Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

Т. В. Михайлова, А. А. Хасанов

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ ПО КУРСУ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Учебное пособие

МОСКВА
МФТИ
2020

УДК 517.958(075)
ББК 22.161.6я73
М69

Рецензенты:

Главный научный сотрудник Института автоматизации проектирования РАН, член-корр. РАН, профессор *В. А. Гущин*

Главный научный сотрудник ФГУ «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН»,
доктор физико-математических наук, профессор *В. И. Зубов*

Михайлова, Татьяна Валентиновна, Хасанов, Адам Агзамович
М69 Некоторые методы решения типовых задач по курсу уравнения математической физики: учеб. пособ. / Т. В. Михайлова, А. А. Хасанов. – Москва : МФТИ, 2020. – 184 с.
ISBN 978-5-7417-0733-3.

Рассматриваются некоторые методы решения ряда типичных задач по курсу Уравнения математической физики. Изложение ведется на примерах решения задач, составляющих стандартные наборы для самостоятельного решения, и задач из экзаменационных контрольных работ, которые предлагались в течение многих лет студентам МФТИ.

Решение задач предваряет краткий справочный материал из теории, цель которых – напомнить соответствующие темы лекционных курсов.

В пособие включена новая (по отношению к пособию, изданному в 2007 году) глава, посвященная некоторым методам поиска частных решений отдельных типов уравнений.

Предназначено для студентов физико-математических, физико-технических и экономических специальностей, повышающих подготовку по прикладной математике в рамках ГОС.

УДК 517.958(075)
ББК 22.161.6я73

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Московского физико-технического института (*национального исследовательского университета*)

ISBN 978-5-7417-0733-3

Оглавление

Предисловие

Время, прошедшее с момента издания в 2007 году учебного пособия «Сборник типовых задач по курсу уравнения математической физики», авторами которого являлись преподаватели кафедры высшей математики МФТИ В. П. Михайлов, Т. В. Михайлова и М. И. Шабунин, показало его востребованность у студентов МФТИ для самостоятельной работы при выполнении домашних заданий и подготовке к экзаменам.

Изменения, накопившиеся за этот период в составе типовых задач, осознание необходимости привлечения дополнительных приемов их решения побудили авторов к актуализации пособия и внесения в него необходимых изменений. Однако преждевременный уход из жизни В. П. Михайлова и М. И. Шабунина не позволил им реализовать задуманное обновление. Предлагаемое учебное пособие является реализацией такого обновления с учетом их идей и наработок.

Стиль изложения и структура пособия не претерпели существенных изменений. Изложение ведется на примерах решения задач, составляющих стандартные наборы для самостоятельного решения и задач из экзаменационных контрольных работ, которые предлагались в течение многих лет студентам МФТИ с учетом элементов новизны в их постановках и методах решений. В каждом разделе предварительно разбираются способы решения базовых задач, которые составляют основу метода решения для задач данного раздела. Решение задач предваряет краткий справочный материал из теории, цель которых — напомнить соответствующие темы лекционных курсов. В пособие включена новая (по отношению к пособию, изданному в 2007 году) глава, посвященная некоторым методам поиска частных решений отдельных типов уравнений.

Предназначено для студентов физико-математических, физико-технических и экономических специальностей, повышающих подготовку по прикладной математике в рамках ГОС.

§ 1. ПРИВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ. НЕКОТОРЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

В области $G \in R^n$ рассмотрим уравнение

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \Phi(x, u, gradu) = 0, \quad x = (x_1, ..., x_n) \in G, \tag{I}$$

в котором вещественная симметрическая матрица $A(x) = \|a_{ij}\| \neq 0, x \in G$. В произвольной точке $x^0 \in G$ квадратичную форму

$$\left(A\left(x^0\right) y, y\right) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left(x^0\right) y_i y_j,$$

порожденную матрицей $A\left(x^0\right)$, можно привести с помощью невырожденного преобразования

$$y = B\eta, \tag{$*$}$$

$y = (y_1, ..., y_n) \in R^n, \eta = (\eta_1, ..., \eta_n) \in R^n, B = B\left(x^0\right)$ к каноническому виду, который представляет собой алгебраическую сумму квадратов координат вектора η. При этом пусть $n_+ = n_+\left(x^0\right)$ из них будут с коэффициентом 1, $n_- = n_-\left(x^0\right)$ — с коэффициентом -1, а остальные $n_0 = n_0\left(x^0\right)$ — с коэффициентом 0, т.е. будут отсутствовать, $n_+ + n_- + n_0 = n$. Уравнение (I) принадлежит в точке $x^0 \in G$ *эллиптическому типу*, если $n_0 = 0$ и или $n_+ = n$, или $n_- = n$, *гиперболическому типу*, если $n_0 = 0$ и или $n_+ = n - 1$, или $n_- = n - 1$, *ультра гиперболическому типу*, если $n_0 = 0$, и одновременно $n_+ > 1$ и $n_- > 1$, *параболическому типу*, если $n_0 > 0$.

Уравнение (I) принадлежит эллиптическому (гиперболическому, …) типу на множестве $G_1 \in G$, если оно принадлежит эллиптическому (гиперболическому, …) типу в каждой точке $x^0 \in G_1$.

Преобразование

$$\xi = B^* x, \tag{$**$}$$

$\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$, $x = (x_1, ..., x_n)$ приводит уравнение (I) в точке $x^0 \in G$ к каноническому виду.

В двумерном случае $(n = 2)$ уравнение (I) примет вид

$$a(x,y)u_{xx}+2b(x,y)u_{xy}+c(x,y)u_{yy}=\Phi\left(x,y,u,u_x,u_y\right), \qquad \text{(II)}$$

где $|a|+|b|+|c|\neq 0$ и принадлежит (в точке или области):

гиперболическому типу, если $b^2-ac>0$;

параболическому типу, если $b^2-ac=0$;

эллиптическому типу, если $b^2-ac<0$.

В случае $n=2$ уравнение можно привести к каноническому виду не только в каждой точке, но и в окрестности точки, в которой уравнение сохраняет тип.

Для уравнения (II) характеристическое уравнение

$$a(x,y)(dy)^2-2b(x,y)dxdy+c(x,y)(dx)^2=0 \qquad \text{(III)}$$

распадается на два уравнения:

$$ady-\left(b+\sqrt{b^2-ac}\right)dx=0, \qquad \text{(IVa)}$$

$$ady-\left(b-\sqrt{b^2-ac}\right)dx=0. \qquad \text{(IVb)}$$

Уравнения гиперболического типа: $b^2-ac>0$**.** Общие интегралы $\varphi(x,y)=c_1$, $\psi(x,y)=c_2$ уравнений (IVa) и (IVb) действительны и различны. Они определяют два различных семейства действительных характеристик для уравнения (II). Заменой переменных $\xi=\varphi(x,y)$, $\eta=\psi(x,y)$ уравнение (II) приводится к виду

$$\tilde{u}_{\xi\eta}=\Phi_1\left(\xi,\eta,\tilde{u},\tilde{u}_\xi,\tilde{u}_\eta\right). \qquad \text{(V)}$$

Иногда удается найти общее решение $\tilde{u}(\xi,\eta)$ уравнения (V). Тогда функция $u(x,y)=\tilde{u}\left(\varphi(x,y),\psi(x,y)\right)$ представляет собой общее решение уравнения (II).

Уравнения параболического типа: $b^2-ac=0$**.** Уравнения (IVa) и (IVb) совпадают. Общий интеграл $\varphi(x,y)=c$ этих уравнений определяет семейство действительных характеристик для этого уравнения. Заменой переменных $\xi=\varphi(x,y)$, $\eta=\psi(x,y)$, где $\psi(x,y)$ — любая гладкая функция такая, что замена переменных взаимно однозначна в рассматриваемой области, уравнение (II) приводится к виду

$$\tilde{u}_{\eta\eta}=\Phi_1\left(\xi,\eta,\tilde{u},\tilde{u}_\xi,\tilde{u}_\eta\right). \qquad \text{(VI)}$$

Уравнения эллиптического типа: $b^2-ac<0$**.** Пусть $\varphi(x,y)+i\psi(x,y)=c$ — общий интеграл уравнения (III), где $\varphi(x,y)$ и

$\psi(x, y)$ —действительные функции[1)]. Тогда заменой переменных $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ уравнение (II) приводится к каноническому виду

$$\tilde{u}_{\xi\xi} + \tilde{u}_{\eta\eta} = \Phi_1(\xi, \eta, \tilde{u}, \tilde{u}_\xi, \tilde{u}_\eta). \qquad \text{(VI)}$$

Замечание. В дальнейшем для удобства будем вместо $\tilde{u}(\xi,\eta)$ писать просто $u(\xi,\eta)$.

Пример 1. Определить тип уравнения

$$4u_{xx} - 4u_{xy} - 2u_{yz} + 3u_y - u_z = 0 \qquad (1)$$

и привести его к каноническому виду, где $u = u(x, y, z)$.

Δ Переобозначив x через x_1, y через x_2, z через x_3, запишем уравнение (1) в виде

$$4u_{x_1x_1} - 4u_{x_1x_2} - 2u_{x_2x_3} + 3u_{x_2} - u_{x_3} = 0. \qquad (2)$$

Квадратичная форма, порождаемая матрицей старших коэффициентов уравнения (2), имеет вид

$4y_1^2 - 4y_1y_2 - 2y_2y_3$, $y = (y_1, y_2, y_3)$.

Приведем ее с помощью невырожденного вещественного преобразования к сумме квадратов

$$4y_1^2 - 4y_1y_2 - 2y_2y_3 = \left\{(2y_1)^2 - 2(2y_1)y_2 + y_2^2\right\} - y_2^2 - 2y_2y_3 =$$

$$= \{2y_1 - y_2\}^2 - \left\{y_2^2 + 2y_2y_3 + y_3^2\right\} + y_3^2 = \{2y_1 - y_2\}^2 - \{y_2 + y_3\}^2 + y_3^2.$$

Пусть

$$\begin{cases} \eta_1 = 2y_1 - y_2, \\ \eta_2 = y_2 + y_3, \\ \eta_3 = y_3. \end{cases} \qquad (3)$$

Тогда

$$4y_1^2 - 4y_1y_2 - 2y_2y_3 = \eta_1^2 - \eta_2^2 + \eta_3^2.$$

Следовательно, это уравнение является гиперболическим.

Из (3) нетрудно получить, что

[1)]Если a, b, c — аналитические функции, то существование общего интеграла уравнения (III) вытекает из теоремы Ковалевской.

$$
\begin{cases}
y_1 = \frac{1}{2}\eta_1 + \frac{1}{2}\eta_2 - \frac{1}{2}\eta_3, \\
y_2 = \eta_2 - \eta_3, \\
y_3 = \eta_3,
\end{cases}
\tag{4}
$$

или

$y = B\eta$, где B (см. ($*$)) имеет вид

$$
B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Тогда матрица $B*$ имеет вид

$$
B* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix}
$$

Рассмотрим согласно (**) преобразование $\xi = B^* x$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, или

$$
\begin{cases}
\xi_1 = \frac{1}{2}x_1, \\
\xi_2 = \frac{1}{2}x_1 + x_2, \\
\xi_3 = -\frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3.
\end{cases}
\tag{5}
$$

Запишем уравнение (2) в переменных (ξ_1, ξ_2, ξ_3). Из (5) имеем

0	$u_{x_1} = \frac{1}{2}u_{\xi_1} + \frac{1}{2}u_{\xi_2} - \frac{1}{2}u_{\xi_3}$
3	$u_{x_2} = u_{\xi_2} - u_{\xi_3}$
-1	$u_{x_3} = u_{\xi_3}$
4	$u_{x_1x_1} = \frac{1}{4}u_{\xi_1\xi_1} + \frac{1}{4}u_{\xi_2\xi_2} + \frac{1}{4}u_{\xi_3\xi_3} + \frac{1}{2}u_{\xi_1\xi_2} - \frac{1}{2}u_{\xi_1\xi_3} - \frac{1}{2}$

−4	$u_{x_1x_2} = \frac{1}{2}u_{\xi_1\xi_2} + \frac{1}{2}u_{\xi_2\xi_2} - \frac{1}{2}u_{\xi_2\xi_3} - \frac{1}{2}u_{\xi_1\xi_3} - \frac{1}{2}u_{\xi_2\xi_3} + \frac{1}{2}$
−2	$u_{x_2x_3} = u_{\xi_2\xi_3} - u_{\xi_3\xi_3}$

Слева от вертикальной черты написаны коэффициенты, с которыми соответствующие производные входят в уравнение (2).

Приведя подобные члены, получаем

$$u_{\xi_1\xi_1}\left(4\frac{1}{4}\right) + u_{\xi_2\xi_2}\left(4\frac{1}{4} - 4\frac{1}{2}\right) + u_{\xi_3\xi_3}\left(4\frac{1}{4} - 4\frac{1}{2} + 2\right) + u_{\xi_1\xi_2}\left(4\frac{1}{2} - 4\frac{1}{2}\right) +$$

$$+ u_{\xi_1\xi_3}\left(-4\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2}\right) + u_{\xi_2\xi_3}\left(-4\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2} - 2\right) + u_{\xi_2}3 + u_{\xi_3}\left(-3-1\right) = 0$$

или

$$u_{\xi_1\xi_1} - u_{\xi_2\xi_2} + u_{\xi_3\xi_3} + 3u_{\xi_2} - 4u_{\xi_3} = 0\,.$$

▲

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$3u_{xx} - 5u_{xy} - 2u_{yy} = 7\sin\left(x - 3y\right). \tag{1}$$

Δ Найдем характеристики уравнения. Из (III) имеем

$$3\left(dy\right)^2 + 5dxdy - 2\left(dx\right)^2 = 0 \quad \text{или} \quad 3\left(y'\right)^2 + 5y' - 2 = 0\,,$$

откуда получаем, что $y' = -2$ и $y' = \frac{1}{3}$. Следовательно, $y = -2x + C_1$ и $3y = x + C_2$ — два семейства характеристик уравнения (1). Введем характеристическую замену переменных

$$\begin{cases} \xi = 2x + y, \\ \eta = x - 3y \end{cases} \tag{2}$$

и запишем уравнение (1) в новых переменных:

$$u_x = u_\xi \cdot 2 + u_\eta \cdot 1,$$
$$u_y = u_\xi \cdot 1 + u_\eta \cdot \left(-3\right),$$

3	$u_{xx} = 4u_{\xi\xi} + 4u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$,
−2	$u_{yy} = u_{\xi\xi} - 6u_{\xi\eta} + 9u_{\eta\eta}$,
−5	$u_{xy} = 2u_{\xi\xi} - 5u_{\xi\eta} - 3u_{\eta\eta}$;

откуда получаем

$$u_{\xi\xi}\left(12 - 2 - 10\right) + u_{\xi\eta}\left(12 + 12 + 25\right) + u_{\eta\eta}\left(3 - 18 + 15\right) = 7\sin\eta\,,$$

или

$$49u_{\xi\eta} = 7\sin\eta \ .$$

Следовательно,

$$u_\xi = -\frac{1}{7}\cos\eta + C_1(\xi),$$

где $C_1(\xi)$ — любая функция класса C^2. Проинтегрировав последнее равенство по ξ, получаем

$$u(\xi,\eta) = -\frac{1}{7}\xi\cos\eta + f(\xi) + g(\eta),$$

где $f(\xi)$ и $g(\eta)$ — любые функции класса C^2, откуда в силу замены переменных (2) находим общее решение уравнения (1):

$$u(x,y) = -\frac{1}{7}(2x+y)\cos(x-3y) + f(2x+y) + g(x-3y) \ . \blacktriangle$$

Пример 3. Решить задачу Коши:

$$xu_{xx} + (x-y)u_{xy} - yu_{yy} + \frac{y-x}{y+x}(u_x + u_y) = 0, \quad x>0, \ y>0; \qquad (1)$$

$$u\big|_{y=1} = x^2, \qquad u_y\big|_{y=1} = 2, \qquad x>0. \qquad (2)$$

Δ Найдем характеристики уравнения (1). Из (III) находим

$$x(dy)^2 - (x-y)dxdy - y(dx)^2 = 0,$$

или

$$x(y')^2 - (x-y)y' - y = 0 \ .$$

Отсюда получаем, что $y' = 1$ и $y' = -\dfrac{y}{x}$. Следовательно, $y = x + C_1$ и $y = \dfrac{C_2}{x}$ — два семейства характеристик уравнения (1).

Введем характеристическую замену переменных

$$\begin{cases} \xi = x - y, \\ \eta = \quad xy, \end{cases} \qquad (3)$$

и запишем уравнение (1) в новых переменных:

$\dfrac{y-x}{y+x}$	$u_x = u_\xi \cdot 1 + u_\eta \cdot y$

$\dfrac{y-x}{y+x}$	$u_y = u_\xi \cdot (-1) + u_\eta \cdot x$
x	$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2yu_{\xi\eta} + y^2 u_{\eta\eta}$
$-y$	$u_{yy} = u_{\xi\xi} - 2xu_{\xi\eta} + x^2 u_{\eta\eta}$
$x-y$	$u_{xy} = -xu_{\xi\xi} + (x-y)u_{\xi\eta} + xyu_{\eta\eta} + u_\eta$

Отсюда имеем

$$u_{\xi\xi}\left(x-y-(x-y)\right)+u_{\eta\eta}\left(xy^2-yx^2+xy(x-y)\right)+$$
$$+u_{\xi\eta}\left(2yx+2xy+(x-y)^2\right)+$$
$$+u_\xi(1-1)\frac{y-x}{y+x}+u_\eta\left(\frac{y-x}{y+x}(y+x)+x-y\right)=0.$$

Следовательно, уравнение принимает вид

$$(x+y)^2 u_{\xi\eta} = 0\,,$$

или (так как $x>0,\;\; y>0$)

$$u_{\xi\eta} = 0\,. \tag{4}$$

Отсюда следует, что $u(\xi,\eta)=f(\xi)+g(\eta)$, где $f(\xi)$ и $g(\eta)$ — любые функции класса C^2, является общим решением уравнения (3), а функция

$$u(x,y)=f(x-y)+g(xy) \tag{5}$$

есть общее решение уравнения (1).

Подберем функции $f(\xi)$ и $g(\eta)$ так, чтобы выполнялись условия (2). Из (5) и (2) получаем

$$u\big|_{y=1} = f(x-1)+g(x)=x^2,\qquad x>0, \tag{6}$$

$$u_y\big|_{y=1} = -f'(x-1)+xg'(x)=2,\qquad x>0 \tag{7}$$

(так как $u_y(x,y)=f'(x-y)\cdot(-1)+g'(yx)\cdot x$).

Продифференцировав равенство (6) как тождество по x, получаем

$$f'(x-1)\cdot 1+g'(x)\cdot 1=2x,\quad x>0. \tag{8}$$

Сложив равенства (7) и (8), получим

$$(x+1)g'(x)=2+2x,\quad x>0,$$

или

$$g'(x)=2,\quad x>0.$$

Откуда следует, что

$$g(x) = 2x + A, \quad x > 0, \tag{9}$$

где $A \in R$ — любое число.

Из (9) и (6) находим

$$f(x-1) = x^2 - g(x) = x^2 - 2x - A =$$
$$= (x^2 - 2x + 1) - 1 - A = (x-1)^2 - 1 - A,$$

или

$$f(x-1) = (x-1)^2 - 1 - A,$$

откуда, обозначив $q = x - 1$, получаем

$$f(q) = q^2 - 1 - A\,. \tag{10}$$

Из (5), (9) и (10) получаем

$$u(x, y) = (x - y)^2 - 1 - A + 2xy + A.$$

Следовательно, функция

$$u(x, y) = (x - y)^2 - 1 + 2xy = x^2 + y^2 - 1$$

есть решение задачи (1), (2). ▲

Пример 4. (**Задача о максимальной области.)** Найти максимальную область Q плоскости R^2, в которой решение уравнения

$$u_{yy} - u_{xx} = 0 \tag{1}$$

однозначно определяется условиями

$$u\big|_{y=0} = u_0(x), \quad u_y\big|_{y=0} = u_1(x), \quad 0 < x < 1\,, \tag{2}$$

где $u_0(x) \in C^2(0,1)$, $u_1(x) \in C^1(0,1)$.

Δ Уравнение (1) имеет два семейства характеристик: $x + y = C_1$ и $x - y = C_2$, а в переменных $\xi = x + y$, $\eta = x - y$ это уравнение принимает вид $u_{\xi\eta} = 0$. Поэтому любое решение уравнения (1) можно записать в виде

$$u(x, y) = f(x + y) + g(x - y)$$

при некоторых дважды непрерывно дифференцируемых функциях $f(\xi)$ и $g(\eta)$. Следовательно, в квадрате

$$Q = \{(x, y) : 0 < x - y < 1, 0 < x + y < 1\}$$

решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), определено однозначно формулой Д'Аламбера. Покажем, что Q — искомая область.

Пусть в некоторой области Ω, $\Omega \supset Q$ существует решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2). Тогда функция $u_1(x,y) = u(x,y) + F(x-y-1)$, $(x,y) \in \Omega$, где $F(t)=0$ для $t \le 0$ и $F(t)=t^4$ для $t \ge 0$, также является решением уравнения (1) в области Ω, удовлетворяющее условиям (2) и отличным от $u(x,y)$ в каждой точке множества $\Omega_1 = \Omega \bigcap \{(x,y) : x-y>1\}$.

Функции

$$u_2(x,y) = u(x,y) + F(x-y), \quad (x,y) \in \Omega,$$
$$u_3(x,y) = u(x,y) + F(x+y-1), \quad (x,y) \in \Omega,$$
$$u_4(x,y) = u(x,y) + F(-x-y), \quad (x,y) \in \Omega,$$

также являются решениями в уравнения (1), удовлетворяющими условиям (2) и отличными от $u(x,y)$ в каждой точке множеств:

$$\Omega_2 = \Omega \bigcap \{(x,y) : y-x>0\},$$
$$\Omega_3 = \Omega \bigcap \{(x,y) : x+y>1\},$$
$$\Omega_4 = \Omega \bigcap \{(x,y) : x+y<0\}$$

соответственно.

Следовательно, Q — искомая область. ▲

Пример 5. Решить задачу Коши.
Найти наибольшую область, где решение определено однозначно.

$$x^2 u_{xx} - 4y^2 u_{yy} + x u_x - 4y u_y = 16x^4, \tag{1}$$

$$u\big|_{y=1} = 3x^4, \qquad u_y\big|_{y=1} = 0, \; 0<x<2. \tag{2}$$

Δ Найдем характеристики уравнения (1). Из (III) находим

$$x^2 (dy)^2 - 4y^2 (dx)^2 = 0, \text{ или } x^2 (y')^2 - 4y^2 = 0.$$

Отсюда получаем, что

а) $xdy - 2ydx = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{y} = 2\dfrac{dx}{x} \Rightarrow \ln y = \ln x^2 + \ln C \Rightarrow \dfrac{x^2}{y} = C_1;$

б) $xdy + 2ydx = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{y} = -2\dfrac{dx}{x} \Rightarrow \ln y = -\ln x^2 + \ln C \Rightarrow x^2 y = C_2$.

Получили $\dfrac{x^2}{y} = C_1$ и $x^2 y = C_2$ — два семейства характеристик уравнения (1). Введем характеристическую замену переменных

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{x^2}{y}, \\ \eta = x^2 y \end{cases} \tag{3}$$

и запишем уравнение (1) в новых переменных:

x	$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi \dfrac{2x}{y} \xi_x + u_\eta 2xy,$
$-4y$	$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi \left(-\dfrac{x^2}{y^2} \right) + u_\eta x^2,$
x^2	$u_{xx} = \dfrac{2}{y} u_\xi + \dfrac{2x}{y} \left(u_{\xi\xi} \dfrac{2x}{y} + u_{\xi\eta} 2xy \right) + 2y u_\eta + 2xy \left(u_{\xi\eta} \dfrac{2x}{y} + u_{\eta\eta} 2\right.$
$-4y^2$	$u_{yy} = \dfrac{2x}{y^3} u_\xi - \dfrac{x^2}{y^2} \left(u_{\xi\xi} \left(-\dfrac{x^2}{y^2} \right) + u_{\xi\eta} x^2 \right) + x^2 \left(u_{\xi\eta} \left(-\dfrac{x^2}{y^2} \right) + u_{\eta\eta} x^2 \right.$

Отсюда имеем

$$u_{\xi\xi} \left(\frac{4x^4}{y^2} - \frac{4x^4}{y^2} \right) + u_{\xi\eta} \left(4x^4 + 4x^4 + 4x^4 + 4x^4 \right) + u_{\eta\eta} \left(4x^4 y^2 - 4x^4 y^2 \right) +$$

$$+ u_\xi \left(2\frac{x^2}{y} + 4\frac{x^2}{y} + 2\frac{x^2}{y} - 8\frac{x^2}{y} \right) + u_\eta \left(2x^2 y - 4x^2 y + 2x^2 y \right) = 16x^4,$$

$$16x^4 u_{\xi\eta} = 16x^4,$$

$$u_{\xi\eta} = 1. \tag{4}$$

Следовательно, $u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta) + \xi\eta$, где $f(\xi)$ и $g(\eta)$ есть любые функции класса C^2, является общим решением уравнения (4), а функция

$$u(x, y) = f\left(\frac{x^2}{y} \right) + g\left(x^2 y \right) + x^4 \tag{5}$$

есть общее решение уравнения (1).

Подберем функции $f(\xi)$ и $g(\eta)$ так, чтобы выполнялись условия (2). Из (5) и (2) получаем

$$u\big|_{y=1} = f\left(x^2\right) + g\left(x^2\right) + x^4 = 3x^4, \quad 1 < x < 2, \tag{6}$$

$$u_y\big|_{y=1} = f'\left(x^2\right)\left(-x^2\right) + g'\left(x^2\right)x^2 = 0, \quad 1 < x < 2, \tag{7}$$

(так как $u_y(x,y) = f'\left(\dfrac{x^2}{y}\right)\left(-\dfrac{x^2}{y^2}\right) + g'\left(x^2 y\right)x^2$).

Сделав замену $z = x^2$ в (6) и (7), получаем

$$f(z) + g(z) = 2z^2, \quad 1 < z < 4, \tag{8}$$

$$-zf'(z) + zg(z) = 0, \quad 1 < z < 4. \tag{9}$$

Продифференцировав тождество (8) по z и сократив тождество (9) на z, получаем

$$f'(z) + g'(z) = 4z, \quad 1 < z < 4, \tag{10}$$

$$-f'(z) + g'(z) = 0, \quad 1 < z < 4. \tag{11}$$

Сложив (10) и (11), имеем

$$2g'(z) = 4z, \quad 1 < z < 4,$$

$$g'(z) = 2z, \quad 1 < z < 4,$$

$$g(z) = z^2 + C, \quad 1 < z < 4. \tag{12}$$

Из (8) и (12) получаем, что

$$f(z) = z^2 - C, \quad 1 < z < 4. \tag{13}$$

Из (5), (12) и (13) находим, что

$$u(x,y) = \frac{x^4}{y^2} + x^4 y^2 + x^4,$$

где

$$(x,y) \in Q = \{(x,y) \in R^3 : \begin{cases} 1 < z = \dfrac{x^2}{y} < 4 \text{ из } (13) \\ 1 < z = x^2 y < 4 \text{ из } (12) \end{cases}\}.$$

Нарисуем область Q, $Q = \{(x,y) : \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} < y < x^2 \\ \dfrac{1}{x^2} < y < \dfrac{4}{x^2} \end{cases}\}$.

CD — это область задания начальных условий (2) задачи Коши (1), (2).

Найдем координаты точек A и B; получим $A\left(\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right)$, $B\left(\sqrt{2}, 2\right)$ (рис. 1).

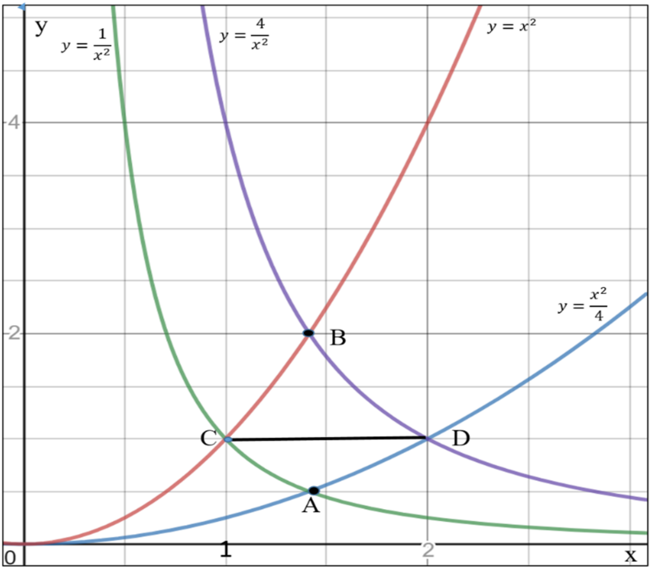

Рис. 1

Искомая наибольшая область Q — это криволинейный четырехугольник ADBC (доказать, что Q — действительно максимальная область). ▲

§ 2. СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ СТРУНЫ

Простейшей после задачи Коши краевой задачей для одномерного волнового уравнения является смешанная задача на полуоси (задача для полубесконечной струны):

$$\frac{1}{a^2}u_{tt} - u_{xx} = f(x,t), \quad x > 0, \qquad t > 0; \tag{I}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \geq 0; \tag{II}$$

$$u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \geq 0; \tag{III}$$

$$u\big|_{x=0} = \chi(t), \quad t \geq 0. \tag{IV}$$

Для существования классического решения (из $C^2(x \geq 0, t \geq 0)$) необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия гладкости:

$$\varphi(x) \in C^2(x \geq 0), \psi(x) \in C^1(x \geq 0), \chi(t) \in C^2(t \geq 0),$$

$$f(x,t) \in C(x \geq 0, t \geq 0)$$

и условия согласования:

$$\varphi(0) = \chi(0), \ \ \psi(0) = \chi'(0), \ \ \frac{1}{a^2}\chi''(0) - \varphi''(0) = f(0,0).$$

Граничное условие (IV) жесткого закрепления конца струны часто заменяется условием его пружинного закрепления:

$$(u_x - \sigma u)\big|_{x=0} = \chi(t), \quad t \geq 0, \tag{IV*}$$

где $\sigma \geq 0$; условие неотрицательности коэффициента σ — чисто физическое условие; при $\sigma = 0$ условие (IV*) — условие свободного конца. В этом случае условия согласования выглядят так:

$$\varphi'(0) - \sigma\varphi(0) = \chi(0), \quad \psi'(0) - \sigma\psi(0) = \chi'(0).$$

Классические решения задачи (I), (II), (III), (IV) и задачи (I), (II), (III), (IV*) единственны.

Наряду с классическими решениями указанных задач рассматривают и обобщенные решения этих задач.

Не напоминая здесь определения обобщенного решения, скажем лишь, что принадлежащая $C^1(x \geq 0, t \geq 0)$ функция $u(x,t)$, удовлетворяющая начальным и граничным условиям (II), (III), (IV) или (II), (III), (IV*) и при любой финитной в $\{(x,t): x \geq 0, t \geq 0\}$ функции $g(x,t) \in C^2(x \geq 0, t \geq 0)$, удовлетворяющая равенству

$$\iint\limits_{x\ge 0,t\ge 0} u(x,t)\left[\frac{1}{a^2}g_{tt}(x,t)-g_{xx}(x,t)\right]dxdt=\iint\limits_{x\ge 0,t\ge 0} f(x,t)g(x,t)\,dxdt$$

($u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (I) в смысле обобщенных функций), является обобщенным решением задачи (I), (II), (III), (IV) или задачи (I), (II), (III), (IV*). Обобщенное решение каждой из этих задач единственно. Существование обобщенных решений, естественно, устанавливается при меньших ограничениях на функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(t)$ и, в частности, на условия их согласования.

Рассмотрим решения некоторых задач.

Пример 1. Решить задачу

$$9u_{tt}=u_{xx}+6t\sin x\,,\quad x>0\,,\ t>0\,; \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0}=e^{3x}\,,\quad u_t\big|_{t=0}=9x^2+6\sin x\,,\quad x\ge 0\,; \tag{2}$$

$$u_x\big|_{x=0}=3+6t\,,\quad t\ge 0\,. \tag{3}$$

Δ 1. Так как уравнение является неоднородным, то найдем какое-нибудь частное решение этого уравнения.

В нашем случае ищем частное решение уравнения (1) в виде

$$w(x,t)=(At+B)\sin x\,. \tag{4}$$

Подставляя (4) в уравнение (1), получаем

$$0=-(At+B)\sin x+6t\sin x\,,\qquad A=6,\quad B=0\,.$$

Таким образом, функция

$$w(x,t)=6t\sin x$$

есть частное решение уравнения (1).

2. Введем новую искомую функцию $\upsilon(x,t)$ такую, что

$$\upsilon(x,t)=u(x,t)-w(x,t)\,,$$

$$\upsilon(x,t)=u(x,t)-6t\sin x\,,$$

и запишем задачу (1), (2), (3) для функции $\upsilon(x,t)$:

$$9\upsilon_{tt}=\upsilon_{xx}\,,\quad x>0\,,\quad t>0\,; \tag{5}$$

$$\upsilon\big|_{t=0}=e^{3x}\,,\quad \upsilon_t\big|_{t=0}=9x^2\,,\quad x\ge 0\,; \tag{6}$$

$$\upsilon_x\big|_{x=0}=3\,,\quad t\ge 0\,. \tag{7}$$

Общим решением волнового уравнения

$$\upsilon_{tt}=a^2\upsilon_{xx}\,,\ a\in R,\quad a>0\,,$$

является функция

$$\upsilon(x,t) = f(x+at) + g(x-at),$$

где $f(\xi)$ и $g(\eta)$ — любые функции класса C^2.

В нашем случае общее решение уравнения (5) запишется в виде

$$\upsilon(x,t) = f(3x+t) + g(3x-t). \tag{8}$$

3. Из (8) и условий (6) следует, что

$$\upsilon\big|_{t=0} = f(3x) + g(3x) = e^{3x}, \quad x \ge 0;$$

$$\upsilon_t\big|_{t=0} = f'(3x) - g'(3x) = 9x^2, \quad x \ge 0.$$

Сделав замену переменной $q = 3x$ в обоих выше написанных соотношениях, получим

$$f(q) + g(q) = e^q, \ \ q \ge 0, \tag{9*}$$

$$f'(q) - g'(q) = q^2, \ \ q \ge 0. \tag{9**}$$

Продифференцировав правую и левую части равенства (9*) по q, получаем из (9*) и (9**)

$$f'(q) + g'(q) = e^q, \ \ q \ge 0, \tag{9***}$$

$$f'(q) - g'(q) = q^2, \ \ q \ge 0. \tag{9****}$$

Сложив (9***) и (9****), находим

$$f'(q) = \frac{1}{2}e^q + \frac{1}{2}q^2, \quad q \ge 0, \tag{10}$$

$$f(q) = \frac{1}{2}e^q + \frac{1}{6}q^3 + C, \quad q \ge 0, \tag{11}$$

где C — произвольная постоянная. Подставляя $f(q)$ из равенства (11) в соотношение (9*), получаем

$$g(q) = \frac{1}{2}e^q - \frac{1}{6}q^3 - C, \quad q \ge 0. \tag{12}$$

Из (8), (11) и (12) следует, что решение задачи в области $\{(x,t): 3x+t \ge 0, 3x-t \ge 0\}$ имеет вид

$$\upsilon(x,t) = \frac{1}{2}e^{3x+t} + \frac{1}{6}(3x+t)^3 + \frac{1}{2}e^{3x-t} - \frac{1}{6}(3x-t)^3. \tag{13}$$

4. Из (8) и условия (7) имеем

$$\upsilon_x\big|_{x=0} = 3f'(t) + 3g'(-t) = 3, \quad t \ge 0.$$

Разделив обе части этого равенства на 3, получим

$$f'(t)+g'(-t)=1, \quad t\ge 0.$$

Воспользовавшись соотношением (10), находим

$$\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{2}t^{2}+g'(-t)=1, \quad t\ge 0.$$

$$g'(-t)=1-\frac{1}{2}e^{t}-\frac{1}{2}t^{2}, \quad t\ge 0.$$

Положив $p=-t$, имеем

$$g'(p)=1-\frac{1}{2}e^{-p}-\frac{1}{2}p^{2}, \quad p\le 0.$$

Следовательно,

$$g(p)=p+\frac{1}{2}e^{-p}-\frac{1}{6}p^{3}+C_1, \quad p\le 0, \tag{14}$$

где C_1 — произвольная постоянная.

Таким образом, решение задачи в области $\{(x,t): 3x+t\ge 0, 3x-t\le 0\}$ задается формулой

$$\upsilon(x,t)=\frac{1}{2}e^{3x+t}+\frac{1}{6}(3x+t)^{3}+(3x-t)+\frac{1}{2}e^{-(3x-t)}-\frac{1}{6}(3x-t)^{3}+C_1. \tag{15}$$

5. Найдем связь постоянной C из формулы (12) и постоянной C_1 из формулы (14), требуя непрерывности решения задачи в области $\{(x,t): x>0,\ t>0\}$. Для этого осуществим «склейку» по непрерывности решений, задаваемых формулами (13) и (15) в соответствующих областях, на общей границе этих областей, то есть на характеристике $3x-t=0$ или, что то же самое, «склейку» по непрерывности функций $g(\eta)$, задаваемых (12) и (14) в нуле:

$$\frac{1}{2}-C=g(0+0)=g(0-0)=\frac{1}{2}+C_1.$$

Отсюда следует, что

$$C_1=-C.$$

Подставляя найденное значение C_1 в формулу (14), получаем

$$g(p)=p+\frac{1}{2}e^{-p}-\frac{1}{6}p^{3}-C, \quad p\le 0. \tag{16}$$

Из (8), (11) и (16) следует, что решение задачи в области $\{(x,t): 3x+t\ge 0, 3x-t\le 0\}$ имеет вид

$$\upsilon(x,t)=\frac{1}{2}e^{3x+t}+\frac{1}{6}(3x+t)^3+(3x-t)+\frac{1}{2}e^{-(3x-t)}-\frac{1}{6}(3x-t)^3 \qquad (17)$$

Из (13) и (17) следует, что решением задачи (5), (6), (7) является функция

$$\upsilon(x,t)=\frac{1}{2}e^{3x+t}+\frac{1}{6}(3x+t)^3+\begin{cases}\frac{1}{2}e^{3x-t}-\frac{1}{6}(3x-t)^3, & 3x-t\ge 0;\\ (3x-t)+\frac{1}{2}e^{-(3x-t)}-\frac{1}{6}(3x-t)^3, & 3x-t\le 0.\end{cases}$$

Следовательно, функция

$$u(x,t)=\upsilon(x,t)+6t\sin x,$$

где функция $\upsilon(x,t)$ определена выше, будет решением задачи (1), (2), (3). ▲

Пример 2. Решить задачу

$$u_{tt}-4u_{xx}=6xt, \quad x>0, \ t>0; \qquad (1)$$

$$u\big|_{t=0}=x^3, \quad u_t\big|_{t=0}=0, \quad x\ge 0; \qquad (2)$$

$$u\big|_{x=0}=t^3, \quad t\ge 0. \qquad (3)$$

Δ Так как уравнение (1) является неоднородным, то найдем какое-нибудь частное решение этого уравнения. В нашем случае легко видеть, что, например, функция $w=xt^3$ является частным решением уравнения (1).

Введем новую искомую функцию $\upsilon(x,t)$ такую, что

$$\upsilon(x,t)=u(x,t)-w(x,t),$$

$$\upsilon(x,t)=u(x,t)-xt^3 \qquad (4)$$

и запишем задачу (1), (2), (3) для функции $\upsilon(x,t)$:

$$\upsilon_{tt}-4\upsilon_{xx}=0, \quad x>0, \ t>0; \qquad (5)$$

$$\upsilon\big|_{t=0}=x^3, \quad \upsilon_t\big|_{t=0}=0, \quad x\ge 0, \qquad (6)$$

$$\upsilon\big|_{x=0}=t^3, \quad t\ge 0. \qquad (7)$$

Общее решение уравнения (5) имеет вид

$$\upsilon(x,t)=f(x+2t)+g(x-2t). \qquad (8)$$

Из (8) и соотношений (6) следует, что

$$\upsilon\big|_{t=0}=f(x)+g(x)=x^3, \quad x\ge 0, \qquad (9^*)$$

$$\upsilon_t\big|_{t=0}=2f'(x)-2g'(x)=0, \quad x\ge 0. \qquad (9^{**})$$

Продифференцировав правую и левую части равенства (9*) по x, получаем

$$f'(x)+g'(x)=3x^2, \quad x\geq 0. \qquad (9^{***})$$

Сложив (9***) и (9**), поделенное на 2, находим

$$2f'(x)=3x^2, \quad x\geq 0,$$

$$f'(x)=\frac{3}{2}x^2, \quad x\geq 0,$$

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3+C, \quad x\geq 0, \qquad (10)$$

где C — произвольная постоянная. Подставляя $f(x)$ из соотношения (10) в равенство (9*), получаем

$$g(x)=x^3-f(x), \quad x\geq 0,$$

$$g(x)=x^3-\frac{1}{2}x^3-C=\frac{1}{2}x^3-C, \quad x\geq 0. \qquad (11)$$

Из (8), (10) и (11) следует, что решение задачи в области $\{(x,t): x+2t\geq 0, x-2t\geq 0\}$ имеет вид

$$\upsilon(x,t)=\frac{1}{2}(x+2t)^3+\frac{1}{2}(x-2t)^3. \qquad (12)$$

Из (8) и соотношения (7) имеем

$$\upsilon\big|_{x=0}=f(2t)+g(-2t)=t^3, \quad t\geq 0.$$

Воспользовавшись соотношением (10), получим

$$\frac{1}{2}(2t)^3+C+g(-2t)=t^3, \quad t\geq 0,$$

$$g(-2t)=t^3-4t^3-C, \quad t\geq 0,$$

$$g(-2t)=-3t^3-C, \quad t\geq 0.$$

Положив $p=-2t$, имеем

$$g(p)=\frac{3}{8}p^3-C, \quad p\leq 0. \qquad (13)$$

Заметим, что из (11) и (13) следует, что <u>«склейку» по непрерывности функции в нуле проводить не надо в случае выполнения условий согласования.</u>

Из (8), (10) и (13) следует, что решение задачи в области $\{(x,t): x+2t\geq 0, x-2t\leq 0\}$ имеет вид

$$\upsilon(x,t)=\frac{1}{2}(x+2t)^3+\frac{3}{8}(x-2t)^3. \tag{14}$$

Из (12) и (14) следует, что решением задачи (5), (6), (7) является функция

$$\upsilon(x,t)=\frac{1}{2}(x+2t)^3+\begin{cases}\frac{1}{2}(x-2t)^3, x-2t\ge 0;\\ \frac{3}{8}(x-2t)^3, x-2t\le 0.\end{cases}$$

Следовательно, функция

$$u(x,t)=xt^3+\upsilon(x,t),$$

где функция $\upsilon(x,t)$ определена выше, будет решением задачи (1), (2), (3). ▲

Пример 3. Решить задачу

$$u_{tt}=9u_{xx}+2, \quad x>0, \ t>0; \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0}=x+x^3, \quad u_t\big|_{t=0}=-9x^2, \quad x\ge 0; \tag{2}$$

$$(u-u_x)\big|_{x=0}=t^2-1, \quad t\ge 0. \tag{3}$$

∆ Так как уравнение (1) является неоднородным, то найдем какое-нибудь частное решение этого уравнения.

В нашем случае легко видеть, что, например, функция $w=t^2$ является частным решением уравнения (1).

Введем новую искомую функцию $\upsilon(x,t)$ такую, что

$$\upsilon(x,t)=u(x,t)-w(x,t),$$

$$\upsilon(x,t)=u(x,t)-t^2, \tag{4}$$

и запишем задачу (1), (2), (3) для функции $\upsilon(x,t)$:

$$\upsilon_{tt}=9v_{xx}, \quad x>0, \ t>0; \tag{5}$$

$$\upsilon\big|_{t=0}=x+x^3, \quad v_t\big|_{t=0}=-9x^2, \quad x\ge 0; \tag{6}$$

$$(\upsilon-\upsilon_x)\big|_{x=0}=-1, \quad t\ge 0. \tag{7}$$

Общее решение уравнения (5) имеет вид

$$\upsilon(x,t)=f(x+3t)+g(x-3t). \tag{8}$$

Из (8) и соотношений (6) имеем

$$\upsilon\big|_{t=0}=f(x)+g(x)=x+x^3, \ x\ge 0, \tag{9*}$$

$$\upsilon_t\big|_{t=0} = 3f'(x) - 3g'(x) = -9, \quad x \ge 0. \qquad (9^{**})$$

Продифференцировав правую и левую части равенства (9*) по x, разделив обе части равенства (9**) на 3, получаем

$$f'(x) + g'(x) = 1 + 3x^2, \quad x \ge 0; \qquad (9^{***})$$

$$f'(x) - g'(x) = -3x^2, \quad x \ge 0. \qquad (9^{****})$$

Сложив полученные равенства (9***) и (9****), находим

$$2f'(x) = 1, \quad x \ge 0;$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}, \quad x \ge 0; \qquad (10)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x + C, \quad x \ge 0, \qquad (11)$$

где C — произвольная постоянная. Подставляя $f(x)$ из соотношения (11) в равенство (9*), получаем

$$g(x) = x + x^3 - f(x), \quad x \ge 0,$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x + x^3 - C, \quad x \ge 0. \qquad (12)$$

Из (8), (11) и (12) получаем, что решение задачи в области $\{(x,t): x + 3t \ge 0, x - 3t \ge 0\}$ имеет вид

$$\upsilon(x,t) = \frac{1}{2}(x+3t) + \frac{1}{2}(x-3t) + (x-3t)^3. \qquad (13)$$

Из условия (8) и соотношения (7) имеем

$$(\upsilon - \upsilon_x)\big|_{x=0} = f(3t) + g(-3t) - f'(3t) - g'(-3t) = -1, \quad t \ge 0.$$

Сделав замену $3t = p$ в выше написанном соотношении, получим

$$f(p) + g(-p) - f'(p) - g'(-p) = -1, \quad p \ge 0.$$

Воспользовавшись соотношениями (10) и (11), находим

$$\frac{1}{2}p + C + g(-p) - \frac{1}{2} - g'(-p) = -1, \quad p \ge 0,$$

$$g(-p) - g'(-p) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}p - C, \quad p \ge 0.$$

Положив $q = -p$, имеем

$$g(q) - g'(q) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}q - C, \quad q \le 0,$$

или

$$g'(q)-g(q)=\frac{1}{2}+C-\frac{1}{2}q\,,\quad q\le 0\,. \tag{14}$$

Решая уравнение (14), получаем, что

$$g(q)=C_1e^q+\frac{1}{2}q-C\,,\ \ q\le 0\,, \tag{15}$$

где C_1 — произвольная постоянная.

Найдем связь постоянной C из формулы (12) и постоянной C_1 из формулы (15), осуществив «склейку» по непрерывности функции $g(\eta)$ в нуле:

$$0-C=g(0+0)=g(0-0)=C_1-C\,.$$

Отсюда следует, что $C_1=0$.

Подставляя найденное значение C_1 в формулу (15), получаем

$$g(q)=\frac{1}{2}q-C\,,\ \ q\le 0\,. \tag{16}$$

Из (8), (11) и (16) следует, что решение задачи в области $\{(x,t): x+3t\ge 0, x-3t\le 0\}$ имеет вид

$$\upsilon(x,t)=\frac{1}{2}(x+3t)+\frac{1}{2}(x-3t)\,. \tag{17}$$

Из (13) и (17) следует, что решением задачи (5), (6), (7) является функция

$$\upsilon(x,t)=\frac{1}{2}(x+3t)+\begin{cases}\frac{1}{2}(x-3t)+(x-3t)^3, x-3t\ge 0;\\ \frac{1}{2}(x-3t), x-3t\le 0.\end{cases}$$

Следовательно, согласно (4), функция

$$u(x,t)=-t^2+\upsilon(x,t)\,,$$

где функция $\upsilon(x,t)$ определена выше, будет решением задачи (1), (2), (3). ▲

Вместо волнового уравнения можно взять иное гиперболическое уравнение и рассмотреть смешанную задачу на полуоси для этого уравнения.

