«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

Кафедра общей физики

ИЗМЕРЕНИЕ МОДУЛЯ ЮНГА МЕТОДОМ АКУСТИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА

Лабораторная работа 1.4.8
по курсу «Общая физика»

Составители: *О.И. Смирнова*
П.В. Попов
Г.Е. Федоров

Версия от 23.08.2021

Содержание

Цель работы: исследовать явление акустического резонанса в тонком стержне; измерить скорость распространения продольных звуковых колебаний в тонких стержнях из различных материалов и различных размеров; измерить модули Юнга различных материалов.

В работе используются: генератор звуковых частот, частотомер, осциллограф, электромагнитные излучатель и приёмник колебаний, набор стержней из различных материалов.

Введение

Основной характеристикой упругих свойств твёрдого тела является его *модуль Юнга* E. Согласно закону Гука, если к элементу среды приложено некоторое механическое напряжение σ, действующее вдоль некоторой оси x (напряжения по другим осям при этом отсутствуют), то в этом элементе возникнет относительная деформацию вдоль этой же оси $\varepsilon = \Delta x / x_0$, определяемая соотношением

$$\sigma = \varepsilon E \tag{1}$$

Если с помощью кратковременного воздействия в некотором элементе твёрдого тела создать малую деформацию, она будет далее распространяться в среде в форме *волны*, которую называют *акустической* или *звуковой*. Распространение акустических волн обеспечивается за счёт *упругости* и *инерции* среды. Волны сжатия/растяжения, распространяющиеся вдоль оси, по которой происходит деформация, называются *продольными*. Как будет строго показано далее, скорость u распространения продольной акустической волны в простейшем случае длинного тонкого стержня определяется соотношением

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \tag{2}$$

где ρ — плотность среды.

Заметим, что размерность модуля Юнга E равна [Н/м^2] и совпадает с размерностью механического напряжения (или давления). Характерные значения модуля Юнга металлов лежат в диапазоне $E \sim 10^{10} \div 10^{12}$ Па, так что при плотности $\rho \sim 10^4$ кг/м^3 характерные значения скорости звука в твёрдых телах составляют $u \sim 10^3 \div 10^4$ м/с.

В общем случае звуковые волны в твёрдых телах могут быть не только продольными, но и *поперечными* — при этом возникает деформация *сдвига* перпендикулярно распространению волны. Кроме того, описание распространения волн в неограниченных средах осложняется тем обстоятельством, что при отличном от нуля *коэффициенте Пуассона*[1] напряжение вдоль одной из осей вызывает деформацию не только в продольном, но и в поперечном направлении к этой оси. Таким образом, общее описание звуковых волн в твёрдых телах — относительно непростая задача. В данной работе мы ограничимся исследованием наиболее простого случая упругих волн, распространяющихся в *длинных тонких стержнях*.

Рассмотрим стержень постоянного круглого сечения, радиус R которого много меньше его длины L. С точки зрения распространения волн стержень можно считать *тонким*, если длина λ звуковых волн в нём велика по сравнению с его радиусом: $\lambda \gg R$. Такая волна может свободно распространяться только *вдоль* стержня, поэтому можно считать, что стержень испытывает деформации растяжения и сжатия только *вдоль своей оси* (заметим, что в обратном пределе коротких волн $\lambda \ll R$ стержень следует рассматривать как безграничную сплошную среду). Если боковые стенки тонкого стержня свободны (т.е. стержень не сжат с боков), то его деформации описывается законом Гука в форме (1), и, следовательно, его упругие свойства определяются исключительно модулем Юнга среды.

Акустическая волна, распространяющаяся в стержне конечной длины L, испытает отражение от торцов стержня. Если при этом на длине стержня укладывается *целое число полуволн*, то отражённые волны будут складываться *в фазе* с падающими, что приведёт к резкому усилению амплитуды их колебаний и возникновению *акустического резонанса* в стержне. Измеряя соответствующие резонансные частоты, можно определить скорость звуковой волны в стержне и, таким образом, измерить модуль Юнга материала стержня. Акустический метод является одним из наиболее точных методов определения упругих характеристик твёрдых тел.

