). Колебания струны регистрируются с помощью электромагнитного датчика 8, сигнал с которого передается на вход осциллографа 9. Разъёмы, через которые датчики с помощью кабелей соединяются с генератором и осциллографом, расположены на корпусе станины.

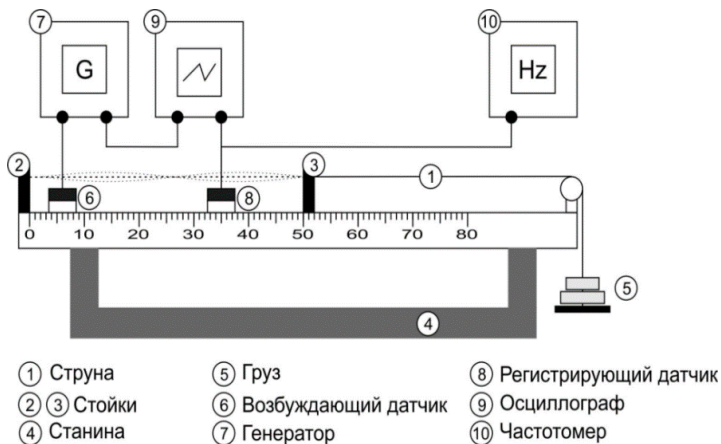


Рис. 3. Экспериментальная установка

Принцип работы датчиков

Устройство и внешний вид электромагнитного датчика показаны на рис. 4. В пластмассовом корпусе датчика закреплен подковообразный магнит. На полюсах магнита намотаны «встречной намоткой» две катушки переменного тока. Ток на катушки подается с генератора. Магнитное поле в зазоре между полюсами электромагнита складывается из поля постоянного магнита B_0 и небольшой добавочной составляющей поля катушек $B_{\sim} \ll B_0$. Сила, с которой электромагнит действует на стальную (магнитную) струну, пропорциональна квадрату индукции B суммарного поля в зазоре электромагнита*:

$$F \propto (B_0 + B_{\sim})^2 \approx B_0^2 + 2B_0B_{\sim}.$$

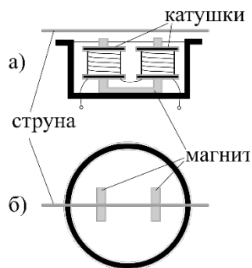


Рис. 4. Электромагнитный датчик: а) вид спереди, б) вид сверху

* См., напр., Калашиников С.Г. Электричество. Москва : Физматлит, 2003. § 121.

Отсюда видно, что при $B_{\sim} \ll B_0$ сила F линейно зависит от переменного поля B_{\sim} , а значит и от тока в катушках (т.к. $B_{\sim} \propto I_{\sim}$), и поэтому частота переменной силы $F_{\sim} \propto 2B_0B_{\sim} \propto I_{\sim}$, действующей на струну, совпадает с частотой генератора. То есть участок струны, расположенный над электромагнитом, совершает колебательное движение в вертикальной плоскости с частотой задающего генератора. Колебания далее передаются по всей струне и, если частота колебаний совпадает с одной из её собственных частот, на струне устанавливается стоячая волна. Колеблющаяся струна возбуждает в регистрирующей катушке переменную ЭДС, пропорциональную амплитуде колебаний струны. Сигнал ЭДС измеряется с помощью осциллографа.

Отметим, что магнитное поле наиболее однородно по координате в центральной части электромагнита, поэтому датчики должны быть повернуты так, чтобы струна располагалась в центральной части перпендикулярно к полюсам магнита. Возбуждающий датчик следует расположить вблизи неподвижного конца струны (ближе к узлу), а регистрирующий — в пучности.

Измерения с помощью осциллографа

Для регистрации колебаний струны в работе используется электронный осциллограф, соединённый с электромагнитным датчиком 8. Он позволяет регистрировать колебания в случаях, когда это невозможно сделать визуально. Также с помощью осциллографа можно измерять амплитуду возбуждения и форму сигнала, что даёт возможность установить, является ли режим возбуждения стоячих волн линейным, иными словами, имеет ли место прямая пропорциональность между силой возбуждения и амплитудой колебаний струны, и не возникает ли отклонений от закона (7).