Пример 4. Найти решение $u(x,t)$ следующей задачи:

$$u_{tt}+2u_{xt}-3u_{xx}=0\,,\quad x>0\,,\ \ t>0\,; \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = x + \operatorname{ch} x, \quad u_t\big|_{t=0} = \operatorname{sh} x - 3, \quad x \ge 0; \tag{2}$$

$$u_x\big|_{x=0} = \operatorname{sh} t + \frac{1}{1+9t^2}, \quad t \ge 0. \tag{3}$$

Δ Найдем решение уравнения (1) методом характеристик. Запишем уравнение в виде

$$-3u_{xx} + 2u_{xt} + u_{tt} = 0.$$

Найдем характеристики этого уравнения.

Из (III) § 1 имеем

$$-3(dt)^2 - 2dxdt + (dt)^2 = 0,$$

или

$$3(t')^2 + 2t' - 1 = 0,$$

откуда получаем, что $t' = -1$ и $t' = \dfrac{1}{3}$.

Следовательно, $t = -x + C_1$ и $3t = x + C_2$ — два семейства характеристик уравнения (1).

Введем характеристическую замену переменных

$$\begin{cases} \xi = x + t, \\ \eta = x - 3t \end{cases} \tag{4}$$

и запишем уравнение (1) в новых переменных:

$$u_x = u_\xi + u_\eta, \quad u_t = u_\xi - 3u_\eta,$$

-3	$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$,
1	$u_{tt} = u_{\xi\xi} - 6u_{\xi\eta} + 9u_{\eta\eta}$,
2	$u_{xt} = u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta} - 3u_{\xi\eta} - 3u_{\eta\eta}$.

Отсюда получаем

$$u_{\xi\xi}(-3+1+2) + u_{\eta\eta}(-3+9-6) + u_{\xi\eta}(-6-6+2-6) = 0,$$

или

$$-16u_{\xi\eta} = 0.$$

Следовательно,

$$u = f(\xi) + g(\eta),$$

где $f(\xi)$ и $g(\eta)$ — любые функции класса C^2.

Отсюда в силу замены переменных (4) находим общее решение уравнения (1):

$$u(x,t) = f(x+t) + g(x-3t). \tag{5}$$

Из условий (2) и соотношения (5) следует, что

$$u\big|_{t=0} = f(x) + g(x) = x + \operatorname{ch} x, \quad x \ge 0; \tag{6*}$$

$$u_t\big|_{t=0} = f'(x) - 3g'(x) = \operatorname{sh} x - 3, \quad x \ge 0. \tag{6**}$$

Продифференцировав правую и левую части равенств (6*) по x, получаем

$$f'(x) + g'(x) = 1 + \operatorname{sh} x, \quad x \ge 0. \tag{6***}$$

Вычтем из равенства (6**) равенство (6***). Получим

$$-4g'(x) = -4, \quad x \ge 0. \tag{7}$$

Отсюда находим, что

$$g'(x) = 1, \ x \ge 0; \tag{7*}$$

$$g(x) = x + C, \ x \ge 0, \tag{8}$$

где C — произвольная постоянная.

Подставляя $g(x)$ из соотношения (8) в соотношение (6*), получаем

$$f(x) = x + \operatorname{ch} x - g(x), \qquad x \ge 0,$$

$$f(x) = \operatorname{ch} x - C, \qquad x \ge 0. \tag{9}$$

Из (8) и (9) следует, что решение задачи в области $\{(x,t) : x+t \ge 0, x-3t \ge 0\}$ имеет вид

$$u(x,t) = \operatorname{ch}(x+t) + (x-3t). \tag{10}$$

Из условия (3) и соотношения (5) имеем

$$u_x\big|_{x=0} = f'(t) + g'(-3t) = \operatorname{sh} t + \frac{1}{1+9t^2}, \quad t \ge 0. \tag{11}$$

Воспользовавшись соотношением (9), находим

$$f'(t) = \operatorname{sh} t, \ t \ge 0,$$

и, следовательно, из (11) получаем

$$\operatorname{sh} t + g'(-3t) = \operatorname{sh} t + \frac{1}{1+9t^2}, \ t \ge 0;$$

$$g'(-3t) = \frac{1}{1+9t^2}, \quad t \ge 0.$$

Положив $z = -3t$, получим

$$g'(z) = \frac{1}{1+z^2}, \quad z \le 0.$$

Следовательно,

$$g(z)=\operatorname{arctg} z+A\,,\quad z\le 0\,, \tag{12}$$

где A — произвольная постоянная.

Найдем связь между постоянной A из формулы (12) и постоянной C из формулы (8), осуществив «склейку» по непрерывности функции $g(\eta)$ в нуле:

$$g(0+0)=g(0-0)\,,$$

$$0+C=0+A\,.$$

Отсюда следует, что

$$A=C\,.$$

Подставляя найденное значение A в формулу (12), получаем

$$g(z)=\operatorname{arctg} z+C\,,\quad z\le 0\,. \tag{13}$$

Из (9) и (13) следует, что решение задачи в области $\{(x,t): x+t\ge 0, x-3t\le 0\}$ имеет вид

$$u(x,t)=\operatorname{ch}(x+t)+\operatorname{arctg}(x-3t)\,. \tag{14}$$

Из (10) и (14) следует, что решением задачи (1), (2), (3) является функция

$$u(x,t)=\operatorname{ch}(x+t)+\begin{cases} x-3t, x-3t\ge 0;\\ \operatorname{arctg}(x-3t), x-3t\le 0.\end{cases} \qquad \blacktriangle$$

§ 3. МЕТОД ФУРЬЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ

Обозначим через $Q_T = \left\{ x = (x_1, \ldots x_n) \in \Omega,\ 0 < t < T \right\}$ цилиндр в $\mathbb{R}^{n+1}$, где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, граница которой $\partial\Omega \in C^2$, а $T > 0$.

Функция $u(x, t)$, $(x, t) \in Q_T$ называется (классическим) *решением первой смешанной задачи для волнового уравнения*:

$$\frac{1}{a^2} u_{tt} - \Delta u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T; \tag{I}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ x \in \overline{\Omega}, \tag{II}$$

$$u_t\big|_{t=0} = \psi(x),\ x \in \overline{\Omega}, \tag{III}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = \chi(x, t),\ x \in \partial\Omega, \quad 0 < t < T, \tag{IV}$$

если $u(x,t) \in C^2(Q_T) \cap C^1(\overline{Q}_T)$ и удовлетворяет условиям (I), (II), (III), (IV).

Часто вместо граничного условия (IV) рассматривается граничное условие вида

$$\left. \left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} + \sigma(x) u \right) \right|_{\partial\Omega} = \chi(x, t),\ x \in \partial\Omega,\ 0 < t < T, \tag{V}$$

в котором $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней по отношению к области Ω нормали к поверхности $\partial\Omega$ в $\mathbb{R}^n$, а заданная на $\partial\Omega$ функция $\sigma(x)$, $x \in \partial\Omega$, непрерывна и неотрицательна, ($\sigma(x) \in C(\partial\Omega)$, $\sigma(x) \geq 0,\ x \in \partial\Omega$); условие неотрицательности коэффициента $\sigma(x)$ есть физическое условие упругого закрепления границы. В случае, когда $\sigma(x) \equiv 0,\ x \in \partial\Omega$, задача (I), (II), (III), (V) называется *второй*, а в случае, когда $\sigma(x) \not\equiv 0,\ x \in \partial\Omega$, — *третьей смешанной задачей для уравнения* (I).

Если граница области Ω состоит из нескольких гладких кусков, то на каждом из этих кусков может задаваться одно из условий: либо типа (IV), либо типа (V).

Аналогичные смешанные задачи рассматриваются и для уравнения теплопроводности.

Функция $u(x, t) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ называется решением *первой смешанной задачи для уравнения теплопроводности*:

$$\frac{1}{a^2}u_t - \Delta u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T\,; \tag{VI}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ x \in \bar{\Omega}\,, \tag{VII}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = \chi(x,t),\ x \in \partial\Omega, \quad 0 < t < T\,, \tag{VIII}$$

если она удовлетворяет условиям (VI), (VII), (VIII).

Функция $u(x,t) \in C^{2,1}_{x,t}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$, удовлетворяющая условиям (VI), (VII), (V), называется *решением второй* (при $\sigma(x) \equiv 0,\ x \in \partial\Omega$) или *третьей* (если $\sigma(x) \not\equiv 0,\ x \in \partial\Omega$) *смешанной задачи для уравнения* (VI).

Для каждой из сформулированных смешанных задач как в гиперболическом, так и в параболическом случаях имеет место теорема единственности, т.е. каждая из этих задач не может иметь более одного решения.

При достаточной гладкости заданных функций $\big(\varphi(x),\ \psi(x),\ \chi(x,t),$ $f(x,t),\ \sigma(x)\big)$ и выполнении условий их согласования, а также гладкости границы области Ω решения каждой из перечисленных смешанных задач существуют.

Проиллюстрируем способ решения смешанных задач на примере волнового уравнения. В случае, когда граничное условие рассматриваемой задачи однородное (т.е. в формулах (IV) или (V) функция $\chi(x,t) \equiv 0$), для решения задачи можно применить метод Фурье, суть которого заключается в следующем.

Прежде всего следует изучить соответствующую спектральную задачу, которая в случае одного пространственного переменного $(n = 1)$ часто называется задачей Штурма — Лиувилля.

Для первой смешанной задачи (I), (II), (III), (IV) эта задача состоит в нахождении чисел λ (собственных значений), при которых краевая задача

$$\begin{cases} -\Delta \upsilon = \lambda \upsilon,\ x \in \Omega, \\ \upsilon\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{IX}$$

имеет нетривиальное (не равное тождественно нулевой функции) решение $\upsilon(x)$, определяемое как собственная функция, соответствующая собственному значению λ. Для случая смешанной задачи (I), (II), (III), (V) спектральная задача состоит в нахождении собственных чисел λ, то есть тех чисел λ, при которых краевая задача

$$\begin{cases} -\Delta \upsilon = \lambda \upsilon, & x \in \Omega, \\ \left(\dfrac{\partial \upsilon}{\partial \boldsymbol{n}} + \sigma(x)\upsilon\right)\Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{X}$$

имеет нетривиальное решение $\upsilon(x)$ — собственную функцию, соответствующую собственному значению λ.

Собственные функции $\upsilon(x)$ как в задаче (IX), так и в задаче (X), можно считать вещественнозначными.

Совокупность всех собственных значений задачи (IX) (или (X)) составляет спектр соответствующей задачи. Спектр каждой из задач (и (IX), и (X)) состоит из счетного числа вещественных неотрицательных чисел $0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_p \le \ldots, \quad \lambda_p \to \infty$ при $p \to \infty$, при этом собственное значение λ_k в этой последовательности встречается столько (конечное число) раз, сколько линейно независимых собственных функций отвечает этому собственному значению; это число есть размерность соответствующего собственного подпространства рассматриваемого оператора и называется кратностью собственного значения λ_k.

Соответствующая последовательности $\{\lambda_p\}$ последовательность собственных функций $\{\upsilon_p(x)\}$ образует ортогональный базис пространства $L_2(\Omega)$ (со скалярным произведением $(g, h)_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} g(x)\, h(x) dx$; все функции считаем вещественнозначными).

Эта же система собственных функций является ортогональным базисом в пространстве Соболева $H^1(\Omega)$ в случае задачи (X), а в случае задачи (IX) — в подпространстве $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ этого пространства, состоящего из всех функций пространства $H^1(\Omega)$, след которых на границе $\partial\Omega$ равен нулю. Напомним (см., например, [17], [18]), что скалярное произведение в $H^1(\Omega)$ определяется равенством

$$(g, h)_{H^1(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \left[(\nabla g, \nabla h) + gh\right] d\,x, \quad \left(\nabla g = \left(g_{x_1}, \ldots, g_{x_n}\right)\right).$$

Заметим, что самим С. Л. Соболевым пространства $H^1(\Omega)$ и $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ были обозначены через $W_2^1(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ соответственно.

Поскольку в рассматриваемых случаях все собственные значения вещественны и неотрицательны, то часто спектральный параметр задачи обозначают не через λ, а через λ^2; в этом случае собственными значениями задачи являются соответствующие значения λ^2.

Формальная схема метода Фурье следующая. Представим рядами Фурье по соответствующим (пронормированным в $L_2(\Omega)$) собственным функциям функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и функцию $f(x,t)$ при каждом $t\in[0, T]$ (считая их принадлежащими $L_2(\Omega)$ и соответственно $L_2(\Omega)$ при каждом $t\in[0, T]$):

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\upsilon_k(x);$$

$$\psi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k\upsilon_k(x);$$

$$f(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}f(t)_k\,\upsilon_k(x),$$

где $\varphi_k=(\varphi,\upsilon_k)_{L_2(\Omega)}$; $\psi_k=(\psi,\upsilon_k)_{L_2(\Omega)}$; $f_k(t)=\int\limits_{\Omega}f(x,t)\upsilon_k(x)dx,\ k=1,2,\ldots$

Решения задачи (I), (II), (III), (IV) или задачи (I), (II), (III), (V) (напомним, что условия (IV) или (V) считаются однородными) также ищем в виде ряда Фурье по этой системе:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\upsilon_k(x),$$

коэффициенты Фурье $T_k(t)$ в котором являются решениями задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{1}{a^2}T_k''(t)+\lambda_kT_k(t)=f_k(t),\quad t\in[0, T],$$

$$T_k(0)=\varphi_k;\ T_k'(0)=\psi_k,\quad k=1, 2,\ldots$$

Решение $u(x,t)$ задач (VI), (VII), (VIII) или (VI), (VII), (V) для уравнения теплопроводности при том же однородном $(\chi(x,t)\equiv 0)$ граничном условии ищется в том же виде, только коэффициенты $T_k(t),\quad k=1,\ 2,\ldots$, являются решениями задачи Коши:

$$\frac{1}{a^2}T_k'(t)+\lambda_kT_k(t)=f_k(t),\quad t\in[0,\ T];$$

$$T_k(0)=\varphi_k,\quad k=1, 2,\ldots$$

Случай, когда граничное условие (IV) или (V) для волнового уравнения или соответствующее граничное условие для уравнения теплопроводности не является однородным, сводится к рассматриваемому с помощью замены искомой функции $u(x,t)$ на функцию $\tilde{u}(x,t)=u(x,t)-g(x,t)$, где $g(x,t)$ — достаточно гладкая в $\bar{Q}_T$ функция, удовлетворяющая соответствующему неоднородному граничному условию.

В случае одного пространственного переменного ($n=1$ **)** приведенные выше утверждения выглядят следующим образом. Пусть $\Omega=(A,B)$ — конечный интервал оси Ox, а область $Q_T=\{(x,t):\ A<x<B,\ 0<t<T\}$ — прямоугольник высоты $T>0$ с основанием $\Omega=(A,B)$. Граница области Ω в этом случае состоит из двух точек: $x=A$ и $x=B$; в каждой из этих точек (на соответствующей стороне прямоугольника Q_T) задается одно из граничных условий типа (IV) или типа (V).

Типичная смешанная задача в гиперболическом случае выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{a^2}u_{tt}-u_{xx}=f(x,t),\quad (x,t)\in Q_T, \tag{XI}$$

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x),\quad A\le x\le B, \tag{XII}$$

$$u_t\big|_{t=0}=\psi(x),\quad x\le A\le B, \tag{XIII}$$

$$u\big|_{x=A}=\chi_A(t),\quad t\le 0\le T, \tag{XIV}$$

$$\left(u_x+\sigma_B u\right)\big|_{x=B}=\chi_B(t),\quad 0\le t\le T, \tag{XV}$$

где число $\sigma_B\ge 0$. Вместо условий (XIV) и (XV) могут быть, например, условия

$$\left(u_x-\sigma_A u\right)\big|_{x=A}=\chi_A(t),\quad 0\le t\le T, \tag{XIV’}$$

$$u\big|_{x=B}=\chi_B(t),\quad 0\le t\le T, \tag{XV’}$$

где число $\sigma_A\ge 0$.

Аналогично обстоит дело и со смешанными задачами для одномерного уравнения теплопроводности.

Спектральную задачу при $n>1$ рассмотрим только в двумерном случае $(n=2)$, причем область Ω будем считать либо квадратом (прямоугольником), либо кругом.

В обоих случаях воспользуемся методом разделения переменных.

Рассмотрим сначала случай квадрата (прямоугольника) в $\mathbb{R}^2$.

Пусть, например, $\Omega=\{(x, y):\ 0<x<1,\ 0<y<1\}$.

Решение $u(x, y)$ задачи

$$-\Delta u=\lambda u\ ,\quad (x, y)\in\Omega=\{0<x<1,\ 0<y<1\}\ .$$
$$u\big|_{x=0}=(u_x+\sigma u)\big|_{x=1}=0,\quad 0\le y\le 1, \qquad \text{(XVI)}$$
$$u_y\big|_{y=0}=u\big|_{y=1}=0,\quad 0\le x\le 1\ ,$$

где постоянная $\sigma\ge 0$ (мы взяли, например, такое распределение граничных условий на сторонах квадрата), будем искать в виде произведения $X(x)\cdot Y(y)$. Для функций $X(x)$ и $Y(y)$ получаем одномерные спектральные задачи :

$$X''=-\alpha^2 X,\quad 0\le x\le 1,\quad X(0)=X'(1)+\sigma X(1)=0\ , \qquad \text{(XVI”)}$$

$$Y''=-\beta^2 Y,\quad 0\le y\le 1,\quad Y'(0)=Y(1)=0\ , \qquad \text{(XVI”)}$$

где $\lambda=\alpha^2+\beta^2$. Пусть последовательности $\alpha_1^2,\alpha_2^2,\dots,\alpha_n^2,\dots$ и $\beta_1^2,\beta_2^2,\dots,\beta_n^2,\dots$ составляют спектры задач (XVI’) и (XVI’’), а ортогональные в $L_2(0,1)$ системы функций

$$X_1(x),\quad \dots,\quad X_n(x),\quad \dots,\ Y_1(y),\quad \dots,\quad Y_n(y),\quad \dots$$

соответствующие системы собственных функций.

Функции $u_{nk}(x, y)=X_n(x)Y_k(y),\ 0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 1,\quad n, k=1, 2,\dots,$ образуют полную ортогональную в $L_2(0<x<1, 0<y<1)$ систему собственных функций задачи (XVI), отвечающих соответствующей системе собственных функций $\lambda_{nk}=\alpha_n^2+\beta_k^2,\quad n, k=1, 2,\dots$

В случае, когда Ω есть круг O_R^0 радиуса R с центром в начале координат, задача (IX) (ее удобно переписать в полярных координатах: $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$) имеет вид

$$\begin{cases}\upsilon_{rr}+\dfrac{1}{r}\upsilon_r+\dfrac{1}{r^2}\upsilon_{\varphi\varphi}=-\lambda\upsilon,\quad r<R,\quad 0\le\varphi\le 2\pi,\\ \upsilon\big|_{r=R}=0.\end{cases} \qquad \text{(XVII)}$$

Считая, что $\upsilon(r,\varphi)=Z(r)\cdot\Phi(\varphi)$, после разделения переменных для функций $Z(r)$ и $\Phi(\varphi)$ получим задачи

$$\Phi''(\varphi)+\mu^2\Phi(\varphi)=0,\quad \Phi(0)=\Phi(2\pi),\quad \Phi'(0)=\Phi'(2\pi)\ ; \qquad \text{(XVIII)}$$

$$r^2 Z''(r)+rZ'(r)+(\lambda r^2-\mu^2)Z(r)=0,\quad Z(R)=0\ , \qquad \text{(XIX)}$$

в которых μ — постоянная. Из (XVIII) следует, что

$$\mu = \mu_m = m, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\Phi(\varphi) = \Phi_m(\varphi) = A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi \quad \text{при } m = 1, 2, \ldots,$$

$$\Phi(\varphi) = \Phi_0(\varphi) = A_0 \text{ при } m = 0,$$

где A_m, $m = 0, 1, 2, \ldots$, и B_m, $m = 1, 2, \ldots$, — произвольные постоянные.

Общее решение уравнения (XIX) при $\mu = \mu_m = m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, имеет вид

$$Z_m(r) = C_m J_m\left(\sqrt{\lambda} r\right) + D_m N_m\left(\sqrt{\lambda} r\right), \tag{XX}$$

где C_m и D_m, $m = 0, 1, 2, \ldots$, - произвольные постоянные, а $J_m(\xi)$ и $N_m(\xi)$ — цилиндрические функции Бесселя и Неймана (см. $[4]$). В интересующем нас случае, когда $r \in [0, R]$,

$$Z_m(r) = C_m J_m\left(\sqrt{\lambda} r\right), \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

поскольку $\left|N_m\left(\sqrt{\lambda} r\right)\right| \to \infty$ при $r \to 0$.

Если учесть граничное условие в (XIX), то

$$Z_m(r) = Z_{m,k}(r) = C_{m,k} J_m\left(\frac{\mu_k^{(m)}}{R} r\right), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где $\mu_k^{(m)}$ — k-й положительный нуль функции $J_m(\xi)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$

Таким образом, функция $A_0 \cdot J_0\left(\dfrac{\mu_k^{(0)}}{R} r\right)$ есть нетривиальное решение задачи (XVII) при $\lambda = \lambda_k^{(0)} = \left(\dfrac{\mu_k^{(0)}}{R}\right)^2$ для всех k, $k = 1, 2, \ldots$,

а функции $\left(A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi\right) \cdot J_m\left(\dfrac{\mu_k^{(m)}}{R} r\right)$ при любых постоянных A_m и B_m являются решениями задачи (XVII) при

$$\lambda = \lambda_k^{(m)} = \left(\frac{\mu_k^{(m)}}{R}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Весь спектр задачи (XVIII) состоит из собственных значений

$$\lambda = \lambda_k^{(m)} = \left(\frac{\mu_k^{(m)}}{R} \right)^2, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{XXI}$$

Каждое собственное значение $\lambda_k^{(0)}, k = 1, 2, \ldots,$ однократное, а соответствующая ему собственная функция есть

$$J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{R} r \right), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{XXII}$$

Каждое собственное значение $\lambda_k^{(m)}, \quad k = 1, 2, \ldots$, при $m \geq 1$ двукратно, соответствующие ему линейно независимые собственные функции есть

$$J_m\left(\frac{\mu_k^{(m)}}{R} r \right) \cos m\varphi \ \text{ и } \ J_m\left(\frac{\mu_k^{(m)}}{R} r \right) \sin m\varphi. \tag{XXII'}$$

Система функций (XXII) и (XXII') образует ортогональный базис в гильбертовом пространстве $L_2\left(Q_R^0\right)$. Это означает, что для любой функции $\hat{f}(x, y) = \hat{f}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = f(r, \varphi) \in L_2\left(Q_R^0\right)$ имеет место сходящееся в $L_2\left(Q_R^0\right)$ разложение в ряд Фурье:

$$f(x, y) = f(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{0k} J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{R} r \right) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_{mk} \cos m\varphi + B_{mk} \sin m\varphi \right) J_m\left(\frac{\mu_k^{(m)}}{R} r \right), \tag{XXIII}$$

в котором коэффициенты Фурье:

$$A_{0k} = \frac{\int_0^R r\,dr \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{R} r \right) d\varphi}{2\pi \int_0^R r \left(J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{R} r \right) \right)^2 dr}, \quad k \geq 1,$$

$$A_{mk} = \frac{\int_0^R r\,dr \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) J_m\left(\frac{\mu_k^{(m)}}{R} r \right) \cos m\varphi\, d\varphi}{\pi \int_0^R r \left(J_m\left(\frac{\mu_k^{(m)}}{R} r \right) \right)^2 dr}, \quad m \geq 1, \quad k \geq 1,$$

$$B_{mk}=\frac{\int\limits_0^R r\,dr\int\limits_0^{2\pi} f(r,\varphi)J_m\left(\frac{\mu_k^{(m)}}{R}r\right)\sin m\varphi d\varphi}{\pi\int\limits_0^R r\left(J_m\left(\frac{\mu_k^{(m)}}{R}r\right)\right)^2 dr},\quad m\ge 1,\quad k\ge 1.$$

(Напомним, что скалярное произведение в $L_2\left(Q_R^0\right)$ имеет вид

$(f,q)_{L_2\left(Q_R^0\right)}=\iint\limits_{Q_R^0} f(x,y)q(x,y)dx\,dy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R f(r,\varphi)\,q(r,\varphi)r\,dr$.)

При каждом m, $m=0,1,2,\dots$, система функций $J_m\left(\frac{\mu_k^{(m)}}{R}r\right)$, $k=1,2,\dots$, образует ортогональный базис в гильбертовом пространстве $\tilde{L}_2(0,R)$, скалярное произведение в котором определяется формулой $(f,q)_{\tilde{L}_2(0,R)}=\int\limits_0^R r\,f(r)\,q(r)\,dr$.

Это означает, что для любой функции $f(r)\in L_2(0,R)$ при любом целом $m\ge 0$ имеет место сходящееся в $\tilde{L}_2(0,R)$ разложение в ряд Фурье :

$$f(r)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k^{(m)}J_m\left(\frac{\mu_k^{(m)}}{R}r\right), \qquad \text{(XXIV)}$$

коэффициенты Фурье в котором

$$C_k^{(m)}=\frac{\int\limits_0^R r\,f(r)J_m\left(\frac{\mu_k^{(m)}}{R}r\right)dr}{\int\limits_0^R r\left(J_m\left(\frac{\mu_k^{(m)}}{R}r\right)\right)^2 dr},\quad k=1,2,\dots$$

Замечание. При решении задач, связанных с функциями Бесселя, используется равенство

$$\Delta\left(\left(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi\right)\cdot J_m\left(\frac{\mu_k^{(m)}}{R}r\right)\right)=$$

$$=-\left(\frac{\mu_k^{(m)}}{R}\right)^2\cdot\left(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi\right)\cdot J_m\left(\frac{\mu_k^{(m)}}{R}r\right),\ k,m=1,2,\dots \qquad \text{(XXV)}$$

3.1. Применение метода Фурье для решения смешанных задач для волнового уравнения и уравнения теплопроводности на отрезке

В качестве **ПРИМЕРА** одномерной спектральной задачи рассмотрим следующую задачу:

$$-u''(x) = \lambda^2 u(x), \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$u'(0) - u(0) = 0, \tag{2}$$

$$u(1) = 0. \tag{3}$$

Если $\lambda = 0$, то $u(x) = C_1 + C_2 x$. При выполнении условий (2) и (3) получаем

$$\begin{cases} C_2 - C_1 = 0, \\ C_1 + C_2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = C_2 = 0, \quad u(x) \equiv 0$, т.е. $\lambda^2 = 0$ не является собственным значением задачи.

Пусть $\lambda \neq 0$. Тогда любое решение уравнения (1) определяется формулой

$$u(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

Отсюда

$$u'(x) = -\lambda C_1 \sin \lambda x + \lambda C_2 \cos \lambda x.$$

Используя условия (2) и (3), получаем

$$\begin{cases} \lambda C_2 - C_1 = 0, \\ C_1 \cos \lambda + C_2 \sin \lambda = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \lambda C_2 \\ \lambda C_2 \cos \lambda + C_2 \sin \lambda = 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \lambda C_2, \\ (\lambda \cos \lambda + \sin \lambda) C_2 = 0. \end{cases}$$

Это означает, что λ^2 является собственным значением задачи тогда и только тогда, когда λ является ненулевым (и положительным) корнем уравнения

$$\operatorname{tg} \lambda = -\lambda, \tag{4}$$

т.е. числа λ_k^2, $k = 1, 2, \ldots$, и только эти числа являются собственными значениями задачи. Здесь λ_k — k-й положительный корень уравнения (4).

Соответствующие собственные функции при этом имеют вид
$$u_k\left(x\right)=C_2\lambda_k\cos\lambda_k x+C_2\sin\lambda_k x=$$
$$=C_2\left(\lambda_k\cos\lambda_k x+\sin\lambda_k x\right),\ C_2\neq 0,\ \ k=1,2,...$$
или
$$u_k\left(x\right)=\lambda_k\cos\lambda_k x+\sin\lambda_k x,\ \ k=1,2,...$$
(здесь воспользовались соотношением $C_1=\lambda C_2$).

Пример 1. Решить смешанную задачу:
$$u_t=\frac{1}{36}u_{xx}+17\cos 4t\sin 6x,\quad t>0,\quad 0<x<\pi; \tag{1}$$
$$u\big|_{t=0}=6\sin 24x-4\pi+2x,\quad 0\leq x\leq\pi; \tag{2}$$
$$u\big|_{x=0}=-4\pi,\quad t\geq 0; \tag{3}$$
$$u\big|_{x=\pi}=-2\pi.\quad t\geq 0. \tag{4}$$

Δ 1. Если условия (3), (4) не являются однородными, то найдем какую-нибудь функцию $q\left(x,t\right)$, удовлетворяющую условиям (3) и (4).

Можно, например, попробовать искать такую функцию в виде многочлена по x:
$$q\left(x,t\right)=ax+b,$$
$$q\left(x,t\right)\big|_{x=0}=b=-4\pi,$$
$$q\left(x,t\right)\big|_{x=\pi}=a\pi+b=-2\pi.$$

Отсюда получаем, что $b=-4\pi,\quad a=\dfrac{1}{\pi}\left(-2\pi+4\pi\right)=2.$

Таким образом,
$$q\left(x,t\right)=2x-4\pi.$$

2. Рассмотрим новую искомую функцию $\upsilon\left(x,t\right)$ такую, что
$$\upsilon\left(x,t\right)=u\left(x,t\right)-q\left(x,t\right),$$
$$\upsilon\left(x,t\right)=u\left(x,t\right)-\left(2x-4\pi\right), \tag{5}$$
и запишем задачу (1), (2), (3), (4) для функции $\upsilon\left(x,t\right)$: так как
$$\upsilon_t=u_t,\quad \upsilon_{xx}=u_{xx},$$
$$\upsilon\big|_{t=0}=u\big|_{t=0}-\left(2x-4\pi\right)\big|_{t=0}=u\big|_{t=0}-\left(2x-4\pi\right),$$

то получим следующую задачу:

$$\upsilon_t = \frac{1}{36}\upsilon_{xx} + 17\cos 4t \sin 6x, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi \; ; \tag{6}$$

$$\upsilon\big|_{t=0} = 6\sin 24\, x, \quad 0 \le x \le \pi \; ; \tag{7}$$

$$\upsilon\big|_{x=0} = 0, \quad t \ge 0 \; ; \tag{8}$$

$$\upsilon\big|_{x=\pi} = 0, \quad t \ge 0 \, . \tag{9}$$

Решение задачи (6), (7), (8), (9) будем искать в виде

$$\upsilon(x,t) = \sum_k T_k(t)\upsilon_k(x),$$

где $\upsilon_k(x)$ — собственные функции следующий задачи Штурма — Лиувилля:

$$\begin{cases} \upsilon''(x) = -\lambda^2\upsilon(x), \quad 0 < x < \pi; \\ \upsilon(0) = 0; \\ \upsilon(\pi) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

3. Решим задачу (10).

Пусть $\lambda = 0$. Тогда уравнение в (10) примет вид: $\upsilon''(x) = 0.$

Следовательно, $\upsilon(x) = C_1 x + C_2$, а из граничных условий в (10) имеем:

$$\upsilon(0) = C_2 = 0, \quad \upsilon(\pi) = C_1\pi + C_2 = 0 \, .$$

Отсюда $C_1 = 0,\ C_2 = 0$ и $\upsilon(x) \equiv 0$. Следовательно, $\lambda^2 = 0$ не является собственным числом задачи (10). Пусть $\lambda \ne 0$. Тогда уравнение в (10) примет вид: $\upsilon''(x) + \lambda^2\upsilon(x) = 0$.

Следовательно, $\upsilon(x) = C_1 \cos\lambda x + C_2 \sin\lambda x$.

Из условия $\upsilon(0) = 0$ следует, что $\upsilon(0) = C_1 = 0$.

Поэтому $\upsilon(x) = C_2 \sin\lambda x, \quad C_2 \in R, \quad C_2 \ne 0$.

Возьмем, например, $C_2 = 1$, то есть $\upsilon(x) = \sin\lambda x$.

Из условия $\upsilon(\pi) = 0$ получаем, что $\upsilon(\pi) = \sin\lambda\pi = 0$.

Отсюда:

$$\lambda_k\pi = \pi k, \quad k \in Z, \quad k \ne 0 \, ,$$

$$\lambda_k = k, \quad k \in Z, \quad k \ne 0 \, ,$$

$$\upsilon_k(x) = \sin k x, \quad k \in Z, \quad k \ne 0 \, .$$

Оставляя среди найденной системы функций только линейно независимые, получаем, что рассматриваемый в нашем случае спектр задачи (10) и соответствующие собственные функции задаются равенствами

$$\lambda_k^2 = k^2, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

$$\upsilon_k(x) = \sin kx, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{12}$$

4. Таким образом, решение задачи (6), (7), (8), (9) представляется в виде

$$\upsilon(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\upsilon_k(x), \tag{13}$$

где функции $\upsilon_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, определены в (12), а функции $T_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, найдем, подставляя в уравнение (6) и условие (7) функцию $\upsilon(x,t)$, определяемую рядом (13).

Для этого представим правые части уравнения (6) и условия (7) рядами Фурье по системе (12).

Получим $\sin 6x = \upsilon_6(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \upsilon_k(x)$,

где

$$a_k = \begin{cases} 1, & k = 6; \\ 0, & k = 1, 2, \ldots, \quad k \neq 6, \end{cases} \tag{14}$$

$$17\cos 4t \sin 6x = 17\cos 4t \sum_{k=1}^{\infty} a_k \upsilon_k(x), \tag{15}$$

$$6\sin 24x = 6\upsilon_{24}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \upsilon_k(x), \tag{16}$$

где

$$b_k = \begin{cases} 6, & k = 24; \\ 0, & k = 1, 2, \ldots, \quad k \neq 24. \end{cases} \tag{17}$$

5. Заменяя в уравнении (6) и условии (7) функцию $\upsilon(x,t)$ рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k(t)\upsilon_k(x)$ согласно (13), функцию $\upsilon_t(x,t)$ рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} T'_k(t)\upsilon_k(x)$, функцию $\upsilon_{xx}(x,t)$ рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k(t)\upsilon''_k(x) = -\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 T_k(t)\upsilon_k(x)$, так как $\upsilon_k''(x) = -\lambda_k^2 \upsilon_k(x)$, а также используя разложения в ряды Фурье (15) и (16), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} T'_k(t)\upsilon_k(x) = -\frac{1}{36}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2 T_k(t)\upsilon_k(x) + 17\cos 4t\sum_{k=1}^{\infty} a_k\upsilon_k(x), \qquad (18)$$

$$\upsilon\big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0), \;\; \upsilon_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\upsilon_k(x). \qquad (19)$$

Из равенства (18) и (19), воспользовавшись (14) и (17), получаем следующие задачи Коши для функций $T_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$:

$$\begin{cases} T_6'(t) = -\dfrac{1}{36}\lambda_6^2 T_6(t) + 17\cos 4t, \\ T_6(0) = 0; \end{cases} \qquad (20)$$

$$\begin{cases} T_{24}'(t) = -\dfrac{1}{36}\lambda_{24}^2 T_{24}(t), \\ T_{24}(0) = 6; \end{cases} \qquad (21)$$

$$\begin{cases} T_k'(t) = -\dfrac{1}{36}\lambda_k^2 T_k(t), \\ T_k(0) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad k \neq 6, \quad k \neq 24. \end{cases} \qquad (22)$$

6. Решим задачу (20).

Так как $\lambda_6 = 6$, то уравнение примет вид: $T_6'(t) = -T_6(t) + 17\cos 4t$.

Решение данного уравнения представляет собой сумму общего решения однородного уравнения, которое имеет вид $C_6 e^{-t}$, и частного решения неоднородного уравнения, которое ищем в виде $A\cos 4t + B\sin 4t$.

Подставляем функцию $A\sin 4t + B\cos 4t$ в уравнение из задачи (20), получаем

$$-4A\sin 4t + 4B\cos 4t = -A\cos 4t - B\sin 4t + 17\cos 4t.$$

Отсюда получаем систему для A и B:

$$\begin{cases} -4A = -B; \\ 4B = -A + 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 4A; \\ 17A = 17, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 4; \\ A = 1. \end{cases}$$

Следовательно, общее решение уравнения из задачи (20) имеет вид

$$T_6(t) = C_6 e^{-t} + \cos 4t + 4\sin 4t, \quad C_6 \in R.$$

Используя начальное условие задачи (20), получаем

$$T_6(0) = C_6 + 1 = 0.$$

Отсюда $C_6 = -1$, и, следовательно,

$$T_6(t) = -e^{-t} + \cos 4t + 4\sin 4t. \qquad (23)$$

Решим задачу (21).

Так как $\lambda_{24} = 24$, то уравнение примет вид: $T_{24}'(t) = -16 \cdot T_{24}(t)$ и имеет решение

$$T_{24}(t) = C_{24} e^{-16t}, \quad C_{24} \in R .$$

Используя начальные условия задачи (21), получаем: $T_{24}(0) = C_{24} = 6$, и, следовательно,

$$T_{24}(t) = 6 e^{-16t} . \tag{24}$$

Решим задачу (22).

Решение уравнения в задаче (22) имеет вид

$$T_k(t) = C_k e^{-\left(\frac{\lambda_k}{6}\right)^2 t}, \quad C_k \in R .$$

Используя начальное условие задачи (22), получим

$$T_k(0) = C_k = 0 .$$

Следовательно,

$$T_k(0) \equiv 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad k \neq 6, \; k \neq 24 . \tag{25}$$

Таким образом, из (12), (13), (23), (24) и (25) следует, что функция

$$\upsilon(x, t) = T_6(t)\upsilon_6(x) + T_{24}(t)\upsilon_{24}(x) =$$
$$= \left(\cos 4t + 4\sin 4t - e^{-t}\right)\sin 6x + 6e^{-16t}\sin 24x$$

есть решение задачи (6), (7), 98), (9).

Отсюда, используя равенство (5), заключаем, что функция

$$u(x, t) = 2x - 4\pi + \upsilon(x, t) =$$
$$= 2x - 4\pi + \left(\cos 4t + 4\sin 4t - e^{-t}\right)\sin 6x + 6e^{-16t}\sin 24x$$

есть решение задачи (1), (2), (3), (4). ▲

Пример 2. Решить смешанную задачу

$$u_t = u_{xx} + 2x, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi ; \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad 0 \le x \le \pi ; \tag{2}$$

$$u_x\big|_{x=0} = t, \quad t \ge 0 ; \tag{3}$$

$$u_x\big|_{x=\pi} = t, \quad t \ge 0 . \tag{4}$$

Δ 1. Если условия (3), (4) не являются однородными, то найдем какую-нибудь функцию $g(x, t)$, удовлетворяющую условиям (3) и (4).

В данной задаче можно взять, например, $g(x, t) = x\, t$.

2. Рассмотрим новую искомую функцию $\upsilon(x,t)$ такую, что

$$\upsilon(x,t)=u(x,t)-g(x,t),$$

$$\upsilon(x,t)=u(x,t)-xt, \qquad (5)$$

и запишем задачу (1), (2), (3), (4) для функции $\upsilon(x,t)$: так как

$$\upsilon_t+x=u_t, \quad \upsilon_{xx}=u_{xx},$$

$$\upsilon\big|_{t=0}=u\big|_{t=0}-(x\,t)\big|_{t=0}=u\big|_{t=0},$$

то получим следующую задачу:

$$\upsilon_t=\upsilon_{xx}+x, \quad t>0, \quad 0<x<\pi; \qquad (6)$$

$$\upsilon\big|_{t=0}=0, \quad 0\le x\le\pi; \qquad (7)$$

$$\upsilon_x\big|_{x=0}=0; \quad t\ge 0; \qquad (8)$$

$$\upsilon_x\big|_{x=\pi}=0; \quad t\ge 0. \qquad (9)$$

Решение задачи (6), (7), (8), (9) будем искать в виде: $\upsilon(x,t)=\sum\limits_k T_k(t)\upsilon_k(x)$, где $\upsilon_k(x)$ — собственные функции следующей задачи Штурма — Лиувилля:

$$\begin{cases}\upsilon''(x)=-\lambda^2\upsilon(x), \quad 0<x<\pi;\\ \upsilon'(0)=0;\\ \upsilon'(\pi)=0.\end{cases} \qquad (10)$$

3. Решим задачу (10).

Пусть $\lambda=0$. Тогда уравнение в (10) примет вид: $\upsilon''(x)=0$, и, следовательно,

$$\upsilon(x)=C_1x+C_2.$$

Из граничных условий в (10) имеем: $\upsilon'(0)=C_1=0, \quad \upsilon'(\pi)=C_1=0$.

Следовательно, $\upsilon_0(x)=C_2, \quad C_2\in R, \quad C_2\ne 0$.

Возьмем, например, $C_2=1$ и получим, что функция $\upsilon_0(x)=1$ есть собственная функция оператора Штурмана — Лиувилля, отвечающая собственному числу $\lambda_0^2=0$.

Пусть $\lambda\ne 0$. Тогда уравнение в (10) примет вид: $\upsilon''(x)+\lambda^2\upsilon(x)=0$, и, следовательно,

$$\upsilon(x)=C_1\cos\lambda\,x+C_2\sin\lambda\,x,$$

$$\upsilon'(x) = -\lambda\, C_1 \sin\lambda\, x + \lambda\, C_2 \cos\lambda\, x\,.$$

Из условия $\upsilon(0)=0$ следует, что $\upsilon'(0)=\lambda C_2=0$, то есть $C_2=0$ и $\upsilon(x)=C_1\cos\lambda x,\ \ C_1\in R,\ \ C_1\neq 0$. Возьмем, например, $C_1=1$, то есть $\upsilon(x)=\cos\lambda x$.

Из условия $\upsilon'(\pi)=0$ получаем, что $\upsilon'(\pi)=-\lambda\sin(\pi\,\lambda)=0$.

Отсюда

$$\pi\lambda_k=\pi k,\quad k\in Z,\quad k\neq 0\,,$$

$$\lambda_k=k,\quad k\in Z,\quad k\neq 0\,,$$

$$\upsilon_k(x)=\cos k\,x,\quad k\in Z,\quad k\neq 0.$$

Оставляя среди найденной системы функций только линейно независимые, получаем, что рассматриваемый в нашем случае оператор Штурма — Лиувилля (задача (10)) имеет следующие системы собственных значений и собственных функций:

$$\lambda_0^2=0, \tag{11}$$

$$\upsilon_0(x)=1, \tag{12}$$

$$\lambda_k^2=k^2,\quad k=1,2,\ldots, \tag{13}$$

$$\upsilon_k(x)=\cos k\,x,\quad k=1,2,\ldots \tag{14}$$

4. Таким образом, решение задачи (6), (7), (8), (9) представляется в виде

$$\upsilon(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}T_k(t)\upsilon_k(x)\,, \tag{15}$$

где функции $\upsilon_k(x),\ \ k=0,1,2,\ldots,$ определены в (12) и (14), а функцию $T_k(t),\ k=0,1,2,\ldots,$ найдем, подставляя в уравнение (6) функцию $\upsilon(x,t)$, определяемую рядом (15), и используя условие (7).

Для этого представим правые части уравнения (6) и условия (7) рядами Фурье по системе (12), (14).

Получим

$$x=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\upsilon_k(x)\,, \tag{16}$$

$$a_k=\frac{(x,\upsilon_k(x))}{(\upsilon_k(x),\upsilon_k(x))}=\frac{\int_0^{\pi}x\cdot\upsilon_k(x)\,d\,x}{\int_0^{\pi}(\upsilon_k(x))^2\,d\,x},\quad k=0,1,2,\ldots, \tag{17}$$

где

$$0 = 0 \cdot \upsilon_0(x) + 0 \cdot \upsilon_1(x) + \ldots \tag{18}$$

Вычисляя интегралы, входящие в (17), получим при $k = 0$:

$$\int_0^\pi x\upsilon_0(x)\,dx = \int_0^\pi x \cdot 1 dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}, \quad \int_0^\pi \left(\upsilon_0(x)\right)^2 dx = \int_0^\pi 1 dx = \pi .$$

Следовательно,

$$a_0 = \frac{\pi}{2}. \tag{19}$$

Вычисляя интегралы, входящие в (17), получаем при $k = 1, 2, \ldots$:

$$\int_0^\pi x\upsilon_k(x)\,d\,x = \int_0^\pi x \cdot \cos k\,x d\,x = \frac{1}{k}\int_0^\pi x \cdot d(\sin k\,x) =$$

$$= \frac{1}{k}\left[\left(x \sin k\,x\right)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi 1 \cdot \sin k\,x\,d\,x\right] =$$

$$= \frac{1}{k^2}\cos kx\Big|_0^\pi = \frac{\cos(k\,\pi) - 1}{k^2} = \frac{(-1)^k - 1}{k^2},$$

$$\int_0^\pi \left(\upsilon_k(x)\right)^2 dx = \int_0^\pi (\cos kx)^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi (1 + \cos 2kx)\,dx = \left.\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2k}\sin 2kx\right)\right|_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, из (17) имеем

$$a_k(x) = \frac{2\left((-1)^k - 1\right)}{\pi k^2}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{20}$$

5. Заменяя в уравнении (6) и условии (7) функцию $\upsilon_k(x,t)$ рядом $\sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\upsilon_k(x)$ согласно (15), функцию $\upsilon_t(x,t)$ рядом $\sum_{k=0}^{\infty} T'_k(t)\upsilon_k(x)$, функцию $\upsilon_{xx}(x,t)$ рядом $\sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\upsilon''_k(x) = -\sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\lambda_k^2\upsilon_k(x)$, так как $\upsilon''_k(x) = -\lambda_k^2\upsilon_k(x)$, и используя разложения в ряды Фурье (16) и (18), получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} T'_k(t)\upsilon_k(x) = -\sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\lambda_k^2\upsilon_k(x) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k\upsilon_k(x), \tag{21}$$

$$\upsilon\big|_{t=0} = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(0)\upsilon_k(x) = 0 = 0\cdot\upsilon_0(x) + 0\cdot\upsilon_1(x) + \cdots. \qquad (22)$$

Из равенств (21) и (22) получаем следующие задачи Коши для функций $T_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$:

$$\begin{cases} T_0'(t) = a_0, \\ T_0(0) = 0, \end{cases} \qquad (23)$$

(так как $\lambda_0^2 = 0$),

$$\begin{cases} T_k'(t) = -\lambda_k^2 T_k(t) + a_k, \\ T_k(0) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots \end{cases} \qquad (24)$$

6. Решим задачу (23).

Согласно (19) $a_0 = \dfrac{\pi}{2}$. Поэтому решение уравнения из задачи (23) имеет вид

$$T_0(t) = C_0 + a_0 t = C_0 + \frac{\pi}{2}t, \quad C_0 \in R .$$

Из начального условия задачи (23) имеем: $T_0(0) = C_0 = 0$.

Следовательно,

$$T_0(t) = \frac{\pi}{2}t . \qquad (25)$$

Решим задачу (24).

Решение уравнения из задачи (24) представляет собой сумму общего решения однородного уравнения, которое имеет вид $C_k e^{-\lambda_k^2 t}$, и частного решения неоднородного уравнения, в качестве которого можно взять (как легко видеть) функцию $T_{k,\,\text{частн}}(t) \equiv \dfrac{a_k}{\lambda_k^2}$.

Таким образом, общее решение уравнения из задачи (24) имеет вид

$$T_k(t) = C_k e^{-\lambda_k^2 t} + \frac{a_k}{\lambda_k^2}, \quad C_k \in R,\ k = 1, 2, \ldots$$

Из начального условия задачи (24) имеем, что

$$T_k(0) = C_k + \frac{a_k}{\lambda_k^2} = 0 .$$

Поэтому $C_k = -\dfrac{a_k}{\lambda_k^2}$, и, следовательно,

$$T_k(t)=\frac{a_k}{\lambda_k^2}\left(1-e^{-\lambda_k^2 t}\right),\quad k=1,2,\dots \tag{26}$$

Таким образом, из (12), (14), (15), (25) и (26) следует, что функция

$$\upsilon(x,t)=T_0(t)\upsilon_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\upsilon_k(x)=\frac{\pi}{2}t+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{\lambda_k^2}\left(1-e^{-\lambda_k^2 t}\right)\cos kx\,,$$

где λ_k и a_k определены формулами (13) и (20) соответственно, есть решение задачи (6), (7), (8), (9).