Уравнение волны в тонком стержне[2]

Получим дифференциальное уравнение, описывающее распространение упругих волн в тонком стержне.

Направим ось x вдоль геометрической оси стержня (рис. 1). Разобьём исходно недеформированный стержень на тонкие слои толщиной Δx. При продольной деформации среды границы слоёв сместятся в некоторые новые положения. Пусть плоскость среды, находящаяся исходно в точке x, сместилась к моменту t на расстояние $\xi(x, t)$. Тогда слой, занимавший исходно отрезок $[x; x + \Delta x]$, изменил свой продольный размер на величину

---

[1] *Коэффициент Пуассона* отвечает за возникновение деформаций, *поперечных* к приложенному напряжению. От него, в частности, зависят модули сдвига и всестороннего сжатия твердых тел. Подробнее см. *Кириченко Н.А., Крымский К.М.* Общая физика. Механика. Гл. 12.

[2] При первом чтении этот раздел можно пропустить.

$\Delta\xi = \xi(x + \Delta x, t) - \xi(x, t)$. Пользуясь малостью Δx и определением производной, получим $\Delta\xi = \frac{\partial\xi}{\partial x}\Delta x$. Таким образом, функция

$$\varepsilon = \frac{\partial\xi}{\partial x} \tag{3}$$

— это относительное удлинение элемента стержня в точке x.

Заметим, что смещение слоёв $\xi(x, t)$ является функцией не только координаты, но и времени, поэтому мы используем обозначения для *частных* производных по координате и времени.

Далее, согласно закону Гука (1), имеем

$$\sigma = \varepsilon E = E\frac{\partial\xi}{\partial x}. \tag{4}$$

Здесь напряжение равно $\sigma = F/S$, где F — продольная сила, действующая на элементарный участок Δx, S — площадь поперечного сечения стержня.

Напряжения, действующие на стенки рассматриваемого элемента в сечениях x и $x + \Delta x$, будут различными. Из-за этого возникнет результирующая *возвращающая сила*, стремящаяся вернуть элемент стержня в исходное (недеформированное и несмещённое) состояние:

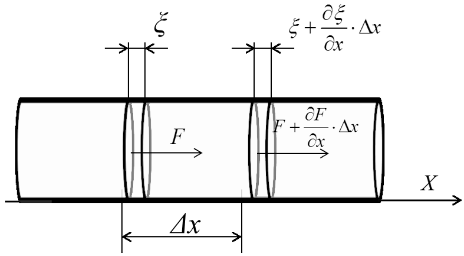

Рис. 1. Силы, действующие на элемент стержня при продольных колебаниях

$$\Delta F = S\sigma(x + \Delta x) - S\sigma(x) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}S\Delta x = \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}ES\Delta x. \tag{5}$$

Эта сила вызовет ускорение движение элемента стержня массой $\Delta m = S\rho\Delta x$ вдоль оси x. Ускорение рассматриваемого элемента — это вторая производная по времени от смещения его границ:

$$a = \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}.$$

Тогда используя 2-й закон Ньютона:

$$\Delta m \cdot a = \Delta F$$

и соотношения (3) – (5), получим уравнение движения среды:

$$S\rho\Delta x\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = SE\Delta x\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}.$$

Наконец, вводя величину с размерностью скорости $u = \sqrt{E/\rho}$ согласно (2), запишем полученное уравнение в окончательном виде:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \qquad (6)$$

Это уравнение носит название ***волнового***. Оно имеет универсальный характер и описывает волны самой разной природы: акустические волны в твёрдых телах, жидкостях и газа, волны на струне, электромагнитные волны и т.п. Как будет показано далее, величина u в уравнении (6) имеет смысл *скорости распространения волны*.

