Лабораторная работа 1.4.1-В

ИЗУЧЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ НА ПРИМЕРЕ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Цель работы: 1) на примере измерения периода свободных колебаний физического маятника познакомиться с систематическими и случайными погрешностями, прямыми и косвенными измерениями; 2) проверить справедливость формулы для периода колебаний физического маятника и определить значение ускорения свободного падения; 3) убедиться в справедливости теоремы Гюйгенса об обратимости точек опоры и центра качания маятника; 4) оценить погрешность прямых и косвенных измерений и конечного результата.

В работе используются: металлический стержень с опорной призмой; дополнительный груз; закреплённая на стене консоль; подставка с острой гранью для определения цента масс маятника; секундомер; счётчик колебаний (механический или электронный); линейки металлические различной длины; штангенциркуль; электронные весы; математический маятник (небольшой груз, подвешенный на нитях).

Введение

> Данная работа посвящена изучению погрешностей, возникающих при экспериментальных измерениях. Перед выполнением работы следует ознакомиться с основными понятиями теории погрешности, например, по пособию *П.В. Попов, А.А. Нозик* «Обработка результатов учебного эксперимента» или просмотреть лекции 1–6 соответствующего видео-курса (см. сайт кафедры общей физики http://mipt.ru/education/chair/physics/S_I/lab).

Физическим маятником называют *твёрдое тело*, способное совершать колебания в вертикальной плоскости, будучи подвешено за одну из своих точек в поле тяжести. Основное отличие физического маятника от математического в том, что маятник не является точечным объектом, а представляет собой совокупность жёстко связанных точечных масс. В данной работе в качестве такого маятника используется тонкий однородный металлический стержень, подвешиваемый в некоторой точке с помощью небольшой опорной призмы (см. рис. 1). Острое ребро призмы, опирающееся на подставку, задаёт ***ось качания*** (или вращения) маятника.

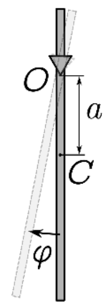

Рис. 1. Стержень как физический маятник

Понятие о законе вращательного движения и моменте инерции

Закон, описывающий вращательное движение твёрдого тела вокруг *фиксированной* оси, аналогичен второму закону Ньютона. Получим его для простейшего случая точечной массы (общий вывод см., напр., в [2], Гл. 9).

Как известно, для динамики движения точечной массы m под действием силы F вдоль некоторой прямой справедливо уравнение Ньютона

$$F = \frac{dp}{dt},$$

где $p = mv$ — импульс, v — скорость тела. Рассмотрим точечную массу, движущуюся по окружности фиксированного радиуса r с угловой скоростью ω. Её скорость линейная скорость $v = \omega r$. При вращательном движении определяющую роль играет не сила, а её *момент* относительно оси вращения — произведение силы на её *плечо*, — равный в данном случае $M = Fr$. Тогда, умножая уравнение Ньютона с обеих сторон на r, получим следующее уравнение вращательного движения точки:

$$Fr = \frac{d}{dt}(mr^2\omega) \quad \to \quad M = \frac{dL}{dt}, \tag{1}$$

где введено обозначение $L = mr^2\omega$. Величину $J = mr^2$ называют ***моментом инерции*** точечного тела. В законе вращательного движения момент инерции играет роль, аналогичную массе тела при поступательном движении. Величину $L = J\omega$, играющую роль «вращательного импульса» называют ***моментом импульса*** тела. Постоянном J уравнение (1) можно записать как

$$M = J\frac{d\omega}{dt}\ . \tag{2}$$

(ср. со 2-м законом Ньютона $F = m\frac{dv}{dt}$).