Отсюда, используя равенство (5), заключаем, что функция

$$u(x,t)=xt+\upsilon(x,t)=xt+\frac{\pi}{2}t+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{\lambda_k^2}\left(1-e^{-\lambda_k^2 t}\right)\cos kx$$

есть решение задачи (1), (2), (3), (4). ▲

Пример 3. Решить смешанную задачу:

$$u_{tt}=u_{xx}+\left(2x-x^2\right)\cdot\cos t,\quad t>0,\quad 0<x<1\,, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0}=0,\quad u_t\big|_{t=0}=x+1,\quad 0\le x\le 1\,, \tag{2}$$

$$u\big|_{x=0}=t,\quad t\ge 0\,, \tag{3}$$

$$u_x\big|_{x=1}=t,\quad t\ge 0\,. \tag{4}$$

Δ 1. Если условия (3), (4) не являются однородными, то найдем какую-нибудь функцию $g(x,t)$, удовлетворяющую условиям (3) и (4).

Ищем ее, например, в виде

$$g(x,t)=ax+b,\quad a=a(t),\quad b=b(t)\,,$$

$$g(x,t)\big|_{x=0}=b=t\,,$$

$$g_x(x,t)\big|_{x=\pi}=a=t\,.$$

Следовательно, получаем $g(x,t)=xt+t$.

2. Рассмотрим новую искомую функцию $\upsilon(x,t)$ такую, что

$$\upsilon(x,t)=u(x,t)-g(x,t)\,,$$

$$\upsilon(x,t)=u(x,t)-t(x+1)\,, \tag{5}$$

и запишем задачу (1), (2), (3), (4) для функции υ. Так как

$$\upsilon_{tt}=u_{tt},\quad \upsilon_{xx}=u_{xx}\,,$$

$$\upsilon\big|_{t=0}=u\big|_{t=0}-\left(t(x+1)\right)\big|_{t=0}=u\big|_{t=0}\,,$$

$$\upsilon_t\Big|_{t=0}=u_t\Big|_{t=0}-\left(x+1\right)\Big|_{t=0}=u_t\Big|_{t=0}-\left(x+1\right),$$

то получаем следующую задачу:

$$\upsilon_{tt}=\upsilon_{xx}+\left(2x-x^2\right)\cos t,\quad t>0,\quad 0<x<1, \tag{6}$$

$$\upsilon\Big|_{t=0}=0,\quad \upsilon_t\Big|_{t=0}=0,\quad 0\le x\le 1, \tag{7}$$

$$\upsilon\Big|_{x=0}=0,\quad t\ge 0, \tag{8}$$

$$\upsilon_x\Big|_{x=1}=0,\quad t\ge 0. \tag{9}$$

Решение задачи (6), (7), (8), (9) будем искать в виде: $\upsilon\left(x,t\right)=\sum\limits_k T_k\left(t\right)\upsilon_k\left(x\right)$, где $\upsilon_k\left(x\right)$ — собственные функции следующей задачи Штурма — Лиувилля:

$$\begin{cases}\upsilon''\left(x\right)=-\lambda^2\cdot\upsilon\left(x\right),\quad 0<x<1;\\ \upsilon\left(0\right)=0;\\ \upsilon'\left(1\right)=0.\end{cases} \tag{10}$$

3. Решим задачу (10).

Пусть $\lambda=0$. Тогда уравнение в (10) примет вид $\upsilon''\left(x\right)=0$ и, следовательно,

$$\upsilon\left(x\right)=C_1x+C_2.$$

Из граничных условий в (10) имеем: $\upsilon\left(0\right)=C_2=0,\ \upsilon'\left(1\right)=C_1=0.$ Таким образом, $\upsilon\left(x\right)\equiv 0$, и, значит, $\lambda^2=0$ не являются собственным числом задачи (10). Пусть $\lambda\ne 0$. Тогда уравнение в (10) примет вид $\upsilon''\left(x\right)+\lambda^2\upsilon\left(x\right)=0$, и, следовательно,

$$\upsilon\left(x\right)=C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x.$$

Из условия $\upsilon\left(0\right)=0$ получаем, что, $\upsilon\left(0\right)=C_1=0$.

Поэтому $\upsilon\left(x\right)=C_2\sin\lambda x,\quad C_2\in R,\quad C_2\ne 0$.

Возьмем, например, $C_2=1$, то есть $\upsilon\left(x\right)=\sin\lambda x$.

Из условия $\upsilon'\left(1\right)=0$ получаем, что $\upsilon'\left(1\right)=\lambda\cos\lambda=0$.

Отсюда

$$\lambda_k=\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad k\in Z,$$

$$\upsilon_k\left(x\right)=\sin\lambda_k x,\quad k\in Z.$$

Оставляя среди найденной системы функций только линейно независимые, получаем, что рассматриваемый в нашей задаче оператор Штурма — Лиувилля имеет следующие системы собственных значений и собственных функций:

$$\lambda_k^2 = \left(\frac{\pi}{2}(1+2k)\right)^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{11}$$

$$\upsilon_k(x) = \sin \lambda_k x, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{12}$$

4. Таким образом, решение задачи (6), (7), (8), (9) представляется в виде

$$\upsilon(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) \upsilon_k(x), \tag{13}$$

где функции $\upsilon_k(x)$, $k = 0, 1, \dots$, определены в (12), а функции $T_k(t)$, $k = 0, 1, \dots$, найдем, подставляя в уравнение (6) функцию $\upsilon(x, t)$, определяемую рядом (13), и используя условие (7).

Для этого представим правые части уравнения (6) и условий (7) рядами Фурье по системе (12). Получим

$$2x - x^2 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \upsilon_k(x),$$

$$\left(2x - x^2\right)\cos t = \cos t \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k \upsilon_x(x), \tag{14}$$

где

$$a_k = \frac{\left(2x - x^2, \upsilon_k(x)\right)}{\left(\upsilon_k(x), \upsilon_k(x)\right)} = \frac{\int_0^1 \left(2x - x^2\right) \cdot \upsilon_k(x)\, dx}{\int_0^1 \left(\upsilon_k(x)\right)^2 dx}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{15}$$

$$0 = 0 \cdot \upsilon_0(x) + 0 \cdot \upsilon_1(x) + \dots \tag{16}$$

Вычисляя интегралы, входящие в (15), получаем

$$\int_0^1 \left(2x - x^2\right) \upsilon_k(x)\, dx = \int_0^1 \left(2x - x^2\right) \sin \lambda_k x dx =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_k} \int_0^1 \left(2x - x^2\right) d\left(\cos \lambda_k x\right) = -\frac{1}{\lambda_k}\left[\left(\left(2x - x^2\right)\cos \lambda_k x\right)\Big|_0^1 - \right.$$

$$\left. - \int_0^1 (2 - 2x) \cos\lambda_k x dx \right] dx = \frac{1}{\lambda_k} \int_0^1 (2 - 2x) \cos\lambda_k x dx =$$

$$= \frac{1}{\lambda_k^2} \int_0^1 (2-2x)\, d(\sin\lambda_k x) = \frac{1}{\lambda_k^2} \Big[(2-2x)\sin\lambda_k x \Big|_0^1 -$$

$$- \int_0^1 (-2)\sin\lambda_k x dx \Big] = \frac{1}{\lambda_k^2} \int_0^1 2\sin\lambda_k x\, dx = -\frac{2}{\lambda_k^3} \cos\lambda_k x \Big|_0^1 = \frac{2}{\lambda_k^3},$$

$$\int_0^1 (\upsilon_k(x))^2\, dx = \int_0^1 (\sin\lambda_k x)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-\cos 2\lambda_k x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2\lambda_k} \sin 2\lambda_k x \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, из (15) получаем

$$a_k = \frac{4}{\lambda_k^3}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{17}$$

5. Заменяя в уравнении (6) и условиях (7) функцию $\upsilon(x,t)$ (согласно (13)) рядом $\sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\upsilon_k(x)$, функцию $\upsilon_{tt}(x,t)$ рядом $\sum_{k=0}^{\infty} T_k''(t)\upsilon_k(x)$, функцию $\upsilon_{xx}(x,t)$ рядом $\sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\upsilon_k''(x) = -\sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\lambda_k^2\upsilon_k(x)$, ($\upsilon_k''(x) = -\lambda_k^2\upsilon_k$) и, используя разложения в ряды Фурье (14) и (16), получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} T_k''(t)\upsilon_k(x) = -\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^2 \cdot T_k(t)\upsilon_k(x) + \cos t \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k \upsilon_k(x), \tag{18}$$

$$\upsilon\big|_{t=0} = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(0)\upsilon_k(x) = 0, \tag{19}$$

$$\upsilon_t\big|_{t=0} = \sum_{k=0}^{\infty} T_k'(0)\upsilon_k(x) = 0\,. \tag{20}$$

Из соотношений (18), (19) и (20) получаем следующие задачи Коши для функций $T_k(t), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$:

$$\begin{cases} T_k''(t) = -\lambda_k^2 T_k(t) + a_k \cos t; \\ T_k(0) = 0; \\ T_k'(0) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{21}$$

6. Решим задачу (21).

Запишем уравнение из задачи (21) в виде

$$T_k''(t) + \lambda_k^2 T_k(t) = a_k \cos t\,. \tag{22}$$

Решение этого уравнения есть сумма общего решения однородного уравнения, которое имеет вид: $C_{1k}\cos\lambda_k t + C_{2k}\sin\lambda_k t$, и частного решения неоднородного уравнения, которое ищем в виде: $A\cos t + B\sin t$.

Подставляя эту функцию в уравнение (22), получаем

$$-A\cos t - B\sin t + \lambda_k^2\left(A\cos t + B\sin t\right) = a_k\cos t.$$

Отсюда $B = 0, \quad A = \dfrac{a_k}{\lambda_k^2 - 1}$.

Следовательно, решение уравнения (22) имеет вид

$$T_k\left(t\right) = C_{1k}\cos\lambda_k t + C_{2k}\sin\lambda_k t + \frac{a_k}{\lambda_k^2 - 1}\cdot\cos t,$$

$$C_{1k}\in R,\ C_{2k}\in R,\ k = 0, 1, \ldots$$

Используя начальные условия задачи (21), получаем

$$T_k\left(0\right) = C_{1k} + \frac{a_k}{\lambda_k^2 - 1} = 0,$$

$$T_k'\left(0\right) = C_{2k}\cdot\lambda_k = 0.$$

Отсюда $C_{1k} = -\dfrac{a_k}{\lambda_k^2 - 1}, \quad C_{2k} = 0$, и, следовательно,

$$T_k\left(t\right) = \frac{a_k}{\lambda_k^2 - 1}\cdot\left(\cos t - \cos\lambda_k t\right), \quad k = 0, 1, \ldots \tag{23}$$

Таким образом, из (12), (13) и (23) следует, что функция

$$\upsilon\left(x, t\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{\lambda_k^2 - 1}\left(\cos t - \cos\lambda_k t\right)\cdot\sin\lambda_k x,$$

где λ_k и a_k определены формулами (11) и (17) соответственно, есть решение задачи (6), (7), (8), (9).

Отсюда, используя равенство (5), заключаем, что функция

$$u\left(x, t\right) = t\left(x + 1\right)| + \upsilon\left(x, t\right) =$$

$$= t\left(x + 1\right) + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{\lambda_k^2 - 1}\cdot\left(\cos t - \cos\lambda_k t\right)\cdot\sin\lambda_k x$$

есть решение задачи (1), (2), (3), (4). ▲

Пример 4. Решить смешанную задачу:

$$u_{tt} = 4u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 3\pi; \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = \cos\frac{x}{2}, \quad u_t\big|_{t=0} = x - 3\pi, \quad 0 \le x \le 3\pi\ ; \tag{2}$$

$$u_x\big|_{x=0} = \sin t, \quad t \ge 0; \tag{3}$$

$$u\big|_{x=3\pi} = 0, \quad t \ge 0. \tag{4}$$

Δ 1. Если условия (3), (4) не являются однородными, то найдем какую-нибудь функцию $g(x, t)$, удовлетворяющую условиям (3) и (4).

Ищем ее, например, в виде

$$g(x, t) = ax + b, \quad a = a(t), \quad b = b(t),$$

$$g_x(x, t)\big|_{x=0} = a = \sin t\ ;$$

$$g(x, t)\big|_{x=3\pi} = a \cdot 3\pi + b = 0\ .$$

Отсюда получаем $a = \sin t, \quad b = -3\pi \sin t$ и $g(x, t) = \sin t \cdot (x - 3\pi)$.

2. Рассмотрим новую искомую функции $\upsilon(x, t)$ такую, что

$$\upsilon(x, t) = u(x, t) - g(x, t)\ ;$$

$$\upsilon(x,t) = u(x,t) - (x - 3\pi)\sin t\ , \tag{5}$$

и запишем задачу (1), (2), (3), (4) для функции $\upsilon(x, t)$: так как

$$u_{tt} = \upsilon_{tt} - (x - 3\pi)\sin t, \quad u_{xx} = \upsilon_{xx}\ ,$$

$$\upsilon\big|_{t=0} = u\big|_{t=0}\ , \quad \upsilon_t\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=0} - (x - 3\pi)\ ,$$

то получим следующую задачу:

$$\upsilon_{tt} = 4\upsilon_{xx} + (x - 3\pi)\sin t, \quad t > 0, \quad 0 < x < 3\pi\ ; \tag{6}$$

$$\upsilon\big|_{t=0} = \cos\frac{x}{2}, \quad \upsilon_t\big|_{t=0} = 0, \quad 0 \le x \le 3\pi\ ; \tag{7}$$

$$\upsilon_x\big|_{x=0} = 0, \quad t \ge 0\ ; \tag{8}$$

$$\upsilon\big|_{x=3\pi} = 0, \quad t \ge 0\ . \tag{9}$$

Решение задачи (6), (7), (8), (9) будем искать в виде $\upsilon(x, t) = \sum\limits_k T_k(t)\upsilon_k(x)$, где $\upsilon_k(x)$ — собственные функции следующей задачи Штурма — Лиувилля:

$$\begin{cases} \upsilon''(x) = -\lambda^2 \upsilon(x), \quad 0 < x < 3\pi; \\ \upsilon'(0) = 0; \\ \upsilon(3\pi) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

3. Решаем задачу (10).

Пусть $\lambda = 0$. Тогда уравнение в (10) примет вид: $\upsilon''(x) = 0$, и, следовательно,

$$\upsilon(x) = C_1 x + C_2 .$$

Из граничных условий в (10) имеем, что

$$\upsilon'(0) = C_1 = 0, \quad \upsilon(3\pi) = C_1 3\pi + C_2 = 0 .$$

Отсюда $C_1 = 0, \quad C_2 = 0$ и $\upsilon(x) \equiv 0$.

Таким образом, $\lambda^2 = 0$ не является собственным числом задачи (10).

Пусть $\lambda \neq 0$. Тогда уравнение в (10) примет вид: $\upsilon'' + \lambda^2 \upsilon(x) = 0$, и, следовательно,

$$\upsilon(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x .$$

Из условия $\upsilon'(0) = 0$ получаем, что $\upsilon'(0) = \lambda C_2 = 0$, то есть $C_2 = 0$.

Поэтому $\upsilon(x) = C_1 \cos \lambda x. \quad C_1 \in R, \quad C_1 \neq 0$.

Возьмем, например, $C_1 = 1$, то есть $\upsilon(x) = \cos \lambda x$.

Из условия $\upsilon(3\pi) = 0$ получаем, что $\upsilon(3\pi) = \cos(3\pi\lambda) = 0$. Отсюда

$$3\pi\lambda_k = \frac{\pi}{2}(1+2k), \quad k \in Z ,$$

$$\lambda_k = \frac{1}{6}(1+2k), \quad k \in Z ,$$

$$\upsilon_k(x) = \cos \lambda_k x, \quad k \in Z .$$

Оставляя среди найденной системы функций только линейно независимые, получаем, что рассматриваемый в нашей задаче оператор Штурма — Лиувилля имеет следующие системы собственных значений и собственных функций:

$$\lambda_k^2 = \left(\frac{1}{6}(1+2k)\right)^2, \quad k = 0,1,2,\dots, \tag{11}$$

$$\upsilon_k(x) = \cos \lambda_k x, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{12}$$

4. Таким образом, решение задачи (6), (7), (8) представляется в виде

$$\upsilon(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) \upsilon_k(x) ,(13)$$

где функции $\upsilon_k\left(x\right)$, $k=0,1,\ldots$, определены в (12), а функции $T_k\left(t\right)$, $k=0,1,\ldots$, найдем, подставляя в уравнение (6) функцию $\upsilon\left(x,t\right)$, определенную рядом (13), и используя условия (7).

Для этого правые части уравнения (6) и условий (7) представим рядами Фурье по системе (12). Получим

$$x-3\pi=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\upsilon_k\left(x\right),$$

$$\left(x-3\pi\right)\sin t=\sin t\cdot\sum_{k=0}^{\infty}a_k\upsilon_k\left(x\right), \tag{14}$$

где

$$a_k=\frac{\left(x-3\pi,\upsilon_k\left(x\right)\right)}{\left(\upsilon_k\left(x\right),\ \upsilon_k\left(x\right)\right)}=\frac{\int\limits_0^{3\pi}\left(x-3\pi\right)\upsilon_k\left(x\right)dx}{\int\limits_0^{3\pi}\left(\upsilon_k\left(x\right)\right)^2dx},\quad k=0,1,2,\ldots, \tag{15}$$

$$\cos\frac{x}{2}=\upsilon_1\left(x\right)=0\cdot\upsilon_0\left(x\right)+1\cdot\upsilon_1\left(x\right)+0\cdot\upsilon_2\left(x\right)+\ldots, \tag{16}$$

$0=0\cdot\upsilon_0\left(x\right)+0\cdot\upsilon_1\left(x\right)+\ldots,$(17)

Вычисляя интегралы, входящие в (15), получаем

$$\int\limits_0^{3\pi}\left(x-3\pi\right)\upsilon_k\left(x\right)dx=\int\limits_0^{3\pi}\left(x-3\pi\right)\cos\lambda_k xdx=\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_0^{3\pi}\left(x-3\pi\right)d\left(\sin\lambda_k x\right)=$$

$$=\frac{1}{\lambda_k}\left[\left(\left(x-3\pi\right)\sin\lambda_k x\right)\Big|_0^{3\pi}-\int\limits_0^{3\pi}1\cdot\sin\lambda_k xdx\right]=$$

$$=-\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_0^{3\pi}\sin\lambda_k xdx=\frac{1}{\lambda_k^2}\left(\cos\lambda_k x\right)\Big|_0^{3\pi}=-\frac{1}{\lambda_k^2}.$$

$$\int\limits_0^{3\pi}\left(\upsilon_k\left(x\right)\right)dx^2=\int\limits_0^{3\pi}\left(\cos\lambda_k x\right)^2dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{3\pi}\left(1+\cos 2\lambda_k x\right)dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2\lambda_k}\sin 2\lambda_k x\right)\Bigg|_0^{3\pi}=\frac{3\pi}{2}.$$

Следовательно, из (15) получаем

$$a_k=-\frac{2}{3\pi\lambda_k^2},\quad k=0,1,2,\ldots \tag{18}$$

5. Заменяя в уравнении (6) и условиях (7) функцию $\upsilon(x,t)$ рядом $\sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\upsilon_k(x)$ согласно (13), функцию $\upsilon_{tt}(x,t)$ рядом $\sum_{k=0}^{\infty} T_k''(t)\upsilon_k(x)$, функцию $\upsilon_{xx}(x,t)$ рядом $\sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\upsilon_k''(x) = -\sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\lambda_k^2\upsilon_k(x)$, так как $\upsilon_k''(x) = -\lambda_k^2\upsilon_k(x)$, и используя разложения в ряды Фурье (14), (16) и (17), получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} T''(t)\upsilon_k(x) = -4\sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\lambda_k^2\upsilon_k(x) + \sin t \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k\upsilon_k(x), \tag{19}$$

$$\upsilon\big|_{t=0} = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(0)\upsilon_k(x) = 1\cdot\upsilon_1(x), \tag{20}$$

$$\upsilon_t\big|_{t=0} = \sum_{k=0}^{\infty} T_k'(0)\upsilon_k(x) = 0. \tag{21}$$

Из соотношений (19), (20) и (21) получаем следующие задачи Коши для функций $T_k(t),\quad k = 0, 1, \ldots$:

$$\begin{cases} T_k''(t) = -4\lambda_k^2 T_k(t) + a_k \sin t, \\ T_k(0) = 0, \\ T_k'(0) = 0, \quad k = 0, 2, \ldots, \quad k \neq 1. \end{cases} \tag{22}$$

$$\begin{cases} T_1''(t) = -4\lambda_1^2 T_1(t) + a_1 \sin t, \\ T_1(0) = 1, \\ T_1'(0) = 0. \end{cases} \tag{23}$$

6. Решим задачу (22).

Запишем уравнение из задачи (22) в виде

$$T_k''(t) + (2\lambda_k)^2 T_k(t) = a_k \sin t. \tag{24}$$

Решение этого уравнения есть сумма общего решения однородного уравнения, которое имеет вид

$$C_{1k}\cos 2\lambda_k t + C_{2k}\sin 2\lambda_k t,$$

и частного решения неоднородного уравнения, которое ищем виде

$$A\cos t + B\sin t.$$

Подставляя эту функцию в уравнение (24), получаем

$$-A\cos t - B\sin t + (2\lambda_k)^2(A\cos t + B\sin t) = a_k \sin t.$$

Отсюда $A=0, \quad B=\dfrac{a_k}{(2\lambda_k)^2-1}$.

Следовательно, решение уравнения (24) имеет вид

$$T_k(t)=C_{1k}\cos 2\lambda_k t+C_{2k}\sin 2\lambda_k t+\frac{a_k}{(2\lambda_k)^2-1}\sin t\ .$$

Используя начальные условия задачи (22), получаем

$$T_k(0)=C_{1k}=0.$$

$$T'(0)=C_{2k}\cdot 2\lambda_k+\frac{a_k}{(2\lambda_k)^2-1}=0.$$

Отсюда $C_{1k}=0, \quad C_{2k}=-\dfrac{1}{2\lambda_k}\cdot\dfrac{a_k}{(2\lambda_k)^2-1}$, и, следовательно,

$$T_k(t)=\frac{a_k}{(2\lambda_k)^2-1}\left(\sin t-\frac{1}{2\lambda_k}\sin 2\lambda_k t\right), \quad k=0,2,... \qquad (25)$$

Решим задачу (23).

Заметим, что $\lambda_1=\dfrac{1}{2}, \quad 4\lambda_1^2=1, \quad a_1=-\dfrac{8}{3\pi}$ (из (18)), поэтому уравнение из (23) примет вид

$$T_1''(t)+T_1(t)=-\frac{8}{3\pi}\sin t\ . \qquad (26)$$

Решение этого уравнение есть сумма общего решения однородного уравнения, которое имеет вид $C_{11}\cos t+C_{21}\sin t$, и частного решения неоднородного уравнения, которое ищем в виде

$$t\left(M\cos t+N\sin t\right), \qquad (27)$$

так как имеем случай резонанса.

Подставляя функцию (27) в уравнение (26), получаем

$$-t\left(M\cos t+N\sin t\right)+2\left(-M\sin t+N\cos t\right)+$$

$$+t\left(M\cos t+N\sin t\right)=-\frac{8}{3\pi}\sin t.$$

Отсюда имеем, что $M=\dfrac{4}{3\pi}, \quad N=0$.

Следовательно, решение уравнения (26) имеет вид

$$T_1(t)=C_{11}\cos t+C_{21}\sin t+\frac{4}{3\pi}t\cos t.$$

Используя начальные условия задачи (23), получим

$$T_1(0) = C_{11} = 1,$$

$$T_1'(0) = C_{21} + \frac{4}{3\pi} = 0.$$

Следовательно, $C_{11} = 1, \quad C_{21} = -\frac{4}{3\pi}$ и

$$T_1(t) = \cos t - \frac{4}{3\pi}\sin t + \frac{4}{3\pi} t\cos t. \tag{28}$$

Таким образом, из (12), (13), (25) и (28) следует, что функция

$$\upsilon(x,t) = T_1(t)\upsilon_1(x) + \sum_{k=0,\ k\neq 1}^{\infty} T_k(t)\upsilon_k(x) =$$

$$= \left(\cos t - \frac{4}{3\pi}\sin t + \frac{4}{3\pi}t\cos t\right)\cdot\cos\frac{x}{2} + \tag{29}$$

$$+\sum_{k=0,\ k\neq 1}^{\infty} \frac{a_k}{(2\lambda_k)^2 - 1}\cdot\left(\sin t - \frac{1}{2\lambda_k}\cdot\sin 2\lambda_k t\right)\cdot\cos\lambda_k x,$$

где λ_k и a_k определены формулами (11) и (18) соответственно, есть решение задачи (6), (7), (8), (9).

Отсюда на основании равенства (5) получаем, что функция

$$u(x,t) = \sin t\cdot(x - 3\pi) + \upsilon(x,t),$$

где функция $\upsilon(x,t)$ определена выше в (29), есть решение задачи (1), (2), (3), (4). ▲

Пример 5. Решить смешанную задачу:

$$u_t = u_{xx} + u - xt + 2\cos x, \quad t > 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}; \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}; \tag{2}$$

$$u_x\big|_{x=0} = t, \quad t \ge 0; \tag{3}$$

$$u\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}t, \quad t \ge 0. \tag{4}$$

Δ 1. Если условия (3), (4) не являются однородными, то найдем какую-нибудь функцию $g(x,t)$, удовлетворяющую условиям (3), (4).

Можно, например, пробовать искать такую функцию в виде многочлена по x.

В данной задаче можно взять $g(x,t) = xt$.

2. Рассмотрим новую искомую функцию $\upsilon(x,t)$ такую, что

$$\upsilon(x,t) = u(x,t) - g(x,t),$$

$$\upsilon(x,t) = u(x,t) - x\,t, \tag{5}$$

Запишем задачу (1), (2), (3), (4) для функции $\upsilon(x,t)$:

$$\upsilon_{tt} = \upsilon_{xx} + \upsilon + 2\cos x, \quad t > 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}; \tag{6}$$

$$\upsilon\big|_{t=0} = 0, \quad \upsilon_t\big|_{t=0} = \frac{\pi}{2} - x, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}; \tag{7}$$

$$\upsilon_x\big|_{x=0} = 0, \quad t \ge 0; \tag{8}$$

$$\upsilon\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0, \quad t \ge 0. \tag{9}$$

Решение задачи (6), (7), (8), (9) будем искать в виде

$$\upsilon(x,t) = \sum_k T_k(t)\upsilon_k(x),$$

где $\upsilon_k(x)$ — собственные функции следующей задачи Штурма-Лувилля:

$$\begin{cases} \upsilon''(x) = -\lambda^2 \upsilon(x), \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}; \\ \upsilon'(0) = 0; \\ \upsilon\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

3. Решим задачу (10).

Пусть $\lambda = 0$. Тогда уравнение в (10) примет вид $\upsilon''(x) = 0$, и, следовательно,

$$\upsilon(x) = C_1 x + C.$$

Из граничных условий в (10) имеем

$$\upsilon'(0) = C_1 = 0,$$

$$\upsilon\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_1 \cdot \frac{\pi}{2} + C_2 = 0.$$

Таким образом, $\upsilon(x)\equiv 0$, и, следовательно, $\lambda^2=0$ не является собственным числом задачи (10).

Пусть $\lambda\neq 0$. Тогда уравнение в (10) примет вид $\upsilon''(x)+\lambda^2\upsilon(x)=0$, и, следовательно,

$$\upsilon(x)=C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x,$$
$$\upsilon'(x)=-\lambda\, C_1\sin\lambda x+\lambda\, C_2\cos\lambda x.$$

Из условия $\upsilon'(0)=\lambda C_2=0$ получаем $C_2=0$, так как $\lambda\neq 0$.

Поэтому $\upsilon(x)=C_1\cos\lambda x,\quad C_1\in R,\quad C_1\neq 0$.

Возьмем, например, $C_1=1$, то есть $\upsilon(x)=\cos\lambda\, x$.

Из условия $\upsilon\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ получаем, что: $\upsilon\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\lambda\dfrac{\pi}{2}\right)=0$.

Отсюда

$$\frac{\pi}{2}\lambda_k=\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad k\in Z,$$
$$\lambda_k=1+2k,\quad k\in Z,$$
$$\upsilon_k(x)=\cos(\lambda_k x),\quad k\in Z.$$

Оставляя среди найденной системы функций только линейно независимые, получаем, что рассматриваемый в нашей задаче оператор Штурма — Лиувилля (задача (10)) имеет следующие системы собственных значений и собственных функций:

$$\lambda_k^2=(1+2k)^2,\quad k=0,1,2,\ldots, \tag{11}$$

$$\upsilon_k(x)=\cos(\lambda_k x),\quad k=0,1,2,\ldots \tag{12}$$

4. Таким образом, решение задачи (6), (7), (8), (9) представляется в виде

$$\upsilon(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}T_k(t)\upsilon_k(x), \tag{13}$$

где функции $\upsilon_k(x),\ k=0,1,2,\ldots,$ определены в (12), а функции $T_k(t),\quad k=0,1,2,\ldots$, найдем, подставляя в уравнение (6) функцию $\upsilon(x,t)$, определяемую (формально написанным) рядом (13), и используя условия (7).

Для этого представим правые части уравнения (6) и условий (7) рядами Фурье по системе (12). Получим

$$2\cos x=2\upsilon_0(x)=2\upsilon_0(x)+0\cdot\upsilon_1(x)+0\cdot\upsilon_2(x)+\ldots, \tag{14}$$

$$0=0\cdot v_0(x)+0\cdot v_1(x)+0\cdot v_2(x)+\ldots, \tag{15}$$

$$\frac{\pi}{2}-x=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\upsilon_k\left(x\right), \tag{16}$$

где

$$a_k=\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x,\quad \upsilon_k\left(x\right)\right)}{\left(\upsilon_k\left(x\right),\quad \upsilon_k\left(x\right)\right)}=\frac{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\upsilon_k\left(x\right)dx}{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\upsilon_k\left(x\right)\right)^2dx},\quad k=0,1,2,\ldots \tag{17}$$

Вычисляя интегралы, входящие в (17), получим

$$\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\upsilon_k\left(x\right)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos\lambda_k xdx=\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)d\left(\sin\lambda_k x\right)=$$

$$=\frac{1}{\lambda_k}\left[\left(\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin\lambda_k x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-1\right)\cdot\sin\lambda_k xdx\right]=$$

$$=\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\lambda_k x\,dx=-\frac{1}{\lambda_k^2}\cos\lambda_k x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\lambda_k^2}.$$

(так как $\lambda_k=1+2k$),

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\upsilon_k^2\left(x\right)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\lambda_k x\right)^2dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos2\lambda_k x\right)dx=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2\lambda_k}\sin\left(2\lambda_k x\right)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, из (17) имеем

$$a_k=\frac{4}{\pi\lambda_k^2},\quad k=0,1,2,\ldots \tag{18}$$

5. Заменяя в уравнении (6) функцию $\upsilon\left(x,t\right)$ рядом $\sum\limits_{k=0}^{\infty}T_k\left(t\right)\upsilon_k\left(x\right)$ согласно (13), функцию $\upsilon_{tt}\left(x,t\right)$ рядом $\sum\limits_{k=0}^{\infty}T_k''\left(t\right)\upsilon_k\left(x\right)$, функцию $\upsilon_{xx}\left(x,t\right)$,

рядом $\sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\upsilon_k''(x) = -\sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\lambda_k^2\upsilon_k(x)$, так как $\upsilon_k'' = -\lambda_k^2\upsilon_k(x)$, функцию $2\cos x$ рядом $2\upsilon_0 + 0\cdot\upsilon_1(x)+\dots$ (см. (14)), получаем

$$\begin{gathered}\sum_{k=0}^{\infty} T_k''(t)\upsilon_k(x) = -\sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\lambda_k^2\upsilon_k(x) + \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\upsilon_k(x) + \\ +2\upsilon_0(x) + 0\cdot\upsilon_1(x)+\cdots .\end{gathered} \tag{19}$$

Из условий (7), используя (15) и (16), получаем

$$\upsilon\big|_{t=0} = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(0)\upsilon_k(x) = 0 = 0\cdot\upsilon_0(x) + 0\cdot\upsilon_1(x)+\cdots, \tag{20}$$

$$\upsilon_t\big|_{t=0} = \sum_{k=0}^{\infty} T_k'(0)\upsilon_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\upsilon_k(x). \tag{21}$$

Из равенств (19), (20) и (21) получаем следующие задачи Коши для функций $T_k(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots$:

$$\begin{cases} T_k''(t) = \left(-\lambda_k^2 + 1\right)T_k(t), \\ T_k(0) = 0, \\ T_k'(0) = a_k, \text{ если } k = 1, 2, \dots; \end{cases} \tag{22}$$

$$\begin{cases} T_0''(t) = \left(-\lambda_0^2 + 1\right)T_0(t) + 2, \\ T_0(0) = 0, \\ T_0'(0) = a_0. \end{cases} \tag{23}$$

6. Решим задачу (22).

Перепишем уравнение (22) в виде

$$T_k''(t) + \left(\lambda_k^2 - 1\right)T_k(t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots \tag{24}$$

Так как $\lambda_k = 1 + 2k$, то $\lambda_k^2 - 1 = (1+2k)^2 - 1 = 4k^2 + 4k$.

Заметим, что $\lambda_k^2 - 1 = 4k^2 + 4k > 0$ при $k = 1, 2, \dots$, и, следовательно, решение уравнения (24) имеет вид

$$T_k(t) = C_{1k}\cos\left(\sqrt{4k^2+4k}\; t\right) + C_{2k}\sin\left(\sqrt{4k^2+4k}\; t\right),\ C_{1k} \in R, \quad C_{2k} \in R.$$

Используя начальные условия задачи (22), получаем

$$T_k(0) = C_{1k} = 0.$$

$$T'(0) = C_{2k}\cdot\sqrt{4k^2+4k} = a_k .$$

Отсюда $C_{1k}=0$, $C_{2k}=\dfrac{a_k}{\sqrt{4k^2+4k}}$, и, следовательно,

$$T_k(t)=\frac{a_k}{\sqrt{4k^2+4k}}\sin\left(\sqrt{4k^2+4k}\;t\right),\quad k=1,2,\ldots \tag{25}$$

Решим задачу (23).

Так как $-\lambda_0^2+1=0$, то уравнение в (23) имеет вид $T_0''(t)=2$.

Отсюда $T_0(t)=t^2+C_{10}\,t+C_{20},\quad C_{10}\in R,\quad C_{20}\in R$.

Используя начальные условия задачи (23), получаем

$T_0(0)=C_{20}=0$,

$T_0'(0)=C_{10}=a_0$.

Следовательно, $T_0(t)=t^2+a_0t$, или $T_0(t)=t^2+\dfrac{4}{\pi}t$, так как $a_0=\dfrac{4}{\pi}$ (из (18)).

Таким образом, из (12), (13), (25) и (26) следует, что функция

$$\upsilon(x,t)=\left(t^2+\frac{4}{\pi}t\right)\cos x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{\sqrt{4k^2+4k}}\sin\left(\sqrt{4k^2+4k}\;t\right)\cos\lambda_k x,$$

где λ_k и a_k определены формулами (11), (18) соответственно, есть решение задачи (6), (7), (8), (9).

Отсюда, используя равенство (5), заключаем, что функция

$$u(x,t)=xt+\upsilon(x,t)=$$

$$=xt+\left(t^2+\frac{4}{\pi}t\right)\cos x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{\sqrt{4k^2+4k}}\cdot\sin\left(\sqrt{4k^2+4k}\;t\right)\cos\lambda_k x$$

есть решение задачи (1), (2), (3), (4). ▲

Пример 6. Решить смешанную задачу:

$$7u_t=\frac{1}{4}u_{xx}+2u-2\left(x+\frac{t}{4}\right)+\frac{7}{4}+21\pi e^{-t}\sin 4x,\ t>0,\ 0<x<\frac{\pi}{4}; \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0}=x-7\cos 2x,\quad 0\le x\le\frac{\pi}{4}; \tag{2}$$

$$u_x\big|_{x=0}=1,\quad t\ge 0; \tag{3}$$

$$u\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{4}(\pi+t),\quad t\ge 0. \tag{4}$$

Δ 1. Если условия (3) и (4) не являются однородными, то найдем какую-нибудь функцию $g(x,t)$, удовлетворяющую условиям (3) и (4).

Ищем ее, например, в виде $g(x,t) = A(t)x + B(t)$.

Тогда из (3), (4) получаем

$$g_x\Big|_{x=0} = A(t) = 1,$$

$$g\Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = A(t)\frac{\pi}{4} + B(t) = \frac{1}{4}(\pi + t).$$

Следовательно, $A(t) \equiv 1$, $B(t) = \dfrac{t}{4}$ и $g(x,t) = x + \dfrac{t}{4}$.

2. Рассмотрим новую искомую функцию $\upsilon(x,t)$, такую, что

$$\upsilon(x,t) = u(x,t) - g(x,t),$$

$$\upsilon(x,t) = u(x,t) - x - \frac{t}{4}. \tag{5}$$

Запишем задачу (1), (2), (3), (4) для функции $\upsilon(x,t)$:

$$u = \upsilon + x + \frac{t}{4},$$

$$u_t = \upsilon_t + \frac{1}{4},$$

$$u_{xx} = \upsilon_{xx},$$

$$7\left(\upsilon_t + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\upsilon_{xx} + 2\left(\upsilon + x + \frac{t}{4}\right) - 2\left(x + \frac{t}{4}\right) + \frac{7}{4} + 21\pi e^{-t}\sin 4x,$$

или

$$7\upsilon_t = \frac{1}{4}\upsilon_{xx} + 2\upsilon + 21\pi e^{-t}\sin 4x,$$

$$\upsilon\Big|_{t=0} = u\Big|_{t=0} - \left(x + \frac{t}{4}\right)\Bigg|_{t=0} = -7\cos 2x.$$

Таким образом, для функции $\upsilon(x,t)$ получим следующую задачу:

$$7\upsilon_t = \frac{1}{4}\upsilon_{xx} + 2\upsilon + 21\pi e^{-t}\sin 4x, \quad t > 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{4}; \tag{6}$$

$$\upsilon\Big|_{t=0} = -7\cos 2x, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{4}, \tag{7}$$

$$\upsilon_x\Big|_{x=0} = 0, \quad t \ge 0; \tag{8}$$

$$\upsilon\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=0,\quad t\geq 0\,. \tag{9}$$

Решение задачи (6), (7), (8), (9) будем искать в виде

$$\upsilon(x,t)=\sum_k T_k(t)\upsilon_k(x),$$

где $\upsilon_k(x)$ – собственные функции следующей задачи Штурма — Лиувилля:

$$\begin{cases}\upsilon''(x)=-\lambda^2\upsilon(x),\quad 0<x<\dfrac{\pi}{4};\\ \upsilon'(0)=0;\\ \upsilon\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0.\end{cases} \tag{10}$$

3. Решим задачу (10).

Пусть $\lambda=0$. Тогда уравнение в (10) примет вид $\upsilon''(x)=0$, и, следовательно, $\upsilon(x)=C_1x+C_2$.

Из граничных условий в (10) имеем

$$\begin{cases}\upsilon'(0)=C_1=0;\\ \upsilon\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=C_1\cdot\dfrac{\pi}{4}+C_2=0.\end{cases}$$

Отсюда $C_1=C_2=0$. То есть $\upsilon(x)\equiv 0$, и, следовательно, $\lambda^2=0$ не является собственным значением задачи (10).

Пусть $\lambda\neq 0$. Тогда уравнение в (10) примет вид $\upsilon''(x)+\lambda^2\cdot\upsilon(x)=0$, и, следовательно, $\upsilon(x)=C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x$.

Так как $\upsilon'(x)=-\lambda C_1\sin\lambda x+C_2\lambda\cos\lambda x$, то из условия $\upsilon'(0)=0$ получаем, что $\upsilon'(0)=C_2\lambda=0$, или $C_2=0$. Отсюда

$$\upsilon(x)=C_1\cos\lambda x,\quad C_1\in R,\quad C_1\neq 0.$$

Возьмем, например, $C_1=1$, то есть $\upsilon(x)=\cos\lambda x$. Из условия $\upsilon\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ получаем, что $\upsilon\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\lambda\right)=0$.

Отсюда

$$\lambda_k\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad k\in Z,$$

$$\lambda_k = 2(1+2k), \quad k \in Z,$$
$$\upsilon_k(x) = \cos(2(1+2k)x), \quad k \in Z \ .$$

Оставляя среди найденной системы функций только линейно независимые, получаем, что рассматриваемый в нашей задаче оператор Штурма — Лиувилля (задача (10)) имеет следующие системы собственных значений и собственных функций:

$$\lambda_k^2 = \left(2(1+2k)\right)^2, \quad k = 0,1, \ \ldots, \tag{11}$$

$$\upsilon_k(x) = \cos\left(2(1+2k)x\right) = \cos\lambda_k x, \quad k = 0,1,\ldots \tag{12}$$

4. Таким образом, решение задачи (6), (7), (8), (9) представляется в виде

$$\upsilon(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\upsilon_k(x), \tag{13}$$

где функции $\upsilon_k(x)$, $k = 0,1,\ldots$, определены в (12), а функции $T_k(t)$, $k = 0,1,\ldots$, найдем, подставляя в уравнение (6) и начальное условие (7) функцию, определяемую рядом (13).

Для этого представим правые части уравнения (6) и условия (7) рядами Фурье по системе (12). Получим

$$\sin 4x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \upsilon_k(x), \tag{14}$$

где

$$a_k = \frac{\left(\sin 4x, \upsilon_k(x)\right)}{\left(\upsilon_k(x), \upsilon_k(x)\right)} = \frac{\int\limits_0^{2\pi} \sin 4x \cdot \upsilon_k(x)\,dx}{\int\limits_0^{2\pi} \left(\upsilon_k(x)\right)^2 dx}, \ k = 0,1,\ldots, \tag{15}$$

(заметим, что $21\pi e^{-t}\sin 4x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k 21\pi e^{-t} \cdot \upsilon_k(x)$)

$$-7\cos 2x = -7\upsilon_0(x) = -7\upsilon_0(x) + 0\cdot\upsilon_1(x) + 0\cdot\upsilon_2(x) + \ldots \ . \tag{16}$$

Вычислим интегралы, входящие в (15): так как $\lambda_k = 2(1+2k)$, то

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x \cdot \upsilon_k(x)\,dx =$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 4x\cdot\cos\lambda_k x dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin\left(\left(4+\lambda_k\right)x\right)+\sin\left(\left(4-\lambda_k\right)x\right)\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin\left(4k+6\right)x-\sin\left(4k-2\right)x\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4k+6}\cdot\cos\left(4k+6\right)x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{4k-2}\cdot\cos\left(4k-2\right)x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4k+6}+\frac{1}{4k-2}\right]=\frac{-4}{\left(4k+6\right)\left(4k-2\right)}=\frac{-1}{\left(2k+3\right)\left(2k-1\right)},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\upsilon_k\left(x\right)\right)^2dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos\left(\lambda_k x\right)\right)^2dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\cos\left(2\lambda_k x\right)\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2\lambda_k}\sin\left(2\lambda_k x\right)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}.$$

Следовательно, из (15) имеем

$$a_k=\frac{-8}{\pi\left(2k+3\right)\left(2k-1\right)},\quad k=0,1,\ldots \tag{17}$$

5. Заменяя в уравнении (6) функцию $\upsilon\left(x,t\right)$ рядом $\sum_{k=0}^{\infty}T_k\left(t\right)\upsilon_k\left(x\right)$ согласно (13), функцию $\upsilon_t\left(x,t\right)$ рядом $\sum_{k=0}^{\infty}T_k'\left(t\right)\upsilon_k\left(x\right)$, функцию $\upsilon_{xx}\left(x,t\right)$ рядом $\sum_{k=0}^{\infty}T_k\left(t\right)\upsilon_k''\left(x\right)=-\sum_{k=0}^{\infty}T_k\left(t\right)\lambda_k^2\upsilon_k\left(x\right)$, так как $\upsilon_k''\left(x\right)=-\lambda_k^2\upsilon_k\left(x\right)$, функцию $21\pi e^{-t}\sin 4x$ рядом $\sum_{k=0}^{\infty}21\pi e^{-t}a_k\upsilon_k\left(x\right)$ согласно (14), получим

$$\begin{gathered}7\sum_{k=0}^{\infty}T_k'\left(t\right)\upsilon_k\left(x\right)=-\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}T_k\left(t\right)\cdot\lambda_k^2\upsilon_k\left(x\right)+\\+2\sum_{k=0}^{\infty}T_k\left(t\right)\upsilon_k\left(x\right)+\sum_{k=1}^{\infty}21\pi e^{-t}a_k\upsilon_k\left(x\right).\end{gathered}\tag{18}$$

Из условия (7), используя (16), получаем:

$$\upsilon\big|_{t=0} = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(0)\upsilon_k(x) = -2\upsilon_0(x) + 0\cdot\upsilon_1(x) + \dots . \tag{19}$$

Из равенства (18) получаем следующее уравнение для функций $T_k(t), \quad k = 0, 1, \dots$:

$$7T_k'(t) = \left(-\frac{\lambda_k^2}{4} + 2\right)T_k(t) + 21\pi a_k e^{-t}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

или

$$T_k'(t) = \frac{8-\lambda_k^2}{28}T_k(t) + 3\pi a_k e^{-t}, \quad k = 0, 1, \dots ,$$

или

$$T_k'(t) = -\frac{4k^2+4k-1}{7}T_k(t) + 3\pi a_k e^{-t}, \quad k = 0, 1, \dots \tag{20}$$

Заметим, что при $k = 1$, будем иметь резонансный случай, так как

$$\left.\left(-\frac{4k^2+4k-1}{7}\right)\right|_{k=1} = -1 .$$

Следовательно, из (20) и (19) получаем следующие задачи Коши для функций $T_k(t), \quad k = 0, 1, \dots$:

$$\begin{cases} T_k'(t) = -\dfrac{4k^2+4k-1}{7}\cdot T_k(t) + 3\pi a_k e^{-t}, \\ T_k(0) = 0, \quad k = 2, 3, \dots, \end{cases} \tag{21}$$

$$\begin{cases} T_0'(t) = \dfrac{1}{7}T_0(t) + 3\pi a_0 e^{-t}, \\ T_0(0) = -7; \end{cases} \tag{22}$$

$$\begin{cases} T_1'(t) = -T_1(t) + 3\pi a_1 e^{-t}, \\ T_1(0) = 0. \end{cases} \tag{23}$$

6. Решим задачу (21).

Для удобства введем обозначение

$$b_k \triangleq \frac{4k^2+4k-1}{7}, \quad k = 0, 1, \dots \tag{24}$$

Тогда уравнение (20) (и, следовательно, и уравнения задач (21), (22), (23)) может быть записано в виде

$$T_k'(t) = -b_k T_k(t) + 3\pi a_k e^{-t}, \quad k = 0, 1, \dots \tag{25}$$

Найдем решение уравнения (25) при $k = 0, 2, 3, \ldots$ (т.е. при $k \neq 1$).

Общее решение этого уравнения есть сумма общего решения однородного уравнения, которое имеет вид $Ce^{-b_k t}$, $C \in R$, и частного решения неоднородного уравнения, которое ищем в виде Ae^{-t}.

Подставляя функцию Ae^{-t} в (25) при $k \neq 1$, получим

$$-Ae^{-t} = -b_k Ae^{-t} + 3\pi a_k e^{-t}, \quad A = \frac{3\pi a_k}{(b_k - 1)}.$$

Следовательно, общее решение уравнения (25) при $k \neq 1$ имеет вид

$$T_k(t) = Ce^{-b_k t} + \frac{3\pi a_k}{(b_k - 1)} e^{-t}, \quad k = 0, 2, \ldots \tag{26}$$

Вернемся к решению задачи (21).

Найдем C в (26), удовлетворяя начальное условие задачи (21):

$$T_k(0) = C + \frac{3\pi a_k}{(b_k - 1)} = 0, \quad C = -\frac{3\pi a_k}{(b_k - 1)}.$$

Таким образом, решение задачи (21) имеет вид

$$T_k(t) = \frac{3\pi a_k}{(b_k - 1)}\left(e^{-t} - e^{-b_k t}\right), \quad k = 2, 3, \ldots \tag{27}$$

Решим задачу (22).

Решение уравнения задачи (22) согласно (26) имеет вид

$$T_0(t) = Ce^{-b_0 t} + \frac{3\pi a_0}{(b_0 - 1)} e^{-t},$$

или

$$T_0(t) = Ce^{\frac{1}{7}t} - 7e^{-t}$$

(воспользуемся тем, что $b_0 = -\dfrac{1}{7}$ из (24), а $a_0 = \dfrac{8}{3\pi}$ из (17)).

