Введение в математический анализ. Часть I.

К учебно-методическому пособию

В.Ж. Сакбаев

1. Множества. Отображения. Отношения.

Множество, элемент множества и принадлежность элемента множеству являются первичными не определяемыми понятиями.

Аксиома – для всякого множества A и всякого элемента x выполняется одно и только одно из двух условий: $x \in A$ или $x \notin A$.

(Только такие ситуации будут рассматриваться).

Множества могут быть заданы перечислением входящих в них объектов. Например, $A = \{a\},\ B = \{b_1, b_2\},\ C = \{n \in \mathbf{N} : \frac{n}{2} \in \mathbf{N}\}$

Определяются пересечение $A \bigcap B$ и объединение $A \bigcup B$ множеств A и B, дополнение $B \backslash A$ множества A до множества B. Например, $x \in B \backslash A \Leftrightarrow x \in B \, and \, x \notin A$. Пустое множество $\oslash$ определяется как множество, в которое не входит никакой элемент.

Определение 1. *Множество A называется подмножеством множества B (обозначается $A \subset B$), если для любого $x \in A$ выполняется условие $x \in B$.*

Определение 2. *Множества A и B называются равными ($A = B$) если $A \subset B$ и $B \subset A$.*

Определение 3.

Множество A называется собственным подмножеством множества B если $A \neq B$, $A \neq \oslash$ и $A \subset B$.

1) Множество A называется множеством, состоящим из одного элемента, если оно не пусто и не имеет собственных подмножеств. Если при этом $a \in A$, то обозначается $A = \{a\}$. Заметим, что $a \neq \{a\}$.

2) Множество A называется состоящим из двух элементов, если оно имеет собственные подмножества, состоящие из одного элемента и любое его собственное подмножество является состоящим из одного элемента. При этом если множество $B \subset A$ есть собственное подмножество множества A, состоящее из одного элемента x, то множество $A \backslash B$ по условию состоит из одного элемента $y \neq x$ и другихсобственных подмножеств множество A не имеет. Тогда $A = \{x\} \bigcup \{y\} = \{x, y\}$.

$n+1$) Если определено множество, состоящее из n элементов, то множеством, состоящим из $n+1$ элементов будем называть такое, которое содержит собственное подмножество, состоящее из n элементов, и любое его собственное подмножество состоит из 1, из 2, ... , или из n элементов.

Пусть A и B – два множества.

Определение 4. *Парой (неупорядоченной) элементов множеств A и B называется любое множество $\{a, b\}$, где $a \in A$ и $b \in B$.*

Пара элементов представляет собой объединение двух множеств, состоящих из одного элемента $\{a, b\} = \{a\} \bigcup \{b\}$. Пара элементов $\{a, b\}$ состоит либо из двух элементов, если $a \neq b$, либо из одного, если $a = b$. То есть пара элементов $\{a, a\}$ как множество совпадает с множеством $\{a\}$ и если множество $\{a\}$ представляет пару элементов, то эта пара есть $\{a, a\}$. Поскольку $\{a\} \bigcup \{b\} = \{b\} \bigcup \{a\}$, то $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Упорядоченной парой (a, b) элементов множеств A и B называется называют такую пару элементов множеств A и B, про которые некоторым образом указано, какой из элементов пары является первым, а какой – вторым. Зададим следующис способ выделения первого элемента в паре.

Определение 5. *Упорядоченной парой элементов (a, b) множеств A и B называется пара элементов $\{a, \{a, b\}\}$ множеств A и $\{\{a, b\},\ a \in A, b \in B\}$. При этом элемент a называется первым элементом упорядоченной пары (a, b), а элемент b – вторым.*

Если $a \neq b$, то (a, b) есть пара, элементами которой являются элемент a и пара $\{a, b\}$, состоящая из двух элементов. Если $a = b$, то (a, a) есть пара, элементами которой являются элемент a и пара $\{a, a\} = \{a\}$ – множество, состоящее из одного элемента. (Элемент a и множество $\{a\}$ – различные объекты).

Рассмотрим некоторое множество A и некоторые его элементы a, b, c, d. Тогда

$\{a, b\} = \{c, d\} \Leftrightarrow$ либо $a = c$, $b = d$, либо $a = d$, $b = c$.

