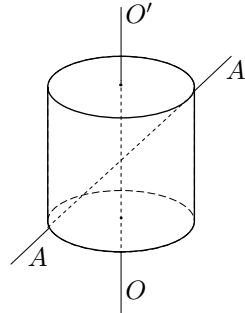


1А. Удаление от Солнца одного из астероидов пояса Койпера в перигелии и в афелии равно соответственно $r_n = 8$ а. е. и $r_a = 20$ а. е. Определите скорости астероида в перигелии v_n и в афелии v_a , считая известным, что Земля движется по практически круговой орбите радиусом $r_0 = 1$ а. е. со скоростью $v_0 = 29,8$ км/с.

2А. При каком значении отношения радиуса сплошного цилиндра R к его высоте H , т. е. R/H , момент инерции цилиндра относительно диагональной оси AA' равен моменту инерции относительно оси его симметрии OO' ?



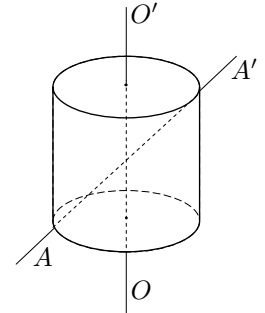
3А. При бомбардировке релятивистскими протонами неподвижных ядер изотопа гелия ${}^3\text{He}$ суммарная полная энергия двух частиц в системе их центра инерции равна $E = 2\sqrt{5}m_p c^2$. Определите скорость протонов в лабораторной системе отсчёта.

4А. На гладкой горизонтальной поверхности стола лежит тонкий однородный стержень массой M и длиной l . В него ударяется шарик массой m , движущийся перпендикулярно к стержню со скоростью v_0 . Удар абсолютно упругий. Определите расстояние x_{\max} от середины стержня до точки удара, при котором угловая скорость вращения стержня будет иметь максимально возможное значение ω_{\max} , и вычислите это значение. Определите также скорость центра стержня u_{\max} и скорость шарика v_{\max} после такого удара.

5А. Человек с миниатюрным маятниковым суперхронометром садится в кабину «колеса обозрения». Колесо радиусом $R = 20$ м делает оборот за время $T = 300$ с. На сколько и в какую сторону уйдёт хронометр за первую четверть оборота колеса?

1Б. Один из астероидов пояса Койпера на расстоянии $r_1 = 15$ а. е. от Солнца имел радиальную скорость $v_r = 1$ км/с и азимутальную скорость $v_\varphi = 6$ км/с. Считая известным, что Земля движется со скоростью $v_0 = 29,8$ км/с по практически круговой орбите радиусом $r_0 = 1$ а. е., определите период обращения астероида вокруг Солнца T .

2Б. При каком значении отношения радиуса тонкостенного цилиндра R к его высоте H , т. е. R/H , момент инерции цилиндра относительно диагональной оси AA' равен моменту инерции относительно оси его симметрии OO' ?



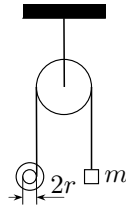
3Б. При бомбардировке некоторых неподвижных ядер протонами, скорость которых равна $v = \frac{3}{5}c$, суммарная полная энергия двух частиц в системе их центра инерции равна $E = 3\sqrt{3}m_p c^2$. Определите, какие ядра подвергаются бомбардировке.

4Б. На гладкой горизонтальной поверхности вращается с угловой скоростью ω_0 вокруг своего центра тонкий однородный стержень массой M и длиной l . При вращении он ударяет покоящийся маленький шарик массой m . Удар абсолютно неупругий. Определите расстояние x_{\max} от середины стержня до точки удара, при котором скорость шарика будет иметь максимально возможное значение u_{\max} , и вычислите это значение. Определите также скорость центра стержня v_{\max} и его угловую скорость ω_{\max} после такого удара.

5Б. Сферически симметричная планета в системе τ Кита имеет массу, радиус (6400 км) и длительность суток такие же, как Земля. Маятниковые часы перевозят на суперэкспрессе с постоянной скоростью по меридиану с полюса на экватор за время $T_0 = 6$ ч. На сколько и в какую сторону показания часов после перевозки отличаются от показаний часов, оставшихся на полюсе?

Экзамен 2001/2002 учебного года. Вариант А

1А. Через неподвижный блок перекинута тонкая невесомая нерастяжимая нить. К одному концу нити подвешен груз, а другой конец нити намотан на катушку радиусом r с моментом инерции I_0 и массой M . В начальный момент груз и катушка удерживаются в покое. При каком значении массы груза m он будет оставаться в покое, если в некоторый момент одновременно отпустить груз и катушку?