Найдем постоянную C, удовлетворяя начальное условие задачи (22):

$$T_0(0) = C - 7 = -7, \quad C = 0.$$

Таким образом, решение задачи (22) имеет вид

$$T_0(t) = -7e^{-t}. \tag{28}$$

Теперь решим задачу (23). В данном случае ($k = 1$ — случай резонанса) частное решение уравнения задачи (23) ищем в виде

$$Bte^{-t}.$$

Подставляя функцию Bte^{-t} в уравнение задачи (23), получаем

$$Be^{-t} - Bte^{-t} = -Bte^{-t} + 3\pi a_1 e^{-t}, \quad B = 3\pi a_1 = -\frac{24}{5}$$

(воспользовались тем, что $a_1 = -\dfrac{8}{5\pi}$ из (17)).

Следовательно, общее решение уравнения из задачи (23) имеет вид

$$T_1(t) = Ce^{-t} - \frac{24}{5} te^{-t}.$$

Найдем постоянную C, удовлетворяя начальное условие задачи (23):

$$T_1(0) = C = 0.$$

Следовательно, решение задачи (23) имеет вид

$$T_1(t) = -\frac{24}{5} te^{-t}. \tag{29}$$

Таким образом, из (12), (13), (27), (28) и (29) следует, что функция

$$\upsilon(x, t) = -7e^{-t} \cos 2x - \frac{24}{5} te^{-t} \cos 6x +$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3\pi a_k}{(b_k - 1)} \left(e^{-t} - e^{-b_k t}\right) \cos\left(2(1+2k)x\right),$$

где a_k и b_k определены формулами (17) и (24) соответственно, есть решение задачи (6), (7), (8), (9). Тогда из (5) заключаем, что функция

$$u(x, t) = \upsilon(x, t) + x + \frac{t}{4},$$

где функция $\upsilon(x, t)$ определена выше, есть решение задачи (1), (2), (3), (4). ▲

3.2. Первая смешанная задача для волнового уравнения и уравнения теплопроводности в круге

Пример 1. Решить смешанную задачу

$$u_t = 4\Delta u - 3u + e^{-t} \cdot f(r) \sin\varphi, \quad t > 0, \quad r < 3, \ 0 < \varphi < 2\pi; \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = 8J_1\left(\frac{\mu_1^{(1)}}{3} r\right) \sin\varphi, \quad r \le 3, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi; \tag{2}$$

$$u\big|_{r=3} = 0, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad t \ge 0, \tag{3}$$

где функция $f(r) \in C^1[0, 3], \quad f(3) = 0, \quad \mu_1^{(1)}$ – положительный нуль функции Бесселя $J_1(\xi)$.

Δ. Так как условие (3) является однородным, то ищем решение задачи (1), (2), (3) в виде ряда (XXIII) с зависящими от t коэффициентами

$A_{mk}(t), \quad k=1,2,\ldots, \quad m \geq 0, \quad B_{mk}(t), \quad k=1,2,\ldots, \quad m \geq 1$.

Заметим, что правые части уравнения (1) и начальная функция условия (2) есть $e^{-t} f(r) \sin\varphi$ и $8J_1\left(\frac{\mu_1^{(1)}}{3}r\right)\sin\varphi$ соответственно. Поэтому из ортогональности системы собственных функций задачи (XVII) заключаем, что в ряде (XXIII) следует положить коэффициенты $A_{mk}(t) \equiv 0$ для всех $k=1,2,\ldots, \quad m \geq 0$, и коэффициенты $B_{mk}(t) \equiv 0$ при всех $k=1,2,\ldots$, и $m \neq 1$, т.е. решение задачи следует искать в виде однократного ряда

$$u(r,\varphi,t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_{1k}(t) \sin\varphi J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{3}r\right).$$

Переобозначим

$$B_{1k}(t) = T_k(t), \quad k=1,2,\ldots$$

и будем искать решение задачи (1), (2), (3) в виде

$$u(r,\varphi,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin\varphi J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{3}r\right). \tag{4}$$

Разложим функцию $f(r)$ в ряд Фурье (XXIV) по системе функций $J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{3}r\right), \quad k=1,2,\ldots$:

$$f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{3}r\right), \tag{5}$$

где

$$\alpha_k = \frac{\int\limits_0^3 f(r) J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{3}r\right) r\,dr}{\int\limits_0^3 \left(J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{3}r\right)\right)^2 r\,dr}, \quad k=1,2,\ldots \tag{6}$$

Подставим ряд (4) в уравнение (1) и условие (2). Воспользовавшись разложением (5), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k'(t)\sin\varphi J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{3}r\right) = 4\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\left(-\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{3}\right)^2\right)\sin\varphi J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{3}r\right) -$$
$$-3\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\sin\varphi\, J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{3}r\right) + e^{-t}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k \sin\varphi\, J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{3}r\right); \tag{7}$$

$$u\big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0)\sin\varphi\, J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{3}r\right) = 8J_1\left(\frac{\mu_1^{(1)}}{3}r\right)\sin\varphi\,. \tag{8}$$

Здесь использовано равенство (5), а также равенство (см. (XXV))

$$\Delta\left(\sin\varphi\, J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{3}r\right)\right) = -\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{3}\right)^2 \sin\varphi\, J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{3}r\right), \quad k = 1, 2, \dots$$

Из соотношений (7) и (8) получаем

$$T_k'(t) = -4\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{3}\right)^2 T_k(t) - 3T_k(t) + \alpha_k e^{-t}, \quad k = 1, 2, \dots;$$

$$T_k(0) = \begin{cases} 8, \ k = 1, \\ 0, \ k = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Отсюда, введя обозначение

$$\gamma_k = 4\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{3}\right)^2 + 3, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{9}$$

получим следующие задачи для нахождения функций $T_k(t), \quad k = 1, 2, \dots$:

$$\begin{cases} T_k'(t) = -\gamma_k T_k(t) + \alpha_k e^{-t}, & (10) \\ T_k(0) = 0, \qquad k = 2, 3, \dots; & (11) \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} T_1'(t) = -\gamma_1 T_1(t) + \alpha_1 e^{-t}, & (12) \\ T_1(0) = 8. & (13) \end{cases}$$

Решим задачу (10), (11). Общее решение уравнения (10) есть сумма общего решения однородного уравнения, которое имеет вид

$$Ce^{-\gamma_k t},$$

и частного решения неоднородного уравнения, которое ищем в виде

$$ae^{-t} \tag{14}$$

(здесь заметим, что $\gamma_k > 3$ при всех $k = 1, 2, \dots$, т.е. резонанса нет).

Подставив функцию (14) в равенство (10), получим

$$-ae^{-t} = -\gamma_k ae^{-t} + \alpha_k e^{-t},$$

$$a(\gamma_k - 1)e^{-t} = \alpha_k e^{-t},$$

$$a = \frac{\alpha_k}{\gamma_k - 1}.$$

Следовательно, общее решение уравнения (10) имеет вид

$$T_k(t) = Ce^{-\gamma_k t} + \frac{\alpha_k}{\gamma_k - 1}e^{-t}, \quad k = 2, 3, \ldots$$

Найдем постоянную C, удовлетворив условие (11). Получим

$$T_k(0) = C + \frac{\alpha_k}{\gamma_k - 1}, \quad k = 2,3,...$$

Отсюда имеем, что решение задачи (10), (11) имеет

$$T_k(t) = \frac{\alpha_k}{\gamma_k - 1}\left[e^{-t} - e^{-\gamma_k t}\right], \quad k = 2, 3, \ldots \tag{15}$$

Аналогичным образом, решив задачу (12), (13), получаем, что

$$T_1(t) = \left(\left(8 - \frac{\alpha_1}{\gamma_1 - 1}\right)e^{-\gamma_1 t} + \frac{\alpha_1}{\gamma_1 - 1}e^{-2t}\right). \tag{16}$$

Из соотношений (4), (15) и (16) получаем, что функция

$$u(r,\varphi,t) = \left(\left(8 - \frac{\alpha_1}{\gamma_1 - 1}\right)e^{-\gamma_1 t} + \frac{\alpha_1}{\gamma_1 - 1}e^{-t}\right)\sin\varphi J_1\left(\frac{\mu_1^{(1)}}{3}r\right) +$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\alpha_k}{\gamma_k - 1}\left(e^{-t} - e^{-\gamma_k t}\right)\sin\varphi \cdot J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{3}r\right),$$

где α_k и γ_k, $k = 1, 2, \ldots$, определены формулами (6) и (9) соответственно, есть решение задачи (1), (2), (3). ▲

Пример 2. Решить смешанную задачу:

$$u_{tt} = 4\Delta u + 2xy, \quad t > 0, \quad r < 1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi; \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = x^2 + y^2, \quad u_{t|t=0} = 0, \quad r \le 1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi; \tag{2}$$

$$u\big|_{r=1} = 1, \quad t \ge 0, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi. \tag{3}$$

Δ Так как условие (3) является неоднородным, то подберем какую-нибудь функцию $g(x, y, t)$, удовлетворяющую условию (3). В данном случае можно взять, например, $g(x, y, t) = 1$.

Введем новую искомую функцию $\upsilon(x, y, t)$ такую, что

$$\upsilon(x, y, t) = u(x, y, t) - g(x, y, t),$$

$$\upsilon(x, y, t) = u(x, y, t) - 1, \tag{4}$$

Тогда для функции υ получим следующую задачу:

$$\upsilon_{tt} = 4\Delta\upsilon + r^2 \sin 2\varphi, \quad t > 0, \quad r < 1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi; \tag{5}$$

$$\upsilon\big|_{t=0} = r^2 - 1, \quad \upsilon_t\big|_{t=0} = 0, \ r \le 1, \tag{6}$$

$$\upsilon\big|_{r=1} = 0, \quad t \ge 0, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \tag{7}$$

(здесь воспользовались тем, что $\Delta(1) = 0, \ x = r\cos\varphi, \ y = r\sin\varphi$).

Так как условие (7) является однородным, то ищем решение задачи (5), (6), (7) в виде ряда (XXIII) с зависящими от t коэффициентами $A_{mk}(t)$, $m = 0, 1, 2, \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots$, и $B_{mk}(t), \ m = 1, 2, \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots$

Заметим, что правая часть уравнения (5) и начальные функции условий (6) есть $r^2 \sin 2\varphi, \ r^2 - 1, \ 0$ соответственно. Поэтому из ортогональности системы собственных функций задачи (XVII) заключаем, что в ряде (XXIII) коэффициенты $A_{mk}(t) \equiv 0$ для всех $m \ne 0, k = 1, 2, \ldots,$ а коэффициенты $B_{mk}(t) \equiv 0$ для $m \ne 2, k = 1, 2, \ldots$, т.е. решение задачи (5), (6), (7) следует искать в виде суммы двух однократных рядов:

$$\upsilon(r, \varphi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{0k}(t) J_0\left(\mu_k^{(0)} r\right) + \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k}(t) \sin 2\varphi \ J_2\left(\mu_k^{(2)} r\right).$$

Переобозначим

$$H_k(t) = A_{0k}(t), \ T_k(t) = B_{2k}(t), \ k = 1, 2, \ldots,$$

и будем искать решение задачи (5), (6), (7) в виде

$$\upsilon(r, \varphi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin 2\varphi \ J_2\left(\mu_k^{(2)} r\right) + \sum_{k=1}^{\infty} H_k(t) J_0\left(\mu_k^{(0)} r\right). \tag{8}$$

Разложим функцию r^2 в ряд Фурье (XXIV) по системе функций $J_2\left(\mu_k^{(2)} r\right), \quad k = 1, 2, \ldots$, а функцию $r^2 - 1$ в ряд Фурье (XXIV) по системе функций $J_0\left(\mu_k^{(0)} r\right), \quad k = 1, \quad 2, \ldots$ Получим

$$r^2=\sum_{k=1}^{\infty} b_k J_2\left(\mu_k^{(2)} r\right), \tag{9}$$

где

$$b_k=\frac{\int_0^1 r^2 J_2\left(\mu_k^{(2)} r\right) r\,d r}{\int_0^1\left(J_2\left(\mu_k^{(2)} r\right)\right)^2 r\,dr}, \quad k=1,2, \ldots; \tag{10}$$

$$r^2-1=\sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0\left(\mu_k^{(0)} r\right), \tag{11}$$

где

$$a_k=\frac{\int_0^1\left(r^2-1\right) J_0\left(\mu_k^{(0)} r\right) r\,d r}{\int_0^1\left(J_0\left(\mu_k^{(0)} r\right)\right)^2 r\,d r}, \quad k=1,2, \ldots \tag{12}$$

Подставим ряд (8) в уравнение (5) и условие (6). Воспользовавшись разложениями (9) и (11), получим

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty} T_k''(t) \sin 2\varphi J_2\left(\mu_k^{(2)} r\right)+\sum_{k=1}^{\infty} H_k''(t) J_0\left(\mu_k^{(0)} r\right)= \\
&=4 \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\left(-\left(\mu_k^{(2)}\right)^2\right) \sin 2\varphi J_2\left(\mu_k^{(2)} r\right)+ \\
&+4 \sum_{k=1}^{\infty} H_k(t)\left(-\left(\mu_k^{(0)}\right)^2\right) J_0\left(\mu_k^{(0)} r\right)+\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin 2\varphi J_2\left(\mu_k^{(2)} r\right);
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
\upsilon\big|_{t=0}&=\sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) \sin 2\varphi J_2\left(\mu_k^{(2)} r\right)+ \\
&+\sum_{k=1}^{\infty} H_k(0) J_0\left(\mu_k^{(0)} r\right)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0\left(\mu_k^{(0)} r\right);
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\upsilon_t\big|_{t=0}=\sum_{k=1}^{\infty} T_k'(0) \sin 2\varphi J_2\left(\mu_k^{(2)} r\right)+\sum_{k=1}^{\infty} H_k'(0) J_0\left(\mu_k^{(0)} r\right)=0. \tag{15}$$

(Здесь использованы равенства (см. (XXV).)

$$\Delta\left(\sin 2\varphi J_2\left(\mu_k^{(2)} r\right)\right)=-\left(\mu_k^{(2)}\right)^2 \sin 2\varphi J_2\left(\mu_k^{(2)} r\right), \quad k=1,2, \ldots,$$

$$\Delta\left(J_0\left(\mu_k^{(0)} r\right)\right)=-\left(\mu_k^{(0)}\right)^2 J_0\left(\mu_k^{(0)} r\right), \quad k=1,2, \ldots$$

Из соотношений (13), (14), (15) получаем

$$T_k''(t) = -4\left(\mu_k^{(2)}\right)^2 T_k(t) + b_k, \quad k = 1, 2, \ldots; \tag{16}$$

$$H_k''(t) = -4\left(\mu_k^{(0)}\right)^2 H_k(t), \quad k = 1, 2, \ldots; \tag{17}$$

$$T_k(0) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots; \tag{18}$$

$$H_k(0) = a_k, \quad k = 1, 2, \ldots; \tag{19}$$

$$T_k'(0) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots; \tag{20}$$

$$H_k'(0) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{21}$$

Решаем задачу (16), (18), (20).

Общее решение уравнения (16) есть сумма общего решения однородного уравнения, которое имеет вид

$$C\cos\left(2\mu_k^{(2)}t\right) + D\sin\left(2\mu_k^{(2)}t\right),$$

и частного решения неоднородного уравнения, которое, как легко видеть, есть функция, тождественно равная постоянной

$$\frac{b_k}{4\left(\mu_k^{(2)}\right)^2}.$$

Следовательно, общее решение уравнения (16) имеет вид

$$C\cos\left(2\mu_k^{(2)}t\right) + D\sin\left(2\mu_k^{(2)}t\right) + \frac{b_k}{4\left(\mu_k^{(2)}\right)^2}.$$

Найдем постоянные C и D, удовлетворяя условиям (18), (20):

$$T_k(0) = C + \frac{b_k}{4\left(\mu_k^{(2)}\right)^2} = 0,$$

$$T_k'(0) = 2\mu_k^{(2)}D = 0.$$

Отсюда получаем, что $C = -\dfrac{b_k}{4\left(\mu_k^{(2)}\right)^2}$, $D = 0$. Поэтому решение задачи (16), (18), (20) имеет вид

$$T_k(t) = \frac{b_k}{\left(2\mu_k^{(2)}\right)^2}\left(1 - \cos 2\mu_k^{(2)}t\right), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{22}$$

Решаем задачу (17), (19), (21).

Общее решение однородного уравнения (17) имеет вид

$$H_k(t) = M\cos\left(2\mu_k^{(0)}t\right) + K\sin\left(2\mu_k^{(0)}t\right), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Найдем постоянные M и K, удовлетворяя условиям (19), (21): $H_k(0) = M = a_k$, $H_k'(0) = 2\mu_k^{(0)} K = 0$. Отсюда $M = a_k$, $K = 0$. Поэтому решение задачи (17), (19), (21) имеет вид

$$H_k(t) = a_k \cos\left(2\mu_k^{(0)} t\right), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{23}$$

Из соотношений (8), (22), (23) получаем, что функция

$$\upsilon(r, \varphi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{\left(2\mu_k^{(2)}\right)^2}\left(1 - \cos\left(2\mu_k^{(2)} t\right)\right)\sin 2\varphi J_2\left(\mu_k^{(2)} r\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(2\mu_k^{(0)} t\right) J_0\left(\mu_k^{(0)} r\right),$$

где b_k и a_k, $k = 1, 2, \ldots,$ определены формулами (10) и (12) соответственно, есть решение задачи (5), (6), и (7).

Следовательно, функция $u(r, \varphi, t) = \upsilon(r, \varphi, t) + 1$, где функция $\upsilon(r, \varphi, t)$ определена выше, есть решение задачи (1), (2), (3). ▲

Пример 3. Решить смешанную задачу

$$u_t = \Delta u, \quad r < 2, \quad 0 < \varphi < 2\pi, t > 0; \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = (r-2)^2, \quad r \le 2, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi; \tag{2}$$

$$u\big|_{r=2} = 16t \sin 5\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad t \ge 0. \tag{3}$$

Δ Так как условие (3) является неоднородным, то подберем какую-нибудь функцию $g(r, \varphi, t)$, удовлетворяющую условию (3). В данном случае можно, например, взять функцию

$$g(r, \varphi, t) = 4t r^2 \sin 5\varphi,$$

для которой

$$\Delta g = g_{rr}'' + \frac{1}{r} g_r' + \frac{1}{r^2} g_{\varphi\varphi}'' = 8t \sin 5\varphi + 8t \sin 5\varphi - 4t \cdot 25 \sin 5\varphi =$$

$$= -84t \sin 5\varphi \tag{4}$$

есть функция, определенная в $\{r \le 2, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad t \ge 0\}$.

Введем новую искомую функцию $\upsilon(r, \varphi, t)$ такую, что

$$\upsilon(r, \varphi, t) = u(r,\varphi,t) - g(r,\varphi,t);$$

$$\upsilon(r,\varphi,t)=u(r,\varphi,t)-4tr^2\sin 5\varphi. \qquad (5)$$

Тогда, используя соотношение (4), для функции υ получим следующую задачу:

$$\upsilon_t+4r^2\sin 5\varphi=\Delta\upsilon-84t\sin 5\varphi, \quad t>0,\ r<2,\ 0<\varphi<2\pi;$$

или

$$\upsilon_t=\Delta\upsilon-4r^2\sin 5\varphi-84t\sin 5\varphi, \quad t>0,\ r<2,\ 0<\varphi<2\pi; \qquad (6)$$

$$\upsilon\big|_{t=0}=(r-2)^2, \quad r\le 2, \quad 0\le\varphi\le 2\pi; \qquad (7)$$

$$\upsilon\big|_{r=2}=0, \quad 0\le\varphi\le 2\pi, \quad t\ge 0. \qquad (8)$$

Так как условие (8) является однородным, то ищем решение задачи (6), (7), (8) в виде ряда (XXIII) с зависящими от t коэффициентами $A_{mk}(t)$, $k=1,2,\ldots,$ $m\ge 0$ и $B_{mk}(t)$, $k=1,2,\ldots,$ $m\ge 1$.

Заметим, что правая часть уравнения (6) и начальная функция условия (7) есть $-4r^2\sin 5\varphi-84t\sin 5\varphi$ и $(r-2)^2$ соответственно. Поэтому из ортогональности системы собственных функций задачи (XVII) заключаем, что в ряде (XXIII) коэффициенты $A_{mk}(t)\equiv 0$ для всех $k=1,2,\ldots,$ $m\ne 0,$ а коэффициенты $B_{mk}(t)\equiv 0$ для $k=1,2,\ldots,$ $m\ne 5,$ т.е. решение задачи (6), (7), (8) следует искать в виде суммы двух однократных рядов:

$$\upsilon(r,\varphi,t)=\sum_{k=1}^{\infty}A_{0k}(t)\cdot J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2}r\right)+\sum_{k=1}^{\infty}B_{5k}(t)\sin 5\varphi\cdot J_5\left(\frac{\mu_k^{(5)}}{2}r\right).$$

Переобозначим

$$H_k(t)\triangleq A_{0k}(t),\ T_k(t)\triangleq B_{5k}(t),\ k=1,2,\ldots,$$

и будем искать решение задачи (6), (7), (8) в виде

$$\upsilon(r,\varphi,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\sin 5\varphi\, J_5\left(\frac{\mu_k^{(5)}}{2}r\right)+\sum_{k=1}^{\infty}H_k(t)J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2}r\right). \qquad (9)$$

Разложим начальную функцию $(r-2)^2$ в ряд Фурье (XXIV) по системе собственных функций $J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2}r\right)$, $\quad k=1,2,\ldots$:

$$(r-2)^2=\sum_{k=1}^{\infty}a_kJ_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2}r\right), \qquad (10)$$

где

$$a_k = \frac{\int\limits_0^2 (r-2)^2 \cdot J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2} r\right) r\,d\,r}{\int\limits_0^2 \left(J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2} r\right)\right)^2 r\,d\,r}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

Неоднородность в правой части уравнения (6) представим в виде $-4r^2 \sin 5\varphi - 84t \cdot 1 \cdot \sin 5\varphi$.

Разложим функции r^2 и 1 в ряды Фурье (XXIV) по системе функций

$$J_5\left(\frac{\mu_k^{(5)}}{2} r\right), \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$r^2 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot J_5\left(\frac{\mu_k^{(5)}}{2} r\right), \tag{12}$$

где

$$b_k = \frac{\int_0^2 r^2 \cdot J_5\left(\frac{\mu_k^{(5)}}{2} r\right) r\,d\,r}{\int_0^2 \left(J_5\left(\frac{\mu_k^{(5)}}{2} r\right)\right)^2 r\,d\,r}, \quad k = 1, 2, \ldots; \quad (13$$

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \; J_5\left(\frac{\mu_k^{(5)}}{2} r\right), \tag{14}$$

где

$$d_k = \frac{\int_0^2 1 \cdot J_5\left(\frac{\mu_k^{(5)}}{2} r\right) r\,d\,r}{\int_0^2 \left(J_5\left(\frac{\mu_k^{(5)}}{2} r\right)\right)^2 r\,d\,r}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{15}$$

Тогда из (12) и (14) имеем, что

$$-4r^2 \sin 5\varphi - 84t \sin 5\varphi =$$

$$= -4\sum_{k=1}^{\infty} b_k J_5\left(\frac{\mu_k^{(5)}}{2} r\right) \sin 5\varphi - 84t \cdot \sum_{k=1}^{\infty} d_k J_5\left(\frac{\mu_k^{(5)}}{2} r\right) \sin 5\varphi. \tag{16}$$

Подставим ряд (9) в уравнение (6) и условие (7). Воспользовавшись разложениями (16) и (10), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k'(t)\sin 5\varphi\cdot J_5\left(\frac{\mu_k^{(5)}}{2}r\right)+\sum_{k=1}^{\infty} H_k'(t)\cdot J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2}r\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\left(-\left(\frac{\mu_k^{(5)}}{2}\right)^2\right)\sin 5\varphi\cdot J_5\left(\frac{\mu_k^{(5)}}{2}r\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} H_k(t)\left(-\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2}\right)^2\right)J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2}r\right)- \tag{17}$$

$$-4\sum_{k=1}^{\infty} b_k\cdot\sin 5\varphi\cdot J_5\left(\frac{\mu_k^{(5)}}{2}r\right)-84t\sum_{k=1}^{\infty} d_k\cdot\sin 5\varphi J_5\left(\frac{\mu_k^{(5)}}{2}r\right);$$

$$\upsilon\big|_{t=0}=\sum_{k=1}^{\infty} T_k(0)\sin 5\varphi\cdot J_5\left(\frac{\mu_k^{(5)}}{2}r\right)+\sum_{k=1}^{\infty} H_k(0)\cdot J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2}r\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cdot J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2}r\right) \tag{18}$$

(здесь использованы равенства (см. (XXV)).

$$\Delta\left(\sin 5\varphi\cdot J_5\left(\frac{\mu_k^{(5)}}{2}r\right)\right)=-\left(\frac{\mu_k^{(5)}}{2}\right)^2\sin 5\varphi\cdot J_5\left(\frac{\mu_k^{(5)}}{2}r\right),\quad k=1,2,\ldots$$

$$\Delta\left(J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2}r\right)\right)=-\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2}\right)^2\cdot J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2}r\right),\quad k=1,2,\ldots$$

Из соотношений (17) и (18) получаем

$$T_k'(t)=-\left(\frac{\mu_k^{(5)}}{2}\right)^2 T_k(t)-4b_k-84d_k t,\quad k=1,2,\ldots, \tag{19}$$

$$H_k'(t)=-\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2}\right)^2 H_k(t),\quad k=1,2,\ldots, \tag{20}$$

$$T_k(0)=0,\quad k=1,2,\ldots, \tag{21}$$

$$H_k(0)=a_k,\quad k=1,2,\ldots \tag{22}$$

Решаем задачу (19), (21).

Общее решение уравнения (19) есть сумма общего решения однородного уравнения, которое имеет вид

$$Ce^{-\left(\frac{\mu_k^{(5)}}{2}\right)^2 t}$$

и частного решения неоднородного уравнения, которое ищем в виде

$$At+B\ .$$

Подставляя функцию $At+B$ в уравнение (19), получаем

$$A=-\left(\frac{\mu_k^{(5)}}{2}\right)^2\left(At+B\right)-4b_k-84d_k t\ .$$

Отсюда

$$\begin{cases} A=-\left(\dfrac{\mu_k^{(5)}}{2}\right)B-4b_k, \\ 0=-\left(\dfrac{\mu_k^{(5)}}{2}\right)A-84d_k. \end{cases}$$

Следовательно, $A\triangleq A_k,\ B\triangleq B_k,\ \ k=1,2,\ldots$, и

$$A_k=-\frac{84\,d_k}{\left(\dfrac{\mu_k^{(5)}}{2}\right)^2},\ B_k=\frac{1}{\left(\dfrac{\mu_k^{(5)}}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{84\,d_k}{\left(\dfrac{\mu_k^{(5)}}{2}\right)^2}-4b_k\right),\quad k=1,\,2,\,\ldots\,, \tag{23}$$

где b_k и d_k, $k=1,2,\ldots$, определены формулами (13) и (15) соответственно, и общее решение уравнения (19) имеет вид

$$T_k\left(t\right)=Ce^{-\left(\frac{\mu_k^{(5)}}{2}\right)^2 t}+A_k t+B_k,\quad k=1,2,\ldots,$$

где A_k и B_k, $k=1,2,\ldots$, определены формулами (23).

Находим C, удовлетворяя условие (21):

$$T_k\left(0\right)=C+B_k=0\ .$$

Отсюда $C=-B_k$ и решение задачи (19), (21) имеет вид

$$T_k\left(t\right)=-B_k e^{-\left(\frac{\mu_k^{(5)}}{2}\right)^2 t}+A_k t+B_k,\quad k=1,2,\ldots, \tag{24}$$

где постоянные A_k и B_k, $k=1,2,\ldots$, определены формулами (23).

Решаем задачу (20), (22). Нетрудно увидеть, что решение этой задачи имеет вид

$$H_k(t) = a_k \cdot e^{-\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2}\right)^2 t}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{25}$$

Из соотношений (9), (24), (25) получаем, что функция

$$\upsilon(r, \varphi, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(-B_k e^{-\left(\frac{\mu_k^{(5)}}{2}\right)^2 t} + A_k t + B_k\right)\cdot \sin 5\varphi \cdot J_5\left(\frac{\mu_k^{(5)}}{2} r\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot e^{-\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2}\right)^2 t} \cdot J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2} r\right),$$

где A_k, B_k и a_k, $k = 1, 2, \ldots$, определены формулами (23) и (11) соответственно, есть решение задачи (6), (7), (8).

Следовательно, функция

$$u(r, \varphi, t) = \upsilon(r, \varphi, t) + 4r^2 t \sin 5\varphi,$$

где функция $\upsilon(r, \varphi, t)$ определена выше, есть решение задачи (1), (2), (3). ▲

3.3. Смешанные задачи для дифференциальных операторов более общего вида на плоскости

Пример 1. Найдем решение следующей задачи

$$u_{tt} - 7u_t = u_{xx} + 2u_x - 2t - 7x - e^{-x}\sin 3x, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0; \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = x, \quad 0 \le x \le \pi; \tag{2}$$

$$u\big|_{x=0} = 0, \quad t \ge 0; \tag{3}$$

$$u\big|_{x=\pi} = \pi t, \quad t \ge 0. \tag{4}$$

Δ 1. Найдем какую-нибудь функцию $g(x, t)$, удовлетворяющую условиям (3) и (4).

В данном случае можно взять, например, $g(x, t) = xt$.

2. Рассмотрим новую искомую функцию $\upsilon(x, t)$ такую, что

$$\upsilon(x, t) = u(x, t) - g(x, t),$$

$$\upsilon(x, t) = u(x, t) - x t, \tag{5}$$

и запишем задачу (1), (2), (3), (4) для функции $\upsilon(x,t)$. Получим

$$\upsilon_{tt} - 7\upsilon_t = \upsilon_{xx} + 2\upsilon_x - e^{-x}\sin 3x, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0; \tag{6}$$

$$\upsilon\big|_{t=0} = 0, \quad \upsilon_t\big|_{t=0} = 0, \quad 0 \le x \le \pi; \tag{7}$$

$$\upsilon\big|_{x=0} = 0, \quad t \ge 0; \tag{8}$$

$$\upsilon\big|_{x=\pi} = 0, \quad t \ge 0. \tag{9}$$

Решение задачи (6), (7), (8), (9) будем искать в виде $\upsilon(x,t) = \sum\limits_k T_k(t)\,\upsilon_k(x)$, где функции $\upsilon_k(x)$ есть собственные функции следующей задачи:

$$\begin{cases} \upsilon''(x) + 2\upsilon'(x) = -\lambda\upsilon(x), \quad 0 < x < \pi; \\ \upsilon(0) = 0, \\ \upsilon(\pi) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

3. Решим задачу (10).

Пусть $\lambda = 0$. Тогда уравнение в (10) примет вид $\upsilon''(x) + 2\upsilon'(x) = 0$, и, следовательно,

$$\upsilon(x) = C_1 + C_2 e^{-2x}.$$

Из граничных условий в (10) имеем

$$0 = \upsilon(0) = C_1 + C_2, \quad 0 = \upsilon(\pi) = C_1 + C_2 e^{-2\pi}.$$

Отсюда $C_1 = 0, \quad C_2 = 0$ и $\upsilon(x) \equiv 0$. Следовательно, $\lambda = 0$ не является собственным числом задачи (10).

Пусть $\lambda \ne 0$. Тогда уравнение в (10) примет вид

$$\upsilon''(x) + 2\upsilon'(x) + \lambda\upsilon(x) = 0.$$

Следовательно, возможны три случая:

а) если $\lambda > 1$, то

$$\upsilon(x) = C_1 e^{-x}\cos\gamma x + C_2 e^{-x}\sin\gamma x, \tag{11'}$$

где $\gamma = \sqrt{\lambda - 1}$;

б) если $\lambda < 1$, то

$$\upsilon(x) = C_1 e^{-x} ch\gamma x + C_2 e^{-x} sh\gamma x, \tag{11''}$$

где $\gamma = \sqrt{1 - \lambda}$;

в) если $\lambda = 1$, то

$$\upsilon(x) = C_1 e^{-x} + C_2\, x e^{-x}. \tag{11'''}$$

Рассмотрим сначала последний случай. Из соотношения (11''') и граничных условий задачи (10) имеем

$$\begin{cases} \upsilon(0) = C_1 = 0, \\ \upsilon(\pi) = C_1 e^{-\pi} + C_2 \pi e^{-\pi} = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $\upsilon(x) \equiv 0$ и $\lambda = 1$ не является собственным числом задачи (10).

Пусть теперь $\lambda < 1$. Тогда из соотношения (11'') и граничных условий задачи (10) имеем

$$\begin{cases} \upsilon(0) = C_1 = 0, \\ \upsilon(\pi) = C_1 + C_2 e^{-\pi} sh(\gamma \pi) = 0, \end{cases}$$

что возможно лишь в случае $C_1 = C_2 = 0$ (так как $sh(\gamma \pi) \neq 0$, если $\gamma = \sqrt{1-\lambda} \neq 0$ при $\lambda < 1$).

Следовательно, $\upsilon(x) \equiv 0$ и $\lambda < 1$ не являются собственными числами задачи (10). Наконец, рассмотрим случай $\lambda > 1$. Из соотношения (11') и граничных условий задачи (10) имеем $\upsilon(0) = C_1 = 0$. Следовательно, $\upsilon(x) = C_2 e^{-x} \sin \gamma x,\ C_2 \in R,\ C_2 \neq 0$. Возьмем, например, $C_2 = 1$, то есть $\upsilon(x) = e^{-x} \sin \gamma x$.

Из условия $\upsilon(\pi) = 0$ получаем, что $\upsilon(\pi) = e^{-\pi} \sin(\gamma \pi) = 0$. Отсюда

$$\gamma_k \pi = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\gamma_k = k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\upsilon_k(x) = e^{-x} \sin k x, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Оставляя среди найденной системы функций только линейно независимые, получаем, что рассматриваемый в нашем случае оператор (задача (10)) имеет следующие системы собственных значений и собственных функций:

$$\lambda_k = k^2 + 1, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

$$\upsilon_k(x) = e^{-x} \sin k x, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{13}$$

(так как $k = \sqrt{\lambda_k - 1}$, то есть $k^2 = \lambda_k - 1$, $\lambda_k = k^2 + 1, \quad k = 1, 2, \ldots,$).

Заметим, что согласно (10) справедливо соотношение

$$\upsilon_k''(x) + 2\upsilon_k'(x) = -\lambda_k \upsilon_k(x), \quad 0 < x < \pi, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{14}$$

или

$$L\left(\upsilon_k\left(x\right)\right)=-\lambda_k\upsilon_k\left(x\right),\quad 0<x<\pi,\quad k=1,2,\ldots,$$

где

$$L\left(\upsilon\left(x\right)\right)=\upsilon''\left(x\right)+2\upsilon'\left(x\right).$$

4. Таким образом, решение задачи (6), (7), (8), (9) будем искать в виде

$$\upsilon\left(x,t\right)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k\left(t\right)\upsilon_k\left(x\right)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k\left(t\right)e^{-x}\sin k\,x\,,\tag{15}$$

где функции $T_k\left(t\right),\quad k=1,2,\ldots$, найдем, подставляя в уравнение (6) и условия (7), функцию $\upsilon\left(x,t\right)$, определяемую рядом (15). Для этого представим правые части уравнения (6) и условий (7), рядами Фурье по системе (13). Заметим, что условия (7) нашей задачи являются однородными, а правая часть уравнения (6) имеет ряд Фурье:

$$-e^{-x}\sin 3x=-\upsilon_3\left(x\right)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\upsilon_k\left(x\right),\tag{16}$$

где

$$a_k=\begin{cases}-1, & k=3;\\ 0, & k=1,2,4,5,\ldots\end{cases}\tag{16'}$$

5. Заменяя в уравнении (6) и условиях (7) функцию $\upsilon\left(x,t\right)$ рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty}T_k\left(t\right)\upsilon_k\left(x\right)$ согласно (15), функции $\upsilon_t\left(x,t\right),\upsilon_{tt}\left(x,t\right),\upsilon_x\left(x,t\right),\upsilon_{xx}\left(x,t\right)$ соответствующими рядами, полученными дифференцированием ряда (15), а также используя разложение в ряды Фурье (16) и соотношение (14), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty}T_k''\left(t\right)\upsilon_k\left(x\right)-7\sum_{k=1}^{\infty}T_k'\left(t\right)\upsilon_k\left(x\right)=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}T_k\left(t\right)\upsilon_k''\left(x\right)+2\sum_{k=1}^{\infty}T_k\left(t\right)\upsilon_k'\left(x\right)+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\upsilon_k\left(x\right),$$

или

$$\sum_{k=1}^{\infty}T_k''\left(t\right)\upsilon_k\left(x\right)-7\sum_{k=1}^{\infty}T_k'\left(t\right)\upsilon_k\left(x\right)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k\left(t\right)\cdot L\left(\upsilon_k\left(x\right)\right)+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\upsilon_k\left(x\right),$$

или

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{\infty}T_k''\left(t\right)\upsilon_k\left(x\right)-7\sum_{k=1}^{\infty}T_k'\left(t\right)\upsilon_k\left(x\right)=\\ =-\sum_{k=1}^{\infty}T_k\left(t\right)\lambda_k^2\upsilon_k\left(x\right)+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\upsilon_k\left(x\right),\end{gathered}\tag{17}$$

$$\upsilon\big|_{t=0} = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(0) v_k(x) = 0, \tag{18}$$

$$\upsilon_t\big|_{t=0} = \sum_{k=0}^{\infty} T_k^{'}(0) \upsilon_k(x) = 0. \tag{19}$$

Из соотношений (17), (18) и (19), воспользовавшись (16’), получаем следующие задачи Коши для функций $T_k(t), \quad k = 1, 2, \ldots$:

$$\begin{cases} T_3^{''}(t) - 7T_3^{'}(t) = -\lambda_3^2 T_3(t) - 1, \\ T_3(0) = 0, \quad T_3^{'}(0) = 0; \end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{cases} T_k^{''}(t) - 7T_k^{'}(t) = -\lambda_k^2 T_k(t), \\ T_k(0) = 0, \quad T_k^{'}(0) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad k \neq 3. \end{cases} \tag{21}$$

6. Решим задачу (20). Так как $\lambda_3^2 = 1 + 9 = 10$, то уравнение задачи (20) примет вид

$$T_3^{''}(t) - 7T_3^{'}(t) + 10T_3(t) = -1.$$

Его решение очевидно имеет вид

$$T_3(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{5t} - \frac{1}{10}, \quad C_1 \in R, \quad C_2 \in R.$$

Используя начальные условия задачи (20), получаем

$$\begin{cases} T_3(0) = C_1 + C_2 - \dfrac{1}{10} = 0, \\ T_3^{'}(0) = C_1 \cdot 2 + C_2 \cdot 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{6}, \\ C_2 = -\dfrac{1}{15}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$T_3(t) = \frac{1}{6} e^{2t} - \frac{1}{15} e^{5t} - \frac{1}{10}. \tag{22}$$

Задача (21) очевидно имеет тривиальное решение:

$$T_k(t) \equiv 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad k \neq 3. \tag{23}$$

Таким образом, из (15), (13), (22) и (23) следует, что функция

$$\upsilon(x, t) = T_3(t) v_3(x) = \left(\frac{1}{6} e^{2t} - \frac{1}{15} e^{5t} - \frac{1}{10} \right) \cdot e^{-x} \sin 3x$$

есть решение задачи (6), (7), (8), (9), а согласно (5) функция

$$u(x, t) = x t + \upsilon(x, t),$$

где функция $\upsilon(x,t)$ определена выше, есть решение задачи (1), (2), (3), (4). ▲

Пример 2. Решить смешанную задачу:

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{9}{x^2}u + e^{-t}J_3\left(\mu_{10}^{(3)}x\right), \quad t>0, \quad 0<x<1; \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = 0, \quad 0 \le x \le 1; \tag{2}$$

$$\left|u(0,t)\right| < +\infty, \quad u\big|_{x=1} = 0, \quad t \ge 0, \tag{3}$$

где $\mu_{10}^{(3)}$ — положительный нуль функции Бесселя $J_3(\xi)$.

Δ Ищем решение задачи (1), (2), (3) в виде $u(x,t) = \sum\limits_k T_k(t)u_k(x)$, где $u_k(x)$ — собственные функции следующей задачи:

$$\begin{cases} L\left(u(x)\right) = -\lambda u(x), \quad 0<x<1, \\ \left|u(0)\right| < +\infty, \\ u(1) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

где

$$L\left(u(x)\right) = u''(x) + \frac{1}{x}u'(x) - \frac{9}{x^2}u(x).$$

Решим задачу (4). Преобразовывая уравнение, получаем

$$x^2u''(x) + xu'(x) - 9u(x) = -\lambda x^2 u(x), \quad 0<x<1,$$

$$x^2u''(x) + xu'(x) + \left(\lambda x^2 - 9\right)u(x) = 0, \quad 0<x<1. \tag{5}$$

Это есть уравнение (XIX) при $\mu^2 = 9$. Значит, общее решение уравнения (5) имеет вид

$$u(x) = C_1J_3\left(\sqrt{\lambda}x\right) + C_2N_3\left(\sqrt{\lambda}x\right).$$

Так как $\left|u(0)\right| < +\infty$, то $C_2 = 0$ и $u(x) = C_1J_3\left(\sqrt{\lambda}x\right)$, $C_1 \in R$, $C_1 \ne 0$. Учитывая условие $u(1) = 0$, получаем, что $J_3\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0$. Отсюда имеем, что $\lambda = \left(\mu_k^{(3)}\right)^2$, $k = 1, 2, \ldots$, где $\mu_k^{(3)}$ — k-й положительный нуль функции $J_3(\xi)$.

Следовательно, собственные функции и собственные значения задачи (4) это

$$u_k(x) = J_3\left(\mu_k^{(3)} x\right), \quad k = 1, 2, \ldots,$$
$$\lambda_k = \left(\mu_k^{(3)}\right)^2, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Таким образом, решение задачи (1), (2), (3) ищем в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) u_k(x), \tag{7}$$

где функции $u_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots,$ определены формулами (6), а функции $T_k(t), \quad k = 1, 2, \ldots,$ найдем, подставляя в уравнение (1) и условие (2) функцию $u(x, t)$, определяемую рядом (7).

Заметив, что правая часть уравнения (1) есть

$$e^{-t} \cdot J_3\left(\mu_{10}^{(3)} x\right) = e^{-t} \cdot u_{10}(x),$$

получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k''(t) u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) L\left(u_k(x)\right) + e^{-t} \cdot u_{10}(x).$$

Отсюда имеем в силу (4)

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k''(t) u_k(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k T_k(t) u_k(x) + e^{-t} \cdot u_{10}(x). \tag{8}$$

Из начальных условий (2) получаем

$$u\big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) u_k(x) = 0,$$
$$u_t\big|_{t=0} \sum_{k=1}^{\infty} T_k'(0) u_k(x) = 0. \tag{9}$$

Из равенств (8) и (9) получаем следующие задачи Коши для функций $T_k(t), \quad k = 1, 2, \ldots$:

$$\begin{cases} T_k''(t) + \lambda_k T_k(t) = 0, \\ T_k(0) = T_k'(0) = 0, \quad \text{если} \quad k \neq 10,\ k = 1, 2, \ldots; \end{cases} \tag{10}$$

и

$$\begin{cases} T_{10}''(t) + \lambda_{10} T_{10}(t) = e^{-t}, \\ T_{10}(0) = T_{10}'(0) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Решая задачу (10), получаем

$$T_k(t) \equiv 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \; k \neq 10\,. \tag{12}$$

Решая задачу (11), получаем (учитывая, что $\lambda_{10} = \left(\mu_{10}^{(3)}\right)^2$), что общее решение уравнения (11) есть сумма общего решения однородного уравнения, которое имеет вид

$$C_1 \cos\left(\mu_{10}^{(3)} t\right) + C_2 \sin\left(\mu_{10}^{(3)} t\right),$$

и частного решения неоднородного уравнения, которое ищем в виде ae^{-t}.

Подставляя функцию ae^{-t} в уравнение, получаем

$$ae^{-t} + \left(\mu_{10}^{(3)}\right)^2 ae^{-t} = e^{-t}\,, \quad a = \frac{1}{1 + \left(\mu_{10}^{(3)}\right)^2}\,.$$

Следовательно, общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$T_{10}(t) = C_1 \cos\left(\mu_{10}^{(3)} t\right) + C_2 \sin\left(\mu_{10}^{(3)} t\right) + \frac{1}{1 + \left(\mu_{10}^{(3)}\right)^2} e^{-t}\,.$$

Находим постоянные C_1 и C_2 из начальных условий задачи (11):

$$T_{10}(0) = C_1 + \frac{1}{1 + \left(\mu_{10}^{(3)}\right)^2} = 0\,,$$

$$T'_{10}(0) = C_2 \cdot \mu_{10}^{(3)} - \frac{1}{1 + \left(\mu_{10}^{(3)}\right)^2} = 0\,.$$

Отсюда

$$T_{10}(t) = \frac{1}{1 + \left(\mu_{1}^{(2)}\right)^2} \left[e^{-t} - \cos\left(\mu_{10}^{(3)} t\right) + \frac{1}{\mu_{10}^{(3)}} \sin\left(\mu_{10}^{(3)} t\right) \right]. \tag{13}$$

Таким образом, из (7), (6), (12) и (13) следует, что функция

$$u(x, t) = \frac{1}{1 + \left(\mu_{10}^{(3)}\right)^2} \left[e^{-t} - \cos\left(\mu_{10}^{(3)} t\right) + \frac{1}{\mu_{10}^{(3)}} \sin\left(\mu_{10}^{(3)} t\right) \right] \cdot J_3\left(\mu_{10}^{(3)} x\right)$$

есть решение задачи (1), (2) и (3). ▲

§ 4. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Пусть G — ограниченная область в R^n, $S = \partial G$ — гладкая граничная поверхность, а $\boldsymbol{n}_x$ — внешняя по отношению к G нормаль к S в точке $x \in S$. Принадлежащая $C^1(G)$ функция u имеет *правильную нормальную производную* $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}^-}$ на S, если существует

$$\lim_{\substack{x' \to x \\ x' \in G \cap (-n_x)}} \frac{\partial u(x')}{\partial \boldsymbol{n}_x} = \frac{\partial u(x)}{\partial \boldsymbol{n}_x} \triangleq \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}^-}$$

равномерно по всем $x \in S$.

Аналогично пусть $G_1 = R^n \setminus \overline{G}$ — область с общей с областью G гладкой границей $S = \partial G$, а $\boldsymbol{n}_x$ — внешняя по отношению к G_1 нормаль к S в точке $x \in S$. Тогда принадлежащая $C^1(G_1)$ функция u имеет *правильную нормальную производную* $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}^+}$ на S, если существует

$$\lim_{\substack{x' \to x \\ x' \in G_1 \cap (-n_x)}} \frac{\partial u(x')}{\partial \boldsymbol{n}_x} = \frac{\partial u(x)}{\partial \boldsymbol{n}_x} \triangleq \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}^+}$$

равномерно по всем $x \in S$.

I. Внутренняя задача Дирихле для уравнения Лапласа: найти гармоническую в G функцию $u \in C(\overline{G})$, принимающую на S заданные (непрерывные) значения u_0^- (т.е. $u\big|_{\partial G} = u_0^-$).

II. Внешняя задача Дирихле: найти гармоническую в области $G_1 = R^n \setminus \overline{G}$ функцию $u \in C(\overline{G}_1)$, регулярную на бесконечности, т.е. в трехмерном случае $(n = 3)$ $\lim\limits_{|x| \to \infty} u(x) = 0$, т.е. $u(\infty) = 0$, принимающую на S заданные (непрерывные) значения u_0^+ (т.е. $u\big|_{\partial G} = u_0^+$).

III. Внутренняя задача Неймана: найти гармоническую в области G функцию $u \in C(\overline{G})$, имеющую на S заданную (непрерывную) правильную нормальную производную u_1^- (т.е. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}^-}\right|_{\partial G} = u_1^-$).