Скажем несколько слов о пределах применимости рассмотренной теории. Применимость уравнения (6) ограничена, во-первых, справедливостью закона Гука (относительная деформация среды должны быть малой, $\varepsilon \ll 1$) и, во-вторых, условием тонкого стержня: $\lambda \gg R$. Отметим, что в коротковолновом пределе, т.е. при $\lambda \ll R$, стержень следует рассматривать как *неограниченную* среду. Скорость продольных акустических волн в ней определяется той же формулой (2), в которой модуль Юнга следует заменить так называемым *модулем одностороннего сжатия*. Приведём для справки соответствующую формулу (μ — коэффициент Пуассона):

$$u_i = \sqrt{\frac{E}{\rho} \cdot \frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}}.$$

Наконец, в промежуточном случае $\lambda \sim R$ звуковые колебания весьма сложны и требуют аккуратного учёта граничных условиях на боковых поверхностях стержня. В рамках этой работы они не рассматриваются.

Бегущие акустические волны. Скорость волны

Покажем, что *произвольная* функция вида $\xi(x,t) = \phi(x-ut)$ — то есть функция, зависящая только от комбинации $X = x - ut$, — является решением волнового уравнения (6). Действительно, прямой подстановкой в (6), используя формулу производной сложной функции, убеждаемся, что волновое уравнение обращается в тождество при *любой* функции ϕ:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = (-u)^2 \phi'', \qquad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \phi'' \quad \to \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \equiv u^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2},$$

где штрих обозначает производную по аргументу $X = x - ut$.

Как нетрудно видеть, рассматриваемая функция $\phi(x-ut)$ описывает возмущение среды *произвольной* формы, которое *смещается поступательно* во времени по оси x со скоростью u, *не меняя своей формы*. Действительно, полагая аргумент функции ϕ постоянным $x - ut = \text{const}$ и дифференцируя его по времени, получим $dx - u\,dt = 0$, откуда $\frac{dx}{dt} = u$ (при $u > 0$ волна бежит в положительном направлении по x).

Конечно, волна может распространяться и против оси x: решение для такой волны имеет вид $\xi = \phi(x+ut)$. Как показывается в математических курсах, *общее* решение дифференциального уравнения (6) представимо в виде суммы двух волн произвольной формы, бегущих в противоположные стороны со скоростями $\pm u$:

$$\xi(x,t) = \phi_1(x - ut) + \phi_2(x + ut), \tag{7}$$

где u — скорость волны, ϕ_1 и ϕ_2 — функции, вид которых в конкретной задаче определяется из начальных и граничных условий.

Собственные колебания стержня. Стоячие волны

В случае *гармонического* возбуждения колебаний с частотой f продольная волна в тонком стержне может быть представлена в виде суперпозиции двух бегущих навстречу *гармонических* волн:

$$\xi(x,t) = A_1 \sin(\omega t - kx + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + kx + \varphi_2), \tag{8}$$

где $\omega = 2\pi f$ — циклическая частота. Коэффициент $k = 2\pi/\lambda$ называют *волновым числом* или *пространственной частотой* волны.

Первое слагаемое (8) описывает гармоническую (синусоидальную) волну, бегущую в положительном направлении по x, второе — в отрицательном. Соотношения между *амплитудами* $A_{1,2}$ и *начальными фазами* $\varphi_{1,2}$ этих волн, а также возможные частоты колебаний ω, определяются граничными условиями на концах стержня. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Пусть концы стержня *не закреплены*. Тогда напряжения в них должны равняться нулю. Положим координаты торцов равными $x = 0$ и $x = L$. Тогда, используя связь напряжения и деформации (4), запишем граничные условия для свободных (незакреплённых) концов стержня:

$$\sigma(0) = 0 \rightarrow \left.\frac{\partial \xi}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \qquad \sigma(L) = 0 \rightarrow \left.\frac{\partial \xi}{\partial x}\right|_{x=L} = 0. \tag{9}$$

Соотношения (9) должны выполняться в произвольный момент времени.