Оказывается (см. [2]), что в случае *твёрдого тела*, состоящего из совокупности материальных точек, вращающихся вокруг фиксированной оси, уравнение (2) сохраняет свой вид, но под моментом инерции следует понимать *сумму* (или интеграл) по всем точкам тела:

$$J = \sum_i m_i r_i^2$$

где r_i — расстояние от точки массой m_i до оси вращения. Видно, что момент инерции зависит от массы тела, его формы, а также от положения оси вращения. Как показывается в курсах механики (см. [2], Гл. 9.3), момент инерции тонкого стержня массой m и длиной l, вращающегося вокруг оси, проходящей через центр масс, равен

$$J_C = \frac{ml^2}{12}.$$

А момент инерции стержня, подвешенного на расстоянии a от центра масс, может быть вычислен по *теореме Гюйгенса–Штейнера* (см. [2], гл. 9.3.5):

$$J = \frac{ml^2}{12} + ma^2. \tag{3}$$

В частности, если стержень подвесить за один из концов, то $a = l/2$ и $J = ml^2/3$.

Стержень как физический маятник

Вернёмся к рассмотрению колебаний физического маятника — стержня, подвешенного в поле тяжести (Рис. 1). Маятник подвешен в точке O на расстоянии a до центра масс C. При отклонении стержня от вертикального положения равновесия на угол φ возникает момент силы тяжести, стремящийся вернуть стержень в исходное положение. Плечо этой силы, приложенной к точке C, относительно оси подвеса O равно $a\sin\varphi$, поэтому при небольших углах отклонения $\varphi \ll 1$ возвращающий момент равен

$$M = -mga\sin\varphi \approx -mga\varphi. \tag{4}$$

Таким образом, на маятник действует возвращающий момент сил, пропорциональный величине его отклонения от равновесия. Отсюда можно сделать вывод, что при *малых* амплитудах отклонения движение свободного физического маятника будет иметь характер *гармонических колебаний*, аналогично колебаниям груза на пружине или математического маятника.

Чтобы получить формулу периода колебаний физического маятника, воспользуемся аналогией с пружинным маятником, период колебаний которого равен, как известно, $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. Здесь роль массы m, как мы уже обсудили, играет момент инерции тела J, а роль коэффициента жёсткости пружины k — коэффициент пропорциональности между моментом силы и величиной отклонения mga. Таким образом, приходим к следующей общей формуле для периода колебаний произвольного физического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}} \tag{5}$$

А для стержня длиной l, подвешенного на расстоянии a от центра, с учётом (3) получаем:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{l^2}{12} + a^2}{ga}}. \tag{6}$$

Сравним результат с известной формулой для математического маятника:

$$T_{\text{м}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{7}$$

(она получается из (5) подстановкой момента инерции точки $J = mr^2$). Видно, что (6) также *не зависит от массы* маятника, однако зависимость от длины подвеса более сложная.

Определим так называемую *приведённую длину* физического маятника:

$$l_{\text{пр}} = a + \frac{l^2}{12a}. \tag{8}$$

Смысл этой длины в том, что физический маятник длиной l, подвешенный в точке a, имеет тот же период малых колебаний, что и математический маятник длиной $l_{\text{пр}}$.

С понятием «приведённой длины» связана следующая теорема (*Гюйгенса*). Рассмотрим точку O', отстоящую от точки опоры O на расстояние $l_{\text{пр}}$ вдоль стержня (эту точку иногда называют *центром качания* физического маятника). Оказывается, если маятник подвесить за точку O', то период его качания *не изменится*. Иными словами, точка опоры и центр качания маятника взаимно обратимы. Доказательство осуществляется прямым расчётом по формуле (6) или (8). Предлагаем провести его самостоятельно.

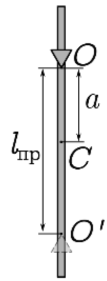

Рис. 2. К теореме Гюйгенса

Гармонические колебания

Приведём основные сведения из теории гармонических колебаний. Формулу для периода колебаний маятника (5) можно получить из анализа *дифференциального уравнения гармонических колебаний*. Воспользуемся основным уравнением вращательного движения (1) и подставим в него момент импульса в виде $L = J\omega$, выражение для момента возвращающей силы (4), а также учтём, что $d\omega/dt \equiv \ddot{\varphi}$ — угловое ускорение. Получим