IV. Внешняя задача Неймана: найти гармоническую в области G_1 функцию $u \in C\left(\overline{G}_1\right)$, регулярную на бесконечности, т.е. в трехмерном случае $(n=3)$ $\lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) = 0$, т.е. $u(\infty)=0$**,** имеющую на S заданную (непрерывную) правильную нормальную производную u_1^+ **(** т.е. $\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}^+}\right|_{\partial G} = u_1^+$).

Задачи I, II и IV в трехмерном случае $(n=3)$ однозначно разрешимы. Решение задачи III определено с точностью до произвольной постоянной, причем

$$\int\limits_S u_1^- dS = 0$$

есть условие ее разрешимости.

В двумерном случае $(n=2)$ условие регулярности на бесконечности в задачах внешнего типа есть условие ограниченности при $|x| \to \infty$. В этом случае задачи I и II однозначно разрешимы. Решения задач III и IV определены с точностью до произвольных постоянных, причем

$$\int\limits_S u_1^{\pm} dS = 0$$

есть условие их разрешимости.

Метод разделения переменных для уравнений Лапласа и Пуассона

Рассмотрим сначала *двумерный* случай. Решение краевых задач в случае простейших областей (круг, круговое кольцо, прямоугольник, и др.) можно получить методом разделения переменных.

Изложим этот метод для уравнения Лапласа:

$$\Delta u = 0, \qquad x = (x_1, x_2) \in Q, \tag{I}$$

в круговых областях: в круге $Q = \{x : |x| < R\}$ при некотором $R > 0$, вне этого круга, т.е. в области $Q = \{x : |x| > R\}$, $R > 0$, и в кольце $Q = \{x : R_1 < |x| < R_2\}$, $0 < R_1 < R_2 < \infty$. При этом естественно перейдем от декартовых к полярным координатам, сохранив для удобства обозначение функции :

$$u(x) = u(x_1, x_2) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \triangleq u(r, \varphi).$$

Уравнение (I) в полярных координатах имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0, \qquad (r,\varphi)\in Q. \tag{II}$$

Найдем частные решения этого уравнения, имеющие вид

$$u(r,\varphi)=Z(r)\Phi(\varphi). \tag{III}$$

В результате подстановки (III) в(II) получим два равенства:

$$\Phi''(\varphi)+\lambda\Phi(\varphi)=0, \quad 0\le\varphi\le 2\pi, \tag{IV}$$

$$r\frac{d}{dr}\big(rZ'(r)\big)-\lambda Z(r)=0, \tag{V}$$

в которых λ - некоторая постоянная.

Поскольку нас интересуют 2π – периодические по переменной φ решения $u(r,\varphi)$, то функция $\Phi(\varphi)$ обязана при всех $\varphi\in[0,2\pi]$ удовлетворять условиям (см. § 3.VIII)

$$\Phi(0)=\Phi(2\pi), \quad \Phi'(0)=\Phi'(2\pi).$$

Следовательно, в (IV) (и в (V)) $\lambda=k^2$ при произвольном целом $k\ge 0$. А это означает, что функция $\Phi(\varphi)$ имеет вид

$$\Phi(\varphi)=\Phi_k(\varphi)=A_k\cos k\varphi+B_k\sin k\varphi$$

при $k=0,1,2,...$ и при произвольных A_k B_k, $k=0,1,2,\ldots$, а соответствующая функция $Z(r)$ имеет вид

$$Z(r)=Z_k(r)=\begin{cases}\alpha_k r^k+\beta_k r^{-k}, & \text{если } k=1,2,...,\\ \alpha_0+\beta_0\ln r, & \text{если } k=0\end{cases}$$

при произвольных постоянных α_k и β_k, где $k=0,1,2,\ \ldots$

Таким образом, найдено множество простейших гармонических в $R^2\setminus\{0\}$ функций:

$$1,\quad \ln r,\quad r\cos\varphi,\quad r\sin\varphi,\quad \frac{1}{r}\cos\varphi,\quad \frac{1}{r}\sin\varphi,\ \ldots,$$

$$r^k\cos\varphi,\quad r^k\sin\varphi,\quad \frac{1}{r}\cos^k\varphi,\quad \frac{1}{r}\sin^k\varphi,\ \ldots,$$

с помощью которых можно строить решения краевых задач для уравнения Лапласа в круговых областях.

Решение краевой задачи в круге $\{|x|<R\}$, $R>0$, ввиду требования его ограниченности, будем искать в виде

$$u(r,\varphi)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi)r^k, \quad r<R, \quad \varphi\in[0,2\pi],$$

причем коэффициенты $a_0, a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k, \ldots$ находятся из граничного условия. Если, в частности, граничное условие есть условие первой краевой задачи (задачи Дирихле)

$$u\big|_{|x|=R}=u(r,\varphi)\big|_{r=R}=f(\varphi), \quad 0\le\varphi\le 2\pi,$$

то

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)d\psi, \quad a_k=\frac{1}{\pi R^k}\int_0^{2\pi}f(\psi)\cos\psi\, d\psi,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi R^k}\int_0^{2\pi}f(\psi)\sin\psi\, d\psi, \quad k=1,2,\ldots,$$

и тогда решение этой задачи имеет вид

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)\left[1+2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^k\cos\big(k(\varphi-\psi)\big)\right]d\psi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\varphi-\psi)+r^2}d\psi.$$

Регулярное на бесконечности (т.е. в двумерном случае — ограниченное решение) в области $\{|x|>R\}$, $R>0$, будем искать в виде

$$u(r,\varphi)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi)\frac{1}{r^k}, \quad r>R, \quad \varphi\in[0,2\pi]$$

с соответствующими, найденными с помощью граничного условия, коэффициентами $a_0, a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k, \ldots$

Решение краевой задачи в кольце $\{R_1<|x|<R_2\}$, где $R_1<R_2<\infty$, будем искать в виде

$$u(r,\varphi)=a_0+b_0\ln r+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(a_k r^k+\tilde{a}_k r^{-k}\right)\cos k\varphi+\left(b_k r^k+\tilde{b}_k r^{-k}\right)\sin k\varphi\right],$$

$R_1<r<R_2$, $\varphi\in[0,2\pi]$, с коэффициентами $a_0, a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k, \ldots$, которые определяются с помощью граничных условий.

Рассмотрим теперь *трехмерный* случай.

Используя сферические координаты, в этом случае получаем

$$x=(x_1,x_2,x_3)=(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta), \; r\ge 0, \; 0\le\varphi<2\pi,$$
$$0\le\theta\le\pi.$$

С помощью метода разделения переменных проведем построение системы простейших гармонических в $R^3 \setminus \{0\}$ функций, разложением в ряды по которой в областях шарового типа можно получать решения краевых для уравнения Лапласа.

Как и в двумерном случае, эта система обладает следующим свойством: при любом $R > 0$ функции системы, рассмотренные на сфере $\{|x| = R\}$, составляют полную ортогональную в $L_2(|x| = R)$ систему функций.

Уравнение Лапласа в сферических координатах имеет вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0, \qquad \text{(VI)}$$

$$x=(r,\varphi,\theta)\in Q,$$

(здесь, как и в двумерном случае, сохранено старое обозначение функции при переходе к новым переменным, т.е.

$u(x)=u(x_1,x_2,x_3)=u(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)\triangleq u(r,\varphi,\theta)$.)

Решения уравнения (IV), имеющие вид $u(r,\varphi,\theta)=Z(r)Y(\varphi,\theta)$, удовлетворяют условиям

$$r^2 Z''(r)+2rZ'(r)-\lambda Z(r)=0, \quad r\ge 0, \qquad \text{(VII)}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y(\varphi,\theta)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y(\varphi,\theta)}{\partial\varphi^2}+\lambda Y(\varphi,\theta)=0, \qquad \text{(VIII)}$$

$$\varphi\in[0,2\pi], \quad \theta\in[0,\pi],$$

в которых λ — некоторая постоянная. Нас интересуют только ограниченные и 2π – периодические по φ на единичной сфере $\Phi(0)=\Phi(2\pi)$, $\Phi'(0)=\Phi'(2\pi)$ $\{r=1, 0\le\varphi\le 2\pi, 0\le\theta\le\pi\}$ решения уравнения (VIII). Поэтому для тех решений этого уравнения, которые имеют вид $Y(\varphi,\theta)=\Phi(\varphi)W(\theta)$, получаем следующие две задачи:

функция $\Phi(\varphi)$ должна быть 2π – периодическим решением уравнения

$$\Phi''(\varphi)+\mu\Phi(\varphi)=0, \qquad \varphi\in[0,2\pi], \qquad \text{(IX)}$$

а функция $W(\theta)$ должна быть ограниченным решением уравнения

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\cdot W'(\theta)\right)+\left(\lambda-\frac{\mu}{\sin^2\theta}\right)W(\theta)=0, \quad \theta\in[0,\pi]. \qquad \text{(X)}$$

Уравнение (IX) имеет 2π – периодические решения только при $\mu = \mu_m = m^2$, $m = 0,1,2,...$, причем эти решения имеют вид

$$\Phi(\varphi) = \Phi_m(\varphi) = A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ m = 0,1,2,... \qquad \text{(XI)}$$

А уравнение (X), в котором $\mu = \mu_m = m^2$, имеет ограниченное решение только при $\lambda = n(n+1)$, где $n \ge m$ — произвольное целое число (см., например, [1], [4]), причем это решение имеет вид $W(\theta) = \alpha_{mn} P_n^{(m)}(\cos\theta)$, $0 \le \theta \le \pi$, где α_{mn} - произвольные постоянные, а $P_n^{(m)}(\xi)$, $-1 \le \xi \le 1$, есть m —я присоединенная функция многочлена Лежандра $P_n(\xi)$, $\xi \in R^1$, где

$$P_n(\xi) = \frac{d^n}{d\xi^n}\left[\left(\xi^2 - 1\right)^n\right],\ \ \xi \in R^1. \qquad \text{(XII)}$$

$$P_n^m(\xi) = \left(1 - \xi^2\right)^{m/2} \frac{d^m}{d\xi^m}\left[P_n(\xi)\right], \quad -1 \le \xi \le 1. \qquad \text{(XIII)}$$

Общее решение уравнения (VII) при $\lambda = n(n+1)$ имеет вид

$$Z(r) = Z_n(r) = \alpha_n r^n + \beta_n r^{-(n+1)}, \qquad r > 0, \qquad \text{(XIV)}$$

при произвольных постоянных α_n и β_n.

Из сказанного следует, что при любом целом $n \ge 0$ существует гармоническая в $R^3 \setminus \{0\}$ функция

$$u_n(r,\varphi,\theta) = Z_n(r) Y_n(\varphi,\theta) \ \text{(XV)},$$

где

$$Y_n(\varphi,\theta) = \sum_{m=0}^{n} P_n^{(m)}(\cos\theta)\left[\left(\alpha_{mn}\cos m\varphi + \beta_{mn}\sin m\varphi\right)\right] =$$

$$= \alpha_{0n} P_n(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{n} P_n^{(m)}(\cos\theta)\left[\left(\alpha_{mn}\cos m\varphi + \beta_{mn}\sin m\varphi\right)\right], \qquad \text{(XVI)}$$

где α_{mn}, $m = 1,2,...,n;$ $n = 0,1,2,...$ — произвольные постоянные.

Функция $Y_n(\varphi,\theta)$ (и, в частности, любое слагаемое в сумме (XVI), т.е. $P_n(\cos\theta)$, $P_n^{(m)}(\cos\theta)\cos m\varphi$, $P_n^{(m)}(\cos\theta)\sin m\varphi$, где $m = 1,2,...,n$) называется сферической функцией порядка n, а произведение сферической функции порядка n и функции r^n или функции $r^{-(n+1)}$ (см. (XIV), (XV)) является гармоническим продолжением сферической функции со сферы $\{r = R, \varphi \in [0,2\pi], \theta \in [0,\pi]\}$ при любом $R > 0$ в $R^3 \setminus \{0\}$.

По аналогии с двумерным случаем решение внутренней задачи краевой задачи в шаре $\{|x| < R\} \in R^3$, $R > 0$, следует искать в виде

$$u_n(r,\varphi,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n Y(\varphi,\theta), \quad r < R, \quad \varphi \in [0,2\pi], \ \theta \in [0,\pi],$$

с соответствующим образом подобранными коэффициентами α_{mn} в (XVI).

Решение внешней краевой задачи в $\{|x| > R\} \in R^3$, $R > 0$, регулярное на бесконечности (то есть в трехмерном случае стремящееся к нулю на бесконечности), следует искать в виде

$$u_n(r,\varphi,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{-(n+1)} Y(\varphi,\theta), \quad r > R, \ \varphi \in [0,2\pi], \quad \theta \in [0,\pi],$$

с соответствующим образом подобранными коэффициентами α_{mn} в (XVI).

Решение же краевой задачи в сферическом слое $\{R_1 < |x| < R_2\} \in R^3$, $0 < R_1 < R_2 < \infty$, следует искать в виде

$$u_n(r,\varphi,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(r^n Y(\varphi,\theta) + r^{-(n+1)} \tilde{Y}(\varphi,\theta) \right), \ R_1 < r < R_2, \varphi \in [0,2\pi], \theta \in [0,\pi],$$

где

$$\tilde{Y}(\varphi,\theta) = \tilde{\alpha}_{0n} P_n(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{n} \left(\tilde{\alpha}_{mn} \cos k\varphi + \tilde{\beta}_{mn} \sin k\varphi \right) P_n^{(m)}(\cos\theta) \quad (\widetilde{\text{XVI}})$$

с соответствующим образом подобранными коэффициентами в (XVI) и $(\widetilde{\text{XVI}})$.

Поскольку в приведенных формулах для решения краевых задач функции P_n и P_n^m умножаются на постоянные, которые в процессе решения задач следует еще определить, то и для самих этих функций в наших целях удобнее пользоваться следующими формулами:

$$P_n(t) = \alpha_n \frac{d^n}{dt^n}\left(\left(1 - t^2\right)^n \right), \ t \in R^1, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$P_n^m(t) = \beta_{nm} \left(1 - t^2\right)^{m/2} \frac{d^m}{dt^m}\left(P_n(t)\right), -1 \le t \le 1, \ \ m = 1, 2, \dots, n, \ n = 1, 2, \dots,$$

с такими постоянными α_n и β_{nm}, чтобы соответствующие выражения выглядели проще. Например, в формуле $P_1(t) = \alpha_1 \frac{d}{dt}\left(1 - t^2\right) = -2\alpha_1 t$ положить $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$ и считать, что $P_1(t) = t$, $t \in R^1$, в формуле $P_2(t) = \alpha_2 \frac{d^2}{dt^2}\left(\left(1-t^2\right)^2\right) = \alpha_2\left(-4+12t^2\right) = 4\alpha_2\left(3t^2-1\right)$ положить $\alpha_2 = \frac{1}{4}$ и считать, что $P_2(t) = \left(3t^2-1\right)$, $t \in R^1$, и т.д.

Таким образом, для наших целей можно считать, что

$$P_0(t) = 1,$$

$$P_1(t) \equiv t,$$

$$P_2(t) \equiv 3t^2 - 1,$$

$$P_3(t) \equiv 5t^3 - 3t.$$

Из аналогичных соображений в качестве присоединенных функций можно пользоваться выражениями

$$P_1^{(1)}(t) = \left(1-t^2\right)^{1/2},\ t \in [-1,1],$$

$$P_2^{(1)}(t) = \left(1-t^2\right)^{1/2} t, \quad P_2^{(2)}(t) = \left(1-t^2\right), \quad t \in [-1,1],$$

$$P_3^{(1)}(t) = \left(1-t^2\right)^{1/2}\left(5t^2-1\right), P_3^{(2)}(t) = \left(1-t^2\right)t, P_3^{(3)}(t) = \left(1-t^2\right)^{3/2}, t \in [-1,1],$$

Следовательно, можно считать, что

$$Y_0(\varphi,\theta) = a_{00},$$

$$Y_1(\varphi,\theta) = a_{10}\cos\theta + a_{11}\sin\theta\cos\varphi + b_{11}\sin\theta\sin\varphi,$$

$$Y_2(\varphi,\theta) = a_{20}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + a_{21}\sin 2\theta\cos\varphi +$$
$$+b_{21}\sin 2\theta\sin\varphi + a_{22}\sin^2\theta\cos 2\varphi + b_{22}\sin^2\theta\sin 2\varphi,$$

$$Y_3(\varphi,\theta) = a_{30}\left(5\cos^3\theta - 3\cos\theta\right) + a_{31}\sin\theta\left(5\cos^2\theta - 1\right)\cos\varphi +$$
$$+b_{31}\sin\theta\left(5\cos^2\theta - 1\right)\sin\varphi + a_{32}\sin^2\theta\cos\theta\cos 2\varphi +$$
$$+b_{32}\sin^2\theta\cos\theta\sin 2\varphi + a_{33}\sin^3\theta\cos 3\varphi + b_{33}\sin^3\theta\sin 3\varphi, \ldots$$

Решение краевой задачи для уравнения Пуассона можно свести к решению краевой задачи для уравнения Лапласа следующим образом. Берем какое-нибудь (гладкое) решение $u_0(x)$ уравнения Пуассона. Тогда функция $\upsilon(x) = u(x) - u_0(x)$, где $u(x)$ — искомое решение задачи для уравнения Пуассона, является решением соответствующей краевой задачи для уравнения Лапласа и тем самым $u(x) = \upsilon(x) + u_0(x)$.

Ниже в областях $\{|x|<R\}, \{R_1<|x|<R_2\}, \{|x|>R\}$, $0<R<\infty$, $0<R_1<R_2<\infty$, рассматриваются простейшие краевые задачи для уравнения Лапласа (Пуассона), при этом в граничном условии $\left.\left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}+\sigma u\right)\right|_{|x|=\partial Q}=f$ всегда считается, что $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней по отношению к рассматриваемой области нормали к границе, а постоянная $\sigma \geq 0$.

Напомним некоторые результаты.

Случай области $\{|\mathrm{x}|<\mathrm{R}\}$.

В этом случае решение уравнения Лапласа при граничном условии $u|_{r=R}=f$ единственно и существует при любой $f \in C(|x|=R)$. В случае граничного условия $\left.\left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}+\sigma u\right)\right|_{|x|=R}=f$ при $\sigma>0$ решение также единственно и существует для всех $f \in C(|x|=R)$. Если же $\sigma=0$, то решение существует для тех $f \in C(|x|=R)$, для которых $\int\limits_{|x|=R} f dS=0$, при этом решение определяется с точностью до постоянного слагаемого.

Случай области $\{|\mathrm{x}|>\mathrm{R}\}$.

В этом случае рассматриваются решения уравнения Лапласа, регулярные на бесконечности.

В двумерном случае дело обстоит так же, как и в случае области $\{|x|<R\}$: задача с граничным условием $f \in C(|x|=R)$ однозначно разрешима при любой $f \in C(|x|=R)$, задача с граничным условием $\left.\left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}+\sigma u\right)\right|_{|x|=R}=f$, где $\sigma>0$, также однозначно разрешима при любой $f \in C(|x|=R)$, а эта задача с $\sigma=0$ при $f \in C(|x|=R)$ разрешима только при условии $\int\limits_{|x|=R} f ds=0$, и решение ее определяется с точностью до произвольного слагаемого.

В трехмерном случае задача с граничным условием $u|_{r=R}=f$ однозначно разрешима при любой $f \in C(|x|=R)$, и задача с граничным условием $\left.\left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}+\sigma u\right)\right|_{|x|=R}=f$, где $\sigma \geq 0$, также однозначно разрешима при любой $f \in C(|x|=R)$.

Случай области $\{\mathrm{R}_1<|\mathrm{x}|<\mathrm{R}_2\}$ **.**

В этом случае, если хотя бы на одной части границы (на $\{|x|=R_1\}$ или на $\{|x|=R_2\}$) задано граничное условие первой краевой задачи, например, $u|_{r=R_1}=f_1$, а на другой части границы условие $u|_{r=R_2}=f_2$ либо условие $\left.\left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}+\sigma_2 u\right)\right|_{|x|=R_2}=f_2$, то задача однозначно разрешима для любых $f_1 \in C(|x|=R_1)$ и $f_2 \in C(|x|=R_2)$. Если на обеих частях границы заданы условия третьей (второй) краевой задачи, т.е. $\left.\left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}+\sigma_1 u\right)\right|_{|x|=R_1}=f_1$, $\left.\left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}+\sigma_2 u\right)\right|_{|x|=R_2}=f_2$, то при $\sigma_1+\sigma_2>0$ эта задача однозначно разрешима при любых $f_1 \in C(|x|=R_1)$, $f_2 \in C(|x|=R_2)$, если же $\sigma_1=\sigma_2=0$, то задача имеет решение тогда и только тогда, когда $\int\limits_{|x|=R_1} f_1 dS-\int\limits_{|x|=R_2} f_2 dS=0$, и это решение определяется с точностью до произвольного слагаемого.

Пример 1. Решить задачу Коши в R^2 $(x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi)$:

$$\Delta u=12y\ ,\ \frac{1}{2}<r<1\ ,\ 0\leq\varphi\leq 2\pi\ ; \tag{1}$$

$$u|_{r=\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}\sin^3\varphi+\frac{1}{2}\cos^2\varphi\ ,\ 0\leq\varphi\leq 2\pi\ ; \tag{2}$$

$$u|_{r=1}=2\sin^3\varphi+\cos 2\varphi\ ;\ 0\leq\varphi\leq 2\pi\ . \tag{3}$$

Δ Так как уравнение (1) является неоднородным, то прежде всего подберем какое-нибудь частное решение уравнения (1).

Возьмем, например,

$$w(x,y)=2y^3 .$$

Введем новую искомую функцию $\upsilon(x,y)$ такую, что

$$\upsilon(x,y)=u(x,y)-w(x,y),$$

$$\upsilon(x,y)=u(x,y)-2y^3, \tag{4}$$

и запишем задачу (1), (2), (3) для функции $\upsilon(x,y)$:

$$\Delta\upsilon=0, \quad \frac{1}{2}<r<1, \qquad 0\le\varphi\le 2\pi; \tag{5}$$

$$\upsilon\big|_{r=\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cos^2\varphi, \quad 0\le\varphi\le 2\pi, \tag{6}$$

$$\upsilon\big|_{r=1}=\cos 2\varphi, \quad 0\le\varphi\le 2\pi. \tag{7}$$

(Здесь пользуемся тем, что

$$\upsilon\big|_{r=\frac{1}{2}}=u\big|_{r=\frac{1}{2}}-w\big|_{r=\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}\sin^3\varphi+\frac{1}{2}\cos^2\varphi-2\left(r\sin\varphi\right)^3\Big|_{r=\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cos^2\varphi,$$

$$\upsilon\big|_{r=1}=u\big|_{r=1}-w\big|_{r=1}=2\sin^3\varphi+\cos 2\varphi-2\left(r\sin\varphi\right)\big|_{r=1}=\cos 2\varphi.)$$

Разложив правые части условий (6) и (7) в ряды Фурье по системе $\{1,\cos\varphi,\sin\varphi,...,\cos n\varphi,\sin n\varphi,...\}$, получаем

$$u\big|_{r=\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cos 2\varphi, \qquad 0\le\varphi\le 2\pi, \tag{6*}$$

$$\upsilon\big|_{r=1}=\cos 2\varphi, \qquad 0\le\varphi\le 2\pi. \tag{7*}$$

В силу ортогональности системы функций $\{1,\cos\varphi,\sin\varphi,...,\cos n\varphi,\sin n\varphi,...\}$ в пространстве $L_2(0,2\pi)$ ищем решение задачи (5), (6*), (7*) в виде

$$\upsilon(r,\varphi)=a+b\ln r+\left(cr^2+\frac{d}{r^2}\right)\sin 2\varphi. \tag{8}$$

Найдем коэффициенты a,b,c,d, подставляя (8) в (6*) и (7*). Получим

$$\upsilon\big|_{r=\frac{1}{2}}=a+b\cdot\ln\frac{1}{2}+\left(c\cdot\frac{1}{4}+4d\right)\cos 2\varphi=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cos 2\varphi,$$

$$\upsilon\big|_{r=1}=a+\left(c+d\right)\cos 2\varphi=\cos 2\varphi.$$

Отсюда имеем следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a + b\ln\frac{1}{2} = 0, \\ \frac{1}{4}c + 4d = \frac{1}{4}, \\ a = 0, \\ c + d = 1. \end{cases}$$

Следовательно, $a = 0,\ b = -\dfrac{1}{4\ln 2},\ c = 1,\ d = 0.$

Из равенства (8) следует, что функция

$$\upsilon = -\frac{1}{4\ln 2}\ln r - r^2\cos 2\varphi$$

есть решение задачи (5), (6), (7), а из (4) следует, что функция

$$u = -\frac{1}{4\ln 2}\ln r - r^2\cos 2\varphi + 2y^3 = -\frac{1}{4\ln 2}\ln r - r^2\cos 2\varphi + 2r^3\sin^3\varphi$$

есть решение задачи (1), (2), (3). ▲

Пример 2. Решить задачу в $R^2\ \left(x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi\right)$:

$$\Delta u = -\frac{8}{r^3}\cos 3\varphi\ , \quad r > 1\,,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\ ; \tag{1}$$

$$\left(u - u_r\right)\Big|_{r=1} = \sin^2\varphi\,, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi\ . \tag{2}$$

∆ Так как уравнение (1) является неоднородным, то найдем какое-нибудь частное решение уравнения (1). Запишем оператор Лапласа в полярных координатах и подберем частное решение уравнения

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = -\frac{8}{r^3}\cos 3\varphi\ , \tag{3}$$

которое является ограниченным в области $\left\{r > 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\right\}$. Такое решение уравнения (3) можно найти, например, в виде

$$w\left(r,\varphi\right) = \frac{A}{r}\cos 3\varphi\ , \tag{4}$$

где постоянную A найдем, подставив функцию $w\left(r,\varphi\right)$, заданную соотношением (4), в уравнение (3). Получим

$$\frac{2A}{r^3}\cos 3\varphi - \frac{1}{r}\frac{A}{r^2}\cos 3\varphi + \frac{1}{r^2}\left(-\frac{9A}{r}\cos 3\varphi\right) = -\frac{8}{r^3}\cos 3\varphi\ \ , A = 1\,.$$

Следовательно, функция $w(r,\varphi)=\frac{1}{r}\cos 3\varphi$ есть частное решение уравнения (3) (или, что то же самое, уравнения (1)). Введем новую искомую функцию $\upsilon(r,\varphi)$, такую что

$$\upsilon(r,\varphi)=u(r,\varphi)-w(r,\varphi),$$

$$\upsilon(r,\varphi)=u(r,\varphi)-\frac{1}{r}\cos 3\varphi, \tag{5}$$

и запишем задачу (1), (2) для функции $\upsilon(r,\varphi)$:

$$\Delta\upsilon=0, \quad r>1, \quad 0\le\varphi\le 2\pi; \tag{6}$$

$$\left.(\upsilon-\upsilon_r)\right|_{r=1}=\sin^2\varphi-2\cos 3\varphi, \quad 0\le\varphi\le 2\pi. \tag{7}$$

(здесь пользуемся тем, что

$$\left.(u-u_r)\right|_{r=1}=\left.\left(\left(u-\frac{1}{r}\cos 3\varphi\right)-\left(u_r+\frac{1}{r^2}\cos 3\varphi\right)\right)\right|_{r=1}=$$

$$=\left.(u-u_r)\right|_{r=1}-\left.\left(\left(\frac{1}{r}\cos 3\varphi\right)+\left(\frac{1}{r^2}\cos 3\varphi\right)\right)\right|_{r=1}=\sin^2\varphi-2\cos 3\varphi\ )$$

Представим правую часть условия (7) рядом Фурье по системе $\{1,\cos\varphi,\sin\varphi,\ldots,\cos n\varphi,\sin n\varphi,\ldots\}$, получим

$$\left.(\upsilon-\upsilon_r)\right|_{r=1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 3\varphi-2\cos 3\varphi, \ 0\le\varphi\le 2\pi. \tag{7*}$$

Решение задачи (6), (7*) ищем в виде

$$\upsilon(r,\varphi)=a+\frac{b}{r^2}\cos 2\varphi+\frac{c}{r^3}\cos 3\varphi. \tag{8}$$

Находим a, b, c, подставляя функцию, заданную соотношением (8), в условие (7*). Получаем

$$\left.(\upsilon-\upsilon_r)\right|_{r=1}=(a+b\cos 2\varphi+c\cos 3\varphi)-(-2b\cos 2\varphi-3c\cos 3\varphi)=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\varphi-2\cos 3\varphi.$$

Отсюда находим $a=\frac{1}{2}$, $3b=-\frac{1}{2}$, $4c=-2$.

Следовательно, $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{6}$, $c=-\frac{1}{2}$.

Поэтому функция

$$\upsilon(r,\varphi)=\frac{1}{2}-\frac{1}{6r^2}\cos 2\varphi-\frac{1}{2r^3}\cos 3\varphi$$

есть решение задачи (6), (7), а из (5) следует, что функция

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2}-\frac{1}{6r^2}\cos 2\varphi-\frac{1}{2r^3}\cos 3\varphi+\frac{1}{r}\cos 3\varphi$$

есть решение задачи (1), (2). ▲

Пример 3. Решить задачу в R^3 $(x=r\cos\varphi\sin\theta, y=r\sin\varphi\sin\theta, z=r\cos\theta)$:

$$\Delta u=6z\ ,\quad r>1\ ,\quad 0\le\varphi\le 2\pi\ ,\quad 0\le\theta\le\pi\ ; \tag{1}$$

$$u\big|_{r=1}=2\sin^2\theta\sin^2\varphi+\cos^3\theta\ . \tag{2}$$

Δ Так как уравнение (1) является неоднородным, то найдем какое-нибудь частное решение уравнения (1). Можно взять, например,

$$w(x,y,z)=z^3=r^3\cos^3\theta\ ,$$

Введем новую искомую функцию

$$\upsilon(x,y,z)=u(x,y,z)-w(x,y,z)\ ,$$

$$\upsilon(x,y,z)=u(x,y,z)-z^3\ ,$$

или

$$\upsilon=u-r^3\cos^3\theta \tag{3}$$

и запишем задачу (1), (2) для новой искомой функции υ . Получим

$$\Delta\upsilon=0\ ,\quad r<1\ ,\quad 0\le\varphi\le 2\pi\ ,\qquad 0\le\theta\le\pi\ ; \tag{4}$$

$$\upsilon\big|_{r=1}=2\sin^2\theta\sin^2\varphi\ ,\quad 0\le\varphi\le 2\pi\ ,\qquad 0\le\theta\le\pi\ . \tag{5}$$

Представляя правую часть условия (5) рядом Фурье по системе сферических функций, находим

$$\begin{aligned}\upsilon\big|_{r=1}&=\sin^2\theta(1-\cos 2\varphi)=\sin^2\theta-\sin^2\theta\cos 2\varphi=\\&=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}(3\cos^2\theta-1)-\sin^2\theta\cos 2\varphi.\end{aligned} \tag{5*}$$

Следовательно, ищем решение задачи (4), (5) (или (5*)) в виде

$$\upsilon=\frac{a}{r}+\frac{b}{r^3}(3\cos^2\theta-1)+\frac{c}{r^3}\sin^2\theta\cos 2\varphi \tag{6}$$

(с учетом условия регулярности решения на бесконечности: $\upsilon\to\infty$ при $r\to\infty$). Находим коэффициенты a , b , c , подставляя (6) в (5*). Получаем

$$\upsilon\Big|_{r=1} = a + b\left(3\cos^2\theta - 1\right) + c\sin^2\theta\cos 2\varphi =$$
$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\left(3\cos^2\theta - 1\right) - \sin^2\theta\cos 2\varphi,$$

откуда находим, что $a = \dfrac{2}{3}$, $b = -\dfrac{1}{3}$, $c = -1$.

Следовательно, функция

$$\upsilon = \frac{2}{3}\frac{1}{r} - \frac{1}{3}\frac{1}{r^3}\left(3\cos^2\theta - 1\right) - \frac{1}{r^3}\sin^2\theta\cos 2\varphi$$

есть решение задачи (4), (5), а из (3) следует, что функция

$$u = \frac{2}{3}\frac{1}{r} - \frac{1}{3}\frac{1}{r^3}\left(3\cos^2\theta - 1\right) - \frac{1}{r^3}\sin^2\theta\cos 2\varphi + r^3\cos^3\theta$$

есть решение задачи (1), (2). ▲

Пример 4. Решить задачу в R^3
$\left(x = r\cos\varphi\sin\theta, y = r\sin\varphi\sin\theta, z = r\cos\theta\right)$:

$$\Delta u = \frac{3}{r^5}, \quad \frac{1}{2} < r < 1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \theta \le \pi; \qquad (1)$$

$$u\Big|_{r=\frac{1}{2}} = \left(\cos 2\theta - 1\right)\sin^2\varphi + \sin^2\theta, \; u_r\Big|_{r=1} = \sin 2\theta\sin\varphi, \qquad (2)$$

$0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$.

Δ Так как уравнение (1) является неоднородным, то найдем какое-нибудь частное решение уравнения (1). Можно искать его, например, в виде

$$w(r,\varphi,\theta) = f(r),$$

Тогда из уравнения (1) следует, что

$$f''(r) + \frac{2}{r}f'(r) = \frac{3}{r^5} \qquad (3)$$

Ищем решение уравнения (3) в виде

$$f(r) = \frac{A}{r^3}, \qquad (4)$$

где постоянную A найдем, используя уравнение (3) и равенство (4):

$$\frac{12A}{r^5} + \frac{2}{r}\left(-\frac{3A}{r^4}\right) = \frac{3}{r^5}, \quad 12A - 6A = 3.$$

Следовательно, $A=\dfrac{1}{2}$ и $w(r,\varphi,\theta)=f(r)=\dfrac{1}{2r^3}$ есть частное решение уравнения (3) (или (1)).

Введем новую искомую функцию $\upsilon(r,\varphi)$ такую, что

$$\upsilon(r,\varphi,\theta)=u(r,\varphi,\theta)-w(r,\varphi,\theta),$$

$$\upsilon(r,\varphi,\theta)=u(r,\varphi,\theta)-\frac{1}{2r^3}, \tag{5}$$

и запишем задачу (1), (2) для функции $\upsilon(r,\varphi,\theta)$:

$$\Delta\upsilon=0, \quad \frac{1}{2}<r<1, \quad 0\le\varphi\le 2\pi, \quad 0\le\theta\le\pi; \tag{6}$$

$$\upsilon\big|_{r=\frac{1}{2}}=(\cos 2\theta-1)\sin^2\varphi+\sin^2\theta-4, \upsilon_r\big|_{r=1}=\sin 2\theta\sin\varphi+\frac{3}{2}, \tag{7}$$

$$0\le\varphi\le 2\pi, \ 0\le\theta\le\pi$$

(здесь пользуемся тем, что

$$\upsilon\big|_{r=\frac{1}{2}}=u\big|_{r=\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{2r^3}\right)\bigg|_{r=\frac{1}{2}}=(\cos 2\theta-1)\sin^2\varphi+\sin^2\theta-4,$$

$$\upsilon_r\big|_{r=1}=u_r\big|_{r=1}-\left(-\frac{3}{2r^4}\right)\bigg|_{r=1}=\sin 2\theta\sin\varphi+\frac{3}{2}.)$$

Разложим правые части условий (7) в ряды Фурье по системе сферических функций. Получим

$$\upsilon\big|_{r=\frac{1}{2}}=-2\sin^2\theta\sin^2\varphi+\sin^2\theta-4=-\sin^2\theta(1-\cos 2\varphi)+\sin^2\theta-4=$$

$$=\cos 2\varphi\sin^2\theta-4, \quad 0\le\varphi\le 2\pi, \quad 0\le\theta\le\pi, \tag{7*}$$

$$\upsilon_r\big|_{r=1}=\sin 2\theta\sin\varphi+\frac{3}{2}, \ 0\le\varphi\le 2\pi, \quad 0\le\theta\le\pi. \tag{7**}$$

Ищем решение задачи (6), (7*), (7**) в виде

$$\upsilon=a+\frac{b}{r}+\left(cr^2+\frac{d}{r^3}\right)\cos 2\varphi\sin^2\theta+\left(kr^2+\frac{l}{r^3}\right)\sin 2\theta\sin\varphi, \tag{8}$$

Найдем постоянные a, b, c, d, k, l, подставляя функцию, заданную соотношениями (8), в условия (7*) и (7**).

Получаем

$$\upsilon\big|_{r=\frac{1}{2}}=a+2b+\left(\frac{c}{4}+8d\right)\cos 2\varphi\sin^2\theta+\left(\frac{k}{4}+8l\right)\sin 2\theta\sin\varphi=\cos 2\varphi\sin^2\theta-4,$$

$$\upsilon_r\big|_{r=1} = -b + (2c - 3d)\cos 2\varphi \sin^2\theta + (2k - 3l)\sin 2\theta \sin\varphi = \sin 2\theta \sin\varphi + \frac{3}{2}$$

(здесь пользуемся тем, что

$$\upsilon_r = -\frac{b}{r^2} + \left(2cr - \frac{3d}{r^4}\right)\cos 2\varphi \sin^2\theta + \left(2kr - \frac{3l}{r^4}\right)\sin 2\theta \sin\varphi \text{ .)}$$

Следовательно, для нахождения a, b, c, d, k, l получим следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a + 2b = -4, \\ \dfrac{c}{4} + 8d = 1, \\ \dfrac{k}{4} + 8l = 0, \\ -b \qquad = \dfrac{3}{2}, \\ 2c - 3d = 0, \\ 2k - 3l = 1, \end{cases}$$

откуда находим $a = -1$, $b = -\dfrac{3}{2}$, $c = \dfrac{12}{67}$, $d = \dfrac{8}{67}$, $k = \dfrac{32}{67}$, $l = -\dfrac{1}{67}$.

Поэтому из равенства (8) следует, что функция

$$\upsilon = -1 - \frac{3}{2r} + \frac{1}{67}\left(12r^2 + \frac{8}{r^3}\right)\cos 2\varphi \sin^2\theta + \frac{1}{67}\left(32r^2 - \frac{1}{r^3}\right)\sin 2\theta \sin\varphi$$

есть решение задачи (6), (7), а в силу (5) функция

$$u = \frac{1}{2r^3} + \upsilon,$$

где функция υ определена выше, есть решение задачи (1), (2). ▲

§ 5. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Решением (классическим решением) задачи Коши для волнового уравнения

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x,t), \quad x \in R^n, \quad t > 0, \tag{I}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in R^n, \tag{II}$$

$$u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in R^n, \tag{III}$$

называется функция $u(x,t) \in C^2 \left(x \in R^n, t \geq 0\right)$, удовлетворяющая уравнению (I) и условиям (II), (III). Здесь a — вещественная постоянная. Решение задачи (I), (II), (III) единственно.

Если $n = 3$ и

$$f(x,t) \in C^2 \left(x \in R^n, t \geq 0\right), \varphi(x) \in C^3 \left(R^3\right), \psi(x) \in C^2 \left(R^3\right),$$

то решение задается формулой Кирхгофа:

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_{|x-y| \leq at} \frac{f\left(y, t - \dfrac{|x-y|}{a}\right)}{|x-y|} dy + \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{|x-y|=at} \psi(y)\, ds_y +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{|x-y|=at} \varphi(y)\, ds_y \right).$$

Если $n = 2$ и

$$f(x,t) \in C^2 \left(x \in R^n, t \geq 0\right), \varphi(x) \in C^3 \left(R^3\right), \psi(x) \in C^2 \left(R^3\right),$$

то решение задается формулой Пуассона:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi a} \int\limits_0^t \int\limits_{|x-y| \leq a(t-\tau)} \frac{f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau}{\sqrt{a^2 (t-\tau)^2 - |x-y|^2}} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi a} \int\limits_{|x-y| \leq at} \frac{\psi(y)\, dy}{\sqrt{a^2 t^2 - |x-y|^2}} + \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int\limits_{|x-y| \leq at} \frac{\varphi(y)\, dy}{\sqrt{a^2 t^2 - |x-y|^2}} \right).$$

Если $n = 1$ и

$$f(x,t) \in C^1 \left(x \in R^n, t \geq 0\right), \varphi(x) \in C^2 \left(R^3\right), \psi(x) \in C^1 \left(R^3\right),$$

то решение задается формулой Д'Аламбера:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\big(\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\big)+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(y)\,dy+$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(y,\tau)dy.$$

Решением (классическим решением) задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t-a^2\Delta u=f(x,t),\quad x\in R^n,\ t>0, \tag{IV}$$

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x),\quad x\in R^n, \tag{V}$$

где a — вещественная постоянная, называется функция $u(x,t)\in C^{2,1}_{x,t}\left(x\in R^n,t\ge 0\right)\bigcap C\left(x\in R^n,t\ge 0\right)$, удовлетворяющая уравнению (IV) и условию (V).

Обозначим через B_α, где α — некоторое вещественное число, множество функций $\left\{g(x,t),x\in R^n,t\ge 0\right\}$, для каждой из которых и для каждого $T>0$ существует постоянная $C=C(g,T)>0$ такая, что в характеристической полосе $\left\{x\in R^n,0\le t\le T\right\}$ имеет место неравенство

$$\left|g(x,t)\right|\le Ce^{\alpha|x|^2},\quad x\in R^n,\quad 0\le t\le T.$$

Объединение $\bigcup\limits_{\alpha\in R^1}B_\alpha=B$ назовем классом Тихонова.

Решение задачи (IV), (V), принадлежащее классу B, единственно.

Если f и g — такие функции, что $f(x,t)\in C^1\left(x\in R^n,t\ge 0\right)$, $\varphi(x)\in C\left(R^3\right)$, и эти функции принадлежат классу B, то функция

$$u(x,t)=\frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n}\int\limits_{R^n}\varphi(y)e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}}dy+$$

$$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{R^n}\frac{f(y,\tau)dy}{\left(2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^n}e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-\tau)}}dy$$

принадлежит классу B и является решением задачи Коши (IV), (V) (формула Пуассона).

При решении задачи Коши для волнового уравнения полезно иметь в виду следующее. Пусть $\varphi(x)\in C^\infty\left(R^n\right)$, $\psi(x)\in C^\infty\left(R^n\right)$ и ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{2n}t^{2n}}{(2n)!}\Delta^n\varphi(x), \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{2n}t^{2n+1}}{(2n+1)!}\Delta^n\psi(x)$$

и все ряды, полученные из них почленным дифференцированием до второго порядка включительно по переменным $x_1, x_2, ..., x_n, t$, сходятся равномерно на множестве $\{|x| \le R, 0 \le t \le T\}$ при любых $R > 0$ и $, T > 0$ тогда функция

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{2n}t^{2n}}{(2n)!}\Delta^n\varphi(x)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{2n}t^{2n+1}}{(2n+1)!}\Delta^n\psi(x) \qquad \text{(VI)}$$

является решение задачи (I), (II), (III) при $f \equiv 0$.

Аналогичное утверждение справедливо и в случае задачи Коши для уравнения теплопроводности, Пусть $\varphi(x) \in C^{\infty}(R^n)$, а ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{2n}t^{n}}{(n)!}\Delta^n\varphi(x)$$

и все ряды, полученные из него почленным дифференцированием до второго порядка включительно по переменным $x_1, x_2, ..., x_n, t$, равномерно сходятся в множестве $\{|x| \le R, 0 \le t \le T\}$ при любых $R > 0$ и $T > 0$, тогда функция

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{2n}t^{n}}{(n)!}\Delta^n\varphi(x) \qquad \text{(VII)}$$

является решением задачи Коши (IV), (V) для уравнения теплопроводности при $f \equiv 0$.

Полезно также иметь ввиду, что в случае уравнения теплопроводности решением задачи

$$u_t - a^2\Delta u = f(x,t), \quad x \in R^n, \ t > 0,$$

$$u\big|_{t=0} = \prod_{i=1}^{n}\varphi_i(x_i), \quad x_1 \in R^1, ..., x_n \in R^1,$$

является функция

$$u(x,t) = u(x_1, x_2, ..., x_n, t) = \prod_{i=1}^{n} u_i(x_i, t),$$

где функция $u_i(\xi, t)$ — решение задачи Коши:

$$u_{it} - a^2 u_{i\xi\xi} = 0, \ \ \xi \in R^1, \ \ t > 0,$$

$$u_i\big|_{t=0} = \varphi_i(\xi), \quad \xi \in R^1, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Рассмотрим несколько достаточно часто встречающихся классов начальных функций.

$\boxed{A}$ Пусть начальная функция (начальные функции) есть собственная функция (собственные функции) оператора Лапласа Δ.

Пример 1. Найдем решение следующей задачи:

$$u_{tt} = 3\Delta u\,, \quad t > 0\,, \ \left(x, y, z\right) \in R^3\,; \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = 2\sin\left(x - y + z\right), \quad \left(x, y, z\right) \in R^3\,; \tag{2}$$

$$u_t\big|_{t=0} = -5\sin\left(x - y + z\right), \ \left(x, y, z\right) \in R^3\,; \tag{3}$$

Δ Заметим, что

$$\Delta\sin\left(x - y + z\right) = -3\sin\left(x - y + z\right),$$

то есть $\sin\left(x - y + z\right)$ - собственная функция оператора Δ.

Ищем решение задачи (1), (2), (3) в виде

$$u\left(x, y, z, t\right) = f\left(t\right)\sin\left(x - y + z\right). \tag{4}$$

Подставим соотношение (4) в уравнение (1), получим

$$f''\left(t\right)\sin\left(x - y + z\right) = 3f\left(t\right)\left(-3\sin\left(x - y + z\right)\right)$$

Отсюда

$$f''\left(t\right) + 9f\left(t\right) = 0\,,$$

и, следовательно,

$$f\left(t\right) = C_1\cos 3t + C_2\sin 3t\,,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Значит, функция

$$u\left(x, y, z, t\right) = \left(C_1\cos 3t + C_2\sin 3t\right)\sin\left(x - y + z\right), \tag{5}$$

при любых постоянных C_1 и C_2 удовлетворяет уравнению (1). Подберем C_1 и C_2 так, чтобы выполнялись бы и условия (2) и (3).

Получаем

$$u\big|_{t=0} = C_1\sin\left(x - y + z\right) = 2\sin\left(x - y + z\right),$$

$$u_t\big|_{t=0} = C_2 3\sin\left(x - y + z\right) = -5\sin\left(x - y + z\right).$$

Отсюда имеем

$$C_1 = 2\,, \quad C_2 = -\frac{5}{3}\,.$$

Подставляя найденные значения C_1 и C_2 в (5), получаем, что функция

$$u(x,y,z,t)=\left(2\cos 3t-\frac{5}{3}\sin 3t\right)\sin(x-y+z)$$

есть решение задачи (1), (2), (3).

Этот же результат можно получить, воспользовавшись в данном случае формулой (VI).

Нетрудно заметить, что

$$\Delta^k\left(\sin(x-y+z)\right)=(-3)^k\sin(x-y+z)\,,\quad k=0,1,2,\ldots$$

Поэтому, учитывая, что для задачи (1), (2), (3) $a^2=3$ и используя формулу (VI), получаем

$$u=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^k t^{2k}2(-3)^k\sin(x-y+z)}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^k t^{2k+1}(-5)(-3)^k\sin(x-y+z)}{(2k+1)!}=$$

$$=2\sin(x-y+z)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(3t)^{2k}}{(2k)!}-5\sin(x-y+z)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(3t)^{2k+1}3^{-1}}{(2k+1)!}=$$

$$=2\cos 3t\sin(x-y+z)-5\sin 3t\sin(x-y+z)\frac{1}{3}=$$

$$=\left(2\cos 3t-\frac{5}{3}\sin 3t\right)\sin(x-y+z)\,.\qquad\blacktriangle$$

$\boxed{B}$ Пусть при некотором $N\in\mathbb{N}$ имеем, что

$\Delta^N(\varphi)=0$, $\Delta^N(\psi)=0$ в случае задачи (I), (II), (III) или $\Delta^N(\varphi)=0$ в случае задачи (IV), (V).

Тогда для поиска решения удобно пользоваться формулами (VI) и(VII), соответственно.