Записывая первое граничное условие (9) для функции (8), найдём

$$-kA_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + kA_2 \cos(\omega t + \varphi_2) = 0.$$

Нетрудно видеть, что это соотношение будет выполняться при любом t, если только у «падающей» и «отражённой» волн одинаковы амплитуды

$$A_1 = A_2 \tag{10}$$

и фазы

$$\varphi_1 = \varphi_2. \tag{11}$$

Условие равенства амплитуд (10) можно интерпретировать как условие отражения волн от торцов *без потери энергии*. Поскольку на практике потери неизбежны, это условие выполняется лишь приближённо: $A_1 \approx A_2$. Условие (11) означает, что при отражении синусоидальной волны от *свободного* конца стержня, её фаза *не изменяется*. Нетрудно также убедиться, что если же концы стержня закрепить ($\xi|_{x=0} = \xi|_{x=L} = 0$), то фазы падающей и отражённой волн будут отличаться друг от друга на π.

Далее, перепишем исследуемую функцию (8), используя граничные условия (10) и (11) и формулу суммы синусов:

$$\xi(x,t) = 2A\cos(kx)\sin(\omega t + \varphi)\,. \tag{12}$$

Колебания вида (12) называют гармоническими ***стоячими волнами***.

Наконец, воспользуемся вторым граничным условием (9) применительно к функции (12). В результате придём к уравнению $\sin kL = 0$, решения которого определяют набор допустимых значений волновых чисел k:

$$k_n L = \pi n, \qquad n = 1, 2, 3, \dots, \tag{13}$$

или, выражая (13) через длину волны $\lambda = 2\pi/k$, получим

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{13$'$}$$

Таким образом, для возбуждения стоячей волны *на длине стержня должно укладываться целое число полуволн*.

Допустимые значения частот

$$f_n = \frac{u}{\lambda_n} = n\frac{u}{2L}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

называют ***собственными частотами*** колебаний стержня длиной L. Именно при совпадении внешней частоты с одной из частот f_n в стержне возникает ***акустический резонанс***.

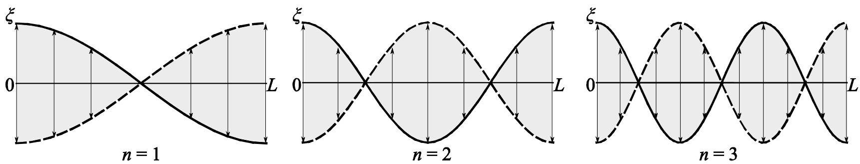

Рис. 2. Собственные продольные колебания стержня с незакреплёнными концами (для наглядности изображение дано не в масштабе, реальные смещения малы по сравнению с длиной стержня, $\xi \ll L$)

Зависимость амплитуды смещения ξ от координаты x для собственных колебаний стержня с незакреплёнными концами при $n = 1,2,3$ представлена на рис. 2. Амплитуда колебаний смещения среды распределена вдоль стержня по гармоническому закону: $\xi_0(x) = 2A\cos kx$. Точки с максимальной амплитудой называются ***пучностями смещения***, точки с минимальной (нулевой) амплитудой — ***узлами смещения***. Номер гармоники n определяет количество узлов смещения на стержне. Заметим, что согласно закону Гука (1) в пучности смещения имеет место ***узел напряжения***, и, наоборот, в узлах смещения имеется ***пучность напряжения*** (в частности, на свободных торцах стержня напряжение всегда нулевое, а деформация максимальна).

Напоследок отметим, что в реальной системе стоячая волна не может быть получена в чистом виде: всегда существуют потери энергии, связанные, в том числе с отражением волн на краях стержня ($A_1 \neq A_2$). Поэтому для поддержания колебаний необходимо наличие некоторого стороннего возбудителя, а к стоячей волне примешивается бегущая с малой амплитудой: $|A_1 - A_2| \ll A_{1,2}$. Также именно благодаря бегущим волнам энергия может передаваться от одних частей стержня к другим (в стоячей волне энергия не переносится, а только переходит из кинетической в потенциальную и обратно).