$$J\ddot{\varphi} + mga\varphi = 0 \tag{9}$$

(ср. с уравнением колебаний груза на пружине $m\ddot{x} + kx = 0$). Решением данного дифференциального уравнения являются *гармонические колебания*, описываемые законом

$$\varphi(t) = A\sin(\Omega t + \alpha)\,, \tag{10}$$

где $\Omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{mga}{J}}$ — *угловая частота* колебаний (не путать с угловой скоростью вращения $\omega \equiv \dot{\varphi}$), A — *амплитуда* (угловая), α — *начальная фаза* колебаний. Амплитуда и фаза определяются начальными условиями (тем, как отпускают маятник). При этом угловая частота (и период) малых колебаний *не зависит ни от фазы, ни от амплитуды*. Однако при достаточно больших амплитудах последнее утверждение *нарушается*. Оно справедливо в той мере, в которой справедливо приближение $\sin\varphi \approx \varphi$, сделанное нами при выводе (6).

Затухание колебаний[*]

Закон (10) записан для случая *идеального* маятника в отсутствие затухания. Реальный маятник подвержен, в частности, сопротивлению воздуха, а также трению в оси подвеса, что приводит к постепенному *затуханию* его колебаний. Если трение не слишком велико[†], колебания маятника всё ещё могут быть описаны формулой (10), но амплитуду колебаний следует считать медленно убывающей функцией времени: $A(t)$. Относительную убыли амплитуды за одно колебание $\gamma = \frac{|\Delta A|}{A}$ называют ***декрементом затухания***. Величина γ является характеристикой всех потерь энергии в колебательной системе. Как правило, γ можно считать постоянной, и тогда интегрируя уравнение $\frac{dA}{A} = -\gamma$ получаем экспоненциальную зависимость амплитуды колебаний от времени:

$$A(t) = A_0 e^{-\gamma t}.$$

Таким образом, величина $\tau_{\text{зат}} = 1/\gamma$ — это время, за которое амплитуда колебаний падает в e раз. Оно может быть легко измерено экспериментально. Затухание можно считать малым, если это время велико по сравнению с временем одного колебания: $\tau_{\text{зат}} \gg T$.

В теории колебаний принято использовать *безразмерную* характеристику затухания, называемую ***добротностью*** колебательной системы:

$$Q = \pi \frac{\tau_{\text{зат}}}{T}. \tag{11}$$

Преимущество безразмерной характеристики в том, что она позволяет сравнивать потери энергии в колебательных системах самой разной природы: механической, электрической и др.

> **Пример.** Пусть амплитуда колебаний стержня уменьшилась вдвое $A_1 = A_0/2$ за $n = 100$ колебаний. Тогда из соотношения $e^{-\gamma n T} = \frac{1}{2}$ находим время затухания $\tau_{\text{зат}} = \frac{1}{\gamma} = \frac{nT}{\ln 2}$ и добротность $Q = \frac{\pi n}{\ln 2} \approx 450$.

[*] Необязательный пункт, при первом чтении следует пропустить.

[†] Если трение велико, то колебаний не будет вовсе — маятник остановится, не совершив и одного колебания (*апериодический* режим). В данной работе такой режим не реализуется.

Экспериментальная установка

Тонкий стальной стержень длиной $l \sim 1$ м и массой $m \sim 1$ кг (точные параметры определяются непосредственными измерениями) подвешивается на прикреплённой стене консоли с помощью небольшой призмы. Диаметр стержня много меньше его длины $d \sim 12$ мм $\ll l$. Небольшая призма крепится на стержне винтом и острым основанием опирается на поверхность закреплённой на стене консоли. Острие ребра призмы образует ось качания маятника.

Возможны две схемы реализации установок.

Установка А. Призму можно перемещать вдоль стержня, изменяя длину a — расстояние от центра масс до точки подвеса. Период колебаний измеряется непосредственно с помощью секундомера.

