

ФИО _____

группа _____

1А	2А	3А	4А	5А	6А	Оценка

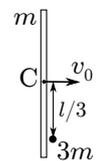
ПОЛУСЕМЕСТРОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО МЕХАНИКЕ

27 октября 2018 г.

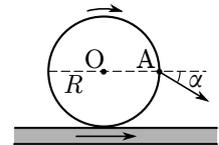
Вариант А

1А. (1,5) Ракета начинает движение в свободном пространстве из состояния покоя. Относительная скорость истечения газов изменяется пропорционально массе сгоревшего топлива: $u = \text{const} \cdot (m_0 - m)$, где m_0 — начальная масса ракеты. Найти скорость ракеты к концу полета, если её масса при этом равна $m_1 = m_0/4$, а максимальная скорость истечения была равна u_{max} .

2А. (1,5) Тонкий однородный стержень длиной ℓ и массой m скользит по гладкому горизонтальному столу поступательно со скоростью v_0 , перпендикулярной стержню. Стержень сталкивается с неподвижной точечной массой $3m$, которая прилипает к нему на расстоянии $\ell/3$ от его центра. Найти угловую скорость вращения системы после соударения.

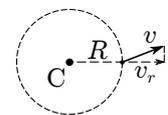


3А. (1,5) Диск радиусом R катится без проскальзывания по горизонтальной ленте транспортера в направлении её движения. Точка А расположена на ободе диска, на его горизонтальном диаметре (см. рис.). Найти радиус кривизны траектории точки А в этот момент, если известно, что её скорость относительно неподвижного наблюдателя образует с горизонталью угол $\alpha = \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}$.



4А. (2) Неподвижные ядра азота бомбардируются пучком α -частиц (${}^4_2\text{He}$). В результате происходит реакция ${}^{14}_7\text{N} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^{17}_8\text{O} + {}^1_1\text{p}$. При какой энергии α -частиц можно обнаружить протоны, летящие назад от мишени с той же по модулю скоростью, что и у бомбардирующих α -частиц? Пороговая энергия реакции равна $E_{\text{пор}} = 1,47$ МэВ.

5А. (2) В 2017 году в Солнечной системе был обнаружен первый объект межзвёздного происхождения — астероид Оумуамуа. Когда астероид находился на расстоянии $R = 1$ а.е. от Солнца, его полная скорость была равна $v = 50$ км/с, а её радиальная компонента (скорость удаления от Солнца) $v_r = 40$ км/с. Найти расстояние r_p от астероида до центра Солнца и его скорость v_p при прохождении перигелия. Считать известной скорость планеты на круговой орбите на расстоянии 1 а.е. от Солнца: $V = 30$ км/с.



6А. (3) К аэростату массой $M = 150$ кг привязана верёвочная лестница длиной $L = 40$ м, на нижнем конце которой находится человек массой $m = 50$ кг. Исходно аэростат находится в равновесии и неподвижен. Человек начинает подниматься вверх с постоянной скоростью $u = 0,2$ м/с относительно лестницы. Сила сопротивления воздуха, действующая на аэростат, пропорциональна его скорости $F = kV$, где $k = 1,0$ Н · с/м. На какой высоте окажется человек, когда доберётся до конца лестницы? Действием сопротивления воздуха на человека пренебречь.

ФИО _____

группа _____

1Б	2Б	3Б	4Б	5Б	6Б	Оценка

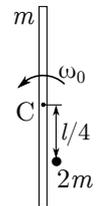
ПОЛУСЕМЕСТРОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО МЕХАНИКЕ

27 октября 2018 г.

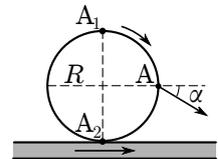
Вариант Б

- 1Б.** (1,5) Ракета начинает движение в свободном пространстве из состояния покоя. Относительная скорость истечения газов изменяется обратно пропорционально массе ракеты: $u = \frac{\text{const}}{m}$. Найти отношение стартовой и конечной масс ракеты m_0/m_1 , при котором её конечная скорость будет равна $v_1 = \frac{4}{5}u_{\text{max}}$, где u_{max} — максимальная скорость истечения за время полета.

- 2Б.** (1,5) Тонкий однородный стержень длиной ℓ и массой m лежит на гладком горизонтальном столе и свободно вращается с угловой скоростью ω_0 . На расстоянии $\ell/4$ от центра стержня на столе находится точечная масса $2m$, которая при ударе о стержень прилипает к нему. Найти угловую скорость вращения системы после соударения.