$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c,\ b = d.$

Определение 6. *Прямым произведением множеств A и B называется множество упорядоченных пар $A \times B = \{(x, y),\ x \in A, y \in B\}$, в каждой из которых первый элемент пары является произвольным элементом множества A, а второй – произвольным элементом множества B.*

Рассмотреть примеры $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2\}$; $A = \mathbf{N}$, $B = \mathbf{N}$.

Определение 7. Отображением f множества A в множество B называется такое подмножество Γ множества $A \times B$, что выполняются следующие условия:

$$\forall\, a \in A \text{ множество } \Gamma \bigcap a \times B \text{ состоит из одного элемента } (a, f(a)).$$

Обозначается $f:\ A \to B$. При этом множество A называется областью определения отображения f; множеством значний отображения f называется подмножество $f(A) = \{y \in B:\ \exists x \in A:\ \ (x, y) \in \Gamma\} = \{f(x),\, x \in A\} = \bigcup\limits_{x \in A} \{f(x)\}$ множества B. При этом говорят, что элемент $f(a) \in B$ является значением отображения f в точке $a \in A$.

Если $A = \mathbf{N}$ – множество натуральных чисел и $B = Q$ – множество рациональных чисел, то отображение $f:\ \mathbf{N} \to Q$ называется последовательностью рациональных чисел.

Если $f:\ A \to B$, то говорят, что задано правило, сопоставляющее каждому элементу множества A единственный элемент множества B.

Определение 8. *Отношением в множестве A называется подмножество F множества $A \times A$. При этом говорится, что элементы $x \in A$ и $y \in A$ связаны отношением F, если $(x, y) \in F$.*

Определение 9. *Отношением порядка в множестве A называется такое отношение F, что выполняются следующие условия:*

1. $\forall\ a \in A\ (a, a) \in F$;

2. Если $(a, b) \in F$ и $(b, c) \in F$, то $(a, c) \in F$.

3. Если $(a, b) \in F$ $(b, a) \in F$, то $a = b$.

Определение 10. *Отношением линейного порядка в множестве A называется такое отношение порядка F, что выполняется условие:*

4. Если условие $(a, b) \in F$ не выполнено, то выполнено условие $(b, a) \in F$.

Если на множестве A задано отношение линейного порядка F, то это означает, что на множестве определена операция $\prec$ сравнения двух элементов такая, что для любых двух элементов a и b множества A выполяется хотя бы одно из двух условий $a \prec b$ и

$b \prec a$; оба из этих условий выполнены одновременно тогда и только тогда, когда $a = b$; выполняется условие транзитивности $a \prec b,\ b \prec c \Rightarrow\ a \prec c$.

Примером отношения линейного порядка может служить отношение $\leq$ на множестве A вещественных, рациональных или целых чисел.

Рассмотрим отношение $\prec$ на множестве точек плоскости π с фиксированным началом координат Q. Будем говорить, что точка $A \in \pi$ предшествует точке $B \in \pi$ и писать $A \prec B$, если $|QA| \leq |QB|$. Проверить, что отношение $\prec$ на множестве точек плоскости π удовлетворяет условиям 1-3 определения 9, но не удовлетворяет условию 4 определения 10.

Определим на множестве векторов плоскости отношение $\prec$ по следующему правилу:

будем говорить, что векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ плоскости связаны отношением $\prec$ если они коллинеарны и выполняется неравенство $|\mathbf{a}| \leq |\mathbf{b}|$. Какие из условий определений 9, 10 являются выполненными, а какие – нет?

2. Множество вещественных чисел R.

Определение 1. Множеством действительных (вещественных) чисел называется множество R, содержащее более одного элемента, на котором определены операции

сложения $\oplus : R \times R \to R$ и

умножения $\odot : R \times R \to R$

и отношение линейного порядка $\leq$, таким образом, что выполняются следующие 16 аксиом (см. Г.Е. Иванов. Т. 1.)

I. Аксиомы сложения.

1) $a + b = b + a\ \forall\ a, b \in R$;
2) $a + (b + c) = (a + b) + c\ \forall\ a, b, c \in R$;
3) $\exists 0 \in R:\ a + 0 = a\ \forall\ a \in R$;
4) $\forall\ a \in R\ \exists(-a) \in R:\ a + (-a) = 0$.