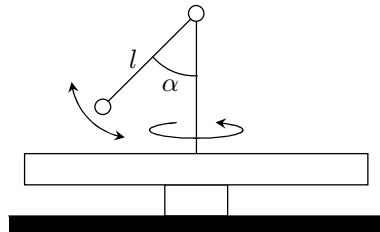


2А. Осесимметричный стержень переменного сечения быстро вращается вокруг оси, проходящей через один из его концов перпендикулярно оси симметрии стержня. На свободном конце стержня закреплён небольшой груз массой m , равномерно распределённой по сечению стержня площади S_0 . При какой зависимости площади сечения стержня от расстояния до оси вращения напряжения во всех поперечных сечениях стержня будут одинаковы? Длина стержня l , плотность вещества стержня ρ .

3А. Движущийся в космическом пространстве моноэнергетический поток протонов встречается с ограниченной областью, в которой существует магнитное поле. В результате некоторые протоны отклоняются на угол $\alpha = 60^\circ$, не меняя величины скорости. После выхода из поля они сталкиваются с протонами, летящими в прежнем направлении. Определить кинетическую энергию протонов, при которой в таких соударениях могут рождаться протон-антипротонные пары. Энергия покоя протона равна 938 МэВ.

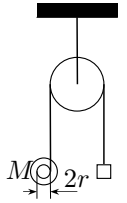
4А. Космический зонд «Шумейкер» на некоторое время должен стать спутником астероида Эрос. По расчётам он будет обращаться вокруг астероида на высоте, составляющей $n = 1/15$ радиуса астероида с периодом $T = 4,5$ часа. Определить предполагаемую среднюю плотность астероида ρ . Гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$.

5А. К вертикальному столбу в центре карусели на стержне длиной $l = 1$ м подвешен небольшой светильник. Стержень соединен со столбом шарниром, ось которого горизонтальна. Масса светильника в два раза больше массы стержня. При вращении карусели с постоянной скоростью стержень со светильником отклоняется от вертикали на угол $\alpha = 30^\circ$. Определить период малых колебаний стержня со светильником относительно этого положения.



Экзамен 2001/2002 учебного года. Вариант Б

1Б. Через неподвижный блок, моментом инерции которого можно пренебречь, перекинута тонкая невесомая нерастяжимая нить. К одному концу нити подвешен груз, а другой конец нити намотан на катушку радиусом r с моментом инерции I_0 и массой M . В начальный момент груз и катушка удерживаются в покое. При каком значении массы груза m катушка будет оставаться на прежней высоте, если в некоторый момент одновременно отпустить груз и катушку?

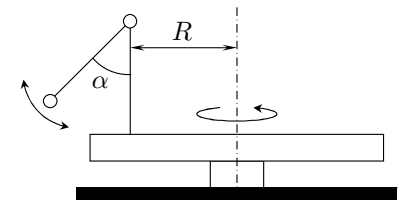


2Б. Осесимметричный стержень переменного сечения подвешен вертикально за один из концов. В нижнем сечении радиуса r_0 стержень нагружен растягивающей силой F , равномерно распределённой по площади сечения. При какой зависимости радиуса стержня от расстояния до нижнего конца напряжения во всех горизонтальных сечениях стержня будут одинаковы? Плотность вещества стержня ρ .

3Б. На пути движущегося в космическом пространстве потока моноэнергетических протонов встречаются области, в которых существует магнитное поле. В результате взаимодействия с магнитным полем некоторые протоны отклоняются на угол $\alpha = 120^\circ$ от направления первоначального движения, не меняя величины скорости, и сталкиваются с протонами, летящими в прежнем направлении. Определить кинетическую энергию протонов, при которой в таких соударениях могут рождаться протон-антипротонные пары. Энергия покоя протона равна 938 МэВ.

4Б. Звезда ϵ -Возничего представляет собой двойную затменно-переменную звезду, состоящую из звезды-сверхгиганта и маленькой яркой звезды-спутника. Период обращения звезды-спутника $T = 27$ лет, продолжительность наблюдаемого затмения $\tau = 2$ года. Орбита звезды-спутника круговая. Прямая, соединяющая ϵ -Возничего и Землю, лежит в плоскости этой орбиты. Определить среднюю плотность звезды-сверхгиганта, считая известным минимальный период обращения спутника Земли $T_0 = 1,4$ часа и среднюю плотность Земли $\rho_0 = 5,5 \text{ г}/\text{см}^3$.