Схема и методика измерений

Экспериментальная установка

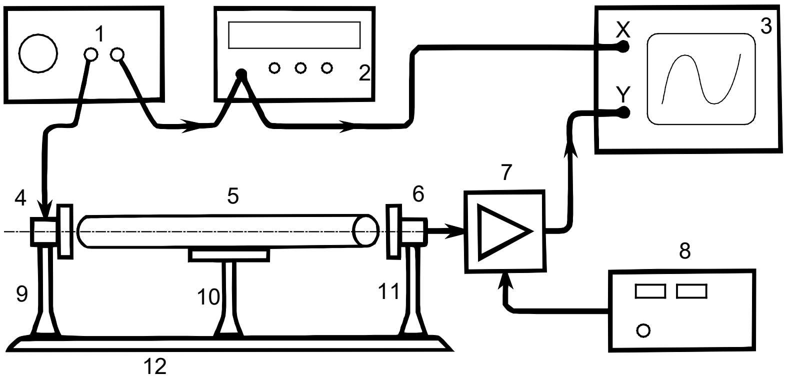

Рис. 3. Схема установки: 1 – генератор звуковой частоты, 2 – частотомер, 3 – осциллограф, 4 – электромагнит-возбудитель, 5 – образец, 6 – электромагнит-приёмник, 7 – усилитель звуковой частоты, 8 – блок питания усилителя, 9, 11 – стойки крепления электромагнитов, 10 – стойка крепления образца, 12 – направляющая

Схема экспериментальной установки приведена на рис. 3. Исследуемый стержень **5** размещается на стойке **10**. Возбуждение и приём колебаний в стержне осуществляются электромагнитными преобразователями **4** и **6**, расположенными рядом с торцами стержня. Крепления **9**, **11** электромагнитов дают возможность регулировать их расположение по высоте, а также перемещать вправо-влево по столу **12**.

Электромагнит **4** служит для возбуждения упругих механических продольных колебаний в стержне. На него с генератора звуковой частоты **1** подаётся сигнал синусоидальной формы: протекающий в катушке электромагнита ток создаёт пропорциональное ему магнитное поле, вызывающее периодическое воздействие заданной частоты на торец стержня (к торцам стержней из немагнитных материалов прикреплены тонкие стальные шайбы). Рядом с другим торцом стержня находится аналогичный электромагнитный датчик **6**, который служит для преобразования механических колебаний в электрические. Принцип работы электромагнитных датчиков описан подробнее ниже.

Сигнал с выхода генератора поступает на частотомер **2** и на вход канала **X** осциллографа **3**. ЭДС, возбуждаемая в регистрирующем электромагните **6**, пропорциональная амплитуде колебаний торца стержня, усиливается усилителем **7** и подаётся на вход канала **Y** осциллографа.

Изменяя частоту генератора и наблюдая за амплитудой сигнала с регистрирующего датчика, можно определить частоту акустического резонанса в стержне. Наблюдения в режиме X–Y позволяют сравнить сигналы генератора и датчика, а также облегчает поиск резонанса при слабом сигнале.

Принцип работы электромагнитных датчиков

Устройство и внешний вид электромагнитного датчика показаны на рис. 4. В корпусе датчика закреплён подковообразный магнит. На полюсах магнита намотаны «встречной намоткой» последовательно соединённые катушки переменного тока, который подаётся с генератора. Магнитное поле в зазоре между полюсами электромагнита складывается из поля постоянного магнита B_0 и малой добавочной составляющей поля катушек $B_\sim \ll B_0$. Сила, с которой электромагнит действует на стальной (магнитный) торец стержня, пропорциональна квадрату индукции B суммарного поля в зазоре электромагнита[3]:

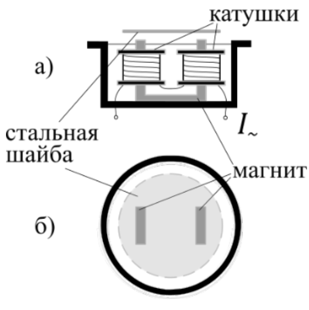

Рис. 4. Электромагнитный датчик: а) вид спереди, б) вид сверху

$$F \propto (B_0 + B_\sim)^2 \approx B_0^2 + 2B_0B_\sim.$$

Отсюда видно, что при $B_\sim \ll B_0$ сила F *линейно* зависит от переменного поля $B_\sim$, а значит и от тока в катушках (т.к. $B_\sim \propto I_\sim$), и поэтому частота переменой силы $F_\sim \propto 2B_0B_\sim \propto I_\sim$, действующей на торец, совпадает с частотой генератора. То есть торец стержня, расположенный перед электромагнитом, совершает колебательное движение перпендикулярно датчику с *частотой задающего генератора*. Колебания далее распространяются в виде

[3] См., например, *Калашников С.Г.* Электричество. Москва : Физматлит, 2003. § 121.

волны по всему стержню, и, если частота колебаний совпадает с одной из собственных частот стержня, на нём устанавливается стоячая волна. Колеблющийся противоположный торец стержня возбуждает в регистрирующей катушке переменную ЭДС индукции, пропорциональную амплитуде колебаний торца. Сигнал ЭДС измеряется с помощью осциллографа.

Линейная связь между током и действующей силой позволяет определить частоту переменной силы по измерению частоты сигнала генератора.

Методика измерений

Как следует из формулы (2), модуль Юнга материала E может быть найден по скорости распространения акустических волн в стержне u и его плотности ρ. Для определения скорости u в данной работе используется *метод акустического резонанса*. Это явление состоит в том, что при частотах гармонического возбуждения, совпадающих с собственными частотами колебаний стержня $f \approx f_n$, резко увеличивается амплитуда колебаний, при этом в стержне образуется стоячая волна.

Возбуждение продольных колебаний в стержне происходит посредством воздействия на торец стержня периодической силой, направленной вдоль его оси. Зная *номер гармоники* n и соответствующую *резонансную частоту* ν_n, на которой наблюдается усиление амплитуды колебаний, можно вычислить скорость распространения продольных волн в стержне:

$$u = 2L\frac{f_n}{n}. \tag{15}$$

Таким образом, для измерения скорости u необходимо измерить длину стержня L и получить зависимость резонансной частоты от номера резонанса $f_n(n)$. Если все теоретические предположения справедливы, эта зависимость будет прямой пропорциональностью.

Следует отметить, что в реальном металлическом стержне могут возбуждаться не только продольные, но и поперечные (в частности, изгибные) колебания стержня. При этом каждому типу колебаний соответствует не одна, а целый *спектр* частот. Таким образом, стержень «резонирует» не только на частотах, определяемых формулой (15), но и на *множестве других частот*. Для того чтобы отличить нужные нам резонансные частоты от «паразитных», следует провести предварительные расчёты и не принимать во внимание резонансы, не описываемые зависимостью (15).

Скажем также несколько слов о точности измерения резонансной частоты. В первую очередь отметим, что в идеальном случае резонанс достигался бы при строгом совпадении частот $f = f_n$ (а амплитуда в резонансе стремилась бы к бесконечности). Однако в реальности возбуждение стоячей волны возможно при относительно малом отклонении частоты от резонансной — амплитуда колебаний как функция частоты $A(f)$ имеет резкий максимум при $f = f_n$. При этом, как известно из теории колебаний (см., например, Лабораторный практикум по общей физике. Т. 1. Механика, раздел IV), ширина резонансного максимума Δf определяется *добротностью* Q колебательной системы:

$$\Delta f \sim f_{\text{рез}}/Q.$$

Именно конечная ширина резонанса Δf определяет в основном погрешность измерения частоты в нашем опыте.