II. Аксиомы умножения.

1) $ab = ba\ \forall\ a, b \in R$;
2) $a(bc) = (ab)c\ \forall\ a, b, c \in R$;
3) $\exists\, 1 \in R:\ a \cdot 1 = a\ \forall\ a \in R$;
4) $\forall\ a \in R:\ a \neq 0\ \exists a^{-1} \in R:\ a \cdot a^{-1} = 1$.

III. Аксиома связи сложения с умножением.
1) $a(b + c) = ab + ac\ \forall\ a, b, c \in R$;

IV. Аксиомы порядка.

На множестве R определено линейное отношение порядка $\leq$ таким образом, что

1) $x \leq x\ \forall\ x \in R$;

2) для любых $x, y \in R$ из нарушения условия $x \leq y$ следует выполнение условия $y \leq x$ (т.е. хотя бы одно из двух условий $x \leq y$ и $y \leq x$ должно быть выполнено);

3) Если $x, y \in R$ и выполнены оба условия $x \leq y$ и $y \leq x$, то $x = y$;

4) Если $x, y, z \in R$ и выполнены условия $x \leq y$ и $y \leq z$, то $x \leq z$;

V. Аксиома связи порядка и сложения.

1) Если $a, b, c \in R$ и $a \leq b$, то $a + c \leq b + c$;

VI. Аксиома связи порядка и умножения.

1) Если $a, b, c \in R$, $a \leq b$ и $c \geq 0$, то $ac \leq bc$;

VI. Аксиома непрерывности.

Если A и B – два непустых подмножества множества R таких, что для любого $a \in A$ и любого $b \in B$ выполняется неравенство $a \leq b$, то существует такое $c \in R$, что неравенство $a \leq c \leq b$ выполняется для любых $a \in A$ и $b \in B$.

Упражнение.

Доказать, что нулевой элемент в множестве R единствен.

Доказать, что для каждого элемента $a \in R$ противоположный элемент в множестве R единствен.

Доказать, что если $a + b = a$ при некоторых $a, b \in R$, то $b = 0$.

Доказать, что для любого $a \in R$ выполняется равенство $a \cdot 0 = 0$.

Доказать, что $0 < 1$.

Доказать, что единичный элемент в множестве R единствен.

Доказать, что нулевой элемент не может иметь обратного.

Доказать, что для каждого ненулевого элемента $a \in R$ обратный элемент в множестве R единствен.

Доказать, что если $a, b, c \in R$, $a \leq b$ и $c \leq 0$, то $ac \geq bc$.

Модулем числа $a \in R$ называется число $|a| \in R$, равное a при условии $a \geq 0$ и равное $-a$ при условии $a < 0$.

Лемма 1. Для любых двух чисел $x, y \in R$ неравенство $|x| \leq y$ равносильно системе из двух неравенств $-y \leq x \leq y$.

Доказать самим.

Лемма 2. Для любого числа $a, b \in R$ справедливы неравенства

$$-|a| \leq a \leq |a|. \tag{1}$$

Доказать самим.

Лемма 3. Для любых чисел $a, b \in R$ справедливы неравенства

$$|a + b| \leq |a| + |b|. \tag{2}$$

$$||a| - |b|| \leq |a - b|. \tag{3}$$

В силу леммы 1

Рассмотрим следующие подмножества множества R:

Множеством натуральных чисел $\mathbf{N}$ будем называть такое подмножество $\mathbf{N} \subset R$, что

1. $1 \in \mathbf{N}$;
2. Если $a \in \mathbf{N}$, то $a + 1 \in \mathbf{N}$;
3. Для любых чисел $a, b \in \mathbf{N}$ таких, что $a \neq b$, выполняется неравенство $|b - a| \geq 1$;
4. Для любого $a \in \mathbf{N}$ выполняется условие $a \geq 1$.

Множеством натуральных чисел $\mathbf{N}$ можно определить и как наименьшее из всех подмножеств множества R, удовлетворяющих условиям 1. и 2.

Проверить, что множество мощностей непустых конечных множеств (см. стр. 1) удовлетворяет условиям 1.-4.