Пример 2. Найдем решение следующей задачи:

$$u_t=5\Delta u\,,\quad (x,y,z)\in R^3\,,\quad t>0\,;$$

$$u\big|_{t=0}=xy^2z^3\,,\quad (x,y,z)\in R^3\,.$$

Δ В данном случае $a^2=5$, $\varphi=xy^2z^3$. Следовательно, воспользовавшись формулой (VII), получаем

$$u=xy^2z^3+\frac{5t}{1!}\left(0+2xz^3+xy^2 6z\right)+\frac{5^2t^2}{2!}\left(0+2x6z+2x6z\right)=$$

$$= xy^2z^3 + 5t\left(2xz^3 + 6xy^2z\right) + 25t^2\, 6xz\,. \qquad \blacktriangle$$

Пример 3

$$2u_t = 7\Delta u\,, \quad (x,y,z)\in R^3\,, \quad t>0\,; \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = (x-2y+z)\sin x \operatorname{ch} z\,, \quad (x,y,z)\in R^3\,. \tag{2}$$

Δ Обозначим

$$\varphi = (x-2y+z)\sin x \operatorname{ch} z$$

и найдем $\Delta\varphi, \quad \Delta^2\varphi, \ \ldots$:

$$\Delta\varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{zz} = 2\cos x \operatorname{ch} z - (x-2y+z)\sin x \operatorname{ch} z +$$

$$+2\sin x \operatorname{sh} z + (x-2y+z)\sin x \operatorname{ch} z =$$

$$= 2\cos x \operatorname{ch} z + 2\sin x \operatorname{sh} z\,,$$

$$\Delta^2\varphi = \Delta(\Delta\varphi) = 2\Delta(\cos x \operatorname{ch} z) + 2\Delta(\sin x \operatorname{sh} x) =$$

$$= 2(-\cos x \operatorname{ch} z + \cos x \operatorname{ch} z) + 2(-\sin x \operatorname{sh} z + \sin x \operatorname{sh} z) = 0\,.$$

Следовательно, согласно формуле (VII) решение задачи (1), (2) имеет вид

$$u = \varphi + \frac{a^2 t}{1!}\Delta\varphi = (x-2y+z)\sin x \operatorname{ch} z + \frac{7}{2}t2(\cos x \operatorname{ch} z + \sin x \operatorname{sh} z) =$$

$$= (x-2y+z)\sin x \operatorname{ch} z + 7t(\cos x \operatorname{ch} z + \sin x \operatorname{sh} z)\,. \qquad \blacktriangle$$

$\boxed{C}$ Рассмотрим случай, когда начальная функция задачи Коши для уравнения теплопроводности «похожа» на фундаментальное решение уравнения теплопроводности.

Найдем, например, ограниченное решение следующей задачи.

Пример 4

$$u_t - u_{xx} = 0\,, \quad x\in R^1\,, \quad t>0 \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = e^{-x^2}\,, \quad x\in R^1\,. \tag{2}$$

Δ *Первый способ*. Искомое решение можно получить с помощью формулы Пуассона (здесь $a^2 = 1$):

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\,dy\,, \ x\in R^1\,, \ t\geq 0\,.$$

Так как

$$y^2+\frac{(x-y)^2}{4t}=\left(1+\frac{1}{4t}\right)y^2-\frac{2xy}{4t}+\frac{x^2}{4t}=$$

$$=\left(\sqrt{\frac{4t+1}{4t}}y\right)^2-2\left(\sqrt{\frac{4t+1}{4t}}y\right)\left(\sqrt{\frac{4t}{4t+1}}\frac{x}{4t}\right)+\frac{x^2}{4t}=$$

$$=\left[\left(\sqrt{\frac{4t+1}{4t}}y\right)^2-2\left(\sqrt{\frac{4t+1}{4t}}y\right)\left(\frac{x}{\sqrt{4t(4t+1)}}\right)+\frac{x^2}{4t(4t+1)}\right]-$$

$$-\frac{x^2}{4t(4t+1)}+\frac{x^2}{4t}=\left[\sqrt{\frac{4t+1}{4t}}y-\frac{x}{\sqrt{4t(4t+1)}}\right]^2+\frac{x^2}{4t+1}=$$

$$=\left(\sqrt{\frac{4t+1}{4t}}\right)^2\left(y-\frac{x}{4t+1}\right)^2+\frac{x^2}{4t+1},$$

то, сделав замену переменных в интеграле формулы Пуассона

$$\sqrt{\frac{4t+1}{4t}}\left(y-\frac{x}{4t+1}\right)=\xi,$$

$$\frac{dy\cdot\sqrt{1+4t}}{2\sqrt{t}}=d\xi,$$

Получим

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{4t+1}}e^{-\xi^2}e^{-\frac{x^2}{4t+1}}d\xi=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{4t+1}}\frac{1}{\sqrt{4t+1}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\xi^2}d\xi=\frac{1}{\sqrt{4t+1}}e^{-\frac{x^2}{4t+1}},\ t\geq 0.$$

Второй способ. Можно воспользоваться следующими соображениями. Функция

$$\upsilon(x,t,\tau)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}}, x\in R^1,\ t>\tau,\\ 0, \qquad x\in R^1,\ t\leq\tau,\end{cases}$$

лишь постоянным множителем отличается от фундаментального решения уравнения теплопроводности с особенностью в точке $\{x=0, t=\tau\}$ и, следовательно, является при $x\in R^1$, $t>\tau$ решением уравнения

$$u_t-u_{xx}=0,\ x\in R^1,\ \ t>\tau.$$

Следовательно, при любой постоянной C и любом $\tau < 0$ функция $w(x,t) = C\upsilon(x,t,\tau), t \geq 0, x \in R^1$ является ограниченным решением задачи Коши:

$$w_t - w_{xx} = 0\,, \quad x \in R^1\,, \quad t > 0\,,$$

$$w\Big|_{t=0} = \frac{Ce^{-\frac{x^2}{4\tau}}}{\sqrt{-\tau}}\,, \quad x \in R^1\,.$$

Полагая $\tau = -\dfrac{1}{4}, C = \dfrac{1}{2}$, в силу теоремы единственности получим, что решение задачи (1), (2) имеет вид

$$u(x,t) = w(x,t) = \frac{1}{2}\upsilon\left(x,t,-\frac{1}{4}\right) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t+1}}}{\sqrt{4t+1}}\,.$$

С помощью полученного решения можно найти ограниченное решение задачи:

$$u_t - u_{xx} = 0\,, \quad x \in R^1\,, \quad t > 0\,, \tag{3}$$

$$u\Big|_{t=0} = xe^{-x^2}\,, \quad x \in R^1\,. \tag{4}$$

Поскольку начальная функция в задаче (3), (4) равна $-\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\right)$, то решение этой задачи имеет вид

$$u(x,t) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-\frac{x^2}{4t+1}}}{\sqrt{4t+1}}\right) = \frac{xe^{-\frac{x^2}{4t+1}}}{(4t+1)^{3/2}}\,, \quad x \in R^1\,, \quad t \geq 0\,. \qquad \blacktriangle$$

Решение с помощью формулы Пуассона задачи, аналогичной (3), (4), можно посмотреть далее в **Примере 5** данного параграфа.

В качестве упражнения покажите, что решение задачи Коши:

$$u_t - u_{xx} = 0,\; x \in R^1,\; t > 0,$$

$$u\Big|_{t=0} = xe^{-(x-b)^2}\,, \quad x \in R^1\,,$$

где b — вещественная постоянная, имеет вид

$$u(x,t) = \frac{e^{-\frac{(x-b)^2}{4t+1}}}{(4t+1)^{3/2}}(x + 4bt)\,,\; x \in R^1\,, \quad t > 0\,,$$

а решение задачи

$$u_t - u_{xx} = 0,\; x \in R^1,\; t > 0,$$

$$u\big|_{t=0} = \sin x^2\,,\ x \in R^1$$

представляется в виде

$$u(x,t) = \operatorname{Im}\left(\frac{e^{-\frac{x^2}{4t+1}}}{\sqrt{1+i4t}}\right),\ x \in R^1\,.$$

$\boxed{D}$ Иногда бывает очень удобно делать замену пространственных переменных.

а). Линейная замена пространственных переменных.

Найдем, например, решение следующей задачи:

Пример 5

$$u_t - \Delta u = 0\,,\ t > 0\,,\ (x,y) \in R^2\,; \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = (12x+5y)e^{-\frac{(12x+5y)^2}{2}}\,,\ (x,y) \in R^2\,. \tag{2}$$

Δ Будем искать решение задачи (1), (2) как функцию, зависящую от

$$\left(\xi = \frac{12x+5y}{\sqrt{2}},\, t\right).$$

Пусть

$$u(x,y,t) = u(\xi,t)\,,\ \xi = \frac{12x+5y}{\sqrt{2}}\,. \tag{3}$$

Тогда

$$u_x = u_\xi \cdot \xi_x = u_\xi \cdot \frac{12}{\sqrt{2}}\,,\qquad u_{xx} = u_{\xi\xi} \cdot \frac{144}{2}\,;$$

$$u_y = u_\xi \cdot \xi_y = u_\xi \cdot \frac{5}{\sqrt{2}}\,,\qquad u_{yy} = u_{\xi\xi} \cdot \frac{25}{2}\,;$$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \frac{169}{2} u_{\xi\xi}\,.$$

Следовательно, уравнение (1) для функции (3) примет вид

$$13u_t - \frac{169}{2} u_{\xi\xi} = 0$$

и исходная задача свелась, таким образом, к нахождению решения следующей задачи:

$$u_t-\frac{13}{2}u_{\xi\xi}=0,\ t>0,\quad \xi\in R^1, \tag{4}$$

$$u\big|_{t=0}=\sqrt{2}\xi e^{-\xi^2},\quad \xi\in R^1. \tag{5}$$

($\xi\in R^1$, так как $\xi=\dfrac{12x+5y}{\sqrt{2}}$, $(x,y)\in R^2$).

Ищем решение задачи (4), (5) с помощью формулы Пуассона (в данном случае $a^2=\dfrac{13}{2}$, $a=\sqrt{\dfrac{13}{2}}$):

$$u(\xi,t)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{13}{2}}\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{2}\eta e^{-\eta^2}e^{-\frac{(\eta-\xi)^2}{4\sqrt{\frac{13}{2}}t}}d\eta=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{13\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\eta e^{-\eta^2}e^{-\frac{(\eta-\xi)^2}{26t}}d\eta=\frac{1}{\sqrt{13\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\eta e^{-\left[\eta^2+\frac{(\eta-\xi)^2}{26t}\right]}d\eta\,. \tag{6}$$

Преобразуем

$$\eta^2+\frac{(\eta-\xi)^2}{26t}=\eta^2+\frac{\eta^2}{26t}-2\frac{\xi\eta}{26t}+\frac{\xi^2}{26t}=$$

$$=\left\{\left(\sqrt{\frac{26t+1}{26t}}\eta\right)^2-2\left(\sqrt{\frac{26t+1}{26t}}\eta\right)\left(\sqrt{\frac{26t}{26t+1}}\frac{\xi}{26t}\right)+\frac{\xi^2}{(26t+1)26t}\right\}-$$

$$-\frac{\xi^2}{(26t+1)26t}+\frac{\xi^2}{26t}=\left\{\sqrt{\frac{26t+1}{26t}}\eta-\frac{\xi}{\sqrt{(26t+1)26t}}\right\}^2+\frac{\xi^2}{26t+1}.$$

Сделаем в интеграле (6) замену переменных:

$$q=\sqrt{\frac{26t+1}{26t}}\eta-\frac{\xi}{\sqrt{(26t+1)26t}},\quad \eta=\sqrt{\frac{26t}{26t+1}}q+\frac{\xi}{26t+1},\quad dq=\sqrt{\frac{26t+1}{26t}}d\eta\,,$$

и, следовательно, выражение (6) примет вид

$$u(\xi,t)=\frac{1}{\sqrt{13\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\sqrt{\frac{26t}{26t+1}}q+\frac{\xi}{26t+1}\right)e^{-q^2}e^{-\frac{\xi^2}{26t+1}}\sqrt{\frac{26t}{26t+1}}dq=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{13\pi t}}\cdot e^{-\frac{\xi^2}{26t+1}}\cdot\sqrt{\frac{26t}{26t+1}}\cdot\frac{\xi}{26t+1}\cdot\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-q^2}dq=\frac{\sqrt{2}\xi}{(26t+1)^{3/2}}e^{-\frac{\xi^2}{26t+1}},\ \xi\in R^1, t\geq 0$$

(в ходе вычисления мы воспользовались тем, что интеграл от нечетной функции по симметричному промежутку равен нулю).

Таким образом, учитывая, что $\xi = \dfrac{12x+5y}{\sqrt{2}}$, получаем, что функция

$$u(x,y,t) = \frac{12x+5y}{(26t+1)^{3/2}} \cdot e^{-\frac{(12x+5y)^2}{2(26t+1)}}, \quad (x,y) \in R^2, \quad t \geq 0,$$

является решением задачи (1), (2). ▲

б). Введение сферических переменных

Рекомендуется также учесть, что если функции $f(x,t), \varphi(x), \psi(x)$ в (I), (II) зависит только от $r = |x|$ и t, то есть $f = f(r,t), \varphi = \varphi(r), \psi = \psi(r)$, то решение задачи Коши (I), (II) также зависит только от r и t, то есть $u = u(r,t)$.

Рассмотрим случай $n = 3$.

Так как $\Delta u(r,t) = (r \cdot u)_{rr}$ при $n = 3$, то в этом случае задача Коши

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = f, \quad x \in R^3, \; t > 0,$$
$$u\big|_{t=0} = \varphi, \quad u_t\big|_{t=0} = \psi, \quad x \in R^3$$

эквивалентно заменяется одномерной смешанной задачей:

$$\upsilon_{tt} - a^2 \upsilon_{rr} = f(r,t), \; r > 0, \; t > 0;$$
$$\upsilon\big|_{t=0} = r\varphi(r), \quad \upsilon_t\big|_{t=0} = r\psi(r), \quad r \geq 0;$$
$$\upsilon\big|_{r=0} = 0, \quad t \geq 0,$$

где $\upsilon(r,t) = ru(r,t)$.

Конкретный пример поиска решения задачи Коши для волнового уравнения с помощью сферической замены пространственных переменных можно посмотреть далее в данном параграфе в решении **Примера 7** (нахождение υ_2).

Может встретиться случай, когда начальная (-ые) функция (-ии) представляют собой многочлен первой степени, умноженный на собственную функцию оператора Лапласа.

Рассмотрим, например, решение такой задачи.

Пример 6

$$u_t = \Delta u, \; (x,y,z) \in R^3, \; t > 0; \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0}=(x+z)\sin(z+y)\,,\ (x,y,z)\in R^3\,. \tag{2}$$

Δ Первый способ нахождения решения основан на применении в случае задачи Коши для уравнения теплопроводности формулы (VII):

$$u=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\Delta^k(\varphi)\,, \tag{3}$$

где $\varphi=(x+z)\sin(z+y)$, $a^2=1$.

Заметим, что в случае нахождения решения задачи Коши для волнового уравнения следовало бы воспользоваться формулой (VI).

Найдем выражение для $\Delta^k(\varphi), k=0,1,2,...$:

$$\Delta^0(\varphi)=(x+z)\sin(z+y)\,,$$

$$\begin{aligned}\Delta^1(\varphi)=\Delta\varphi=\varphi_{yy}+\varphi_{zz}=-(x+z)\sin(z+y)+2\cos(z+y)-\\-(x+z)\sin(z+y)=-2\varphi+2\cos(z+y)\,,\end{aligned} \tag{4}$$

$$\Delta^2(\varphi)=\Delta(\Delta\varphi)=\Delta(-2\varphi+2\cos(z+y))=$$

$$=-2\Delta(\varphi)+2\Delta(\cos(x+z))=$$

$$=4\varphi-4\cos(z+y)+2(-2\cos(z+y))=4\varphi-8\cos(z+y)\,;$$

$$\Delta^k(\varphi)=(-1)^k2^k\varphi+(-1)^{k-1}k2^k\cos(z+y)\,,\quad k=0,1,2,... \tag{5}$$

Подставляем соотношение (5) в (3) и получаем

$$u=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k(-1)^k2^k\varphi}{k!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k(-1)^{k-1}k2^k}{k!}\cdot\cos(z+y)=$$

$$=\varphi\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2t)^k}{k!}+\cos(z+y)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k(-1)^{k-1}2^k}{(k-1)!}=$$

$$=\varphi\cdot e^{-2t}+\cos(z+y)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-2t)^m2t}{m!}=\varphi\cdot e^{-2t}+\cos(z+y)\cdot2t\cdot e^{-2t}=$$

$$=e^{-2t}(x+z)\sin(z+y)+2te^{-2t}\cos(z+y)\,.$$

Второй способ поиска решения основан на следующих соображениях. Так как согласно (4)

$$\Delta\varphi=-2\varphi+2\cos(z+y)\,,$$

то пробуем искать решение задачи (1), (2) в виде

$$u=f(t)\varphi+g(t)\cos(z+y)\,. \tag{6}$$

Подставив функцию, задаваемую формулой (6) в уравнение (1), получим

$$f'(t)\varphi+g'(t)\cos(z+y)=f(t)\Delta\varphi+g(t)\Delta\cos(z+y),$$

$$f'(t)\varphi+g'(t)\cos(z+y)=f(t)\big(-2\varphi+2\cos(z+y)\big)-2g(t)\cos(z+y),$$

$$f'(t)\varphi+g'(t)\cos(z+y)=-2f(t)\varphi+\big(2f(t)-2g(t)\big)\cos(z+y).$$

Отсюда получаем

$$f'(t)=-2f(t), \tag{7}$$

$$g'(t)=2f(t)-2g(t). \tag{8}$$

Подставляем функцию, задаваемую формулой (6), в начальное условие (2), получим

$$u\big|_{t=0}=f(0)\varphi+g(0)\cos(z+y)=(x+z)\sin(z+y)=1\cdot\varphi+0\cdot\cos(z+y).$$

Отсюда получаем

$$f(0)=1, \tag{9}$$

$$g(0)=0. \tag{10}$$

Найдем функцию $f(t)$ из задачи (7), (9):

$$f'(t)=-2f(t),$$

$$f(0)=1.$$

Нетрудно видеть, что

$$f(t)=e^{-2t}. \tag{11}$$

Тогда из (8) и (10) с учетом (11) для функции $g(t)$ получаем задачу

$$g'(t)=2f(t)-2g(t),$$

$$g(0)=0.$$

Решением данной задачи будет функция

$$g(t)=2te^{-2t}. \tag{12}$$

Таким образом, из (6), (11) и (12) получаем, что

$$u=e^{-2t}\varphi+2te^{-2t}\cos(z+y)=e^{-2t}(x+z)\sin(z+y)+2te^{-2t}\cos(z+y)$$

есть решение задачи (1), (2). ▲

Следующие два примера в разные годы входили в экзаменационную контрольную работу по уравнениям математической физики.

Пример 7. Решить задачу Коши:

$$u_{tt}=\Delta u+\left(x^2+y^2\right)\sin t\,,\quad t>0\,,\ \left(x,y,z\right)\in R^3\,; \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0}=\left(x+y-2z\right)\cos\left(x+y-2z\right)^2,\quad \left(x,y,z\right)\in R^3\,; \tag{2}$$

$$u_t\big|_{t=0}=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{9/2}+z^3\,,\ \left(x,y,z\right)\in R^3\,. \tag{3}$$

Δ Уравнение (1) является неоднородным, поэтому ищем какое-нибудь частное его решение. Можем искать его, например, в виде

$$g\left(x,y,z,t\right)=\left(Ax^2+By^2+C\right)\sin t\,.$$

Подставляя функцию $g\left(x,y,z,t\right)$ в уравнение (1), получаем

$$-\left(Ax^2+By^2+C\right)\sin t=\left(2A+2B\right)\sin t+\left(x^2+y^2\right)\sin t\,.$$

Отсюда имеем $A=-1, B=-1, -C=2A+B$.

Следовательно, $A=-1, B=-1, C=4$ и функция

$$g\left(x,y,z,t\right)=-\left(x^2+y^2-4\right)\sin t$$

есть частное решение уравнения (1).

Введем новую функцию υ такую, что

$$\upsilon=u-g\,.$$

Тогда

$$\upsilon=u+g\,,$$

$$\upsilon=u+\left(x^2+y^2-4\right)\sin t\,, \tag{4}$$

и запишем задачу (1), (2), (3) для новой функции υ :

$$\upsilon_{tt}=\Delta\upsilon\,,\quad t>0\,,\ \left(x,y,z\right)\in R^3\,; \tag{5}$$

$$\upsilon\big|_{t=0}=\left(x+y-2z\right)\cos\left(x+y-2z\right)^2,\quad \left(x,y,z\right)\in R^3\,; \tag{6}$$

$$\upsilon_t\big|_{t=0}=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{9/2}+z^3+x^2+y^2-4\,,\ \left(x,y,z\right)\in R^3\,. \tag{7}$$

Пусть функция υ_1 есть решение задачи

$$\upsilon_{tt}=\Delta\upsilon\,,\quad t>0\,,\ \left(x,y,z\right)\in R^3\,; \tag{8}$$

$$\upsilon\big|_{t=0}=\left(x+y-2z\right)\cos\left(x+y-2z\right)^2,\quad \left(x,y,z\right)\in R^3\,; \tag{9}$$

$$\upsilon_t\big|_{t=0}=0\,,\ \left(x,y,z\right)\in R^3\,; \tag{10}$$

функция υ_2 — решение задачи

$$\upsilon_{tt}=\Delta\upsilon\,,\quad t>0\,,\ \left(x,y,z\right)\in R^3\,; \tag{11}$$

$$\upsilon\big|_{t=0}=0\,,\ \left(x,y,z\right)\in R^3\,, \tag{12}$$

$$\upsilon_t\big|_{t=0} = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{9/2}, \ \left(x,y,z\right)\in R^3; \tag{13}$$

а функция υ_3 — решение задачи

$$\upsilon_{tt} = \Delta\upsilon, \quad t>0, \ \left(x,y,z\right)\in R^3; \tag{14}$$

$$\upsilon\big|_{t=0} = 0, \ \left(x,y,z\right)\in R^3, \tag{15}$$

$$\upsilon_t\big|_{t=0} = z^3+x^2+y^2-4, \ \left(x,y,z\right)\in R^3. \tag{16}$$

Тогда решением задачи (5), (6), (7) является функция $\upsilon = \upsilon_1+\upsilon_2+\upsilon_3$.

Будем искать функцию υ_1 в виде $\upsilon_1\left(x,y,z,t\right)=V\left(\xi,t\right)$, где $\xi=\left(x+y-2z\right)$. Тогда получим задачу для функции $V\left(\xi,t\right)$:

$$V_{tt} = 6V_{\xi\xi}, \ t>0, \ \xi\in R^1, \tag{17}$$

$$V\big|_{t=0} = \xi\cos\xi^2, \ \xi\in R^1, \tag{18}$$

$$V_t\big|_{t=0} = 0, \ \xi\in R^1. \tag{19}$$

Решение задачи (17), (18), (19) найдем с помощью формулы Д’Аламбера. Получим

$$V\left(\xi,t\right)=\frac{1}{2}\left[\left(\xi+\sqrt{6}t\right)\cos\left(\xi+\sqrt{6}t\right)^2+\left(\xi-\sqrt{6}t\right)\cos\left(\xi-\sqrt{6}t\right)^2\right].$$

Следовательно, функция

$$\upsilon_1\left(x,y,z,t\right)=\frac{1}{2}\left[\left(x+y-2z+\sqrt{6}t\right)\cos\left(x+y-2z+\sqrt{6}t\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(x+y-2z-\sqrt{6}t\right)\cos\left(x+y-2z-\sqrt{6}t\right)^2\right] \tag{20}$$

есть решение задачи (8), (9), (10).

Решение задачи (11), (12), (13) будем искать в виде

$$\upsilon_2\left(x,y,z,t\right)=W\left(r,t\right), \ r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Тогда для функции $W\left(r,t\right)$ уравнение (11) примет вид

$$\left(rW\right)''_{tt}=\left(rW\right)''_{rr}, \ t>0, \ r>0.$$

Введем новую искомую функцию

$$w\left(r,t\right)=rW\left(r,t\right), \tag{21}$$

для которой получим смешанную задачу для «полубесконечной струны»[2)]

[2)] Смешанная краевая задача для «полубесконечной струны» изложена в § 2 данного пособия.

$$w_{tt}=w_{rr}\,,\ t>0\,,\ r>0\,,$$
$$w\big|_{t=0}=0\,,\quad w_t\big|_{t=0}=r^{10}\,,\ r\geq 0\,,$$
$$w\big|_{r=0}=0\,,\ \ t\geq 0\,,$$

Решением этой задачи, как нетрудно показать (см. § 2 данного пособия) является функция

$$w(r,t)=\frac{(r+t)^{11}}{22}+\begin{cases}-\dfrac{(r-t)^{11}}{22},r-t\geq 0,\\ \dfrac{(r-t)^{11}}{22},r-t\leq 0.\end{cases}$$

Следовательно, в силу (21) функция

$$\upsilon_2(x,y,z,t)=\frac{w(r,t)}{r}=w(r,t)=\frac{(r+t)^{11}}{22r}+\begin{cases}-\dfrac{(r-t)^{11}}{22r},r-t\geq 0,\\ \dfrac{(r-t)^{11}}{22r},r-t\leq 0.\end{cases}\qquad(22)$$

есть решение задачи (11), (12), (13).

Решение задачи (14), (15), (16) находим с помощью формулы (VI). Получим функцию

$$\upsilon_3(x,y,z,t)=t\left(z^3+x^2+y^2-4\right)+\frac{t^3}{3!}\Delta\left(z^3+x^2+y^2-4\right)=$$
$$=t\left(z^3+x^2+y^2-4\right)+\frac{t^3}{6}(6z+4)\,,\qquad(23)$$

которая есть решение задачи (14), (15), (16).

Следовательно, в силу (4) функция

$$u=-\left(x^2+y^2-4\right)\sin t+\upsilon_1+\upsilon_2+\upsilon_3\,,$$

где функции $\upsilon_1,\upsilon_2,\upsilon_3$ определены формулами (20), (21), (23) соответственно, есть решение задачи (1), (2), (3). ▲

Пример 8. Решить задачу Коши:

$$u_t=2\Delta u+xe^{8t-2z}\,,\ t>0\ ,(x,y,z)\in R^3\ ;\qquad(1)$$
$$u\big|_{t=0}=(x-z)^5\,y\cos y+\operatorname{sh}(x+2y+3z)\,,\ (x,y,z)\in R^3\,.\qquad(2)$$

Δ Уравнение (1) является неоднородным, поэтому ищем какое-нибудь частное его решение. Так как функция xe^{-2z} есть собственная функция оператора Лапласа, ищем частное решение уравнения (1) в виде

$$\upsilon = u - te^{8t}xe^{-2z}$$
$$\upsilon_3 = 2\Delta\upsilon$$
$$\upsilon\big|_{t=0} = y\cos y \qquad w(x,y,z) = g(t)\,xe^{-2z}. \tag{3}$$
$$\upsilon = \upsilon_1\cdot\upsilon_2 + \upsilon_3$$

Подставляем функцию, определяемую формулой (3), в уравнение (1) и получаем

$$g'(t)\,xe^{-2z} = 2g(t)4xe^{-2z} + e^{8t}xe^{-2z},$$
$$g'(t) = 8g(t) + e^{8t};$$

в качестве решения этого уравнения можно взять, например, функцию

$$g(t) = te^{8t}$$

Следовательно, функция

$$w = te^{8t}xe^{-2z}$$

есть частное решение уравнения (1).

Введем новую искомую функцию υ такую, что $\upsilon = u - w$. Тогда

$$\upsilon = u - te^{8t}xe^{-2z} \tag{4}$$

Запишем задачу (1), (2) для новой функции υ:

$$\upsilon_t = 2\Delta\upsilon,\ t > 0\ ,(x,y,z)\in R^3\ ; \tag{5}$$

$$\upsilon\big|_{t=0} = (x-z)^5\, y\cos y + \operatorname{sh}(x+2y+3z),(x,y,z)\in R^3\ . \tag{6}$$

Пусть функция υ_1 — есть решение задачи

$$\upsilon_t = 2\Delta\upsilon,\ t > 0\ ,\ t > 0,\ (x,y,z)\in R^3\ ; \tag{7}$$

$$\upsilon\big|_{t=0} = (x-z)^5,(x,y,z)\in R^3\ . \tag{8}$$

функция υ_2 — решение задачи

$$\upsilon_t = 2\Delta\upsilon,\ t > 0\ ,(x,y,z)\in R^3\ ; \tag{9}$$

$$\upsilon\big|_{t=0} = y\cos y,\ (x,y,z)\in R^3 \tag{10}$$

функция υ_3 — решение задачи

$$\upsilon_t = 2\Delta\upsilon,\ t > 0\ ,(x,y,z)\in R^3\ ; \tag{11}$$

$$\upsilon\big|_{t=0} = \operatorname{sh}(x+2y+3z),\ (x,y,z)\in R^3. \tag{12}$$

Тогда функция $\upsilon = \upsilon_1\cdot\upsilon_2 + \upsilon_3$ есть решение задачи (5), (6).

Из формулы (VII) следует, что функция

$$\upsilon_1 = (x-z)^5 + 2t\Delta\left((x-z)^5\right) + \frac{2^2t^2}{2!}\Delta^2\left((x-z)^5\right) =$$

$$=\left(x-z\right)^{5}+80t\left(x-z\right)^{3}+960t^{2}\left(x-z\right). \qquad (13)$$

Из формулы (VII) получаем, что

$$\upsilon_2=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k t^k}{k!}\Delta^k\left(y\cos y\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k t^k}{k!}\left(y\cos y\right)^{(2k)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k t^k\left(\left(-1\right)^k y\cos y+\left(-1\right)^k 2k\sin y\right)}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k t^k\left(-1\right)^k y\cos y}{k!}+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k t^k\left(-1\right)^k 2k\sin y}{k!}=y\cos y\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k t^k\left(-1\right)^k}{k!}+$$

$$+\sin y\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k t^k\left(-1\right)^k 2k}{k!}=y\cos y\cdot e^{-2t}+\sin y\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-2t\right)^k\cdot 2}{\left(k-1\right)!}=$$

$$=e^{-2t}y\cos y-4t\sin y\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\left(-2t\right)^l}{l!}\;e^{-2t}y\cos y-4te^{-2t}\sin y. \qquad (14)$$

Так как $\Delta\left(\operatorname{sh}\left(x+2y+3z\right)\right)=14\operatorname{sh}\left(x+2y+3z\right)$ (то есть это собственная функция оператора Δ), то решение задачи (11), (12) ищем в виде

$$\upsilon_3=h\left(t\right)\cdot\operatorname{sh}\left(x+2y+3z\right). \qquad (15)$$

Подставляя (15) в уравнение (11), получаем

$$h'\left(t\right)\cdot\operatorname{sh}\left(x+2y+3z\right)=2\cdot 14h\left(t\right)\operatorname{sh}\left(x+2y+3z\right),$$

откуда

$$h'\left(t\right)=28h\left(t\right),$$

$$h\left(t\right)=Ce^{28t}, C\in R.$$

Следовательно, функция

$$Ce^{28t}\cdot\operatorname{sh}\left(x+2y+3z\right),$$

есть решение уравнения (11), где $C\in R$ — произвольная постоянная.

Подбираем постоянную C, удовлетворяя начальное условие (12):

$$\upsilon\big|_{t=0}=C\operatorname{sh}\left(x+2y+3z\right)=\operatorname{sh}\left(x+2y+3z\right).$$

Отсюда получаем, что $C=1$ и

$$\upsilon_3=e^{28t}\cdot\operatorname{sh}\left(x+2y+3z\right) \qquad (16)$$

есть решение задачи (11), (12).

Таким образом, из (4) следует, что функция

$$u=te^{8t}xe-2t+\upsilon_1\cdot\upsilon_2+\upsilon_3,$$

где функции $\upsilon_1,\upsilon_2,\upsilon_3$ определены формулами (13), (14), (16) соответственно есть решение задачи (1), (2). ▲

§ 6. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_G K(x,y)\varphi(y)\,dy + f(x), \quad x \in G, \tag{I}$$

относительно неизвестной функции $\varphi(x)$ в области $G \subset R^n$ называется *линейным интегральным уравнением Фредгольма*, известные функции $K(x,y)$ и $f(x)$ называются *ядром* и *свободным членом* уравнения (I); λ — комплексный параметр.

Интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_G K(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad x \in G, \tag{II}$$

называется *однородным интегральным уравнением*, соответствующим уравнению (I).

Ядро $K^*(x,y) = \overline{K(x,y)}$ — эрмитово сопряженное к ядру $K(x,y)$; уравнение

$$\psi(x) = \bar{\lambda} \int_G K^*(x,y)\psi(y)\,dy + g(x), \quad x \in G, \tag{I*}$$

— *союзное* или *сопряженное уравнение* к уравнению (I), а

$$\psi(x) = \bar{\lambda} \int_G K^*(x,y)\psi(y)\,dy, \quad x \in G, \tag{II*}$$

— соответствующее однородное уравнение.

Эти уравнения иногда удобно записывать в операторной форме:

$$\begin{aligned} &(E-\lambda K)\varphi = f, \quad (E-\lambda K)\varphi = 0, \\ &(E-\bar{\lambda}K^*)\psi = g, \quad (E-\bar{\lambda}K^*)\psi = 0, \end{aligned} \tag{III}$$

где интегральные операторы E, K и K^* определяются так:

$$E\varphi = \varphi, K\varphi = \int_G K(x,y)\varphi(y)\,dy, K^*\varphi = \int_G K^*(x,y)\varphi(y)\,dy.$$

Рассмотрим два случая.

1. Область G ограничена, $f(x) \in C(\bar{G})$, $g(x) \in C(\bar{G})$, $K(x,y) \in C(\bar{G}\times\bar{G})$; при этом решение рассматриваемых уравнений разыскивается в $C(\bar{G})$.

2. Область G произвольная (в том числе неограниченная), $f(x) \in L_2(G)$, $g(x) \in L_2(G)$, $K(x,y) \in L_2(G\times G)$; в этом случае решение разыскивается в $L_2(G)$.

Если при некотором значении параметра $\lambda\left(\bar{\lambda}\right)$ однородное уравнение (II) ((II*)) имеет нетривиальные решения (не равные нулю тождественно в первом случае и не являющиеся нулевыми элементами $L_2\left(G\right)$ — во втором, то это число $\lambda\left(\bar{\lambda}\right)$ называется *характеристическим числом* ядра $K\left(x,y\right)$ ($K^*\left(x,y\right)$ соответственно), а соответствующие решения уравнения (II), (II*) – *собственными функциями ядра* $K\left(x,y\right)$ $\left(K^*\left(x,y\right)\right)$, *отвечающими этому характеристическому значению.* Множество всех собственных функций, отвечающих характеристическому числу $\lambda\left(\bar{\lambda}\right)$, после присоединения к нему функции, тождественно равной нулю, является линейным подпространством $\operatorname{Ker}\left(E-\lambda K\right)$

$$u\left(x\right)=\frac{1}{2\pi}\frac{\pi}{3}x^2+\frac{1}{2\pi}C_2\sin x+\cos x=\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{2\pi}C_2\sin x+\cos x,$$

$x\in\left[-\pi,\pi\right], C_2\in R$

$\left(\operatorname{Ker}\left(E-\bar{\lambda}K^*\right)\right)$ пространства $C\left(\bar{G}\right)$ в первом случае и пространства $L_2\left(G\right)$ — во втором.

Размерность этого подпространства, то есть максимальное число линейно независимых собственных функций, отвечающих характеристическому числу $\lambda\left(\bar{\lambda}\right)$, есть *кратность*[3)] $k\left(\lambda\right)$ ($k\left(\bar{\lambda}\right)$) этого характеристического числа

$$k\left(\lambda\right)=\dim\operatorname{Ker}\left(E-\lambda K\right),$$
$$k\left(\bar{\lambda}\right)=\dim\operatorname{Ker}\left(E-\bar{\lambda}K^*\right).$$

Как в первом, так и во втором случаях имеет место следующие *теоремы Фредгольма.*

Теорема 1. *Следующие три утверждения эквивалентны:*

а) *уравнение* (I) *имеет решение при любой рассматриваемой функции* $f\left(x\right)$;

б) *число* λ *не является характеристическим числом ядра* $K\left(x,y\right)$;

в) *если при какой-либо функции* $f\left(x\right)$ *уравнение* (I) *имеет решение, то это решение единственно.*

Теорема 2. *Число* λ *является характеристическим числом ядра*

---

3) Полезно обратить внимание на Пример 6.

$K(x,y)$ тогда и только тогда, когда $\bar{\lambda}$ является характеристическим числом ядра $K^*(x,y)$. При этом кратности этих чисел конечны и одинаковы, то есть $k(\lambda) = k(\bar{\lambda}) < \infty$.

Теорема 3. *Уравнение* (I) *имеет решение тогда и только тогда, когда функция $f(x)$ ортогональна всем элементам подпространства $\operatorname{Ker}\left(E - \bar{\lambda} K^*\right)$, то есть $f(x) \perp \operatorname{Ker}\left(E - \bar{\lambda} K^*\right)$* (*в скалярном произведении $(f,g) = \int\limits_G f(x)\overline{g(x)}dx$*).

При этом решение определяется с точностью до слагаемого, которое является элементом подпространства $\operatorname{Ker}(E - \lambda K)$.

Теорема 4. *При любом $R > 0$ в круге $\{|\lambda| \le R\}$ комплексной λ —плоскости не может быть более конечного числа характеристических чисел ядра $K(x,y)$.*

Заметим, что полезно ознакомиться с изложенными далее **Примером 10** и **Примером 11**, в которых проиллюстрированы теоремы Фредгольма на примере конкретных уравнений.

Рассмотрим решение некоторых задач.

Пример 1. Решить интегральное уравнение

$$u(x) = \lambda \int\limits_{-2}^{2} \left(y^2 + x\right) u(y) dy + 1, \quad x \in [-2, 2]. \tag{1}$$

Найти характеристические числа и собственные функции соответствующего интегрального оператора.

Δ Из уравнения (1) следует, что

$$u(x) = \lambda \int\limits_{-2}^{2} y^2 u(y)\,dy + \lambda x \int\limits_{-2}^{2} u(y)\,dy + 1 = \lambda C_1 + \lambda C_2 x + 1, \quad x \in [-2, 2],$$

где

$$C_1 = \int\limits_{-2}^{2} y^2 u(y)\,dy, \tag{2}$$

$$C_2 = \int\limits_{-2}^{2} u(y)\,dy. \tag{3}$$

Поэтому решение уравнения (1), если оно существует, имеет вид

$$u(x) = \lambda C_1 + \lambda C_2 x + 1, \quad x \in [-2, 2], \tag{4}$$

где C_1 и C_2 определены равенствами (2), (3).

Используя соотношение (4), запишем равенства (2) и (3) в виде

$$C_1 = \int_{-2}^{2} y^2 \left(\lambda C_1 + \lambda C_2 x + 1\right) dy = \int_{-2}^{2} \left(\left(\lambda C_1 + 1\right) y^2 + \lambda C_2 y^3\right) dy =$$

$$= \left(\lambda C_1 + 1\right) \frac{y^3}{3}\bigg|_{-2}^{2} = \frac{16}{3}\left(\lambda C_1 + 1\right) = \frac{16}{3}\lambda C_1 + \frac{16}{3},$$

$$C_2 = \int_{-2}^{2} \left(\lambda C_1 + \lambda C_2 x + 1\right) dy = \left(\lambda C_1 + 1\right) y\Big|_{-2}^{2} = 4\lambda C_1 + 4.$$

Отсюда получаем систему линейных уравнений относительно C_1 и C_2 с параметром λ:

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{16}{3} C_1\right) = \frac{16}{3}, \\ -4\lambda C_1 + C_2 = 4. \end{cases} \qquad (5)$$

Определитель системы (5) равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 - \frac{16}{3}\lambda & 0 \\ -4\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{16}{3}\lambda.$$

1) Если определитель системы (5) не равен нулю $\left(\Delta \neq 0\right)$, т.е. если $\lambda \neq \frac{3}{16}$, то система (5) имеет единственное решение:

$$C_1 = \frac{16}{3\left(1 - \frac{16}{3}\right)\lambda} = \frac{16}{3 - 16\lambda},$$

$$C_2 = 4 + 4\lambda C_1 = 4 + \frac{4\lambda \cdot 16}{3 - 16\lambda} = \frac{12}{3 - 16\lambda}.$$

Следовательно, уравнение (1) имеет единственное решение:

$$u(x) = \frac{16\lambda}{3 - 16\lambda} - \frac{12\lambda x}{3 - 16\lambda} + 1, \quad x \in [-2, 2].$$

2) Пусть $\lambda = \frac{3}{16} \triangleq \lambda_1$. Тогда система (5) приобретает вид

$$\begin{cases} 0\cdot C_1 = \dfrac{16}{3}, \\ -4\dfrac{3}{16}C_1 + C_2 = 4. \end{cases}$$

Очевидно, что данная система решений не имеет. Следовательно, и уравнение (1) решений не имеет.

3) Найдем теперь собственные функции и характеристические числа ядра, то есть найдем нетривиальные решения однородного уравнения:

$$u(x) = \lambda\int_{-2}^{2}\left(y^2 + x\right)u(y)dy\,, \quad x\in[-2,2].$$

Из сказанного выше следует, что решение данного уравнения имеет вид

$$u(x) = \lambda C_1 + \lambda C_2 x\,, \quad x\in[-2,2], \tag{6}$$

где постоянные C_1 и C_2 определены формулами (2) и (3) и удовлетворяют однородной системе уравнений:

$$\begin{cases} \left(1 - \dfrac{16}{3}C_1\right) = 0, \\ -4\lambda C_1 + C_2 = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Однородная система линейных уравнений имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда определитель равен нулю:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \lambda = \lambda_1 = \frac{3}{16}.$$

Если $\lambda = \lambda_1 = \dfrac{3}{16}$, то система (7) примет вид

$$\begin{cases} 0\cdot C_1 = 0, \\ -4\dfrac{3}{16}C_1 + C_2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 - \textit{любое}\ \text{число}, \\ C_2 = \dfrac{3}{4}C_1. \end{cases}$$

Подставляя найденные C_1 и C_2 в (6), получаем, что

$$u_1(x) = \frac{3}{16}C_1 + \frac{3}{16}x\cdot\frac{3}{4}C_1 = \frac{3}{16}C_1\left(1 + \frac{3}{4}x\right),$$

где C_1 — любое число, $C_1 \neq 0$.

Таким образом, $u_1(x) = 1 + \dfrac{3}{4}x$ есть собственная функция ядра, отвечающая характеристическому числу $\lambda_1 = \dfrac{3}{16}$. ▲

Пример 2. Решить при всех допустимых значениях λ и a интегральное уравнение

$$u(x)=\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\left(x^2\cos y+y\sin x\right)u(y)dy+\cos x+a\sin x\,,\ \ x\in[-\pi,\pi]. \qquad (1)$$

Найти собственные функции и характеристические числа соответствующего интегрального оператора.

Δ Из уравнения (1) следует, что

$$u(x)=\lambda x^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos y\cdot u(y)dy+\lambda\sin x\int_{-\pi}^{\pi}y\cdot u(y)dy+\cos x+a\sin x=$$

$$=\lambda C_1x^2+\lambda C_2\sin x+\cos x+a\sin x\,,\quad x\in[-\pi,\pi],$$

где

$$C_1=\int_{-\pi}^{\pi}\cos y\cdot u(y)\,dy\,, \qquad (2)$$

$$C_2=\int_{-\pi}^{\pi}y\cdot u(y)\,dy\,. \qquad (3)$$

Потому решение уравнения (1), если оно существует, имеет вид

$$u(x)=\lambda C_1x^2+\lambda C_2\sin x+\cos x+a\sin x\,,\quad x\in[-\pi,\pi], \qquad (4)$$

где C_1 и C_2 определены равенствами (2), (3).

Используя соотношение (4), запишем равенства (2) и (3) в виде

$$C_1=\int_{-\pi}^{\pi}\cos y\cdot u(y)\,dy=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\lambda C_1y^2+\lambda C_2\sin y+\cos y+a\sin y\right)\cos y dy=$$

$$=\lambda C_1\int_{-\pi}^{\pi}y^2\cos y dy+\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 y dy=\lambda C_1\int_{-\pi}^{\pi}y^2d(\sin y)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2y)\,dy=\lambda C_1\left(\left(y^2\sin y\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}2y\sin y dy\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(y+\frac{1}{2}\sin 2y\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=2\lambda C_1\int_{-\pi}^{\pi}yd(\cos y)+\pi=$$

$$=2\lambda C_1\left(\left(y\cos y\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\cos y dy\right)+\pi=-4\pi C_1+\pi\,,$$

$$C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} y \cdot u(y)\,dy = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\lambda C_1 y^2 + \lambda C_2 \sin y + \cos y + a\sin y\right) y dy =$$

$$= \left(\lambda C_2 + a\right) \int_{-\pi}^{\pi} y \sin y dy = -\left(\lambda C_2 + a\right) \int_{-\pi}^{\pi} y d\left(\cos y\right) =$$

$$= -\left(\lambda C_2 + a\right)\left(\left(y \cos y\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \cos y dy \right) =$$

$$= -\left(\lambda C_2 + a\right)\left(-2\pi\right) = 2\pi\lambda C_2 + 2\pi a \,.$$

Отсюда получаем систему линейных уравнений относительно C_1 и C_2 с параметром λ:

$$\begin{cases} \left(1 + 4\pi\lambda\right) C_1 & & = \pi, \\ & \left(1 - 2\pi\lambda\right) C_2 & = 2\pi a. \end{cases} \qquad (5)$$

Определитель системы (5) равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 + 4\pi\lambda & 0 \\ 0 & 1 - 2\pi\lambda \end{vmatrix} = \left(1 + 4\pi\lambda\right)\left(1 - 2\pi\lambda\right).$$

1) Если определитель системы (5) не равен нулю, то есть если $\lambda \ne -\dfrac{1}{4\pi}, \lambda \ne \dfrac{1}{2\pi}$, то система (5) имеет единственное решение:

$$C_1 = \frac{\pi}{1 + 4\pi\lambda}\,, \quad C_2 = \frac{2\pi a}{1 - 2\pi\lambda}\,.$$

Следовательно, уравнение (1) при любом $a \in R$ имеет единственное решение:

$$u(x) = \frac{\pi}{1 + 4\pi\lambda} x^2 + \frac{2\pi a}{1 - 2\pi\lambda} \sin x + \cos x + a \sin x\,, \quad x \in \left[-\pi, \pi\right].$$

2) Пусть $\lambda = -\dfrac{1}{4\pi} \triangleq \lambda_1$. Тогда система (5) приобретает вид

$$\begin{cases} 0 \cdot C & & = \pi, \\ & \left(1 - 2\pi\left(-\dfrac{1}{4\pi}\right)\right) C & = 2\pi a, \end{cases}$$

и, следовательно, решений не имеет.

Таким образом, уравнение (1) при $\lambda = -\dfrac{1}{4\pi}$ решений не имеет.

3) Пусть $\lambda = \dfrac{1}{2\pi} \triangleq \lambda_2$. Тогда система (5) приобретает вид

$$\begin{cases}\left(1+4\pi\dfrac{1}{2\pi}\right)C_1 & =\pi,\\ & 0\cdot C_2=2\pi a.\end{cases}\qquad(6)$$

Отсюда следует, что если $a=0$, то система (6) имеет бесконечно много решений:

$C_1=\dfrac{\pi}{3}$, C_2 – любое число.

Потому при $a=0$ уравнение (1) имеет бесконечно много решений:

$$u(x)=\frac{1}{2\pi}\frac{\pi}{3}x^2+\frac{1}{2\pi}C_2\sin x+\cos x=\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{2\pi}C_2\sin x+\cos x,$$

$x\in[-\pi,\pi], C_2\in R$.

Если же число a не равно нулю, то система (6) и, следовательно, уравнение (1) решений не имеет.

4) Найдем теперь собственные функции и характеристические числа ядра, то есть найдем нетривиальные решения однородного уравнения:

$$u(x)=\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\left(x^2\cos y+y\sin x\right)u(y)dy,\quad x\in[-\pi,\pi].$$

Из сказанного выше (из (4) при $f(x)=0$, $x\in[-\pi,\pi]$) следует, что решение данного уравнения имеет вид

$$u(x)=\lambda C_1x^2+\lambda C_2\sin x,\quad x\in[-\pi,\pi].\qquad(7)$$

где постоянные C_1 и C_2 определены формулами (2) и (3) и удовлетворяют однородной системе уравнений:

$$\begin{cases}(1+4\pi\lambda)C_1 & =0,\\ & (1-2\pi\lambda)C_2=0.\end{cases}\qquad(8)$$

Однородная система линейных уравнений имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю:

$$\Delta=0\Leftrightarrow\lambda=\lambda_1=-\frac{1}{4\pi}\ \text{и}\ \lambda=\lambda_2=\frac{1}{2\pi}.$$

Если $\lambda=\lambda_1=-\dfrac{1}{4\pi}$, то система (8) примет вид

$$\begin{cases}0\cdot C_1 & =0,\\ & \left(1-2\pi\left(-\dfrac{1}{4\pi}\right)\right)C_2=0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1-\text{любое число},\\ C_2=0\end{cases}$$

Подставляя найденные C_1 и C_2 в (7), получаем, что

$$u_1(x) = -\frac{1}{4\pi} C_1 x^2, \quad x \in [-\pi, \pi], \quad C_1 \in R, \quad C_1 \neq 0.$$

Таким образом, $u_1(x) = x^2$ есть собственная функция, отвечающая характеристическому числу $\lambda_1 = -\frac{1}{4\pi}$.