Контролировать величину и форму сигнала колебаний струны на экране осциллографа можно несколькими способами: в одноканальном и двухканальном режимах работы осциллографа — по временной развертке сигналов, а также в режиме сложения двух взаимно перпендикулярных сигналов — основного и опорного (режим X–Y).

При возбуждении стоячей волны на экране осциллографа в режиме развертки должен появиться сигнал синусоидальной формы. При чрезмерном возбуждении вид синусоиды искажается, что свидетельствует об отклонении от линейного режима. В двухканальном режиме осциллографа можно сравнить опорный (подаваемый на возбудитель колебаний 6) и основной (снимаемый с датчика 8) сигналы — в отсутствие нелинейных искажений они должны совпадать. Кроме того, в режиме сложения сигналов (X–Y) на экране должен прорисовываться эллипс правильной формы.

Дополнительным критерием того, что частота гармоник определена верно, является симметричность «резонансной кривой» — амплитудно-частотной характеристики системы (рис. 5). А именно: при подходе к резонансной частоте со стороны как высоких, так и низких частот, максимум сигнала наблюдается при одном и том же значении частоты.

ЗАДАНИЕ

I. Визуальное наблюдение стоячих волн

1. Освободите зажим струны на стойке **3** и установите начальную длину струны L (рекомендованное значение указано на установке). Натяните струну, поставив на платформу грузы общим весом около 1 кг (учтите вес платформы и крепежа). Осторожно прижмите струну в стойке **3**, не деформируя струну. Возбуждающий датчик **6** должен располагаться рядом с *неподвижной* стойкой **2**, т.е. вблизи узла стоячей волны. **Не зажимайте струну слишком сильно — это приведёт к искажению её натяжения!**

2. Проведите предварительные расчёты. Оцените скорость распространения волн u по формуле (2). Для определения погонной плотности ρ_l используйте табличное значение плотности стали, диаметр струны указан на установке (или может быть измерен непосредственно микрометром). Для заданных значений длины струны и силы натяжения рассчитайте частоту основной гармоники ν_1 согласно (9).

3. Включите в сеть звуковой генератор и частотомер. Установите на генераторе тип сигнала — синусоидальный, частоту основной гармоники ν_1 и максимальную амплитуду напряжения. При этом сигнал с выхода генератора должен быть подан на возбуждающий датчик **6**.

4. Медленно меняя частоту звукового генератора в диапазоне $\nu = \nu_1 \pm 5$ Гц, добейтесь возбуждения стоячей волны на основной гармонике (одна пучность) с максимальной амплитудой. Если при колебаниях струна касается регистрирующего датчика **8**, осторожно сдвиньте датчик по скамье (в сторону *удаления* от возбуждающего датчика). Определите частоту первой гармоники ν_1 по частотомеру.

5. Увеличив частоту примерно в 2 раза, получите картину стоячих волн на второй гармонике, а затем и на более высоких гармониках (обычно визуально удастся наблюдать до 5–7 гармоник). Запишите значения частот ν_n стоячих волн, которые удастся пронаблюдать.

II. Регистрация стоячих волн с помощью осциллографа

Перед выполнением данного пункта ознакомьтесь с краткой инструкцией по работе с осциллографом по техническому описанию работы.

6. Не меняя нагрузку струны и её длину, настройтесь визуально на колебания струны на основной гармонике. Установите регистрирующий датчик **8** в центре под струной (в пучности стоячей волны). Уменьшите уровень выходного сигнала генератора так, чтобы при колебаниях струна не касалась датчика. Проверьте правильность соединения проводов: сигнал

колебаний струны с регистрирующего датчика **8** (основной сигнал) подается на вход канала **2** осциллографа, а на вход канала **1** подается опорный сигнал с генератора на частоте возбуждения струны.

7. Включите осциллограф в сеть и проверьте его настройку (см. *техническое описание* работы). Пользуясь органами управления осциллографа, выведите на экран сигнал с регистрирующего датчика.

Подстройте частоту ν генератора так, чтобы амплитуда сигнала была максимальна. Добейтесь отсутствия нелинейных искажений, уменьшая уровень возбуждения (амплитуду напряжения генератора) и подстраивая при этом частоту так, чтобы она соответствовала максимуму сигнала. Запишите окончательное значение частоты основной гармоники ν_1 . Экспериментально оцените погрешность определения положения резонанса $\delta\nu$ в данном методе.