Установка Б. Подвесная призма остаётся неподвижной ($a = \text{const}$), а на стержень маятника насаживается дополнительное тело небольшого размера («чечевица» или цилиндр), положение которого можно изменять, изменяя таким образом момент инерции маятника. Период колебаний маятника в этой схеме измеряется электронным счетчиком импульсов, расположенном у нижнего конца стержня. Дополнительные сведения об установке типа Б приведены ниже (см. стр. 8).

Расстояния во всех установках измеряются линейками и штангенциркулем. Положение центра масс маятника может быть определено с помощью балансирования маятника на вспомогательной $\perp$-образной подставке с острой верхней гранью.

Измеряя зависимости периода малых колебаний от положения стержня или дополнительного тела на нём, можно экспериментально проверить формулу (5) (или её частный случай (6)) и вычислить значение ускорения свободного падения g. Формулу (6) можно проверить, откладывая по осям величины $u = T^2 a$ и $v = a^2$. В этих координатах график $u(v)$ должен иметь вид прямой линии, угловой коэффициент которой пропорционален g, а вертикальное смещение — моменту инерции стержня относительно центра масс.

Заметим, что формула (6) может быть уточнена с учётом наличия подвесной призмы (см. ниже, стр. 9).

Измерение периода колебаний

Измерение периода колебаний маятника (и любых других промежутков времени) с помощью секундомера неизбежно сопровождается погрешностью из-за конечного времени реакции человека. Как правило, время реакции составляет 0,1 – 0,2 с. Однако это время различно для разных людей и зависит от большого числа субъективных факторов (состояние человека, тренированность, время суток, освещённость и т.п.). Для планирования эксперимента и для корректной оценки его погрешностей следует иметь более точное значение погрешности измерения времени.

Найти случайную погрешность из-за времени реакции (а также из-за других сопутствующих случайных факторов) нетрудно экспериментально. Для этого достаточно несколько раз повторить опыт по измерению одного и того же числа колебаний маятника. По полученному набору результатов $\{t_1, t_2, \ldots, t_N\}$ определить среднее значение $\bar{t}$ и среднеквадратичное отклонение отдельного измерения:

$$\sigma_t^{\text{случ}} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum(t_i - \bar{t})^2}.$$

Кроме того, у каждого секундомера возможна систематическая погрешность $\sigma_t^{\text{сист}}$, максимальная величина которой устанавливается производителем (определить её можно по маркировке на приборе или по его паспорту). Как правило у секундомера есть погрешность цены деления (или погрешность округления у цифрового секундомера), а также систематическая погрешность из-за постепенного «ухода» показаний с течением времени. Последняя зависит от класса точности секундомера: например, от лабораторных механических секундомеров 2-го класса точности следует ожидать погрешности ~0,1 с за 60 с (~ 0,2%). Полная погрешность измерения времени вычисляется среднеквадратично:

$$\sigma_t^{\text{полн}} = \sqrt{(\sigma_t^{\text{сл}})^2 + (\sigma_t^{\text{сист}})^2}.$$

При известной погрешности измерения времени $\sigma_t^{\text{полн}}$ можно спланировать проведение эксперимента исходя из требуемой точности опыта. В частности, можно определить, по какому количеству колебаний маятника следует измерять его период.

Пример. Пусть погрешность измерения времени оказалась равна $\sigma_t \approx 0{,}05$ с. Период колебаний составляет $T \approx 1$ с. Поскольку $T = t/n$, погрешность периода равна $\sigma_T = \sigma_t/n$. Относительная погрешность $\varepsilon_T = \sigma_T/T = \sigma_t/nT$. При требуемой погрешности $\varepsilon = 10^{-3}$ (0,1%), получим $n = \frac{\sigma_t}{T\varepsilon_T} = \frac{0{,}05}{1 \cdot 10^{-3}} \approx 50$. Таким образом, для достижения требуемой точности достаточно выполнить *однократное* измерение времени $n \approx 50$ колебаний.