Используемые в работе металлические стержни являются весьма высокодобротными системами: их добротность оказывается порядка $Q \sim 10^2 \div \div 10^3$. Поэтому ширина резонанса оказывается довольно малой, что приводит к необходимости тонкой настройки частоты генератора (при $f \sim \sim 5$ кГц ширина резонанса Δf оказывается порядка нескольких герц). Кроме того, *время установления* резонансных колебаний, которое можно оценить как $\tau_{\text{уст}} \sim 1/\Delta f \sim Q/f$, оказывается весьма велико (до нескольких секунд), из-за чего поиск резонанса следует проводить, изменяя частоту генератора *максимально медленно*.

ЗАДАНИЕ

1. Познакомьтесь с основными органами управления электронного осциллографа. По техническому описанию к работе проведите предварительную настройку осциллографа и звукового генератора.

2. Раздвиньте датчики и поместите между ними исследуемый стержень на подставку **10**. Рекомендуется вначале провести опыты с медным стержнем длиной $L \approx 60$ см (точные длины стержней указаны на установке).

3. Разместите электромагниты напротив торцов стержня так, чтобы торцы стержня совпали с центрами датчиков, а зазор между полюсами электромагнита и торцевой поверхностью стержней составлял 1–3 мм. Плоскость магнитов должна быть строго перпендикулярна оси стержня. ***Не допускайте соприкосновения электромагнита с торцами стержня.***

4. Предварительно определите диапазон частот генератора, в котором целесообразно искать резонансы. Для этого оцените частоту первого резонанса по формуле $f_1 = u/2L$, воспользовавшись табличным значением скорости продольных волн в тонком медном стержне: $u \approx 3{,}7 \cdot 10^3$ м/с.

5. Медленно перестраивая звуковой генератор вблизи расчетной частоты f_1 найдите первый резонанс, наблюдая за амплитудой колебаний на экране осциллографа. При приближении к резонансу амплитуда сигнала с регистрирующего датчика (канал CH**2**) резко возрастает, а амплитуда опорного сигнала (канал CH**1**) не меняется. Для увеличения сигнала колебаний стержня нужно очень осторожно придвигать датчики к торцам стержня, *не допуская прилипания стержня к датчикам.*

Точно найденный резонанс характеризуется следующими признаками: амплитуда принятого сигнала *достигает максимума* и амплитуда *не меняется во времени* (отсутствуют «биения»).

Внимание! Резонансная кривая металлических стержней имеет очень острый пик, его ширина составляет единицы герц. Поэтому подстройку генератора необходимо производить *максимально плавно и медленно.*

В режиме работы осциллографа **«X–Y»** на экране должен наблюдаться эллипс, который при резонансе достигает максимального размера.

6. Определите значение первой резонансной частоты f_1 по индикатору частотомера. Для экспериментальной оценки погрешности измерения резонансной частоты повторите измерение несколько раз.

7. Получите резонансы на частотах, соответствующих следующим (кратным) гармоникам. Для этого, плавно перестраивая генератор, добейтесь резонанса вблизи частот $f_n \approx nf_1$, где $n = 2, 3, \ldots$. Постарайтесь измерить резонансные частоты с как можно бо̀льшим n. Запишите измеренные значения частот.

8. Определите плотность ρ материала стержня. Для этого взвесьте и измерьте штангенциркулем линейные размеры небольшого образца цилиндрической формы, изготовленного из исследуемого материала.

9. Определите среднее значение диаметра исследуемого стержня $d = 2R$, измерив его штангенциркулем в нескольких местах. Проверьте справедливость приближения «тонкий стержень»: $R/\lambda \ll 1$.

10. Повторите опыты п. 2–10 со стержнями из других материалов (сталь, дюраль) той же длины.