Множеством целых чисел $\mathbf{Z}$ будем называть такое подмножество $\mathbf{Z} \subset R$, представимое в виде объединения трех попарно непересекающихся множеств $\mathbf{Z} = \{0\} \bigcup \mathbf{N} \bigcup \mathbf{N}_-$, где $\mathbf{N}_-$ – множество элементов R, противоположные к которым являются элкементами множества $\mathbf{N}$.

Доказать, что множество Z допускает следующее аксиоматическое определение.

Упражнение. Подмножество $\mathbf{P} \subset R$ такое, что выполняются следующие три условия

1. $1 \in \mathbf{P}$;

2. Если $a \in \mathbf{N}$, то $a+1, a-1 \in \mathbf{P}$;

3. Для любых чисел $a, b \in \mathbf{P}$ таких, что $a \neq b$, выполняется неравенство $|b-a| \geq 1$;

совпадает с множеством целых чисел $\mathbf{Z}$.

Рассмотрим множество $\mathbf{M}$ всех чисел (рациональных дробей) из множества R, представимых в виде $mn^{-1} \equiv \frac{m}{n}$, где $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$. На множество $\mathbf{M}$ определим отношение эквивалентности или равенства двух элементов

$$\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} \ \Leftrightarrow m_1 n_2 = m_2 n_1.$$

Множеством рациональных чисел Q будем называть множество классов равных между собой дробей из множества $\mathbf{M}$. Например, дроби $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, ... представляют собой класс эквивалентных между собой дробей множества $\mathbf{M}$. Из каждого класса эквивалентных между собой дробей множества $\mathbf{M}$ можно выбрать элемент с наименьшим (натуральным!) знаменателем, называемый несократимой рациональной дробью.

Таким образом, множество рациональных чисел Q есть множество несократимых рациональных дробей.

Упражнение.

Доказать, что множество $\mathbf{Z}$ удовлетворяет условию:

Если A и B – два непустых подмножества множества $\mathbf{Z}$ таких, что для любого $a \in A$ и любого $b \in B$ выполняется неравенство $a \leq b$, то существует такое $c \in \mathbf{Z}$, что неравенство $a \leq c \leq b$ выполняется для любых $a \in A$ и $b \in B$.

Упражнение.

Доказать, что множество $\mathbf{Q}$ не удовлетворяет условию:

Если A и B – два непустых подмножества множества $\mathbf{Q}$ таких, что для любого $a \in A$ и любого $b \in B$ выполняется неравенство $a \leq b$, то существует такое $c \in \mathbf{Q}$, что неравенство $a \leq c \leq b$ выполняется для любых $a \in A$ и $b \in B$.

Определим такие подмножества множества чисел R как отрезки, интервалы и полуинтервалы.

Введем в рассмотрение множество $\bar{\mathbf{R}}$, представляющее собой объединение множества R с парой различных элементов $\{-\infty, +\infty\}$, на котором определено отношение порядка $\leq$ таким образом, что для любого $x \in R$ выполняются условия $-\infty \leq x \leq +\infty$ (поскольку элементы $-\infty, +\infty$ множества $\bar{R}$ не совпадают ни с одним элементом $x \in R$, то для любого $x \in R$ выполняются условия $-\infty < x < +\infty$).

2. Грани и точные грани подмножеств множества вещественных чисел R и расширенной числовой прямой $\bar{R}$.

Определение 1. Число $B \in R$ называется верхней (нижней) гранью множества $A \subset R$ если выполняется условие

$$\forall\, a \in A\, a \leq B \qquad (\forall\, a \in A\, a \geq B).$$

Опредлить множество верхних граней множеств $A = \{0\}$, $A = (0,1)$ и $A = \oslash$.

Определение 2. Множество $A \subset R$ называется ограниченным сверху, если существует такое $M \in R$, что для любого $a \in A$ выполняется условие $a \leq$. В противном случае множество A называется неограниченным сверху.

Множество $A \subset R$ называется ограниченным снизу, если существует такое $m \in R$, что для любого $a \in A$ выполняется условие $a \geq m$. В противном случае множество A называется неограниченным снизу.

Множество A называется ограниченным, если оно ограничено сверху и ограничено снизу.