Особенности маятника с перемещаемым грузом (установка Б)

Если на стержень насадить груз, то момент инерции маятника, а значит и период его колебаний, будет зависеть от положения груза относительно оси качания.

В качестве подвижного груза в работе используется металлический цилиндр или «чечевица». Масса груза $m_г \approx 300 \div 400$ г, диаметр $d_{гр} \sim 6$ см. Поскольку размер груза мал по сравнению с длиной стержня, его можно считать закреплённой на стержне *точечной массой*. Обозначим за y расстояние от точки подвеса O до центра масс груза (см. Рис. 3). Тогда момент инерции маятника будет равен

$$J = J_0 + m_г y^2,$$

где J_0 — момент инерции маятника без груза, определяемый по формуле (3). Поскольку точка подвеса в схеме Б фиксирована, величина J_0 в опыте остаётся постоянной.

Заметим, что величину y на практике измерить напрямую затруднительно, поскольку положение центра масс груза точно не известно. Вместо этого можно измерить положение центра масс маятника с грузом и без него. Пусть $x_{ц0}$ — расстояние от точки подвеса (острия призмы) до центра масс маятника без груза. Тогда центр масс маятника с грузом находится в точке

$$x_ц = \frac{m_0 x_{ц0} + m_г y}{M},$$

где m_0 — масса маятника без груза (стержня вместе с призмой), $M = m_0 + m_г$ — полная масса маятника. Положения центра масс $x_ц$ и $x_{ц0}$ могут быть измерены с помощью подставки. Отсюда находим формулу для вычисления положения центра масс груза:

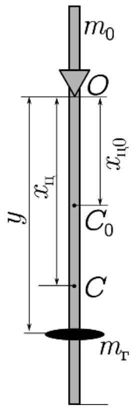

Рис. 3. Маятник с дополнительным грузом

$$y = \frac{M x_ц - m_0 x_{ц0}}{m_г}. \tag{12}$$

Заметим, что положение центра масс груза достаточно измерить только один раз, а затем измерять *смещение* Δy груза относительно некоторого исходного положения y_0.

Из общей формулы (5) найдём период колебаний маятника грузом:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + m_г y^2}{g M x_ц}}. \tag{13}$$

Отсюда видно, что если построить зависимость величины $u = T^2 x_ц$ от $v = y^2$, то график должен иметь вид прямой линии. По её наклону можно определить ускорение свободного падения g, а по вертикальному смещению — момент инерции J_0 маятника.

Учёт влияния подвесной призмы[*]

Формула (6) получена в предположении, что подвес маятника является материальной точкой. На самом же деле маятник подвешивается с помощью треугольной призмы конечного размера, поэтому использование (6) может привести к *систематической* погрешности результата. Для более точных расчётов следовало бы воспользоваться общей формулой периода колебаний физического маятника (5), принимая во внимание наличие двух тел — стержня и призмы:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_{\text{ст}} + J_{\text{пр}}}{m_{\text{ст}} g a_{\text{ст}} - m_{\text{пр}} g a_{\text{пр}}}},$$

где $J_{\text{пр}}$, $m_{\text{пр}}$ и $a_{\text{пр}}$ — соответственно момент инерции, масса и расстояние до центра масс призмы (знак «минус» в знаменателе учитывает, что призма находится *выше* оси подвеса).

Однако призма имеет малые размеры и массу, и, возможно, эта погрешность будет мала. Проведём соответствующие оценки. В работе используется призма массой $m_{\text{пр}} \sim 70$ г, с расстоянием от ребра центра масс $a_{\text{пр}} \sim 1{,}5$ см. Поскольку призма находится непосредственно вблизи оси качания, её наличие мало влияет на суммарный момент инерции маятника. Действительно, по порядку величины для призмы имеем $J_{\text{пр}} \sim m_{\text{пр}} a_{\text{пр}}^2 \sim 10^{-5}$ кг · м^2, а при $a = 10$ см имеем $m_{\text{ст}} a^2 \sim 10^{-2}$ кг · м^2, то есть поправка на момент инерции призмы в условиях опыта составляет не более 0,1%. Поскольку такая погрешность заведомо меньше погрешности используемых нами приборов (например, линейки), ей можно спокойно пренебречь. Сравним теперь моменты сил, действующие на призму и стержень при тех же $a = 10$ см:

$$\frac{M_{\text{пр}}}{M_{\text{ст}}} = \frac{m_{\text{пр}} g a_{\text{пр}}}{m_{\text{ст}} g a_{\text{ст}}} \sim 10^{-2}.$$