Если $\lambda = \lambda_2 = \frac{1}{2\pi}$, то система (8) примет вид:

$$\begin{cases} \left(1 + 4\pi \frac{1}{2\pi}\right) C_1 & = 0, \\ \qquad\qquad 0 \cdot C_2 & = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 - \text{любое число.} \end{cases}$$

Подставляя найденные C_1 и C_2 в (7), получаем, что

$$u_2(x) = \frac{1}{2\pi} C_2 \sin x, \quad x \in [-\pi, \pi], \ C_2 \in R, \ C_2 \neq 0.$$

Таким образом,

$$u_2(x) = \sin x$$

есть собственная функция, отвечающая характеристическому числу $\lambda_2 = \frac{1}{2\pi}$. ▲

Пример 3. Решить интегральное уравнение

$$u(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \left(x \sin y - \cos^2 y\right) u(y) dy + f(x), \ x \in [-\pi, \pi], \tag{1}$$

$f(x) \in C[-\pi, \pi]$. Найти характеристические числа и собственные функции соответствующего интегрального оператора.

Δ Из уравнения (1) следует, что

$$u(x) = \lambda x \int_{-\pi}^{\pi} u(y) \sin y dy - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} u(y) \cos^2 y dy + f(x) =$$

$$= \lambda x C_1 - \lambda C_2 + f(x), \ x \in [-\pi, \pi],$$

где

$$C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} u(y) \sin y dy, \tag{2}$$

$$C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} u(y) \cos^2 y dy. \tag{3}$$

Потому решение уравнения (1), если оно существует, имеет вид

$$u(x) = \lambda x C_1 - \lambda C_2 + f(x), \quad x \in [-\pi, \pi], \tag{4}$$

где C_1 и C_2 определены равенствами (2), (3).

Используя формулу (4), запишем равенства (2) и (3) в виде

$$C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\lambda y C_1 - \lambda C_2 + f(y)\right)\sin y dy = \lambda C_1 \int_{-\pi}^{\pi} y \sin y dy -$$

$$-\lambda C_2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin y dy + \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sin y dy =$$

$$= -\lambda C_1 \int_{-\pi}^{\pi} y d(\cos y) + \lambda C_2 \cos y\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\sin y dy =$$

$$= -\lambda C_1 \left((y\cos y)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \cos y dy \right) + \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\sin y dy =$$

$$= -\lambda C_1 \left((y\cos y)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \cos y dy \right) + \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\sin y dy =$$

$$= 2\pi\lambda C_1 + \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\sin y dy\ ,$$

$$C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\lambda C_1 y - \lambda C_2 + f(y)\right)\cos^2 y dy = \lambda C_1 \int_{-\pi}^{\pi} y \cos^2 y dy -$$

$$-\lambda C_2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 y dy + \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos^2 y dy = -\frac{1}{2}\lambda C_2 \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2y) dy +$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos^2 y dy = -\frac{1}{2}\lambda C_2 \left(y + \frac{1}{2}\sin 2y \right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} +$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos^2 y dy = -\pi\lambda C_2 + \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos^2 y dy\ .$$

(здесь воспользовались тем, что функция $y\cos^2 y$, $y \in [-\pi, \pi]$, является нечетной, поэтому $\int_{-\pi}^{\pi} y\cos^2 y dy = 0$).

Отсюда получаем систему линейных уравнений относительно C_1 и C_2 с параметром λ:

$$\begin{cases} C_1(1-2\pi\lambda) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(y)\sin y dy, \\ C_2(1+\pi\lambda) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos^2 y dy. \end{cases} \tag{5}$$

Определитель системы (5) равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-2\pi\lambda & 0 \\ 0 & 1+\pi\lambda \end{vmatrix} = (1-2\pi\lambda)(1+\pi\lambda).$$

1) Если определитель системы (5) не равен нулю, то есть если $\lambda \neq \frac{1}{2\pi}$, $\lambda \neq -\frac{1}{\pi}$, то система (5) имеет единственное решение при любой правой части:

$$C_1 = \frac{1}{1-2\pi\lambda}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(y)\sin y dy, \tag{6_1}$$

$$C_2 = \frac{1}{1+\pi\lambda}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos^2 y dy, \tag{6_2}$$

и, следовательно, уравнение (1) при любой $f(x)$, $f(x) \in C[-\pi,\pi]$, имеет единственное решение

$$u(x) = \lambda x C_1 - \lambda C_2 + f(x), \quad x \in [-\pi,\pi], \tag{4_λ}$$

где C_1 и C_2 определены равенствами (6_1) и (6_2) .

2) Пусть $\lambda = \frac{1}{2\pi} \triangleq \lambda_1$. Тогда система (5) приобретает вид:

$$\begin{cases} 0 \cdot C_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos^2 y dy, \\ C_2\left(1+\pi\left(\frac{1}{2\pi}\right)\right) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos^2 y dy. \end{cases} \tag{7}$$

Отсюда следует, что если функция $f(x)$, $f(x) \in C[-\pi,\pi]$, такова, что справедливо равенство

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(y)\sin y dy = 0, \tag{8}$$

то система (7) имеет бесконечно много решений:

$$C_1 - \textit{любое число, } C_2 = \frac{2}{3}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos^2 y dy.$$

Поэтому и уравнение (1) при выполнении соотношения (8) имеет бесконечно много решений:

$$u(x)=\frac{1}{2\pi}xC_1-\frac{1}{2\pi}\frac{2}{3}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\cos^2 ydy+f(x)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}xC_1-\frac{1}{3\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\cos^2 ydy+f(x),\ x\in[-\pi,\pi], \qquad (4_{\lambda_1})$$

$C_1\in R$, $f(x)$ удовлетворяет соотношению (8).

Если же функция $f(x)$ такова, что равенство (8) не выполняется, то система (7) и, следовательно, уравнение (1) решений не имеет.

3) Пусть $\lambda=-\frac{1}{\pi}\triangleq\lambda_2$. Тогда система (5) приобретает вид

$$\begin{cases}\left(1-2\pi\left(-\frac{1}{\pi}\right)\right)C_1 = \int_{-\pi}^{\pi}f(y)\sin ydy,\\ 0\cdot C_2=\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\cos^2 ydy.\end{cases} \qquad (9)$$

Отсюда следует, что если функция $f(x)$, $f(x)\in C[-\pi,\pi]$, такова, что справедливо равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\cos^2 ydy=0, \qquad (10)$$

то система (9) имеет бесконечно много решений:

$$C_1=\frac{1}{3}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\sin ydy,\ C_2 - \text{любое число.}$$

Таким образом, уравнение (1) при выполнении соотношения (10) также имеет бесконечно много решений:

$$u(x)=-\frac{1}{\pi}x\frac{1}{3}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\sin ydy+\frac{1}{\pi}C_2+f(x)=$$

$$=-\frac{x}{3\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\sin ydy+\frac{1}{\pi}C_2+f(x),\ x\in[-\pi,\pi], \qquad (4_{\lambda_2})$$

$C_2\in R$, $f(x)$ удовлетворяет соотношению (10).

Если же функция $f(x)$ такова, что равенство (10) не выполняется, то система (9) и, следовательно, уравнение (1) решений не имеет.

4) Найдем теперь собственные функции и характеристические числа ядра, то есть найдем нетривиальные решения однородного уравнения:

$$u(x)=\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\left(x\sin y-\cos^2 y\right)u(y)dy\,,\quad x\in[-\pi,\pi].$$

Из сказанного выше (из (4) при $f(x)=0$, $x\in[-\pi,\pi]$) следует, что решение данного уравнения имеет вид

$$u(x)=\lambda xC_1-\lambda C_2\,,\ x\in[-\pi,\pi]. \tag{11}$$

где постоянные C_1 и C_2 определены формулами (2) и (3) и удовлетворяют однородной системе уравнений:

$$\begin{cases}(1-2\pi\lambda)C_1 & =0\\ & (1+\pi\lambda)C_2=0\end{cases} \tag{12}$$

Однородная система линейных уравнений имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю:

$$\Delta=0\Leftrightarrow\lambda=\lambda_1=\frac{1}{2\pi}\ \text{ и }\ \lambda=\lambda_2=-\frac{1}{\pi}.$$

Если $\lambda=\lambda_1=\dfrac{1}{2\pi}$, то система (12) примет вид

$$\begin{cases}0\cdot C_1 & =0,\\ & \left(1+\pi\left(\dfrac{1}{2\pi}\right)\right)C_2=0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1-\text{любое число},\\ C_2=0.\end{cases}$$

Подставляя найденные C_1 и C_2 в (11), получаем, что

$$u_1(x)=\frac{1}{2\pi}C_1x\,,\quad x\in[-\pi,\pi],\ \ C_1\in R\,,\ \ C_1\neq 0\,.$$

Таким образом,

$$u_1(x)=x$$

есть собственная функция, отвечающая характеристическому числу

$$\lambda_1=\frac{1}{2\pi}.$$

Если $\lambda=\lambda_2=-\dfrac{1}{\pi}$, то система (12) примет вид

$$\begin{cases}\left(1-2\pi\left(-\dfrac{1}{\pi}\right)\right)C_1 & =0,\\ & 0\cdot C_2=0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=0,\\ C_2-\text{любое число}.\end{cases}$$

Подставляя найденные C_1 и C_2 в (11), получаем, что

$$u_2(x)=\frac{1}{\pi}C_2\cdot 1,\quad x\in[-\pi,\pi],\ C_2\in R,\ C_2\neq 0.$$

Таким образом,

$$u_2(x)=1$$

есть собственная функция, отвечающая характеристическому числу $\lambda_2=-\frac{1}{\pi}$. ▲

Пример 4. Решить интегральное уравнение

$$u(x)=\lambda\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{3x^2}{y^2}-8\right)u(y)dy+7-6x^2,\ x\in\left[\frac{1}{2},1\right]. \tag{1}$$

Найти характеристические числа и собственные функции соответствующего интегрального оператора.

Δ Из уравнения (1) следует, что

$$u(x)=\lambda\cdot 3x^2\int_{\frac{1}{2}}^{1}u(y)\frac{1}{y^2}dy-8\lambda\int_{\frac{1}{2}}^{1}u(y)dy-6x^2+7=$$

$$=\lambda\cdot 3x^2C_1-8\lambda C_2-6x^2+7,\ x\in\left[\frac{1}{2},1\right],$$

где

$$C_1=\int_{\frac{1}{2}}^{1}u(y)\frac{1}{y^2}dy, \tag{2}$$

$$C_2=\int_{\frac{1}{2}}^{1}u(y)dy. \tag{3}$$

Потому решение уравнения (1), если оно существует, имеет вид

$$u(x)=3\lambda\cdot C_1\cdot x^2-8\lambda\cdot C_2-6x^2+7,\quad x\in\left[\frac{1}{2},1\right], \tag{4}$$

где C_1 и C_2 определены равенствами (2) и (3).

Используя формулу (4), запишем равенства (2) и (3) в виде

$$C_1=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(3\lambda C_1y^2-8\lambda C_2-6y^2+7\right)\frac{1}{y^2}dy=$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\left(3\lambda C_1-6\right)+\frac{1}{y^2}\left(7-8\lambda C_2\right)\right)dy=$$

$$=\left(3\lambda C_1-6\right)y\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}-\left(7-8\lambda C_2\right)\frac{1}{y}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(3\lambda C_1-6\right)-\left(7-8\lambda C_2\right)\cdot\left(-1\right)=\frac{3}{2}\lambda C_1-8\lambda C_2+4,$$

$$C_2=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(3\lambda C_1 y^2-8\lambda C_2-6y^2+7\right)dy=$$

$$=\left(3\lambda C_1-6\right)\frac{y^3}{3}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}+\left(-8\lambda C_2+7\right)y\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=$$

$$=\left(3\lambda C_1-6\right)\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{8}+\left(-8\lambda C_2+7\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{8}\lambda C_1-4\lambda C_2+\frac{7}{4}.$$

Отсюда получаем систему линейных уравнений относительно C_1 и C_2 с параметром λ:

$$\begin{cases}\left(1-\frac{3}{2}\lambda\right)C_1+\qquad 8\lambda C_2=4,\\ -\frac{7}{8}\lambda C_1+\quad\left(1+4\lambda\right)C_2=\frac{7}{4}.\end{cases}\tag{5}$$

Определитель системы (5) равен

$$\Delta=\begin{vmatrix}\left(1-\frac{3}{2}\lambda\right) & 8\lambda\\ -\frac{7}{8}\lambda+ & \left(1+4\lambda\right)\end{vmatrix}=$$

$$=1-\frac{3}{2}\lambda+4\lambda-6\lambda^2+7\lambda^2=\lambda^2+\frac{5}{2}\lambda+1=\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\left(\lambda+2\right).\tag{6}$$

1) Если определитель системы (5) не равен нулю, то есть если $\lambda\neq-\frac{1}{2}$ и $\lambda\neq-2$, то система (5) имеет единственное решение, которое можно найти, например, с помощью правила Крамера:

$$C_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\qquad C_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 8\lambda \\ \dfrac{7}{4} & 1+4\lambda \end{vmatrix} = 4(1+4\lambda) - 14\lambda = 4 + 2\lambda = 2(2+\lambda),$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1-\dfrac{3}{2}\lambda & 4 \\ -\dfrac{7}{8}\lambda & \dfrac{7}{4} \end{vmatrix} = \left(1-\frac{3}{2}\lambda\right)\frac{7}{4} + \frac{7\cdot 4}{8}\lambda = \frac{7}{4} + \frac{7}{8}\lambda = \frac{7}{8}(2+\lambda).$$

Отсюда, используя (6), получаем

$$C_1 = \frac{2(2+\lambda)}{\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right)(2+\lambda)} = \frac{2}{\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right)} = \frac{4}{2\lambda+1},$$

$$C_2 = \frac{7}{8}\frac{(2+\lambda)}{\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right)(2+\lambda)} = \frac{7}{8\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right)} = \frac{7}{4(2\lambda+1)}.$$

Подставляя в (4) найденные C_1 и C_2, получаем решение уравнения (1):

$$u(x) = 3\lambda\cdot\frac{4}{2\lambda+1}x^2 - 8\lambda\cdot\frac{7}{4(2\lambda+1)} - 6x^2 + 7 =$$

$$= \frac{12\lambda}{2\lambda+1}x^2 - \frac{14\lambda}{2\lambda+1} - 6x^2 + 7, \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

2) Пусть $\lambda = -\frac{1}{2} \triangleq \lambda_1$. Тогда система (5) приобретает вид

$$\begin{cases} \left(1-\dfrac{3}{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)\cdot C_1 & + 8\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)C_2 & = 4 \\ -\dfrac{7}{8}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)C_1 & + \left(1+4\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)C_2 & = \dfrac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{7}{4}C_1 & -4C_2 & = 4 \\ \dfrac{7}{16}C_1 & -C_2 & = \dfrac{7}{4}. \end{cases} \qquad (7)$$

Очевидно, что система (7) решений не имеет. Следовательно, и уравнение (1) решений не имеет.

3) Пусть $\lambda = -2 \triangleq \lambda_2$. Тогда система (5) приобретает вид

$$\begin{cases} \left(1-\frac{3}{2}\cdot(-2)\right)\cdot C_1 + 8\cdot(-2)C_2 = 4 \\ -\frac{7}{8}\cdot(-2)C_1 + \left(1+4(-2)\right)C_2 = \frac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4C_1 - 16C_2 = 4 \\ \frac{7}{4}C_1 - C_2 = \frac{7}{4}. \end{cases} \quad (8)$$

Очевидно, что система (8) имеет бесконечно много решений: $C_1 = 1+4C_2$, C_2 – любое число.

Поэтому и уравнение (1) имеет бесконечно много решений, которые получаем, подставляя найденные выше C_1 и C_2 в (4):

$$u(x) = 3\cdot(-2)\cdot(1+4C_2)x^2 - 8\cdot(-2)\cdot C_2 - 6x^2 + 7 =$$

$$= -6x^2 - 24C_2x^2 + 16C_2 - 6x^2 + 7 = 8C_2\left(2-3x^2\right) - 12x^2 + 7, x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], C_2 \in R .$$

4) Найдем теперь собственные функции и характеристические числа ядра, то есть найдем нетривиальные решения однородного уравнения:

$$u(x) = \lambda \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{3x^2}{y^2} - 8\right) u(y) dy , \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Из сказанного выше (из (4)) следует, что решение данного уравнения имеет вид

$$u(x) = 3\lambda C_1 x^2 - 8\lambda C_2 , \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \quad (9)$$

где постоянные C_1 и C_2 определены формулами (2) и (3) и удовлетворяют однородной системе уравнений:

$$\begin{cases} \left(1-\frac{3}{2}\lambda\right)C_1 + 8\lambda C_2 = 0, \\ -\frac{7}{8}\lambda C_1 + (1+4\lambda)C_2 = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Однородная система линейных уравнений имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю. Имеем (см. (6))

$$\Delta = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)(\lambda + 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \lambda_1 = -\frac{1}{2} \text{ и } \lambda = \lambda_2 = -2 .$$

Если $\lambda = \lambda_1 = -\frac{1}{2}$, то система (10) примет вид

$$\begin{cases} 7C_1 & -16C_2 & =0, \\ 7C_1 & -16C_2 & =0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{16}{7}C_2, \\ C_2 - \textit{любое число.} \end{cases}$$

Подставляя найденные C_1 и C_2 в (9), получаем, что

$$u_1(x) = 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{16}{7}C_2x^2 - 8\left(-\frac{1}{2}\right)C_2 = \frac{4}{7}C_2\left(-6x^2+7\right),$$

$x \in \left[\frac{1}{2},1\right], C_2 \in R, C_2 \neq 0.$

Таким образом,

$u_1(x) = -6x^2 + 7$ есть собственная функция, отвечающая характеристическому числу $\lambda_1 = -\dfrac{1}{2}$.

Если $\lambda = \lambda_2 = -2$, то система (10) примет вид

$$\begin{cases} C_1 & -4C_2 & =0, \\ C_1 & -4C_2 & =0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 4C_2, \\ C_2 - \text{любое число.} \end{cases}$$

Подставляя найденные C_1 и C_2 в (9), получаем, что

$$u_2(x) = -6\cdot 4C_2x^2 + 16C_2 = 8C_2\left(-3x^2+2\right),\ x \in \left[\frac{1}{2},1\right],\ C_2 \in R,\ C_2 \neq 0.$$

Таким образом,

$$u_2(x) = -3x^2 + 2$$

есть собственная функция, отвечающая характеристическому числу $\lambda_2 = -2$. ▲

Пример 5. Решить интегральное уравнение

$$u(x) = \lambda\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{3x^2}{y^2} - 8\right)u(y)dy + f(x),\ x \in \left[\frac{1}{2},1\right],\ f(x) \in C\left[\frac{1}{2},1\right]. \qquad (1)$$

Δ Из уравнения (1) следует, что

$$u(x) = \lambda\cdot 3x^2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{y^2}u(y)dy - 8\lambda\int_{\frac{1}{2}}^{1}u(y)dy + f(x) =$$

$$= \lambda\cdot 3x^2C_1 - 8\lambda C_2 + f(x),\ x \in \left[\frac{1}{2},1\right],$$

где

$$C_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{y^2} u(y)\,dy\,, \tag{2}$$

$$C_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} u(y)\,dy\,. \tag{3}$$

Потому решение уравнения (1), если оно существует, имеет вид

$$u(x) = 3\lambda \cdot C_1 \cdot x^2 - 8\lambda \cdot C_2 + f(x), \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \tag{4}$$

где C_1 и C_2 определены равенствами (2) и (3).

Используя формулу (4), запишем равенства (2) и (3) в виде

$$C_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{y^2}\left(3\lambda C_1 y^2 - 8\lambda C_2 + f(y)\right)dy =$$

$$= 3\lambda C_1 y\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} + 8\lambda C_2 \frac{1}{y}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} + \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(y)\frac{1}{y^2}\,dy =$$

$$= \frac{3}{2}\lambda C_1 - 8\lambda C_2 + \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(y)\frac{1}{y^2}\,dy\,,$$

$$C_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(3\lambda C_1 y^2 - 8\lambda C_2 + f(y)\right)dy =$$

$$= 3\lambda C_1 \frac{y^3}{3}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} - 8\lambda C_2\, y\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} 1 + \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(y)\,dy =$$

$$= \frac{7}{8}\lambda C_1 - 4\lambda C_2 + \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(y)\,dy\,.$$

Отсюда получаем систему линейных уравнений относительно C_1 и C_2 с параметром λ:

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{3}{2}\lambda\right)C_1 \quad + 8\lambda C_2 \quad = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(y)\frac{1}{y^2}\,dy, \\ -\frac{7}{8}\lambda C_1 \quad + (1 + 4\lambda)C_2 \quad = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(y)\,dy. \end{cases} \tag{5}$$

Введем обозначения:

$$A \triangleq \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(y)\frac{1}{y^2}dy, \quad B = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(y)dy\,. \tag{6}$$

Тогда система (5) примет вид

$$\begin{cases} \left(1-\dfrac{3}{2}\lambda\right)C_1 \quad + 8\lambda C_2 \quad = A, \\ -\dfrac{7}{8}\lambda C_1 \quad + (1+4\lambda)C_2 \quad = B. \end{cases} \tag{7}$$

Определитель системы равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-\dfrac{3}{2}\lambda & 8\lambda \\ -\dfrac{7}{8}\lambda & 1+4\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{5}{2}\lambda + 1 = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)(\lambda+2)\,. \tag{8}$$

1) Если определитель системы не равен нулю, то есть если $\lambda \ne -\dfrac{1}{2}$, $\lambda \ne -2$, то система имеет единственное решение при любой правой части, и, следовательно, уравнение (1) имеет единственное решение при любой функции $f(x)$, $f(x) \in C\left[\dfrac{1}{2},1\right]$.

Найдем это решение с помощью правила Крамера:

$$C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} A & 8\lambda \\ B & 1+4\lambda \end{vmatrix} = (1+4\lambda)A - 8\lambda B\,,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1-\dfrac{3}{2}\lambda & A \\ -\dfrac{7}{8}\lambda & B \end{vmatrix} = \left(1-\frac{3}{2}\lambda\right)B + \frac{7}{8}\lambda A = \frac{1}{8}\big(7\lambda A + (8-12\lambda)B\big).$$

Отсюда, используя (8), получаем

$$C_1 = \frac{(1+4\lambda)A - 8\lambda B}{\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right)(\lambda+2)}, \quad C_2 = \frac{7\lambda A + (8-12\lambda)B}{8\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right)(\lambda+2)},$$

где постоянные A и B определены соотношениями (6).

Подставляя в (4) найденные C_1 и C_2, находим решение уравнения (1):

$$u(x)=\frac{3\lambda(1+4\lambda)A-8\lambda B}{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)(\lambda+2)}x^2-\lambda\frac{7\lambda A+(8-12\lambda)B}{8\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)(\lambda+2)}+f(x),\; x\in\left[\frac{1}{2},1\right], \quad (4_\lambda)$$

$f(x)$ — любая функция, $f(x)\in C\left[\frac{1}{2},1\right]$

(напомним, что $A=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}f(y)\frac{1}{y^2}dy$, $B=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}f(y)dy$.)

2) Пусть $\lambda=-\frac{1}{2}\triangleq\lambda_1$. Тогда система (7) приобретает вид

$$\begin{cases}\left(1-\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\cdot C_1 + 8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)C_2 = A,\\ -\frac{7}{8}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)C_1 + \left(1+4\left(-\frac{1}{2}\right)\right)C_2 = B;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{7}{4}C_1 - 4C_2 = A,\\ \frac{7}{16}C_1 - C_2 = B;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7C_1 -16C_2 = 4A,\\ 7C_1 -16C_2 =16B.\end{cases} \quad (9)$$

Система (9) совместна тогда и только тогда, когда $4A=16B$ или $A=4B$, то есть

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}f(y)\frac{1}{y^2}dy=4\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}f(y)dy,$$

или

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{y^2}-4\right)f(y)dy=0\cdot \quad (10)$$

Если условие (10) выполнено, то система (9) имеет бесконечно много решений:

$$C_1=\frac{16}{7}C_2+\frac{4}{7}A,\;\; C_2 - \text{любое число}\;\left(A=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}f(y)\frac{1}{y^2}dy\right).$$

Поэтому и уравнение (1) имеет бесконечно много решений, которые находим, подставляя найденные выше C_1 и C_2 в (4):

$$u(x)=3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{16}{7}C_2+\frac{4}{7}A\right)x^2-8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot C_2+f(x)=$$

$$=-\frac{2}{7}C_2\left(12x^2-14\right)-\frac{6}{7}x^2A+f(x)=$$

$$=\frac{4}{7}C_2\left(-6x^2+7\right)-\frac{6}{7}x^2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{y^2}f(y)dy+f(x)\,,x\in\left[\frac{1}{2},1\right],\ C_2\in R\,, \qquad (11)$$

$f(x)\in C\left[\frac{1}{2},1\right]$ удовлетворяет соотношению (10).

Если же функция $f(x)$ такова, что соотношение (10) не выполняется, то система (9) и, следовательно, уравнение (1) решений не имеет.

3) Пусть $\lambda=-2\triangleq\lambda_2$. Тогда система (7) приобретает вид

$$\begin{cases}\left(1-\frac{3}{2}\cdot(-2)\right)\cdot C_1 & +\ 8\cdot(-2)C_2 & =A,\\ -\frac{7}{8}\cdot(-2)C_1 & +\left(1+4(-2)\right)C_2 & =B;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4C_1 & -16C_2 & =A,\\ \frac{7}{4}C_1 & -7C_2 & =B;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1 & -4C_2 & =\frac{1}{4}A,\\ C_1 & -4C_2 & =\frac{4}{7}B.\end{cases} \qquad (12)$$

Очевидно, что система (12) совместна тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{4}A=\frac{4}{7}B$$

или

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{4y^2}f(y)dy=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{4}{7}f(y)dy\,,$$

то есть

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{7}{y^2}-16\right)f(y)dy=0\,. \qquad (13)$$

Если условие (13) выполнено, то система (12) имеет бесконечно много решений:

$$C_1 = 4C_2 + \frac{1}{4}A,\ \ C_2 - \text{любое число}\ \ \left(A = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{y^2} f(y)\,dy \right).$$

Поэтому и уравнение (1) имеет бесконечно много решений, которые находим, подставляя найденные выше C_1 и C_2 в (4).

$$u(x) = 3\cdot(-2)\cdot\left(4C_2 + \frac{1}{4}A\right)x^2 - 8\cdot(-2)\cdot C_2 + f(x) =$$

$$= -8C_2\left(3x^2 - 2\right) - \frac{3}{2}x^2 \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{y^2} f(y)\,dy + f(x),\ \ x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], C_2 \in R, \qquad (14)$$

$f(x) \in C\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ удовлетворяет соотношению (13).

Если же функция $f(x)$ такова, что соотношение (13) не выполняется, то система (12) и, следовательно, уравнение (1) решений не имеет. ▲

Пример 6. Решить интегральное уравнение

$$u(x) = \lambda \int\limits_{-1}^{1} \left(6x^2 - 5x^2 y + 3xy^2\right) u(y)\,dy + a + bx^3,\ \ x \in [-1, 1], \qquad (1)$$

при всех допустимых значениях a, b, λ. Найти характеристические числа и собственные функции ядра.

∆ Если уравнение (1) имеет решение, то оно представляется в виде

$$u(x) = \lambda C_1 x^2 + 3\lambda C_2 x + a + bx^3,\ \ x \in [-1, 1], \qquad (2)$$

где

$$C_1 = \int\limits_{-1}^{1} (6 - 5y) u(y)\,dy, \qquad (3)$$

$$C_2 = \int\limits_{-1}^{1} y^2 u(y)\,dy. \qquad (4)$$

Из (2), (3) и (4) следует, что

$$C_1 = \int\limits_{-1}^{1} (6 - 5y)\left(\lambda C_1 y^2 + 3\lambda C_2 y + a + by^3\right) dy =$$

$$= 4\lambda C_1 - 10\lambda C_2 + 12a - 2b,$$

$$C_2 = \int\limits_{-1}^{1} y^2 \left(\lambda C_1 y^2 + 3\lambda C_2 y + a + by^3\right) dy = \frac{2}{5}\lambda C_1 + \frac{2}{3}a.$$

Отсюда получаем систему линейных уравнений относительно C_1 и C_2 с параметром λ:

$$\begin{cases} (1-4\lambda)C_1 + \quad 10\lambda C_2 \quad = 12a - 2b, \\ -\dfrac{2}{5}\lambda C_1 + \qquad C_2 \quad = \dfrac{2a}{3}. \end{cases} \tag{5}$$

Определитель $\Delta(\lambda)$ системы (5) равен

$$\Delta(\lambda) = (2\lambda - 1)^2 \tag{6}$$

Если определитель $\Delta(\lambda)$ системы (5) отличен от нуля, то система имеет единственное решение при любой правой части, то есть если $\lambda \neq \dfrac{1}{2}$, то для любых чисел a и b получаем

$$C_1 = \frac{2(18a - 3b - 10a\lambda)}{3(2\lambda - 1)^2}, \tag{7}$$

$$C_2 = \frac{10a + 32a\lambda - 12b\lambda}{15(2\lambda - 1)^2}, \tag{8}$$

и уравнение (1) имеет единственное решение, задаваемое формулой (2), где C_1 и C_2 определяются формулами (7) и (8).

Пусть $\lambda = \dfrac{1}{2}$, то есть $\Delta(\lambda) = 0$. Тогда система (5) приобретает вид

$$\begin{cases} -C_1 + \quad 5C_2 \quad = 12a - 2b, \\ -\dfrac{1}{5}C_1 + \quad C_2 \quad = \dfrac{2a}{3}. \end{cases} \tag{9}$$

Следовательно, если числа a и b таковы, что справедливо равенство

$$\frac{10a}{3} = 12a - 2b, \tag{10}$$

называемое условием разрешимости, то система (9) имеет бесконечно много решений:

$$C_1 = 5C_2 - \frac{10a}{3}, \quad C_2 - \textit{любое число}.$$

Уравнение (1) в этом случае также имеет бесконечно много решений:

$$u(x) = \frac{1}{2}x^2\left(5C_2 - \frac{10a}{3}\right) + 3\cdot\frac{1}{3}xC_2 + a + \frac{13a}{3}x^3, \quad C_2 \in R.$$

Отсюда имеем, что

$$u(x)=C\left(5x^2+3x\right)-\frac{5a}{3}x^2+\frac{13a}{3}x^3+a\,,\quad x\in[-1,1]\,,$$

где C — произвольная постоянная.

Если условие (10) не выполнено, то система (9) и, следовательно, уравнение (1) решений не имеют.

Из сказанного согласно первой теореме Фредгольма имеем, что число $\lambda=\lambda_1=\dfrac{1}{2}$ и только оно является характеристическим числом ядра уравнения (1).

Теперь найдем собственные функции ядра. Если $\lambda=\dfrac{1}{2}$, то система (5) при $a=0$ и $b=0$ приобретает вид

$$\begin{cases}-C_1+5C_2=0,\\ -\dfrac{1}{5}C_1+C_2=0.\end{cases}$$

Отсюда $C_1=5C_2$, C_2 — любое число.

Следовательно, характеристическому числу $\lambda_1=\dfrac{1}{2}$ отвечает собственная функция

$$u_1(x)=\frac{1}{2}x^2\cdot 5C_2+3\cdot\frac{1}{2}xC_2=\frac{C_2}{2}\left(5x^2+3x\right),$$

где C_2 — любое число, не равное нулю, или

$$u_1(x)=5x^2+3x\,.$$

Заметим, что кратность $k(\lambda_1)$ характеристического числа $\lambda_1=\dfrac{1}{2}$ равна $k(\lambda_1)=1$, так как характеристическому числу $\lambda_1=\dfrac{1}{2}$ отвечает одна собственная функция $u_1(x)=5x^2+3x$; в то же время кратность $\lambda_1=\dfrac{1}{2}$ как корня характеристического многочлена $\Delta(\lambda)=(2\lambda-1)^2$ (см. (6)) равна двум. ▲

Пример 7. Решить интегральное уравнение

$$u(x)=\lambda\int\limits_{|y|<1}(x,y)u(y)dy+f(x)\,,|x|\le 1\,. \tag{1}$$

$f(x) \in C(|x| \le 1)$, где $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in R^3$.

Найти собственные функции и характеристические числа соответствующего интегрального оператора.

Δ Из уравнения (1) следует, что

$$u(x) = \lambda x_1 \int\limits_{|y|<1} y_1 u(y)\,dy + \lambda x_2 \int\limits_{|y|<1} y_2 u(y)\,dy + \lambda x_3 \int\limits_{|y|<1} y_3 u(y)\,dy + f(x) =$$

$$= \lambda x_1 C_1 + \lambda x_2 C_2 + \lambda x_3 C_3 + f(x),\ |x| \le 1,$$

где

$$C_j = \int\limits_{|y|<1} y_j u(y)\,dy, \quad j = 1,2,3. \tag{2}$$

Поэтому решение уравнения (1), если оно существует, имеет вид

$$u(x) = \lambda x_1 C_1 + \lambda x_2 C_2 + \lambda x_3 C_3 + f(x), \quad |x| \le 1, \tag{3}$$

где C_j, $j = 1,2,3,$ определены равенствами (2). Используя формулу (3), запишем равенства (2) в виде

$$C_1 = \int\limits_{|y|<1} y_1 \left(\lambda y_1 C_1 + \lambda y_2 C_2 + \lambda y_3 C_3 + f(y)\right) dy =$$

$$= \lambda C_1 \frac{4\pi}{15} + \int\limits_{|y|<1} y_1 f(y)\,dy,$$

$$C_2 = \int\limits_{|y|<1} y_2 \left(\lambda y_1 C_1 + \lambda y_2 C_2 + \lambda y_3 C_3 + f(y)\right) dy =$$

$$= \lambda C_2 \frac{4\pi}{15} + \int\limits_{|y|<1} y_2 f(y)\,dy,$$

$$C_3 = \int\limits_{|y|<1} y_3 \left(\lambda y_1 C_1 + \lambda y_2 C_2 + \lambda y_3 C_3 + f(y)\right) dy =$$

$$= \lambda C_3 \frac{4\pi}{15} + \int\limits_{|y|<1} y_3 f(y)\,dy.$$

Отсюда получаем систему линейных уравнений относительно C_1, C_2 и C_3 с параметром λ:

$$\begin{cases} C_1\left(1-\dfrac{4\pi}{15}\lambda\right) &= \int\limits_{|y|<1} y_1 f(y)\,dy, \\ C_2\left(1-\dfrac{4\pi}{15}\lambda\right) &= \int\limits_{|y|<1} y_2 f(y)\,dy, \\ C_3\left(1-\dfrac{4\pi}{15}\lambda\right) &= \int\limits_{|y|<1} y_3 f(y)\,dy. \end{cases} \tag{4}$$

Если определитель системы (4) не равен нулю, то есть если $\lambda \neq \dfrac{15}{4\pi}$, то система (4) имеет единственное решение при любой правой части:

$$C_j = \frac{1}{1-\dfrac{4\pi\lambda}{15}} \int\limits_{|y|<1} y_j f(y)\,dy\,, \quad j=1,2,3, \tag{5}$$

и, следовательно, уравнение (1) при любой функции $f(x)$, $f(x)\in C(|x|\le 1)$, имеет единственное решение:

$$u(x) = \lambda x_1 C_1 + \lambda x_2 C_2 + \lambda x_3 C_3 + f(x)\,, \quad |x|\le 1\,,$$

где C_j, $j=1,2,3,$ определены равенствами (5).

Пусть $\lambda = \dfrac{15}{4\pi}$. Тогда система (4) приобретает вид

$$\begin{cases} C_1\cdot 0 &= \int\limits_{|y|<1} y_1 f(y)\,dy, \\ C_2\cdot 0 &= \int\limits_{|y|<1} y_2 f(y)\,dy, \\ C_3\cdot 0 &= \int\limits_{|y|<1} y_3 f(y)\,dy. \end{cases} \tag{6}$$

Отсюда следует, что если функция $f(x)$, $f(x)\in C(|x|\le 1)$, такова, что справедливы равенства

$$\int\limits_{|y|<1} y_j f(y)\,dy = 0\,, \quad j=1,2,3, \tag{7}$$

то система (6) и, следовательно, уравнение (1) имеет бесконечно много решений:

$$u(x)=\frac{15}{4\pi}\left(x_1C_1+x_2C_2+x_3C_3\right)+f(x), \quad |x|\le 1,$$

C_1, C_2, C_3 – любые числа.

Если же функция $f(x)$ такова, что хотя бы одно из равенств (7) не выполняется, то уравнение (1) решений не имеет.

По первой теореме Фредгольма $\lambda=\dfrac{15}{4\pi}$ — единственное характеристическое число интегрального оператора, кратность его равна 3.

В силу самосопряженности ядра $K(x,y)=(x,y)=K^*(x,y)$ из второй и третьей теорем Фредгольма вытекает, что собственные функции, отвечающие характеристическому числу $\lambda=\dfrac{15}{4\pi}$, суть функции x_1, x_2 и x_3. ▲

Пример 8. Найти характеристические числа и собственные функции ядра

$$K(x,y)=\begin{cases} y, & 0\le y\le x\le 1,\\ x, & 0\le x\le y\le 1.\end{cases}$$

Δ Требуется найти значения λ, при которых уравнение

$$u(x)=\lambda\int_0^1 K(x,y)u(y)\,dy, \ x\in[0,1],$$

имеет нетривиальные решения и найти эти решения.

Пусть $u(x)$ — одно из таких решений, $u(x)\in C[0,1]$. Тогда из равенства

$$u(x)=\lambda\int_0^x yu(y)\,dy+\lambda x\int_x^1 u(y)\,dy, \quad x\in[0,1], \tag{1}$$

следует, что $u(x)\in C^1[0,1]$ и

$$u'(x)=\lambda xu(x)+\lambda\int_x^1 u(y)\,dy-\lambda xu(x)=\lambda\int_x^1 u(y)\,dy, \ x\in[0,1]. \tag{2}$$

Из (2) в свою очередь следует, что $u(x)\in C^2[0,1]$ и

$$u''(x)=-\lambda u(x), \ x\in[0,1], \tag{3}$$

т.е. искомая функция есть решение дифференциального уравнения (3) и удовлетворяет в силу (1) и (2) граничным условиям

$$u(0)=0\,,\quad u'(1)=0\,. \tag{4}$$

Таким образом, интересующая нас задача свелась к задаче нахождения спектра дифференциального оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ на множестве функций из $C^2[0,1]$, удовлетворяющих граничным условиям (4). А решение этой задачи хорошо известно: $\lambda=\lambda_k=\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi k\right)^2$, $k=0,1,2,\ldots$ — совокупность собственных значений этого оператора, являющихся характеристическими числами заданного ядра, а соответствующая система собственных функций $u_k(x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi k\right)x$, $k=0,1,2,\ldots$ ▲

Пример 9. Найти резольвенту интегрального уравнения (1) **Примера 3**.

Δ Из решения **Примера 3** следует, что если $\lambda\neq\dfrac{1}{2\pi}$, $\lambda\neq-\dfrac{1}{\pi}$, то уравнение (1) **Примера 3** имеет единственное решение, задаваемое формулой (4_λ) **Примера 3**, где постоянные C_1 и C_2 определяются формулами (6_1) и (6_2) **Примера 3** соответственно (напомним, что нумерация формул в каждом примере своя, т.е. в каждом примере формулы нумеруются от (1) до (n), $n\in N$). Из (6_1) и (6_2) **Примера 3** имеем

$$C_1=\frac{1}{1-2\pi\lambda}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\sin y\,dy\,,$$

$$C_2=\frac{1}{1+\pi\lambda}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\cos^2 y\,dy\,.$$

Отсюда, воспользовавшись соотношением (4_λ) **Примера 3**, получаем

$$u(x)=\lambda xC_1-\lambda C_2+f(x)=\frac{\lambda x}{1-2\pi\lambda}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\sin y\,dy-$$

$$-\frac{\lambda}{1+\pi\lambda}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\cos^2 y\,dy+f(x)=\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{x\sin y}{1-2\pi\lambda}-\frac{\cos^2 y}{1+\pi\lambda}\right]f(y)\,dy+$$

$$+f(x)=\lambda\int_{-\pi}^{\pi}R(x,y,\lambda)f(y)\,dy+f(x),\ x\in[-\pi,\pi],$$

где

$$R(x,y,\lambda)=\frac{x\sin y}{1-2\pi\lambda}-\frac{\cos^2 y}{1+\pi\lambda}$$

есть искомая резольвента. ▲

Пример 10. Проиллюстрируем теоремы Фредгольма на примере результатов **Примера 3**.

Δ В **Примере 3** рассматривалось ядро

$$K(x,y)=x\sin y-\cos^2 y\,,\ x\in[-\pi,\pi],\ y\in[-\pi,\pi].$$

Тогда

$$K^*(x,y)=y\sin x-\cos^2 x\,,\ x\in[-\pi,\pi],\ y\in[-\pi,\pi].$$

Так как все рассматриваемые функции являются действительными и $\lambda\in R$, то в силу **Теоремы 2** характеристические числа ядра $K(x,y)$ и ядра $K^*(x,y)$ совпадают, т.е.

$$\lambda_1=\frac{1}{2\pi}$$

и

$$\lambda_2=-\frac{1}{\pi}$$

(воспользовались результатами и обозначениями **Примера 3**).

Найдем собственные функции ядра $K^*(x,y)$, а также заодно найдем непосредственно и характеристические числа ядра $K^*(x,y)$, то есть найдем нетривиальные решения однородного уравнения:

$$\upsilon(x)=\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\left(y\sin x-\cos^2 x\right)\upsilon(y)dy\,,\ x\in[-\pi,\pi]. \qquad (1)$$

Из уравнения (1) следует, что

$$\upsilon(x)=\lambda\sin x\cdot\int_{-\pi}^{\pi}y\upsilon(y)dy-\lambda\cos^2 x\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\upsilon(y)dy=$$
$$=\lambda\sin x\cdot D_1-\lambda\cos^2 x\cdot D_2\,,\ x\in[-\pi,\pi],$$

где

$$D_1=\int_{-\pi}^{\pi}y\upsilon(y)dy\,, \qquad (2)$$

$$D_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \upsilon(y)dy\,. \tag{3}$$

Поэтому решение уравнения (1) имеет вид

$$\upsilon(x) = \lambda D_1 \sin x - \lambda D_2 \cos^2 x\,,\ x \in [-\pi, \pi], \tag{4}$$

где D_1 и D_2 определены равенствами (2) и (3).

Используя формулу (4), запишем равенства (2) и (3) в виде

$$D_1 = \int_{-\pi}^{\pi} y\left(\lambda D_1 \sin y - \lambda D_2 \cos^2 y\right)dy = \lambda D_1 \int_{-\pi}^{\pi} y \sin y dy -$$

$$-\lambda D_2 \int_{-\pi}^{\pi} y \cos^2 y dy = \lambda D_1 \int_{-\pi}^{\pi} y \sin y dy = -\lambda D_1 \int_{-\pi}^{\pi} y d\left(\cos y\right) =$$

$$= -\lambda D_1 \left(\left(y \cos y\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \cos y dy \right) = 2\pi\lambda D_1$$

(здесь воспользовались тем, что функция $y\cos^2 y$, $y \in [-\pi, \pi]$, является нечетной, поэтому $\int_{-\pi}^{\pi} y \cos^2 y dy = 0$),

$$D_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\lambda D_1 \sin y - \lambda D_2 \cos^2 y\right)dy = \lambda D_1 \int_{-\pi}^{\pi} \sin y dy -$$

$$-\lambda D_2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 y dy = -\lambda D_2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 y dy = -\frac{1}{2}\lambda D_2 \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + \cos 2y\right)dy =$$

$$= -\frac{1}{2}\lambda D_2 \left(y + \frac{1}{2}\sin 2y \right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = -\pi\lambda D_2\,.$$

Отсюда получаем систему линейных уравнений относительно D_1 и D_2 с параметром λ:

$$\begin{cases} \left(1 - 2\pi\lambda\right) D_1 & = 0, \\ & \left(1 + \pi\lambda\right) D_2 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Однородная система линейных уравнений имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 - 2\pi\lambda & 0 \\ 0 & 1 + \pi\lambda \end{vmatrix} = \left(1 - 2\pi\lambda\right)\left(1 + \pi\lambda\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2\pi} \triangleq \lambda_1 \\ \lambda &= -\frac{1}{\pi} \triangleq \lambda_2 \end{aligned} \right.$$

Если $\lambda = \lambda_1 = \dfrac{1}{2\pi}$, то система (5) примет вид

$$\begin{cases} 0 \cdot D_1 = 0, \\ \left(1 + \pi \dfrac{1}{2\pi}\right) D_2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D_1 - \text{любое число}, \\ D_2 = 0. \end{cases}$$

Подставляя найденные D_1 и D_2 в (4), получаем, что уравнение (1) при $\lambda = \lambda_1 = \dfrac{1}{2\pi}$ имеет нетривиальное решение:

$$\upsilon(x) = \frac{1}{2\pi} D_1 \sin x, \quad x \in [-\pi, \pi], \quad D_1 \in R, \quad D_1 \neq 0 .$$

Таким образом, функция $\upsilon_1(x) = \sin x$ есть собственная функция ядра $K^*(x, y)$, отвечающая характеристическому числу $\lambda_1 = \dfrac{1}{2\pi}$.

Если $\lambda = \lambda_2 = -\dfrac{1}{\pi}$, то система (5) примет вид:

$$\begin{cases} \left(1 - 2\pi\left(-\dfrac{1}{\pi}\right)\right) D_1 = 0, \\ 0 \cdot D_2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D_1 = 0, \\ D_2 - \text{любое число} \end{cases}$$

Подставив найденные D_1 и D_2 в (4), получаем, что уравнение (1) при $\lambda = \lambda_2 = -\dfrac{1}{\pi}$ имеет нетривиальное решение

$$\upsilon(x) = \frac{1}{\pi} D_2 \cos^2 x, \quad x \in [-\pi, \pi], \; D_2 \in R, \; D_2 \neq 0 .$$

Таким образом, функция $\upsilon_2(x) = \cos^2 x$ есть собственная функция ядра $K^*(x, y)$, отвечающая характеристическому числу $\lambda_2 = -\dfrac{1}{\pi}$.

Следовательно, подпространства

$$Ker\left(E - \lambda_1 K^*\right) = \left\{a \sin x = a\upsilon_1(x), a \in R\right\}, \tag{6}$$

$$Ker\left(E - \lambda_2 K^*\right) = \left\{b \cos^2 x = b\upsilon_2(x), b \in R\right\}, \tag{7}$$

$$Ker\left(E - \lambda K^*\right) = \{0\}, \quad \text{если } \lambda \neq \lambda_1, \lambda \neq \lambda_2 . \tag{8}$$

(так как, если $\lambda \neq \lambda_1$, $\lambda \neq \lambda_2$, то уравнение (1) имеет только нулевое (тривиальное) решение).

Напомним, что в **Примере 3** у ядра

$$K(x,y) = x\sin y - \cos^2 y\ ,\ x \in [-\pi,\pi],\ y \in [-\pi,\pi]$$

были найдены собственные функции $u_1(x) = x$ и $u_2(x) = 1$, отвечающие характеристическим числам $\lambda_1 = \frac{1}{2\pi}$ и $\lambda_2 = -\frac{1}{\pi}$ соответственно. Следовательно,

$$Ker(E - \lambda_1 K) = \{kx = ku_1(x), k \in R\}, \tag{9}$$

$$Ker(E - \lambda_2 K) = \{l = lu_2(x), l \in R\}, \tag{10}$$

$$Ker(E - \lambda K) = \{0\}\text{, если } \lambda \neq \lambda_1\ , \lambda \neq \lambda_2\ . \tag{11}$$

таким образом, мы непосредственно нашли, что в действительном случае множества характеристических чисел ядер $K(x,y)$ и $K^*(x,y)$ совпадают (как это и следует из **Теоремы 2**).