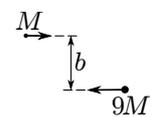


- 3Б.** (1,5) Диск радиусом R катится без проскальзывания по горизонтальной ленте транспортера в направлении её движения. В момент, когда точка A на ободе диска расположена на его горизонтальном диаметре (см. рис.), её скорость относительно неподвижного наблюдателя образует с горизонталью угол $\alpha = \arctg \frac{2}{3}$. Найти радиусы кривизны траектории точки A , когда она проходит верхнее и нижнее положения.



- 4Б.** (2) При синтезе 115-го элемента таблицы Менделеева (элемент получен в 2003 году в ОИЯИ, Дубна, и с 2016 года официально назван «московиум» с обозначением Mc) неподвижные ядра америция-243 бомбардировались ядрами кальция-48 с кинетической энергией $E_0 = 248$ МэВ и наблюдалась реакция ${}^{243}_{95}\text{Am} + {}^{48}_{20}\text{Ca} \rightarrow {}^{288}_{115}\text{Mc} + 3 {}^1_0\text{n}$. Кинетическая энергия продуктов реакции в системе их центра масс оказалась равна $E'_{\text{прод}} = 40$ МэВ. Найти пороговую энергию $E_{\text{пор}}$ бомбардирующих частиц, при которой реакция возможна.

- 5Б.** (2) Две звезды массами $m_1 = M$ и $m_2 = 9M$ движутся параллельными курсами навстречу друг другу с относительной скоростью $u = 20$ км/с. Каким должно быть прицельное расстояние b между курсами, чтобы максимальное сближение звёзд оказалось равно $R_p = 40$ а.е. Известно, что у звезды M есть планета, движущаяся по круговой траектории радиуса $R_0 = 1$ а.е. со скоростью $V = 30$ км/с.



- 6Б.** (3) Аэростат массой $M = 250$ кг, в корзине которого находится человек массой $m = 50$ кг, висит неподвижно в состоянии равновесия на высоте $H = 30$ м. Человек начинает спускаться вниз по верёвочной лестнице, привязанной к корзине, так что его скорость относительно лестницы постоянна и равна $u = 0,6$ м/с. На какой высоте над землей будет находиться человек через время $t_1 = H/u$? На аэростат действует сила сопротивления воздуха, пропорциональная квадрату его скорости $F \propto V^2$, причём установившаяся скорость подъёма пустого аэростата равна $V_\infty = 5$ м/с. Действием сопротивления воздуха на человека пренебречь.

- 1А.** (Касьянова Н.В.) Уравнение Мещерского: $m dv = -A(m_0 - m) dm$, откуда $v = A(m_0 \ln \frac{m_0}{m} - m_0 + m)$.
 Заменяя $u_{\max} = A(m_0 - m_1)$, найдём $v_1 = u_{\max} \left(\frac{m_0}{m_0 - m_1} \ln \frac{m_0}{m_1} - 1 \right) = \left(\frac{4}{3} \ln 4 - 1 \right) u_{\max} = \boxed{0,85 u_{\max}}$.
- 2А.** (Попов П.В.) Перейдём в систему центра масс: скорость $V_C = \frac{1}{4} v_0$, расстояние от центра стержня до ЦМ системы $x = \frac{3ml/3}{4m} = \frac{1}{4} \ell$. Момент импульса в СЦМ: начальный $L_0 = m(v_0 - V_C)x + 3m(-V_C)(\frac{\ell}{3} - x) = \frac{3}{4} m v_0 \frac{\ell}{3}$, конечный $L_1 = \omega \left(\frac{m\ell^2}{12} + mx^2 + 3m(\frac{\ell}{3} - x)^2 \right)$. Из ЗСМИ находим $\omega = \frac{1/4}{1/12 + 1/16 + 1/48} \frac{v_0}{\ell} = \boxed{\frac{3v_0}{2\ell}}$.
- 3А.** (Крымский К.М.) При отсутствии проскальзывания скорость центра диска относительно ленты равна линейной скорости вращения точек обода: $v_{\text{отн}} = v_{\text{л}} - v_C = \omega R$. Абсолютная скорость точки А: $v_A = \frac{\omega R}{\sin \alpha}$, её ускорение $a_A = \omega^2 R$, нормальная компонента $a_{An} = a_A / \sin \alpha$. Радиус кривизны $\rho_A = \frac{v^2}{a_n} = \frac{R}{\sin^3 \alpha} = \boxed{5\sqrt{5}R}$.
- 4А.** (Пенкин М.А.) Найдём энергию реакции: $E_{\text{пор}} = \frac{p^2}{2m_\alpha} = \frac{p^2}{2(m_\alpha + m_N)} + Q$, откуда $Q = \frac{m_N}{m_N + m_\alpha} E_{\text{пор}} = \frac{7}{9} E_{\text{пор}} = 1,14 \text{ МэВ}$. По условию протоны приобретают импульс $p_H = -\frac{m_H}{m_\alpha} p_\alpha = -\frac{1}{4} p_\alpha$. Импульс кислорода $p_O = p_\alpha - p_H = \frac{5}{4} p_\alpha$. Из сохранения энергии имеем $E = \frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha} = \frac{p_O^2}{2m_O} + \frac{p_H^2}{2m_H} + Q$, откуда $E = \frac{21}{34} E + Q$, $E = \frac{34}{13} Q = \boxed{\frac{238}{117} E_{\text{пор}} \approx 3 \text{ МэВ}}$.
- 5А.** (Попов П.В.) Энергия астероида (на единицу массы) $\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R} = \frac{v^2}{2} - V^2$, где $V = \sqrt{GM/R}$. Скорость на бесконечности $v_\infty^2 = 2\varepsilon = 50^2 - 2 \cdot 30^2 = 700 \text{ (м/с)}^2$. Из сохранения момента импульса: $v_p r_p = v_\varphi r$, где $v_\varphi = \sqrt{v^2 - v_r^2} = 30 \text{ м/с}$. Из сохранения энергии имеем $\frac{v_\infty^2}{2} = \frac{v_p^2}{2} - V^2 \frac{r_0}{r_p}$. Исключая v_p и обозначая $x = r_p/r_0$ получаем квадратное уравнение $v_\infty^2 x^2 + 2V^2 x - v_\varphi^2 = 0$. Положительный корень $x = \frac{-V^2 + \sqrt{V^4 + v_\varphi^2 v_\infty^2}}{v_\infty^2} = 9 \frac{-1 + \sqrt{1 + 7/9}}{7} = \frac{3}{7}$, т.е. $r_p \approx 0,43 \text{ а.е.}$ Скорость в перигелии $v_p = v_\varphi \frac{r}{r_p} = 30 \cdot \frac{7}{3} = \boxed{70 \text{ км/с}}$.
- 6А.** (Федоров Г.Е.) Уравнения движения аэростата и человека (ось вверх): $M \frac{dV}{dt} = F_A - Mg - kV - N$, $m \frac{dv}{dt} = -mg + N$. По условию $u = v - V = \text{const}$, поэтому $dv/dt = dV/dt$. Из равновесия в начальный момент находим силу Архимеда: $F_A = (M + m)g$. Складывая уравнения, находим уравнение движения аэростата:

$$(M + m) \frac{dV}{dt} = -kV.$$

Начальное условие: $MV_0 + mv_0 = 0$ и $V_0 = v_0 - u$, откуда $V_0 = -\frac{m}{M+m} u = -\frac{1}{4} u = -0,05 \text{ м/с}$ ($v_0 = 0,15 \text{ м/с}$). Решение уравнения: $V = V_0 \exp\left(-\frac{k}{M+m} t\right)$. Путь, пройденный человеком:

$$s = ut + \int_0^t V dt = ut + V_0 \frac{M+m}{k} \left(1 - \exp\left(-\frac{kt}{M+m}\right) \right).$$

Подставляя $t = L/u = 200 \text{ с}$, находим $s = 40 - 0,05 \cdot \frac{200}{1} (1 - e^{-1}) = \boxed{33,7 \text{ м}}$.

- 1Б.** (Касьянова Н.В.) $m dv = -A \frac{dm}{m}$, $v = A \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m_0} \right)$, $u_{\max} = \frac{A}{m_1}$, $v_1 = u_{\max} \left(1 - \frac{m_1}{m_0} \right)$, откуда $\boxed{\frac{m_0}{m_1} = 5}$.
- 2Б.** (Попов П.В.) Система будет вращаться вокруг своего центра масс, смещенном относительно центра стержня на $x = \frac{2m \frac{\ell}{4}}{3m} = \frac{1}{6} \ell$. Из сохранения момента импульса имеем $\frac{m\ell^2}{12} \omega_0 = \left(\left(\frac{m\ell^2}{12} + mx^2 \right) + 2m \left(\frac{\ell}{4} - x \right)^2 \right) \omega$, откуда $\omega = \frac{1/12}{1/12 + 1/36 + 1/72} \omega_0 = \boxed{\frac{2}{3} \omega_0}$.
- 3Б.** (Крымский К.М.) При отсутствии проскальзывания скорость центра диска относительно ленты равна линейной скорости вращения точек обода: $v_{\text{отн}} = v_{\text{л}} - v_C = \omega R$. Тогда из треугольника скоростей в начальном положении имеем $\text{ctg } \alpha = \frac{v_{\text{л}} + \omega R}{\omega R}$. В верхнем и нижнем положениях: $\frac{(\omega R + v_{\text{л}} \pm \omega R)^2}{\rho} = \omega^2 R$. Отсюда $\rho = R (\text{ctg } \alpha \pm 1)^2$. После подстановки $\text{ctg } \alpha = \frac{3}{2}$, получаем $\boxed{\rho_1 = \frac{25}{4} R, \rho_2 = \frac{1}{4} R}$.