Видим, что здесь поправка может достигать 1%. Таким образом, если мы хотим (и можем) провести измерения с погрешностью менее 1%, эту поправку нельзя не учитывать[†].

[*] Данный пункт является не обязательным, знакомиться с ним следует по указанию преподавателя.

[†] Чтобы измерить *вторую* значащую цифру в ускорении свободного падения $g \approx 9{,}8$ м/с^2 как раз требуется точность не менее 1%.

На практике учесть влияние призмы можно следующим образом. Поскольку расстояние $a_{пр}$ трудно поддаётся непосредственному измерению, можно исключить его, измеряя положение центра масс всей системы. Пусть $x_ц$ — расстояние от центра масс *системы* до точки подвеса. По определению имеем

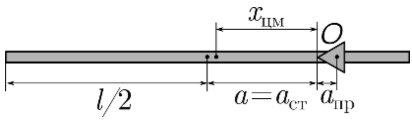

Рис. 4. Смещение центра масс из-за подвесной призмы

$$x_ц = \frac{m_{ст}a_{ст} - m_{пр}a_{пр}}{m_{ст} + m_{пр}}$$

(«минус» учитывает положение призмы). Исключая отсюда $a_{пр}$, получим формулу для периода с нужной нам поправкой:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{l^2}{12} + a^2}{g\left(1 + \frac{m_{пр}}{m_{ст}}\right)x_ц}}, \qquad (14)$$

Таким образом, для более точного измерения g следует для каждого положения призмы измерять не только величину a — положение призмы относительно центра масс стержня), но и расстояние $x_ц$ — положение центра масс стержня с призмой относительно призмы (см. Рис. 4).

ЗАДАНИЕ

1. Познакомьтесь с используемыми в работе измерительными приборами: линейками, штангенциркулем, секундомером. Определите максимальную систематическую погрешность каждого из них (абсолютное и относительное значение). Оцените, с какой относительной погрешностью ε_{max} имеет смысл измерять период колебаний маятника. Учтите, что поскольку при вычислении произведения величин их относительные погрешности *складываются* (квадратично), погрешность итогового результата (косвенно вычисленной величины) не может оказаться меньше погрешности самого неточного измерения.

Пример. Погрешность конечного результата (величины g) определяется точностью измерения длин и периода колебаний. Длины измеряются металлической линейкой или штангенциркулем (для расстояний < 15 см). Пусть наименьшее расстояние равно 100 мм (измерено штангенциркулем), а наибольшее — 500 мм (измерено линейкой). Абсолютное значение погрешности металлической линейки $\sigma^{лин} \approx 0{,}5$ мм, а штангенциркуля – $\sigma^{шт} \approx 0{,}1$ мм. Тогда относительная погрешность измерения длин составит по порядку величины $\varepsilon_{max} \sim 0{,}1\%$ ($\frac{0{,}1\text{ мм}}{100\text{ мм}} \cdot 100\% = 0{,}1\%$, $\frac{0{,}5\text{ мм}}{500\text{ мм}} \cdot 100\% = 0{,}1\%$).

> **Вывод**. Используемые в работе инструменты позволяют вести измерения длин с точностью вплоть до 0,1%. Для получения конечного результата с данной точностью период колебаний следует измерять с той же относительной погрешностью: не хуже, чем $\varepsilon \sim 0{,}1\%$.