Кратко напомним другие результаты **Примера 3** (см. решение **Примера 3**). В Примере 3 было получено, что уравнение

$$u(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} K(x,y)u(y)dy + f(x), x \in [-\pi,\pi],\ f(x) \in C[-\pi,\pi] \qquad (*)$$

в случае, если $\lambda \neq \lambda_1$ и $\lambda \neq \lambda_2$ (то есть, если λ не равно любому из характеристических чисел ядра) имеет единственное решение при любой правой части $f(x) \in C[-\pi,\pi]$, задаваемое формулой (4_λ) **Примера 3** – этот факт и должен иметь место согласно **Теореме 1**.

Также, если $\lambda \neq \lambda_1$ и $\lambda \neq \lambda_2$, то

$$Ker(E - \lambda K^*) = \{0\} \text{ (см. (8))},$$

и, следовательно, для любой $f(x) \in C[-\pi,\pi]$ справедливо

$$f(x) \perp Ker(E - \lambda K^*),$$

и согласно **Теореме 3** уравнение $(*)$ имеет решение при любой правой части $f(x) \in C[-\pi,\pi]$, причем решение определяется с точностью до элемента подпространства $Ker(E - \lambda K) = \{0\}$ (см. (11)), то есть решение единственно.

Если $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{2\pi}$, то уравнение $(*)$ имеет решение тогда и только тогда, когда функция $f(x) \in C[-\pi,\pi]$ такова, что для нее выполняется соотношение (см.(8) **Пример 3**),

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\sin y dy = 0,$$

или

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\upsilon_1(y)dy = 0,$$

или

$$\left(f(y),\upsilon_1(y)\right) = 0,$$

или (см. (6))

$$f(y) \perp Ker\left(E-\lambda_1 K^*\right);$$

при выполнении данного условия на $f(x)$ уравнение $(*)$ имеет бесконечно много решений (см. (4_{λ_1}) **Примера 3**):

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}C_1 x - \frac{1}{3\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos^2 y dy + f(x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}C_1 u_1(x) - \frac{1}{3\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos^2 y dy + f(x),\ x \in [-\pi,\pi],\ \ C_1 \in R,$$

то есть определяется (см. (9)) с точностью до элемента подпространства $Ker\left(E-\lambda_1 K\right)$.

Если $\lambda = \lambda_2 = -\frac{1}{\pi}$, то уравнение $(*)$ имеет решение тогда и только тогда, когда функция $f(x) \in C[-\pi,\pi]$ такова, что для нее выполняется соотношение (см. (10) **Пример 3**),

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos^2 y dy = 0,$$

или

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\upsilon_2(y)dy = 0,$$

или

$$\left(f(y),\upsilon_2(y)\right),$$

или (см. (7))

$$f(y) \perp Ker\left(E-\lambda_2 K^*\right);$$

при выполнении данного условия на $f(x)$ уравнение $(*)$ имеет бесконечно много решений (см. (4_{λ_1}) **Примера 3**):

$$u(x) = -\frac{1}{\pi}x\frac{1}{3}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\sin y dy + \frac{1}{\pi}C_2 + f(x) =$$

$$= -\frac{x}{3\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\sin y dy + \frac{1}{\pi}C_2 u_2(x) + f(x),\ x \in [-\pi, \pi],\ C_2 \in R,$$

то есть определяется (см. (10)) с точностью до элемента подпространства $Ker(E - \lambda_2 K)$. ▲

Пример 11. Проиллюстрируем теоремы Фредгольма на примере результатов **Примера 5**.

Δ В **Примере 5** рассматривалось ядро

$$K(x,y) = \frac{3x^2}{y^2} - 8,\ x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],\ y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Тогда

$$K^*(x,y) = \frac{3y^2}{x^2} - 8,\ x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],\ y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Так как (напомним) все рассматриваемые функции являются действительными и $\lambda \in R$, то в силу **Теоремы 2** характеристические числа ядра $K(x,y)$ и ядра $K^*(x,y)$ совпадают, т.е.

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} \text{ и } \lambda_2 = -2$$

(характеристические числа и собственные функции ядра $K(x,y)$ найдены в **Примере 5**).

Найдем собственные функции ядра $K^*(x,y)$, а также заодно найдем непосредственно и характеристические числа ядра $K^*(x,y)$, то есть найдем нетривиальные решения однородного уравнения:

$$\upsilon(x) = \lambda\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{3y^2}{x^2} - 8\right)\upsilon(y)dy,\ x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \qquad (1)$$

Из уравнения (1) следует, что

$$\upsilon(x)=\frac{3\lambda}{x^2}\cdot\int_{\frac{1}{2}}^{1} y^2\upsilon(y)\,dy-8\lambda\cdot\int_{\frac{1}{2}}^{1}\upsilon(y)\,dy=\frac{3\lambda}{x^2}\cdot D_1-8\lambda\cdot D_2\,,\ x\in\left[\frac{1}{2},1\right],$$

где

$$D_1=\int_{\frac{1}{2}}^{1} y^2\upsilon(y)\,dy\,, \tag{2}$$

$$D_2=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\upsilon(y)\,dy\,. \tag{3}$$

Поэтому решение уравнения (1) имеет вид

$$\upsilon(x)=\frac{3\lambda}{x^2}D_1-8\lambda D_2\,,\ x\in\left[\frac{1}{2},1\right], \tag{4}$$

где D_1 и D_2 определены равенствами (2) и (3).

Используя формулу (4), запишем равенства (2) и (3) в виде

$$D_1=\int_{\frac{1}{2}}^{1} y^2\left(\frac{3\lambda}{x^2}D_1-8\lambda D_2\right)dy=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(3\lambda D_1-8\lambda D_2 y^2\right)dy=$$

$$=3\lambda D_1 y\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}-\frac{8\lambda}{3}D_2 y^3\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{3}{2}\lambda D_1-\frac{7}{3}\lambda D_2\,,$$

$$D_2=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(3\lambda D_1\cdot\frac{1}{y^2}-8\lambda D_2\right)dy=-3\lambda D_1\frac{1}{y}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}-8\lambda D_2 y\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=3\lambda D_1-4\lambda D_2\,.$$

Отсюда получаем систему линейных уравнений относительно D_1 и D_2 с параметром λ:

$$\begin{cases}\left(1-\dfrac{3}{2}\pi\lambda\right)D_1 & +\dfrac{7}{3}D_2 & =0,\\ -3\lambda D_1 & +(1+4\lambda)D_2 & =0.\end{cases} \tag{5}$$

Однородная система линейных уравнений имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1-\dfrac{3}{2}\lambda & \dfrac{7}{3}\lambda\\ -3\lambda & 1+4\lambda\end{vmatrix}=\left(1-\frac{3}{2}\lambda\right)(1+4\lambda)+7\lambda^2=\lambda^2+\frac{5}{2}\lambda+1=$$

$$=\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)(\lambda+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda=-\frac{1}{2} \triangleq \lambda_1 \\ \lambda=-2 \triangleq \lambda_2\end{array}\right. .$$

Если $\lambda=\lambda_1=-\frac{1}{2}$, то система (5) примет вид

$$\begin{cases}\left(1-\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\cdot D_1 & +\frac{7}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)D_2 \quad =0, \\ -3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)D_1 & +\left(1+4\left(-\frac{1}{2}\right)\right)D_2 \quad =0.\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{7}{4}D_1 & -\frac{7}{6}D_2 \quad =0, \\ \frac{3}{2}D_1 & -D_2 \quad =0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D_2=\frac{3}{2}D_1, \\ D_1 - \text{любое число.}\end{cases}$$

Подставляя найденные D_1 и D_2 в (4), получаем, что уравнение (1) при $\lambda=\lambda_1=-\frac{1}{2}$ имеет нетривиальное решение:

$$\upsilon(x)=3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)D_1\frac{1}{x^2}-8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{3}{2}D_1=-\frac{3}{2}D_1\left(\frac{1}{x^2}-4\right),$$

$x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$, $D_1\in R$, $D_1\neq 0$.

Таким образом, функция $\upsilon_1(x)=\frac{1}{x^2}-4$ есть собственная функция ядра $K^*(x,y)$, отвечающая характеристическому числу $\lambda_1=-\frac{1}{2}$.

Если $\lambda=\lambda_2=-2$, то система (5) примет вид

$$\begin{cases}\left(1-\frac{3}{2}\cdot(-2)\right)\cdot D_1 & +\frac{7}{3}\cdot(-2)D_2 \quad =0, \\ -3\cdot(-2)D_1 & +\left(1+4(-2)\right)D_2 \quad =0.\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}4D_1 & -\frac{14}{3}D_2 \quad =0, \\ 6D_1 & -7D_2 \quad =0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D_1=\frac{7}{6}, \\ D_2 - \text{любое число.}\end{cases}$$

Подставив найденные D_1 и D_2 в (4), получаем, что уравнение (1) при $\lambda=\lambda_2=-2$ имеет нетривиальное решение:

$$\upsilon(x)=3(-2)\cdot\frac{6}{7}D_2\frac{1}{x^2}-8(-2)D_2=-D_2\left(\frac{7}{x^2}-16\right),$$

$x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$, $D_2\in R$, $D_2\neq 0$.

Таким образом, функция $\upsilon_2(x)=\frac{7}{x^2}-16$ есть собственная функция ядра $K^*(x,y)$, отвечающая характеристическому числу $\lambda_2=-2$.

Следовательно, подпространства

$$Ker\left(E-\lambda_1K^*\right)=\left\{a\left(\frac{1}{x^2}-4\right)=a\upsilon_1(x),a\in R\right\}, \tag{6}$$

$$Ker\left(E-\lambda_2K^*\right)=\left\{b\left(\frac{7}{x^2}-16\right)=b\upsilon_2(x),b\in R\right\}, \tag{7}$$

$$Ker\left(E-\lambda K^*\right)=\{0\},\quad \text{если}\,\lambda\neq\lambda_1,\lambda\neq\lambda_2 \tag{8}$$

(так как уравнение (1) имеет только нулевое (тривиальное) решение, если $\lambda\neq\lambda_1$, $\lambda\neq\lambda_2$).

Напомним, что в Примере 3 у ядра

$$K(x,y)=\frac{3x^2}{y^2}-8,\ x\in\left[\frac{1}{2},1\right],\ y\in\left[\frac{1}{2},1\right]$$

были найдены собственные функции: $u_1(x)=-6x^2+7$ и $u_2(x)=-3x^2+2$, отвечающие характеристическим числам $\lambda_1=-\frac{1}{2}$ и $\lambda_2=-2$ соответственно. Следовательно, подпространства

$$Ker\left(E-\lambda_1K\right)=\left\{k\left(-6x^2+7\right)=ku_1(x),k\in R\right\}, \tag{9}$$

$$Ker\left(E-\lambda_2K\right)=\left\{l\left(-3x^2+2\right)=lu_2(x),l\in R\right\}, \tag{10}$$

$$Ker\left(E-\lambda K\right)=\{0\},\ \text{если}\,\lambda\neq\lambda_1,\lambda\neq\lambda_2. \tag{11}$$

Таким образом, мы непосредственно нашли, что в действительном случае множества характеристических чисел ядер $K(x,y)$ и $K^*(x,y)$ совпадают (как это и следует из **Теоремы 2**).

Кратко напомним другие результаты **Примера 5** (см. решение Примера 3). В **Примере 5** было получено, что уравнение:

$$u(x)=\lambda\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{3x^2}{y^2}-8\right)u(y)dy+f(x)\,,\,x\in\left[\frac{1}{2},1\right],\ f(x)\in C\left[\frac{1}{2},1\right] \qquad (**)$$

в случае, если $\lambda\neq\lambda_1$ и $\lambda\neq\lambda_2$, то есть, если λ не равно любому из характеристических чисел ядра $K(x,y)$, то уравнение $(**)$ имеет единственное решение при любой правой части $f(x)\in C\left[\frac{1}{2},1\right]$, задаваемое формулой (4_λ) **Примера 5** – этот факт и должен иметь место согласно **Теореме 1**.

Также, если $\lambda\neq\lambda_1$ и $\lambda\neq\lambda_2$, то $Ker\left(E-\lambda K^*\right)=\{0\}$ (см. (8)) и, следовательно, для любой $f(x)\in C\left[\frac{1}{2},1\right]$ справедливо $f(x)\perp Ker\left(E-\lambda K^*\right)$ и согласно **Теореме 3** уравнение $(**)$ имеет решение при любой правой части $f(x)\in C\left[\frac{1}{2},1\right]$, причем решение определяется с точностью до элемента подпространства $Ker(E-\lambda K)=\{0\}$ (см.(11)), то есть решение единственно.

Если $\lambda=\lambda_1=-\frac{1}{2}$, то уравнение $(**)$ имеет решение тогда и только тогда, когда функция $f(x)\in C\left[\frac{1}{2},1\right]$ такова, что для нее выполняется соотношение (см. (10) **Пример 5**),

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{y^2}-4\right)f(y)dy=0\,,$$

или

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\upsilon_1(y)f(y)dy=0\,,$$

или

$$\left(\upsilon_1(y),f(y)\right)=0\,,$$

или (см. (6))

$$f(y)\perp Ker\left(E-\lambda_1K^*\right);$$

при выполнении данного условия на $f(x)$ уравнение $(**)$ имеет бесконечно много решений (см. (11) Пример 5):

$$u(x)=\frac{4}{7}\cdot C_2\left(-6x^2+7\right)-\frac{6}{7}x^2\cdot\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{y^2}f(y)dy+f(x)=$$

$$=\frac{4}{7}C_2\cdot u_1(x)-\frac{6}{7}x^2\cdot\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{y^2}f(y)dy+f(x),\quad x\in\left[\frac{1}{2},1\right],\ C_2\in R,$$

то есть определяется (см.(9)) с точностью до элемента подпространства $Ker\left(E-\lambda_1 K\right)$.

Если $\lambda=\lambda_2=-2$, то уравнение $(**)$ имеет решение тогда и только тогда, когда функция $f(x)\in C\left[\frac{1}{2},1\right]$ такова, что для нее выполняется соотношение (см.(13) **Пример 5**),

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{7}{y^2}-16\right)f(y)dy=0,$$

или

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\upsilon_2(y)f(y)dy=0,$$

или

$$\left(\upsilon_2(y),f(y)\right),$$

или (см. (7))

$$f(y)\perp Ker\left(E-\lambda_2 K^*\right);$$

при выполнении данного условия на $f(x)$ уравнение $(**)$ имеет бесконечно много решений (см. (14) **Пример 5**):

$$u(x)=-8C_2\left(3x^2-2\right)-\frac{3}{2}x^2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{y^2}f(y)dy+f(x)=$$

$$=-8C_2u_2(x)-\frac{3}{2}x^2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{y^2}f(y)dy+f(x),\ x\in\left[\frac{1}{2},1\right],\ C_2\in R,$$

то есть определяется (см. (10)) с точностью до элемента подпространства $Ker\left(E-\lambda_2 K\right)$. ▲

§ 7. НЕКОТОРЫЕ СПОСОБЫ ПОИСКА ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ НЕОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ

Поиск частного решения рассматриваемых ниже уравнений основан на учете тех или иных особенностей как самих уравнений, так и входящих в них неоднородностей.

Сначала рассмотрим несколько примеров поиска частного решения для *уравнения теплопроводности или волнового уравнения*.

Случай 1. Правая часть уравнения представляет собой произведение функции от t и функции от пространственных переменных, причем функция от пространственных переменных есть собственная функция оператора Лапласа Δ.

То есть рассматривается либо уравнение

$$u_t - a^2\Delta u = F(t)G(x_1, x_2, ..., x_n),$$

либо уравнение

$$u_{tt} - a^2\Delta u = F(t)G(x_1, x_2, ..., x_n),$$

причем $\Delta G(x_1, x_2, ..., x_n) = \lambda \cdot G(x_1, x_2, ..., x_n)$.

В этом случае можно частное решение уравнения искать в виде $u_0 = f(t)G(x_1, x_2, ..., x_n)$, где функция $f(t)$ находится как результат подстановки u_0 в исходное уравнение.

Пример 1. Найти какое-нибудь частное решение уравнения

$$u_{tt} - 9\Delta u = (t-3)\cos(x+y-2z), \quad (x, y, z, t) \in R^4. \tag{1}$$

Δ Заметим, что $\Delta\cos(x+y-2z) = -6\cos(x+y-2z)$, и ищем частное решение данного уравнения в виде

$$u_0 = f(t)\cos(x+y-2z). \tag{2}$$

Подставим функцию, заданную соотношением (2) в (1). Получим

$$f''(t)\cos(x+y-2z) - 9f(t)\Delta\cos(x+y-2z) = (t-3)\cos(x+y-2z);$$

$$f''(t)\cos(x+y-2z) + 54f(t)\cos(x+y-2z) = (t-3)\cos(x+y-2z);$$

$$f''(t) + 54f(t) = (t-3). \tag{3}$$

Решаем уравнение (3).

Общее решение однородного уравнения в данном случае это

$$C_1\cos\left(\sqrt{54}t\right)+C_2\sin\left(\sqrt{54}t\right),$$

а частное решение неоднородного уравнения ищем методом неопределенных коэффициентов в виде многочлена первой степени:

$$at+b,$$

который подставляем в уравнение (3), и получаем

$$0+54\left(at+b\right)=t-3.$$

Отсюда $a=\dfrac{1}{54}$, $b=-\dfrac{3}{54}$.

Следовательно, функция

$$u_0=C_1\cos\left(\sqrt{54}t\right)+C_2\sin\left(\sqrt{54}t\right)+\frac{1}{54}\left(t-3\right)$$

есть решение уравнения (1) при любых постоянных C_1 и C_2. ▲

Пример 2. Найти какое-нибудь частное решение уравнения

$$u_{tt}-\Delta u=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{4}\right)\sin t,\ \left(x,y,z,t\right)\in R^4. \tag{1}$$

Δ Заметим, что $\Delta\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{4}\right)=0$, и ищем частное решение уравнения (1) в виде

$$u_0=f\left(t\right)\left(\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{4}\right). \tag{2}$$

Подставим функцию, заданную соотношением (2) в (1). Получим

$$f''\left(t\right)\left(\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{4}\right)-f\left(t\right)\Delta\left(\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{4}\right)=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{4}\right)\sin t;$$

$$f''\left(t\right)\left(\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{4}\right)=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{4}\right)\sin t;$$

$$f''\left(t\right)=\sin t. \tag{3}$$

Решаем уравнение (3).

$$f\left(t\right)=C_1t+C_2-\sin t.$$

Следовательно, функция

$$u_0=\left(C_1t+C_2-\sin t\right)\left(\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{4}\right)$$

есть частное решение уравнения (1) при любых постоянных C_1 и C_2 .

Пример 3. Найти какое-нибудь частное решение уравнения

$$u_t-\Delta u=e^{-9t}\cos\left(2x-y+2z\right),\quad \left(x,y,z,t\right)\in R^4. \tag{1}$$

Δ Заметим, что $\Delta\cos\left(2x-y+2z\right)=-9\cos\left(2x-y+2z\right)$ и ищем частное решение данного уравнения в виде

$$u_0=f\left(t\right)\cos\left(2x-y+2z\right). \tag{2}$$

Подставим функцию, заданную соотношением (2) в (1). Получаем

$$f'\left(t\right)\cos\left(2x-y+2z\right)-f\left(t\right)\Delta\left(\cos\left(2x-y+2z\right)\right)=$$
$$=e^{-9t}\cos\left(2x-y+2z\right);$$
$$f'\left(t\right)\cos\left(2x-y+2z\right)+9f\left(t\right)\cos\left(2x-y+2z\right)=$$
$$=e^{-9t}\cos\left(2x-y+2z\right);$$
$$f'\left(t\right)+9f\left(t\right)=e^{-9t}. \tag{3}$$

Решаем уравнение (3).

Общее решение однородного уравнения в данном случае это

$$C_1e^{-9t}\ ,$$

а частное решение неоднородного уравнения ищем методом неопределенных коэффициентов, учитывая, что это случай резонанса, в виде

$$ate^{-9t}. \tag{4}$$

Подставляем функцию, определяемую соотношением (4), в уравнение (3). Получаем

$$ae^{-9t}-9ate^{-9t}+ate^{-9t}=e^{-9t},\quad ae^{-9t}=e^{-9t}\quad \text{или}\quad a=1.$$

Следовательно,

$$f\left(t\right)=C_1e^{-9t}+te^{-9t}$$

есть решение уравнения (3) при любой постоянной C_1, а функция

$$u_0=\left(C_1e^{-9t}+te^{-9t}\right)\cos\left(2x-y+2z\right)$$

есть решение уравнения (1) при любой постоянной C_1.

Случай 2. Пусть рассматривается либо уравнение

$$u_t - a^2\Delta u = F(t)G(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

либо уравнение

$$u_{tt} - a^2\Delta u = F(t)G(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где функция $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ обладает следующим свойством: существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $\Delta^N\left(G(x_1, x_2, \dots, x_n)\right) = 0$.

Пример 4. Найти какое-нибудь частное решение уравнения

$$u_t - \Delta u = x^2y^2z^2,\ (x, y, z, t) \in R^4. \tag{1}$$

Δ Заметим, что

$$\Delta^0\left(G(x, y, z)\right) = \Delta^0\left(x^2y^2z^2\right) = x^2y^2z^2 = G; \tag{2}$$

$$\Delta^1(G) = \Delta^1\left(x^2y^2z^2\right) = 2\left(y^2z^2 + x^2z^2 + x^2y^2\right) \triangleq Q; \tag{3}$$

$$\Delta^2(G) = \Delta^1(Q) = \Delta\left(2\left(y^2z^2 + x^2z^2 + x^2y^2\right)\right) =$$

$$= 2\left(2z^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2x^2 + 2y^2 + 2x^2\right) = 8\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \triangleq P; \tag{4}$$

$$\Delta^3(G) = \Delta^2(Q) = \Delta^1(P) =$$

$$= \Delta\left(8\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\right) = 8(2 + 2 + 2) = 48 \triangleq R; \tag{5}$$

$$\Delta^4(G) = \Delta^3(Q) = \Delta^2(P) = \Delta^1(R) = 0. \tag{6}$$

Ищем частное решение уравнения (1) в виде

$$u_0 = f(t)G + q(t)Q + p(t)P + r(t)R, \tag{7}$$

где функции G, Q, P и R определены в (2), (3), (4) и (5) соответственно.

Подставим функцию, определяемую соотношением (7), в уравнение (1). Учитывая соотношение (2), получаем

$$f'(t)G + q'(t)Q + p'(t)P + r'(t)R - f(t)\Delta(G) -$$

$$-q(t)\Delta(Q) - p(t)\Delta(P) - r(t)\Delta(R) = G.$$

Воспользовавшись соотношениями (3), (4), (5) и (6), получаем

$$f'(t)G + q'(t)Q + p'(t)P + r'(t)R -$$

$$-f(t)\cdot Q - q(t)\cdot P - p(t)\cdot R + r(t)\cdot 0 = G$$

откуда следует

$$f'(t) = 1, \tag{8}$$

$$q'(t) = -f(t), \tag{9}$$

$$p'(t) = -q(t), \tag{10}$$

$$r'(t) = -p(t). \tag{11}$$

Очевидно, что функция

$$f(t) = t \tag{12}$$

есть решение (одно из решений) уравнения (8). Подставляя ее в (9), получаем

$$q'(t) = -t,$$

одним из решений которого является функция

$$q(t) = -\frac{t^2}{2}. \tag{13}$$

Подставляем ее в (10), получаем уравнение

$$p'(t) = \frac{t^2}{2},$$

одним из решений которого как легко видеть является функция

$$p(t) = \frac{t^3}{6}. \tag{14}$$

Подставляем ее в (11), получаем уравнение

$$r'(t) = -\frac{t^3}{6},$$

одним из решений которого очевидно является функция

$$r(t) = -\frac{t^4}{24}. \tag{15}$$

Из (7), воспользовавшись (12), (13), (14) и (15), а также соотношениями (2), (3), (4) и (5) имеем, что функция

$$u_0 = t\left(x^2y^2z^2\right) - t^2\left(y^2z^2 + x^2z^2 + x^2y^2\right) + \frac{4}{3}t^3\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - 2t^4$$

есть решение (частное) уравнения (1). ▲

Случай 3. Прежде всего сделаем одно замечание общего характера.

Пусть правая часть уравнений (I) и (IV) из § 5 имеет вид

$$f(x_1, ..., x_n, t) = f_1(x_1, ..., x_k) \cdot f_2(x_{k+1}, ..., x_n, t), \tag{I}$$

где $k \in N,\ 0 < k < n$. Допустим кроме того, что функция f_1 — гармоническая, т.е. выполняется равенство $\Delta f_1(x_1, ..., x_k) = 0$.

Тогда частное решение u_0 уравнения (I) можно представить в виде

$$u_0\left(x_1,...,x_n,t\right)=f_1\left(x_1,...,x_k\right)\cdot\upsilon_0\left(x_{k+1},...,x_n,t\right), \tag{II}$$

где функция $\upsilon_0\left(x_{k+1},...,x_n,t\right)$ является частным решением уравнения

$$\upsilon_{tt}\left(x_{k+1},...,x_n,t\right)-a^2\Delta\upsilon\left(x_{k+1},...,x_n,t\right)=f_2\left(x_{k+1},...,x_n,t\right). \tag{III}$$

Действительно, подставляя (II) в уравнение (I), имеем

$$f_1\cdot\left(\upsilon_0\right)_{tt}-a^2\left[f_1\cdot\Delta\upsilon_0+2\left(\nabla f_1,\nabla\upsilon_0\right)+\upsilon_0\cdot\Delta f_1\right]=f_1\cdot f_2.$$

Учитывая, что $\left(\nabla f_1\left(x_1,...,x_k\right),\nabla\upsilon_0\left(x_{k+1},...,x_n\right)\right)=0$ и функция f_1 — гармоническая, получаем $f_1\cdot\left(\upsilon_0\right)_{tt}-a^2 f_1\cdot\Delta\upsilon_0=f_1\cdot f_2$, откуда следует (III). В результате задача поиска частного решения рассматриваемых уравнений решается в пространстве меньшей размерности.

Пример 5. Найти какое-нибудь частное решение уравнения

$$u_t-3\Delta u=2\frac{\ln\left(x^2+z^2\right)}{1+y^2},\quad \left(x,y,z,t\right)\in R^4\setminus\left\{x^2+z^2=0\right\}. \tag{1}$$

Δ Заметим, что функция $\ln\left(x^2+z^2\right)$ как функция переменных есть гармоническая функция в $\left\{\left(x,z\right):x^2+z^2\neq 0\right\}$. Этот факт можно проверить непосредственно (проверьте!) или вспомнить материалы курса лекций по УМФ. Поэтому частное решение уравнения (1) ищем в виде

$$u_0\left(x,y,z,t\right)=\ln\left(x^2+z^2\right)\cdot\upsilon_0\left(y,t\right), \tag{2}$$

где функция $\upsilon_0\left(y,t\right)$ является частным решением уравнения

$$\upsilon_t-3\Delta\upsilon=2\frac{1}{1+y^2},\qquad \left(y,t\right)\in R^2,$$

или

$$\upsilon_t-3\upsilon_{yy}=\frac{2}{1+y^2},\qquad \left(y,t\right)\in R^2. \tag{3}$$

Так как правая часть уравнения (3) зависит только от y, то ищем частное решение уравнения (3) в виде

$$\upsilon_0=V\left(y\right). \tag{4}$$

Подставляя функцию, определяемую соотношением (4) в (3), получаем

$$-3V''\left(y\right)=\frac{2}{1+y^2}, \tag{5}$$

Отсюда легко видеть, что частным решением уравнения (5) является, например, функция

$$V(y)=\frac{2}{3}y\operatorname{arctg}y-\frac{1}{3}\ln\left(1+y^2\right). \qquad (6)$$

Таким образом, из (2), (4) и (6) получаем, что функция

$$u_0=\ln\left(x^2+z^2\right)\cdot\left[\frac{2}{3}y\operatorname{arctg}y-\frac{1}{3}\ln\left(1+y^2\right)\right]$$

есть частное решение уравнения (1). ▲

Случай 4. Как и в **случае 2**, рассматриваются уравнения

$$u_t(x)-a^2\Delta u(x)=F(t)G_0(x)$$

либо

$$u_{tt}(x)-a^2\Delta u(x)=F(t)G_0(x), \quad x=(x_1,...,x_k)\in R^n,$$

где функция $G_0(x)$ обладает следующим свойством: существует число $m\in N$ и множество функций $\{G_1,...,G_m\}$ таких, что выполняются равенства

$$\Delta G_k=\sum_{s=k}^{m}h_{ks}G_s, \quad k=0,1,...,m, \qquad (\mathrm{IV})$$

где $h_{ks}\in R\setminus\{0\}$ - фиксированные числа.

В матричной форме равенства (IV) можно записать в виде $\Delta G(x)=H\cdot G(x)$, где матрицы $\Delta G(x)$, H, $G(x)$ имеют вид

$$H=\begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} & ... & h_{0m}\\ 0 & h_{11} & ... & h_{1m}\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & h_{mm}\end{pmatrix}, \Delta G(x)=\begin{pmatrix}\Delta G_0(x)\\ \Delta G_1(x)\\ ...\\ \Delta G_m(x)\end{pmatrix}, G(x)=\begin{pmatrix}G_0(x)\\ G_1(x)\\ ...\\ G_m(x)\end{pmatrix}.$$

Частное решение $u_0(x)$ в этом случае ищем в виде линейной комбинации функций $G_k(x)$, $k=0,1,...,m$, с неизвестными коэффициентами $g_k(t)$:

$$u_0(x)=\sum_{k=0}^{m}g_k(t)G_k(x)=G^T(x)\cdot g(t), \quad g(t)=\begin{pmatrix}g_0(t)\\ g_1(t)\\ ...\\ g_m(t)\end{pmatrix}. \qquad (\mathrm{V})$$

В силу свойства (IV) имеем

$$\Delta u_0(x)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{s=k}^{m}g_k(t)h_{ks}G_s(x)=\sum_{s=k}^{m}G_s(x)\sum_{k=0}^{m}h_{ks}g_k(t)= \\ =G^T(x)\cdot H\cdot g(t). \tag{VI}$$

Подставляя (V), например, в волновое уравнение и учитывая (VI), имеем

$$\sum_{k=0}^{m}g_k''(t)G_k(x)-\sum_{s=k}^{m}\sum_{k=0}^{m}a^2h_{ks}G_s(x)g_k(t)=F(t)G_0(x),$$

или

$$G^T(x)\cdot\left(g''(t)-a^2H^T\cdot g(t)\right)=F(t)G_0(x)=G^T(x)\cdot g^0(t),$$

где $g^0(t)=\begin{pmatrix}F(t)\\0\\...\\0\end{pmatrix}$.

Полагая

$$g''(t)-a^2H^Tg(t)=g^0(t),$$

получим систему уравнений

$$\begin{cases}g_0''(t)-\lambda_{00}g_0(t)= & G_0(t),\\ g_1''(t)-\lambda_{11}g_1(t)= & \lambda_{01}g_0(t),\\ ....-...= & ...\\ g_m''(t)-\lambda_{mm}g_m(t)= & \lambda_{0m}g_0(t)+...+\lambda_{mm}g_m(t)\end{cases}$$

Здесь числа λ_{km} определяются равенствами $\lambda_{ks}=a^2h_{ks}$, $k=0,1,...,m$; $s=0,1,...,m$.

Решая последовательно уравнения системы, находим искомые функции $g_k(t)$, $k=0,1,...,m$. ▲

Пример 6. Найти какое-нибудь частное решение уравнения

$$u_{tt}-2\Delta u=x^2\sin(x+y)\cos t,\ (x,y,t)\in R^3. \tag{1}$$

Δ Обозначим $G_0(x,y)\triangleq x^2\sin(x+y)$ и отметим, что

$$\Delta G_0(x,y)=\Delta\left(x^2\sin(x+y)\right)=\left(2x\sin(x+y)+x^2\cos(x+y)\right)_x+ \\ +\left(x^2\cos(x+y)\right)_y=2\sin(x+y)+4x\cos(x+y)-2x^2\sin(x+y)=$$

$$= -2G_0\left(x,y\right)+4G_1\left(x,y\right)+2G_2\left(x,y\right), \tag{2}$$

где

$$G_1\left(x,y\right)\triangleq x\cos\left(x+y\right),$$

$$G_2\left(x,y\right)\triangleq \sin\left(x+y\right).$$

Кроме того,

$$\Delta G_1\left(x,y\right)=\Delta\left(x\cos\left(x+y\right)\right)=$$

$$=\left(\cos\left(x+y\right)-x\sin\left(x+y\right)\right)_x - x\cos\left(x+y\right)=$$

$$=-2\sin\left(x+y\right)-2x\cos\left(x+y\right)=-2G_1\left(x,y\right)-2G_2\left(x,y\right), \tag{3}$$

$$\Delta G_2\left(x,y\right)=\Delta\left(\sin\left(x+y\right)\right)=-\sin\left(x+y\right)=-G_2\left(x,y\right). \tag{4}$$

Ищем частное решение исходного уравнения в виде функции

$$u_0\left(x,y\right)=g_0(t)G_0\left(x,y\right)+g_1\left(t\right)G_1\left(x,y\right)+g_2\left(t\right)G_2\left(x,y\right). \tag{5}$$

Преобразуем выражение (5) с учетом (2), (3) и (4):

$$\begin{aligned}\Delta u_0 &= g_0\left(t\right)\left(-2G_0+4G_1+2G_2\right)-g_1\left(t\right)\left(2G_1+2G_2\right)-g_2\left(t\right)\left(G_2\right)=\\ &=-2g_0\left(t\right)G_0+\left(4g_0\left(t\right)-2g_1\left(t\right)\right)G_1+\left(2g_0\left(t\right)-2g_1\left(t\right)-g_2\left(t\right)\right)G_2.\end{aligned} \tag{6}$$

Подставляя (5) в исходное уравнение (1) и пользуясь выражением (6), запишем уравнение в виде

$$g_0''(t)G_0+g_1''(t)G_1+g_2''(t)G_2-2\left[-2g_0\left(t\right)G_0+\right.$$

$$\left.+\left(4g_0\left(t\right)-2g_1\left(t\right)\right)G_1+\left(2g_0\left(t\right)-2g_1\left(t\right)-g_2\left(t\right)\right)G_2\right]=G_0\cos t.$$

Приравнивая коэффициенты при функциях G_k, $k=0,1,2,$ получаем систему уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов $g_k\left(t\right)$, $k=0,1,2$:

$$\begin{cases} g_0''(t)+4g_0\left(t\right)= \cos t\\ g_1''(t)+4g_1\left(t\right)= 8g_0\left(t\right)\\ g_2''(t)+2g_2\left(t\right)=4g_0\left(t\right)-4g_1\left(t\right)\end{cases}$$

Частное решение первого уравнения будем искать в виде $g_0\left(t\right)=A\cos t$. Неизвестную константу найдем из равенства $-A+4A=9$. Отсюда следует: $g_0\left(t\right)=3\cos t$. Подставляя найденное выражение для $g_0\left(t\right)$ в правую часть второго уравнения системы и предполагая, что его решение имеет вид $g_1\left(t\right)=B\cos t$, находим значение B из равенства $-B+4B=24$. Отсюда находим $B=8$, и, следовательно, $g_1\left(t\right)=8\cos t$.

Наконец из третьего уравнения с учетом найденных выражений для функций $g_0(t)$ и $g_1(t)$ аналогичным образом находим, что в частности функция $g_2(t) = -20\cos t$ является его решением. Таким образом, частным решением уравнения (1) является, в частности, функция

$$u_0(x,y) = \left(3x^2\sin(x+y) + 8x\cos(x+y) - 20\sin(x+y)\right)\cos t.$$

Случай 5. Рассматривается волновое уравнение, правая часть которого является функцией от специального вида линейной формы переменной t и только одной пространственной переменной. Если для определенности выбрать в качестве такой переменной переменную x, то рассматриваемое уравнение имеет вид

$$u_{tt} - a^2\Delta u = F(x+at), \text{ или } u_{tt} - a^2\Delta u = F(x-at).$$

В этом случае уравнение может быть сведено к волновому уравнению от одной пространственной переменной, для нахождения частного решения которого можно использовать рассмотренные ранее приемы.

Продемонстрируем описанный случай на следующем примере.

Пример 7. Найти какое-нибудь частное решение уравнения

$$u_t - \Delta u = \frac{1}{1+(t+x)^2}, \quad (x,y,z,t) \in R^4. \tag{1}$$

Δ Так как правая часть уравнения (1) есть функция, зависящая только от t и x, то попробуем найти частное решение уравнения (1) то же, как функцию, зависящую только от t и x:

$$u_0 = u_0(x,t).$$

Уравнение (1) для функции $u_0(x,t)$ примет вид

$$(u_0)_{tt} - (u_0)_{xx} = \frac{1}{1+(x+t)^2}. \tag{2}$$

Заметим, что уравнение (2) — волновое уравнение для функции одной пространственной переменной (то есть уравнение струны), которое может быть решено методом характеристик.

Очевидно, что характеристиками данного уравнения являются

$$x+t = C_1, \quad x-t = C_2.$$

Введем характеристическую замену переменных

$$\begin{cases} \xi = x+t, \\ \eta = x-t. \end{cases} \tag{3}$$

В переменных (3) уравнение (2) примет вид

$$-4u_{\xi\eta} = \frac{1}{1+\xi^2}. \tag{4}$$

Очевидно, что одним из решений уравнения (4) будет функция

$$u = -\frac{1}{4}\eta \operatorname{arctg} \xi ,$$

и, таким образом, учитывая (3), функция

$$u_0(x,t) = (x-t)\operatorname{arctg}(x+t)$$

есть частное решение уравнения (2) и, следовательно, и уравнения (1). ▲

Теперь рассмотрим несколько примеров поиска частного решения *уравнения Пуассона* относительно функции двух переменных.

Пусть $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, и в полярных координатах на плоскости правая часть уравнения Пуассона имеет вид либо $G(r)\cos k\varphi$, либо $G(r)\sin k\varphi$, где k некоторое число из множества $\{0,1,2,...\}$. То есть уравнение имеет вид
или

$$\Delta u = G(r)\cos k\varphi ,$$

или

$$\Delta u = G(r)\sin k\varphi .$$

Достаточно часто $G(r) = r^\alpha$ при некотором целом α .

В этом случае можно пробовать найти частное решение в виде $Ar^{\alpha+2}\cos k\varphi$ (или $Ar^{\alpha+2}\sin k\varphi$ соответственно).

Пример 8. Найти какое-нибудь частное решение уравнения

$$\Delta u = 12r^2\cos 2\varphi ,\ 1 < r < 2 ,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi . \tag{1}$$

Δ Ищем частное решение уравнения (1) в виде

$$u_0 = Ar^4\cos 2\varphi \quad (\text{здесь } \alpha = 2). \tag{2}$$

Запишем уравнение (1) в полярных координатах:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 12r^2\cos 2\varphi , \tag{3}$$

и подставим в (3) функцию, заданную соотношением (2). Получаем

$$12Ar^2\cos 2\varphi + 4Ar^2\cos 2\varphi - 4Ar^2\cos 2\varphi = 12r^2\cos 2\varphi .$$

Отсюда $A = 1$, и, следовательно функция
$$u_0 = r^4 \cos 2\varphi$$
есть частное решение уравнения (1). ▲

Пример 9. Найти какое-нибудь частное решение уравнения
$$\Delta u = \frac{3}{r^4}\sin\varphi\,,\ \ r > 1\,,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi\ . \tag{1}$$

Δ Ищем частное решение уравнения (1) в виде
$$u_0 = A\frac{1}{r^2}\sin\varphi \ \text{ (здесь } \alpha = -2\text{)}. \tag{2}$$
Запишем уравнение (1) в полярных координатах:
$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = \frac{3}{r^4}\sin\varphi\,, \tag{3}$$
и подставим в (3) функцию, заданную соотношением (2). Получим
$$A\frac{6}{r^4}\sin\varphi + \frac{1}{r}A\left(\frac{-2}{r^3}\sin\varphi\right) + A\frac{1}{r^2}\left(-\frac{1}{r^2}\sin\varphi\right) = \frac{3}{r^4}\sin\varphi\ .$$
Отсюда $A = 1$, и, следовательно, функция
$$u_0 = \frac{1}{r^2}\sin\varphi$$
есть частное решение уравнения (1). ▲

Если частное решение уравнения в виде $Ar^{\alpha+2}\cos k\varphi$ (или $Ar^{\alpha+2}\sin k\varphi$ соответственно) не находится, то можно попробовать искать частное решение уравнения в виде $g(r)\cos k\varphi$ (или $g(r)\sin k\varphi$ соответственно).

Пример 10. Найти какое-нибудь частное решение уравнения
$$\Delta u = 4\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}\,,\ 1 < r < 2\,,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi\ . \tag{1}$$

Δ В данном случае, пересчитывая правую часть уравнения (1) в полярных координатах, получаем
$$\Delta u = 4 - 4\sin 2\varphi\,,\ 1 < r < 2\,,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi\ . \tag{2}$$
Найдем u_{01} — частное решение уравнения
$$\Delta u = 4\,,\ 1 < r < 2\,,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi\ . \tag{3}$$

и u_{02} — частное решение уравнения

$$\Delta u = -4\sin 2\varphi\ ,\ 1 < r < 2\ ,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi\ . \tag{4}$$

Тогда функция

$$u_0 = u_{01} + u_{02} \tag{5}$$

есть частное решение уравнения (2).

Частное решение u_{01} уравнения (3) ищем в виде

$$u_{01} = Ar^2 \text{ (здесь } \alpha = 0\text{)}. \tag{6}$$

Подставляем функцию, определенную соотношением (6), в уравнение (3), записанное в полярных координатах. Получаем

$$2A + 2A + 0 = 4\ .$$

Отсюда $A = 1$, и, следовательно, функция

$$u_{01} = r^2 \tag{7}$$

есть частное решение уравнения (3).

Ищем теперь частное решение u_{02} уравнения (4). Здесь $\alpha = 0$, но (проверьте!) решение не найдется в виде $Br^2 \sin 2\varphi$. Поэтому ищем частное решение уравнения (4) в виде

$$g(r)\sin 2\varphi\ . \tag{8}$$

Подставляем функцию, определенную соотношением (8), в уравнение (4), записанное в полярных координатах. Получаем

$$g''(r)\sin 2\varphi + \frac{1}{r} g'(r)\sin 2\varphi - \frac{4}{r^2} g(r)\sin 2\varphi = -4\sin 2\varphi\ ,$$

$$g''(r) + \frac{1}{r} g'(r) - \frac{4}{r^2} g(r) = -4\ ;$$

$$r^2 g''(r) + rg'(r) - 4g(r) = -4r^2\ . \tag{9}$$

Уравнение (9) есть уравнение Эйлера. Делаем замену переменной $r = e^t$, и для новой функции $g(t) = g\left(e^t\right)$ получаем

$$g''(t) - g'(t) + g'(t) - 4g(r) = -4e^{2t}\ ;$$

$$g''(t) - 4g(r) = -4e^{2t}\ . \tag{10}$$

Найдем какое-нибудь решение уравнения (10).

Заметим, что в данном случае наблюдается случай резонанса (фундаментальная система решений однородного уравнения состоит из функций e^{2t} и e^{-2t}). Поэтому ищем частное решение неоднородного уравнения методом неопределенных коэффициентов в виде

$$Dte^{2t}\ . \tag{11}$$

Подставляя функцию (11) в уравнение (1), получаем

$$4De^{2t} + 4Dte^{2t} - 4Dte^{2t} = -4e^{2t} .$$

Отсюда $D = 1$, и , следовательно, функция $-te^{2t}$ есть частное решение уравнения (10).

Делая обратную замену переменных $t = \ln r$, получаем, что функция

$$g(r) = -r^2 \ln r$$

есть частное решение уравнения (9), и, следовательно, функция

$$u_{02} = -r^2 \ln r \sin 2\varphi \qquad (12)$$

есть частное решение уравнения (4).

Из (5), (7) и (12) имеем, что функция

$$u_0 = r^2 - r^2 \ln r \sin 2\varphi$$

есть частное решение уравнения (2), а следовательно, и уравнения (1). ▲

Литература

1. *Арсенин В. Я.* Методы математической физики и специальные функции. Москва : Наука, 1974. 432 с.
2. *Бицадзе А. В.* Уравнения математической физики. Москва : Наука, 1982.
3. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. Москва : Наука, 1988.
4. *Владимиров В. С., Жаринов В. В.* Уравнения математической физики. Москва : Физматлит, 2000.
5. *Владимиров В. С., Михайлов В. П., Михайлова Т. В., Шабунин М. И.* Сборник задач по уравнениям математической физики. Москва : Физматлит, 2016.
6. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. Москва : Наука, 1982.
7. *Зоммерфельд А. Д.* Дифференциальные уравнения в частных производных физики. Москва : Иностранная литература, 1957.
8. *Колесникова С. И.* Методы решения основных задач уравнений математической физики. Москва : МФТИ, 2015. 79 с.
9. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. Москва : Мир, 1964.
10. *Ладыжинская О. А.* Смешанная задача для гиперболического уравнения. Москва : Гостехиздат, 1953.
11. *Ладыжинская О. А.* Краевые задачи математической физики. Москва : Наука, 1973.
12. *Ловитт У. В.* Линейные интегральные уравнения. Москва : Едиториал УРСС, 2004. 232 с.
13. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. Москва : Наука, 1983.
14. *Михайлов В. П.* Лекции по уравнениям математической физики. Москва : Физматлит, 2001.
15. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. Москва : Физматлит, 1977.
16. *Михлин С. Г.* Курс математической физики. Москва : Наука, 1968.
17. *Олейник О. А.* Лекции об уравнениях с частными производными. Ч. 1. Москва : Изд-во МГУ, 1976.
18. *Олейник О. А.* Лекции об уравнениях с частными производными. Москва : БИНОМ, 2005.
19. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. Москва : Физматгиз, 1961.
20. *Петровский И. Г.* Лекции по интегральным уравнениям. Москва : Физматгиз, 1957.
21. *Петровский И. Г.* Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва : Физматгиз, 1960.
22. *Пикулин В. П., Похожаев С. И.* Практический курс по уравнениям математической физики. Москва : МЦНМО, 2004. 208 с.
23. *Положий Г. Н.* Уравнения математической физики. Москва : Высшая школа, 1964.

24. *Смирнов М. М.* Сборник задач по уравнениям математической физики. Москва : Высшая школа, 1971.
25. *Смирнов М. М.* Курс высшей математики. Т. 3, 4, 5. Москва : Физматгиз, 1959.
26. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики. Москва : Наука, 1992. 433 с.
27. *Стеклов В. А.* Основные задачи математической физики. Москва : Наука, 1983. 432 с.
28. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. Москва : Наука, 2004. 798 с.
29. *Трикоми Ф. Дж.* Интегральные уравнения. Москва : Иностранная литература, 1960. 296 с.
30. *Трикоми Ф. Дж.* Лекции по уравнениям в частных производных. Москва : КомКнига, 2007. 440 с.
31. *Уроев В. М.* Уравнения математической физики. Москва : ИФ Яуза, 1998. 373 с.
32. *Шаньков В. В*. Замена системы координат и метод характеристик : учебно-методическое пособие. Москва : МФТИ, 2017. 43 с.
33. *Шаньков В. В.* Волновые уравнения и уравнения теплопроводности : учебно-методическое пособие. Москва : МФТИ, 2017. 43 с
34. *Шаньков В. В.* Интегральные уравнения и задача Штурма — Лиувилля : учебно-методическое пособие. Москва : МФТИ, 2018. 47 с.
35. *Шаньков В. В.* Эллиптические уравнения : учебно-методическое пособие. Москва : МФТИ, 2018. 46 с.
36. *Филиппов А. Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. Москва : КомКнига, 2007. 240 с.

Учебное издание

Михайлова Татьяна Валентиновна
Хасанов Адам Агзамович

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ ПО КУРСУ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Редактор *О. П. Котова.* Корректор *И. А. Волкова*
Дизайн обложки *Е. А. Казённова*

Подписано в печать 05.03.2020. Формат $60 \times 84\ {}^{1}/_{16}$. Усл. печ. л. 11,5.
Уч.-изд. л. 10,5. Тираж 400 экз. Заказ № .

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408 84 30. E-mail: polygraph@mipt.ru

Для заметок