8. Проведите измерение частот не менее 5 *нечётных* ($n = 1, 3, 5, 7, 9$) гармоник стоячих волн при заданных длине струны и её натяжении. Для наблюдения нечетных гармоник регистрирующий датчик следует размещать в центре под струной (как для основной гармоники).

9. Измерьте частоты *четных* ($n = 2, 4, \dots$) гармоник. Для этого осторожно смещайте регистрирующий датчик **8** по станине в предварительно рассчитанные положения пучностей. Во избежание взаимного электромагнитного влияния датчиков регистрирующий датчик следует сдвигать *дальше* от возбуждающего (то есть в сторону подвижного зажима струны **3**).

10. Проведите опыты п. 8 и 9 не менее чем для пяти различных натяжений струны (при неизменной длине). При изменении нагрузки следует *ослабить зажим* струны в стойке **3**, положить груз на чашку и вновь **осторожно** прижать струну. **Не превышайте максимальную нагрузку** (указана на установке)!

11*. Благодаря высокой добротности струны, возможно возбуждение её колебаний при кратных частотах генератора, меньших, чем ν_1 . Для наблюдения явления переключите осциллограф в режим (X-Y) и настройте установку на наблюдение основной гармоники. Затем уменьшите частоту возбуждения в два раза, установив на генераторе $\nu = \nu_1/2$. На экране осциллографа должна наблюдаться фигура Лиссажу с одним самопересечением. Зарисуйте (или сфотографируйте) наблюдаемую фигуру. Объясните явление.

* Дополнительное задание, выполняется по указанию преподавателя.

12*. Определите добротность Q струны как колебательной системы, измерив её амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) вблизи одной из резонансных частот (в качестве таковых рекомендуется выбрать ν_1 или ν_3) для нескольких натяжений струны (по указанию преподавателя).

Для расчётов воспользуйтесь известным из теории колебаний результатом: добротность колебательной системы связана с резонансной частотой $\nu_{\text{рез}}$ и шириной резонансной кривой $\Delta\nu$ соотношением

$$Q = \frac{\nu_{\text{рез}}}{\Delta\nu},$$

где ширина резонансной кривой $\Delta\nu$ измеряется на уровне амплитуды, составляющей 0,7 от амплитуды в резонансе (рис. 5).

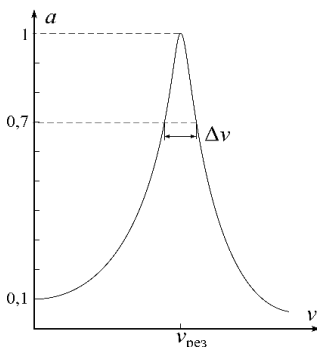


Рис. 5. АЧХ вынужденных колебаний (линейный режим возбуждения)

Обработка результатов измерений

13. Сравните значения частот ν_n , полученных при визуальном наблюдении и наблюдении с помощью осциллографа. Объясните результаты.

14. По результатам измерений п. 8 и 9 постройте графики зависимостей частоты ν_n от номера n гармоники для различных натяжений T (по возможности представьте результаты на одном графике). Убедитесь, что графики имеют линейную зависимость, проходящую через начало координат.

Постройте наилучшие прямые и по их наклонам определите соответствующие скорости волн u . Оцените погрешность измерения u .

16. Постройте график зависимости квадрата скорости u^2 от силы натяжения T . Убедитесь, что полученная зависимость линейна и также проходит через начало координат. По наклону наилучшей прямой определите погонную плотность струны ρ_l . Оцените погрешность результата.

Сравните полученное значение ρ_l со значением погонной плотности струны, указанной на установке (определенное прямым взвешиванием струны). Проанализируйте возможные причины расхождения результатов.

* Дополнительное задание. Выполняется по указанию преподавателя на установках, оснащенных генераторами, имеющими разрешение по частоте не менее 0,1 Гц.