2. Измерьте длину стержня l. Взвесьте штангу, призму и дополнительный груз (*для установки Б*) на электронных весах. Оцените погрешности измерений (абсолютные и относительные значения).
3. Снимите со стержня призму и с помощью подставки определите положение центра масс пустого стержня.
4. Установите призму на некотором расстоянии от центра стержня, измерьте точное положение a острия призмы относительно центра масс стержня.

> **Замечание.** *На установке Б* призма должна располагаться так, чтобы нижний конец стержня находился в зоне срабатывания электронного счётчика.

Измерьте положение центра масс конструкции $x_{ц}$, сбалансировав маятник *с призмой* на острие вспомогательной подставки. Оцените погрешности измерения расстояний a и $x_{ц}$. Какие факторы, кроме цены деления, влияют на точность этих измерений? Если относительные погрешности окажутся больше ожидаемых, скорректируйте величину ε_{max}, определённую в п. 1.

5. Проведите первый предварительный опыт по измерению периода колебаний (на *установке Б* опыт проведите *без дополнительного груза*).
   а. Установите маятник на консоли и отклоните маятник на малый угол (не более 5°). Убедитесь, что он качается без помех, призма не проскальзывает, и колебания затухают слабо.
   б. Измерьте время $n = 20$ полных колебаний маятника.

> **Указание.** При измерениях лучше фиксировать моменты прохождения маятником *крайних* положений (почему?), а секундомер запускать не сразу с отпусканием маятника, а в один из моментов максимального отклонения — это уменьшит систематическую погрешность из-за времени вашей реакции.

   в. Вычислите период колебаний $T = t/n$ и по формуле (6) (или (14)) рассчитайте *предварительное* значение g. Убедитесь, что оно отличается от табличного не более, чем на 10%.

6. Проведите серию измерений для экспериментального определения случайной погрешности измерения времени с помощью секундомера (эта погрешность связана с такими случайными факторами, как время реакции экспериментатора, случайные колебания воздуха и т.п.).

а. Несколько раз повторите измерение периода фиксированного числа колебаний (например, $n = 20$), *каждый раз* останавливая и *заново* отклоняя маятник примерно на один и тот же малый угол; результаты занесите в таблицу. Если результаты 3–4 измерений полностью совпадают, опыт можно остановить. Если результаты различаются, следует провести 8–10 измерений.

№ оп.	t, с
1	
…	
10	
$\bar{t}$	
$\sigma_t^{\text{случ}}$	
$\sigma_t^{\text{сист}}$	
$\sigma_t^{\text{полн}}$	

б. Вычислите среднее значение полученных результатов $\bar{t}$, а также определите случайную погрешность измерения времени как среднеквадратичное отклонение полученных результатов:

$$\sigma_t^{\text{случ}} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum(t_i - \bar{t})^2}.$$

в. Определите инструментальную (систематическую) погрешность используемого секундомера $\sigma_t^{\text{сист}}$ и вычислите полную погрешность $\sigma_t^{\text{полн}}$ измерения времени.

Замечание. При измерениях с помощью *электронного счётчика* случайная погрешность может оказаться пренебрежимо мала (все измерения дадут одинаковый результат). В таком случае погрешность измерения времени будет определяться только ошибкой округления, обусловленной разрядностью индикатора времени.

7. Используя погрешность σ_t измерения времени из предыдущего пункта, оцените число колебаний n, по которому следует измерять период, чтобы относительная погрешность измерений *периода* соответствовала точности измерений $\varepsilon_{\max}$, оценённой в п. 1 (см. Пример на стр. 7).

8. **Только для установки Б.** Определите положение центра масс дополнительного груза. Для этого измерьте расстояние $x_{ц0}$ от острия призмы до центра масс *без груза.* Закрепите груз на стержне в произвольном месте и измерьте новое положение центра масс $x_ц$. Рассчитайте по формуле (12) положение центра масс груза.

9. **Для установки А.** Поместите призму в другое положение, измерьте её положение a относительно центра. *По указанию преподавателя*, измерьте также положение центра масс системы вместе с призмой $x_ц$ (для использования уточнённой формулы (14)).