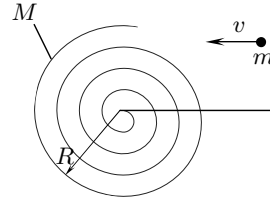
5Б. К вертикальной стойке, расположенной на карусели на расстоянии $R = 3l$ от её оси, подвешен стержень длиной $l = 1$ м. Стержень к стойке прикреплен с помощью шарнира, ось которого горизонтальна и перпендикулярна плоскости, проходящей через стойку и ось вращения карусели. При вращении карусели с постоянной угловой скоростью стержень отклоняется от вертикали на угол $\alpha = 30^\circ$. Определить период малых колебаний стержня относительно этого положения.



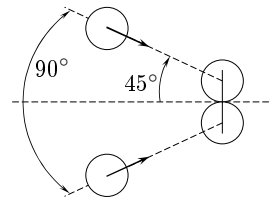
Экзамен 2002/2003 учебного года. Вариант А

1А. Обычно пробку из бутылки с вином вынимают с помощью штопора. Однако можно выбить пробку, ударив дном бутылки о стол (подложив, например, книгу). Оцените давление жидкости у дна бутылки, если скорость бутылки перед ударом была равна $v = 0,3$ м/с, плотность вина $\rho = 0,9$ г/см³, скорость звука $c = 1500$ м/с.

2А. На гладком столе лежит спиральный лабиринт массой M и радиусом R . В него влетает шарик пренебрежимо малых размеров массой $m = M/2$, движущийся со скоростью v . Трение между лабиринтом и шариком отсутствует. Момент инерции лабиринта $I = kMR^2$. При каких значениях k шарик может достичь центра лабиринта?

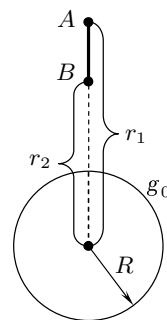


3А. Два бильярдных шара катятся без проскальзывания по горизонтальной шероховатой поверхности с одинаковыми скоростями во взаимно перпендикулярных направлениях и упруго сталкиваются. При этом в момент столкновения центры шаров лежат на линии, перпендикулярной биссектрисе угла между направлениями их движения. Определить угол между направлениями движения шаров после столкновения, когда их движение вновь перейдёт в чистое качение. Потерями энергии при столкновении шаров пренебречь.



4А. Круговая орбита космической станции массой $m = 100$ т расположена в верхних слоях атмосферы на высоте $h = 250$ км. Если орбиту не корректировать, то за счёт торможения станция снижается на величину $\Delta h = 100$ м/сут. Оценить, какой потребуется расход топлива в кг/сут, чтобы поддерживать высоту орбиты станции. Скорость истечения отработанных газов относительно станции $u = 3$ км/с и направлена по касательной к траектории.

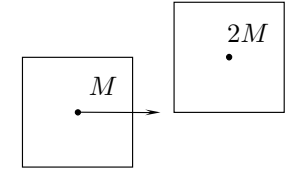
5А. Межпланетный корабль состоит из двух одинаковых отсеков A и B , соединённых лёгким, прочным, гладким переходным коридором AB . Корабль движется по круговой орбите вокруг малой планеты, имеющей радиус R и ускорение свободного падения на поверхности g_0 . При этом продолжение прямой AB всегда проходит через центр планеты. Радиусы орбит отсеков A и B равны соответственно $r_1 = 4R$ и $r_2 = 3R$. Определить, как изменится кинетическая энергия предмета массой m , брошенного вдоль по гладкому коридору из отсека B в отсек A с достаточной для преодоления коридора скоростью.



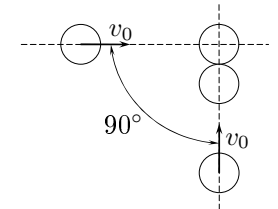
Экзамен 2002/2003 учебного года. Вариант Б

1Б. Гидравлическим ударом называется повышение давления в трубе, по которой течёт жидкость, при резкой остановке жидкости, например, с помощью заслонки, мгновенно перекрывающей сечение трубы. Оценить величину повышения давления при гидравлическом ударе в трубе, по которой течёт вода со скоростью $v = 0,3$ м/с. Скорость звука в воде $c = 1,5$ км/с.