Контрольные вопросы

1. На каких основных предположениях базируется вывод волнового уравнения для поперечных волн на тонкой струне?
2. От каких параметров зависит скорость распространения поперечных волн в струне? Зависит ли она от амплитуды или частоты возбуждающей силы?
3. Для чего необходимо создавать натяжение в струне? Влияет ли продольная упругость струны на распространение исследуемых в работе волн?
4. Как связаны между собой частота, длина волны, волновое число и скорость распространения бегущей волны?
5. Напишите выражение для гармонической бегущей и стоячей волн. Убедитесь, что они являются решением волнового уравнения. Как стоячая волна может быть получена из бегущих?
6. Сформулируйте условие образования стоячих волн в струне с закрепленными концами. Получите выражение для собственных частот струны.
7. Покажите, что при отражении гармонической волны от закреплённого конца фаза отражённой волны будет отличаться от падающей на π .
8. Какова роль потерь энергии (затухания) в струне? Какова роль потерь при отражении на концах струны? Как наличие затухания проявляется в эксперименте?
9. К каким наблюдаемым эффектам приводит слишком большая амплитуда колебаний струны? Как на опыте убедиться, что амплитуда колебаний достаточно мала?
10. Рассчитайте максимальные значения кинетической энергии стоячей волны с амплитудой a на частоте ν_n . Чему равна полная энергия, запасённая в этой волне? Как энергия колебаний зависит от частоты?
11. Найдите величину относительного размытия узлов $\delta a/a$ (δa — амплитуда колебаний в узле, a — в пучности), если при отражении волны от крепления её амплитуда уменьшается на 1%. Другие потери не учитывать.

Приложение. Нелинейные эффекты *

При сильном возбуждении струны нарушаются основные условия, при которых получено волновое уравнение (3). Возвращающая сила $T \sin \alpha$, действующая на элемент струны δx , в этом случае будет сама зависеть от величины y — отклонения элемента струны от положения равновесия. Кроме того, начинает играть существенную роль продольная деформация (растяжение) струны — возникают добавочные напряжения, определяемые модулем Юнга материала струны. Поэтому форма резонансной кривой (амплитудно-частотной характеристики) струны начнет искажаться (см. рис. 6).

* См. подробнее Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 1. Механика. §29.

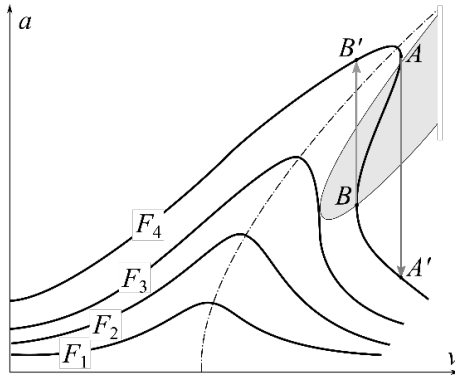


Рис. 6. «Опрокидывание» резонансной кривой в нелинейном режиме колебаний струны при разных амплитудах вынуждающей силы ($F_1 < F_2 < F_3 < F_4$)

Каждый участок струны будем представлять как *нелинейный* осциллятор. Как известно, частота собственных колебаний нелинейного осциллятора зависит от амплитуды. При умеренных амплитудах вынуждающей силы (F_2 на рис. 6) это приводит к *смещению максимума резонансной кривой*. Эффект смещения частоты тем сильнее, чем больше амплитуда колебаний струны. Вследствие этого, начиная с некоторого значения амплитуды силы (F_3 на рис. 6), резонансные кривые «опрокидываются» и приобретают неоднозначную «клювообразную» форму (F_4 на рис. 6). В таком случае в определённом интервале частот стационарная амплитуда вынужденных колебаний оказывается зависящей от предыстории установления колебаний — возникает явление колебательного *гистерезиса*. При увеличении частоты (при подходе к резонансу «слева») амплитуда достигает максимума, после чего почти сразу происходит срыв колебаний (переход $A \rightarrow A'$), а при уменьшении частоты (подходе к резонансу «справа») возникает резкая раскочка колебаний на частоте, меньшей, чем резонансная (переход $B \rightarrow B'$). При этом на плоскости (ν, a) образуется область физически нереализуемых режимов (закрашена серым).

Литература

1. *Кингсеп А.С, Локшин Г.Р., Ольхов О.А.* Основы физики. Курс общей физики. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика / под ред. А.С. Кингсепа. – Москва : Физматлит, 2001. Ч. III, гл. 5.
2. *Стрелков С.П.* Общий курс физики. Механика. – Москва : Наука, 1975. § 137, 138, 141–143.
3. *Хайкин С.Э.* Физические основы механики. – Москва : Наука, 1971. § 148–150.