   Для установки Б. Разместите груз на маятнике и измерьте положение y груза относительно точки подвеса и положение центра масс всей системы $x_ц$.

10. Проведите измерение периода колебаний маятника по n полным колебаниям, где значение n выбрано в п. 7. Повторите измерения периода:

Установка А: для 8–10 положений призмы a;

Установка Б: для 8–10 положений дополнительного груза y.

Для каждого измерения рассчитайте значения g по формуле (6)/(14) (*установка А*) или (13) (*установка Б*). *Для установки Б* предварительно рассчитайте момент инерции маятника J_0 по формуле (3).

Результаты занесите в таблицу.

№ оп.	a, мм / y, мм	$x_ц$, мм	n	t_n, с	T, с	g, м/с^2

Указание. Во избежание «промахов» (например, в подсчёте числа колебаний) каждое измерение можно разбить на 3–4 (например, вместо одного опыта с $n = 60$ колебаний, провести 3 опыта по $n = 20$ колебаний) и затем усреднить результаты. Если результат какого-то из измерений существенно отличается от остальных, следует провести ещё несколько дополнительных измерений.

11. Проведите опыт по определению приведённой длины маятника (на *установке Б* предварительно снимите дополнительный груз):
    а. для одного значения a вычислите приведённую длину физического мятника по формуле (8);
    б. установите соответствующую длину математического маятника и проверьте равенство периодов колебаний физического и математического маятников (с учётом погрешностей измерений);
    в. проверьте справедливость теоремы Гюйгенса: снимите призму и поместите её в центр качания (на расстоянии $l_{пр}$ от исходного положения) и переверните маятник; измерьте период колебаний и убедитесь, что он не изменился в пределах погрешности опыта.
12. *Для оценки затухания измерьте число колебаний, за которое их амплитуда уменьшается в 2 раза. Оцените время затухания $\tau_{зат}$, декремент затухания γ и добротность Q колебательной системы.

Обработка результатов измерений

13. Усредните значения ускорения свободного падения g (п. 10). Оцените погрешность результата.
14. Постройте график зависимости периода колебаний T от расстояния подвеса a (*установка А*) или положения груза y (*установка Б*). При необходимости нанесите на график кресты погрешностей. Убедитесь, что зависимость имеет минимум; определите по графику положение минимума и сравните его с теоретическим расчётом.

15. Постройте график, откладывая по оси абсцисс величину $u = T^2 x_ц$, а по оси ординат величину $v = a^2$ (*установка А*) или $v = y^2$ (*установка Б*). При необходимости нанесите на график кресты погрешностей. Убедитесь в том, что экспериментальные точки графика хорошо ложатся на прямую линию.
16. Методом наименьших квадратов определите параметры (k, b) наилучшей прямой $u = kv + b$ и их погрешности (σ_k и σ_b). По наклону прямой рассчитайте величину ускорения свободного падения g (используйте одну из формул: (6), (14) или (13)).
17. Оцените погрешность измерения величины g в п. 16. Учтите, что погрешность может включать как случайную составляющую (определяемую по методу наименьших квадратов), так и систематическую (косвенную погрешность вычисления величин u и v).
18. Сравните результат расчёта по п. 16 с непосредственным усреднением, проведённым в п. 13. Какой из методов расчёта g предпочтительнее и почему?
19. Сопоставьте полученные результаты с целями работы. Сделайте выводы по результатам проведённых измерений.

Литература

1. *Попов П.В., Нозик А.А.* Обработка результатов учебного эксперимента. — Москва : МФТИ, 2021.
2. *Кириченко Н.А., Крымский К.М.* Общая физика. Механика. — Москва : МФТИ, 2013. — Гл. 10.3.
3. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. 1. Механика. — Москва : Физматлит, 2005. — § 46.
4. Лабораторный практикум по общей физике. Т. 1. Механика. Под ред. А.Д. Гладуна. — Москва : МФТИ, 2012. — Раздел IV.

Составители:
Смирнова О.И., Попов П.В.
19.09.2021