2Б. Брусок, имеющий форму куба, движется поступательно по гладкой горизонтальной поверхности и сталкивается с неподвижным бруском такой же формы и размеров, имеющим вдвое большую массу. В результате неупругого столкновения бруски «слипаются». Определить долю начальной энергии, перешедшей в тепло. Изменением формы брусков пренебречь и считать, что скорость центра движущегося бруска до столкновения направлена вдоль одной из граней неподвижного бруска.

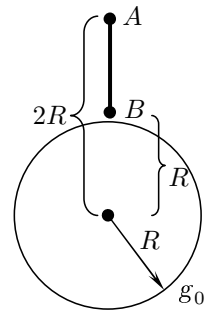


3Б. Два бильярдных шара катятся без проскальзывания по горизонтальной шероховатой поверхности с одинаковыми скоростями v_0 во взаимно перпендикулярных направлениях и упруго сталкиваются. При этом в момент столкновения центры шаров находятся на линии движения одного из шаров. Определить угол между направлениями движения шаров после столкновения, когда их движение перейдёт в чистое качение. Определить также их скорости. Потерями энергии при столкновении шаров пренебречь.



4Б. Спутник движется по круговой орбите на высоте $h_1 = 250$ км от поверхности Земли. Оценить, какую часть массы спутника должна составлять масса топлива для кратковременного перевода спутника на эллиптическую орбиту с высотой перигея $h_2 = 100$ км? Скорость истечения газов относительно спутника $u = 3$ км/с.

5Б. Межпланетный корабль состоит из двух одинаковых отсеков A и B , соединённых лёгким, прочным переходом с гладкими стенками. Корабль движется по круговой орбите вокруг малой планеты, имеющей радиус R и ускорение свободного падения на поверхности g_0 . При этом продолжение прямой AB всегда проходит через центр планеты. Радиусы орбит отсеков A и B равны соответственно $r_A = 2R$; $r_B = R$. С какой минимальной скоростью v_0 надо кинуть предмет вдоль по гладкому коридору из отсека B , чтобы он смог достичь отсека A ? Какую при этом он будет иметь скорость u_A вблизи отсека A ?



1А. Амплитуда колебаний груза при действии внешней синусоидальной силы с амплитудой F_0 на частоте $\omega = 0,9\omega_0$ (ω_0 — резонансная частота) в $k = 5$ раз больше отклонения под действием постоянной силы той же величины. Определить добротность колебательной системы Q .

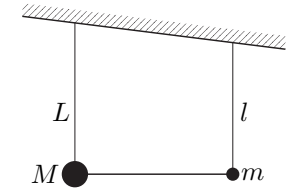
2А. Приборы звездолёта, дрейфующего с почти нулевой скоростью в окрестностях звезды Бетельгейзе, зафиксировали периодические электромагнитные импульсы, излучаемые пульсирующим сгустком плазмы, вырвавшимся из звезды и движущимся по направлению к звездолёту со скоростью $\beta_1 = 0,4$. Промежутки времени между импульсами по часам звездолёта равны τ_1 . Чтобы избежать столкновения, звездолёт начал удаляться от звезды со скоростью $\beta_2 = 0,8$ по линии движения сгустка. Какие промежутки времени τ_2 между импульсами стали регистрировать приборы звездолёта?

3А. Согласно одной из гипотез орбиты самых долгопериодических комет имеют афелий на расстоянии $R = 2 \cdot 10^4$ а. е. Перигелий орбиты одной из таких комет равен радиусу орбиты Земли $R_0 = 1$ а. е. С какой относительной точностью надо измерить скорость этой кометы в перигелии, чтобы отличить её от кометы, пришедшей из межзвёздного пространства, где та имела практически нулевую скорость?

4А. Два куба с гладкими стенками изготовлены из материала с модулем Юнга $E = 10^9$ Па и коэффициентом Пуассона $\mu = 0,3$. Сторона каждого куба равна $a = 1$ м. Они стоят на гладкой горизонтальной абсолютно твёрдой поверхности между двумя гладкими абсолютно твёрдыми стенками, расстояние между которыми равно $2a$, так что один куб всей гранью касается одной стенки, другой куб — всей гранью другой стенки и одна грань одного куба полностью касается грани другого куба. Насколько изменится высота одного куба, если к верхней грани другого куба приложить силу $F = 10^5$ Н, направленную вертикально вниз и равномерно распределённую по площади грани?