11[*]. Для стержня из дюраля проведите дополнительный опыт: перестраивая генератор, добейтесь возбуждения первой гармоники f_1 резонансных колебаний в стержне при «половинной» частоте генератора $f = f_1/2$. Пронаблюдайте на экране осциллографа фигуру Лиссажу (в режиме работы «X–Y») и зарисуйте её. Постарайтесь объяснить явление.

12*. Определите добротность стержня как колебательной системы, измерив амплитудно-частотную характеристику одного из стержней $A(f - f_1)$ вблизи первого резонанса.

Ширина максимума функции $A(f - f_n)$ связана с добротностью Q стержня как колебательной системы: если Δf — ширина амплитудно-частотной характеристики на уровне $A = A_{\max}/\sqrt{2}$, то $Q = f_n/\Delta f$.

13*. По указанию преподавателя повторите измерения п. 4–10, используя стержни меньшей длины и диаметра.

---

[*] Задания, отмеченные звездочкой, выполняются по указанию преподавателя.

Обработка результатов

14. Для каждого из исследованных стержней постройте по результатам измерений п. 2–10 графики зависимости частоты $f(n)$ от номера гармоники n (по возможности разместите зависимости на одном графике). Убедитесь в том, что зависимость является линейной, проходящей через начало координат.

15. Постройте наилучшие прямые по экспериментальным точкам и определите соответствующие значения скорости звука u (если точек на графике недостаточно, определите u по среднему значению отношения f_n/n).

16. Определите модули Юнга E исследуемых материалов. Оцените погрешности результатов. Сравните результаты с табличными данными.

17. Проделайте расчёты п. 14–17 по результатам измерений на стержнях меньшей длины и меньшего диаметра (п. 13). Сравните с результатами, полученными на длинных стержнях.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте закон Гука. Дайте определение модуля Юнга.

2. Что такое звуковая (акустическая) волна? В чём отличие продольной и поперечной звуковых волн?

3. На каких основных предположениях базируется вывод волнового уравнения для продольных волн в тонком стержне?

4. От каких параметров зависит скорость распространения продольных волн в стержне? Зависит ли она от амплитуды или частоты возбуждающей силы?

5. Какой стержень можно считать тонким? Влияет ли коэффициент Пуассона материала на распространение акустических волн?

6. Как связаны между собой частота, длина волны, волновое число и скорость распространения бегущей волны?

7. Напишите выражение для гармонической бегущей и стоячей волн. Убедитесь, что они являются решением волнового уравнения. Как стоячая волна может быть получена из бегущих?

8. Сформулируйте условие образования стоячих волн в стержне со свободными и с закреплёнными концами. Получите выражение для собственных частот продольных колебаний тонкого стержня.

9. Покажите, что при отражении гармонической волны от свободного конца фаза отражённой волны не изменяется.

10. Какова роль потерь энергии (затухания) волн в стержне? Какую роль играют потери при отражении волн от торцов? Как наличие затухания проявляется в эксперименте?

11.* Пользуясь формулой для плотности упругой энергии, рассчитайте максимальное значения энергии деформации стоячей волны с амплитудой a на частоте ν_n. Чему равна полная энергия, запасённая в этой волне? Как энергия колебаний зависит от частоты?

12.* Рассчитайте время столкновения стержня из стали, использованного в лабораторной работе, с твёрдой стенкой (стержень ударяется торцом, двигаясь по нормали к стенке). Оцените максимальную скорость стержня, при которой удар ещё можно считать абсолютно упругим.

Литература

1. *Кингсеп А.С, Локшин Г.Р., Ольхов О.А.* Основы физики. Курс общей физики. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика / под ред. А.С. Кингсепа. – Москва : Физматлит, 2001. Ч. I, гл. 8 и ч. III, гл. 5.
2. *Стрелков С.П.* Общий курс физики. Механика. – Москва : Наука, 1975. Гл. X, XV, XVI.
3. *Хайкин С.Э.* Физические основы механики. – Москва : Наука, 1971. Гл. XIV, XVIII, XIX.