4Б. (Попов П.В.) Найдём энергию реакции: $E_0 = \frac{p^2}{2 \cdot m_{Ca}} = \frac{p^2}{2 \cdot M} + Q + E'$, где $M = m_{Am} + m_{Ca}$, откуда $Q = \frac{m_{Am}}{M} E_0 - E' = 167$ МэВ. Для порогового случая имеем $E_{пор} = \frac{p_0^2}{2 \cdot m_{Ca}} = \frac{p_0^2}{2 \cdot M} + Q$, откуда $E_{пор} = \frac{M}{m_{Am}} Q = E_0 - \frac{M}{m_{Am}} E' = 248 - \frac{291}{243} 40 \approx \boxed{200 \text{ МэВ}}$.

5Б. (Попов П.В.) Перейдём от задачи двух тел к движению приведённой массы $\mu = \frac{9}{10} M$. Момент импульса $ub = v R_p$, энергия $\mu \frac{u^2}{2} = \mu \frac{v^2}{2} - G \frac{m_1 m_2}{R_p}$. С учётом $V^2 = GM/R_0$, запишем $\frac{\mu}{m_2} u^2 \left(\frac{b^2}{R_p^2} - 1 \right) = 2V^2 \frac{R_0}{R_p}$, откуда $b = R_p \sqrt{20 \frac{V^2 R_0}{u^2 R_p} + 1} = R_p \sqrt{\frac{20 \cdot 30^2 \cdot 1}{20^2 \cdot 40} + 1} = \boxed{58 \text{ а.е.}}$

6Б. (Федоров Г.Е.) Аналогично 6А запишем уравнение движения аэростата (здесь $u = V - v$):

$$(M + m) \frac{dV}{dt} = -kV^2.$$

Коэффициент трения k находим из условия $F_A - Mg = kV_\infty^2$, откуда $k = mg/V_\infty^2$. Начальное условие: $V_0 = \frac{m}{M+m} u = 0,1$ м/с ($v_0 = -0,5$ м/с). Интегрируя уравнение, находим $-\frac{1}{V} + \frac{1}{V_0} = -\frac{k}{M+m} t$, откуда $V = V_0 \frac{1}{1+t/\tau}$, где $\tau = \frac{M+m}{kV_0} = \frac{(M+m)V_\infty^2}{mgV_0} \approx \frac{300 \cdot 5^2}{50 \cdot 10 \cdot 0,1} = 150$ с. Конечная высота:

$$h = H - ut + \int V dt = H - ut + V_0 \tau \ln \left(1 + \frac{t}{\tau} \right).$$

Подставляя $t = H/u = 50$ с, находим $h = V_0 \tau \ln(1 + H/u\tau) = 0,1 \cdot 150 \cdot \ln(1 + \frac{1}{3}) \approx \boxed{4,3 \text{ м}}$.

Инструкция для проверяющих

За каждую задачу выставляется число баллов, **кратное 0,5**, с учётом указанной в скобках стоимости задачи. При выставлении оценки ориентироваться на следующие критерии:

100%	+	Задача решена верно: приведено <i>обоснованное</i> решение и даны ответы на все вопросы задачи. Возможно наличие арифметических ошибок, не влияющих на ход решения и не приводящих к ошибке в порядке или знаке величины.
80%	±	Ход решения задачи в целом верен и получены ответы на все вопросы задачи, но решение содержит ошибки, не касающиеся физического содержания: арифметические ошибки, влияющие на порядок или знак величины; ошибки в размерности; вычислительные ошибки в выкладках.
50%	∓	Задача решена частично: дан ответ только на часть вопросов; выкладки не доведены до конца; отсутствуют необходимые промежуточные доказательства; либо решение содержит грубые ошибки (вычислительные, логические), влияющие на ход решения.
20%	-	Задача не решена, но есть некоторые подвижки в её решении: сформулированы физические законы, на основе которых задача может быть решена.
0	-	Задача не решена: основные физические законы применены с грубыми ошибками, перечислены не полностью или использованы законы, не имеющие отношения к задаче / подход к решению принципиально неверен / решение задачи не соответствует условию / попытки решить задачу не было.

Оценка за письменную работу есть сумма баллов за все задачи с округлением в пользу студента (но не более 10 и не менее 1).

Обсуждение контрольной — на форуме кафедры board.physics.mipt.ru

Результаты проверки в должны быть занечены в электронные ведомости не позднее 3 ноября!