5А. Тонкостенная цилиндрическая бочка, полностью заполненная жидкостью с весьма малым, но конечным по величине внутренним трением, достаточно долго (так что жидкость вращается в бочке без проскальзывания) катится по шероховатой поверхности со скоростью v и упруго ударяется об абсолютно гладкую вертикальную стенку. Найти скорости бочки сразу после наступления качения без проскальзывания v_1 и после достаточно длительного времени v_k . Трение качения отсутствует. Масса бочки m , масса содержимого M . Влиянием днищ бочки пренебречь.

1Б. Два маленьких груза с массами M и m подвешены на нитях с длинами L и l к наклонной поверхности на некотором расстоянии друг от друга так, что, будучи соединёнными жёсткой невесомой рейкой, они находятся на одном горизонтальном уровне (см. рис.). Найти период T малых колебаний системы в плоскости рисунка.



2Б. Приборы звездолёта, дрейфующего с почти нулевой скоростью в окрестностях звезды Антарес, зафиксировали периодические электромагнитные импульсы, излучаемые пульсирующим сгустком плазмы, вырвавшимся из звезды и движущимся по направлению к звездолёту со скоростью $\beta_1 = 0,2$. Космонавты зафиксировали приходящее от сгустка излучение частоты ν_1 (по часам космонавтов). Чтобы лучше разглядеть сгусток, звездолёт начал приближаться к звезде со скоростью $\beta_2 = 0,6$ по линии движения сгустка. Какую частоту излучения ν_2 фиксируют теперь космонавты?

3Б. Комета Галлея в перигелии проходит на расстоянии $r = 0,59$ а. е. от центра Солнца ($R = 1$ а. е. — радиус орбиты Земли) со скоростью $v = 54,4$ км/с. Найти отношение большой и малой осей орбиты кометы, считая известной орбитальную скорость Земли $v_0 = 29,8$ км/с.

4Б. Два куба с гладкими стенками изготовлены из материала с модулем Юнга $E = 10^9$ Па и коэффициентом Пуассона $\mu = 0,3$. Сторона каждого куба равна $a = 1$ м. Один куб стоит на гладкой горизонтальной абсолютно твёрдой поверхности, другой куб стоит на первом кубе так, что одна грань верхнего куба полностью покрывает грань нижнего куба. Насколько изменится суммарная высота конструкции, если к верхней грани верхнего куба приложить силу $F = 10^5$ Н, направленную вертикально вниз и равномерно распределённую по площади грани, и при этом к двум противоположным боковым граням нижнего куба приложить такие же по модулю силы, направленные горизонтально внутрь куба и равномерно распределённые по площади тех граней, к которым они приложены?

5Б. По тонкостенной цилиндрической бочке, полностью заполненной жидкостью с весьма малым, но конечным по величине внутренним трением, наносят горизонтальный удар на высоте центра бочки, так что она начинает скользить поступательно по шероховатой поверхности со скоростью v . Найти скорости бочки сразу после наступления качения без проскальзывания v_1 и после достаточно длительного времени v_k (когда жидкость будет вращаться в бочке без проскальзывания). Трение качения отсутствует. Масса бочки m , масса содержимого M . Влиянием днищ бочки пренебречь.

Экзамен 2004/2005 учебного года. Вариант А

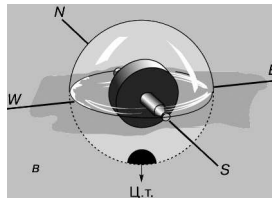
1А. Для обеспечения движения крови по артерии давление в ней должно превышать некоторую пороговую величину p_0 . При превышении давления над пороговым на $\Delta p = 13$ кПа по артерии диаметром $d_1 = 1$ см кровь течёт со скоростью $v_1 = 20$ см/с. Определить минимальное значение диаметра сужения d_2 , при котором ещё возможно продолжение кровотока, если в основной части артерии скорость крови и давление не изменяются. Плотность крови считать равной плотности воды. Влиянием сил тяжести и вязкости пренебречь.

2А. Сегодня, 14 января 2005 г., в атмосферу спутника Сатурна — Титана — должен войти зонд «Гюйгенс», запущенный с космического аппарата «Кассини». На пути к Сатурну аппарат «Кассини» двигался в поле тяготения Солнца, пересекая орбиту Юпитера. Определить скорость аппарата вблизи орбиты Юпитера, если при приближении к орбите Сатурна его скорость стала равной по модулю половине скорости Сатурна. Радиусы орбит Юпитера $R_1 = 5,20$ а.е., Сатурна — $R_2 = 9,54$ а.е. ($R_0 = 1$ а.е. — астрономическая единица — радиус орбиты Земли). Считать известной орбитальную скорость Земли $v_0 = 29,8$ км/с (все скорости — относительно Солнца).

3А. На гладкой горизонтальной поверхности стола лежит жёсткий тонкий стержень с неизвестным распределением массы по длине. Небольшой шарик,двигающийся по поверхности стола перпендикулярно стержню со скоростью v_0 , абсолютно упруго ударяется о стержень и отскакивает со скоростью v точно назад относительно направления своего первоначального движения. Определить скорость V точки стержня, о которую произошёл удар, сразу после удара.

4А. Однородный цилиндр радиуса r катится без проскальзывания по внутренней поверхности неподвижного полого цилиндра радиуса R . Оси цилиндров параллельны, сила тяжести перпендикулярна к ним. Определить угловую скорость ω_0 , которую должен иметь подвижный цилиндр в нижнем положении равновесия, чтобы он, описав дугу, равную $\pi/6$ по внутренней поверхности неподвижного цилиндра, начал проскальзывать в этой точке. Коэффициент трения скольжения между цилиндрами $\mu = 0,1$.

5А. На борту корабля, плывущего в экваториальных водах, находится гироскоп. Гироскопом является гироскоп, сферический кожух которого плавает в жидкости, ц.т. — центр тяжести кожуха (см. рис.). Ротор гироскопа вращается вокруг оси симметрии с угловой скоростью $\omega = 2000\pi$ с⁻¹. Момент инерции гироскопа относительно оси симметрии — I_s , а относительно перпендикулярной оси — I_n : отношение $I_n/I_s = 0,6$. Определите период T_0 малых колебаний оси гироскопа в горизонтальной плоскости в случае $\omega \gg \Omega$ — угловой скорости вращения Земли.



Экзамен 2004/2005 учебного года. Вариант Б

1Б. Цилиндрический сосуд с несжимаемой жидкостью равномерно вращается вокруг вертикальной оси, совпадающей с осью цилиндра. Определить угловую скорость вращения ω , при которой поверхность жидкости коснётся дна. Высота жидкости в покоящемся сосуде равна H . Радиус сосуда равен R .

2Б. Сегодня, 14 января 2005 г., в атмосферу спутника Сатурна — Титана — должен войти зонд «Гюйгенс», запущенный с космического аппарата «Кассини». В одном из вариантов запуска предполагалось, что на последнем этапе «Кассини» будет двигаться в поле тяготения Сатурна по орбите, касающейся круговых орбит спутников Сатурна — Япета и Титана. Определить в этом варианте скорость «Кассини» вблизи орбиты Япета, если известны орбитальная скорость Япета $v_1 = 3,26$ км/с (все скорости — относительно Сатурна) и отношение радиусов орбит Япета и Титана $R_{\text{я}}/R_{\text{т}} = 2,92$.

3Б. Жёсткий тонкий стержень с неизвестным распределением массы по длине, движущийся поступательно со скоростью v_0 по гладкой горизонтальной поверхности стола, абсолютно упруго ударяет небольшой шарик, неподвижно лежащий на столе. Определить скорость V точки стержня, о которую произошёл удар, сразу после удара, если скорость шарика после удара равна v и направлена перпендикулярно стержню.

4Б. Тонкостенный цилиндр радиуса r катится без проскальзывания по внутренней поверхности неподвижного полого цилиндра радиуса R . Оси цилиндров параллельны, сила тяжести перпендикулярна к ним. Определить скорость центра масс v_0 , которую должен иметь подвижный цилиндр в нижнем положении равновесия, чтобы он, описав дугу, равную $\pi/12$ по внутренней поверхности неподвижного цилиндра, начал проскальзывать в этой точке. Коэффициент трения скольжения между цилиндрами $\mu = 0,13$.

5Б. Ось симметрии ротора гироскопа, помещённого на экваторе Земли, совершает малые колебания с периодом $T = 5$ с в плоскости поверхности океана. Гироскопом является гироскоп, сферический кожух которого плавает в жидкости, ц.т. — центр тяжести кожуха (см. рис.). Ротор гироскопа, вращающийся со скоростью ω много большей угловой скорости вращения Земли Ω , обладает моментами инерции относительно оси собственного вращения — I_s и относительно перпендикулярной оси — I_n : $I_n/I_s = 0,5$. Найти скорость вращения ротора гироскопа.