Доказать, что множество A ограничено тогда тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\exists\, M \in R:\ \forall\, a \in A\ |a| \leq M.$$

Определение 3. Число $\beta \in R$ называется точной верхней гранью множества $A \in R$, если выполняются следующие два условия:

$$\forall\, a \in A\ a \leq \beta, \tag{1}$$

$$\forall\, \beta' < \beta\ \exists\, a \in A:\ a > \beta'. \tag{2}$$

В этом случае говорят, что $\beta = \sup(A)$.

Таким образом, число $\beta \in R$ называется точной верхней гранью множества $A \in R$, если само оно является верхней гранью множества A, но любое меньшее число уже не является верхней гранью множества A.

Аналогично определяется и точная нижняя грань множества A: число $\alpha \in R$ называется точной нижней гранью множества $A \in R$, если само оно является нижней гранью множества A, но любое большее число уже не является нижней гранью множества A.

Определение 4. Число $\alpha \in R$ называется точной верхней гранью множества $A \in R$, если выполняются следующие два условия:

$$\forall\, a \in A\ a \geq \alpha, \tag{1}$$

$$\forall\, \alpha' > \alpha\ \exists\, a \in A:\ a < \alpha'. \tag{2}$$

В этом случае говорят, что $\alpha = \inf(A)$.

Найти sup и inf множеств $(0,1)$ и $[0,1]$.

Множество A неограничено сверху, если оно не является ограниченным сверху, т.е. если

$$\forall\ M \in R\ \exists\ a \in A:\ a > M. \tag{5}$$

Аналогично, множество A неограничено снизу, если оно не является ограниченным снизу, т.е. если

$$\forall\, M \in R\ \exists\, a \in A:\ a < M. \tag{6}$$

Таким образом, множество A неограничено сверху, если оно не имеет верхней грани в множестве R; множество A неограничено снизу, если оно не имеет нижней грани в множестве R.

Для определения точных граней неограниченных числовых множеств введем следующее определение точных граней для подмножеств расширенной числовой прямой.

Определение 5. Элемент $\beta \in \bar{R}$ называется точной верхней гранью множества $A \in \bar{R}$, если выполняются следующие два условия:

$$\forall\, a \in A\ a \leq \beta, \tag{1}$$

$$\forall\, \beta' < \beta\ \exists\, a \in A:\ a > \beta'. \tag{2}$$

В этом случае говорят, что $\beta = \sup(A)$.

Определение 6. Элемент $\alpha \in \bar{R}$ называется точной верхней гранью множества $A \in \bar{R}$, если выполняются следующие два условия:

$$\forall\, a \in A\ a \geq \alpha, \tag{1}$$

$$\forall\, \alpha' > \alpha\ \exists\, a \in A:\ a < \alpha'. \tag{2}$$

В этом случае говорят, что $\alpha = \inf(A)$.

Лемма 1. Если множество $A \subset R$ не ограничено сверху (снизу), то элемент $+\infty \in \bar{R}$ (элемент $-\infty \in \bar{R}$) является его супремумом (инфимумом).

Действительно, если множество $A \subset R$ не ограничено сверху, то выполняется условие (5). Поэтому элемент $+\infty$ удовлетворяет условиям (1) и (2) определения 5, ибо $\forall\, a \in A \subset R$, $a \leq +\infty$ и в силу (5) $\forall\, \beta' < +$
$infty\, \exists\, a \in A:\ a > \beta'$. Таким образом, $+\infty$ является супремумом множества A.

Случай инфимума неограниченного снизу множества рассматривается аналогично.

Теорема 1. Если $A \subset R$ – непустое числовое множество, то существует единственный элемент $\beta = \sup(A)$ и существует единственный элемент $\alpha = \inf(A)$. При этом если множество A ограничено (не ограничено) сверху, то $\sup(A) \in R$ (то $A = +\infty$), а если множество A ограничено (не ограничено) снизу, то $\inf(A) \in R$ (то $\inf A = -\infty$).

Доказательство. Пусть $A \subset R$ и $A \neq \oslash$. Тогда либо множество A ограничено сверху, либо неограничено сверху. Если множество A неограничено сверху, то согласно лемме 1 оно имеет супремум $\beta = +\infty \in R$.

Докажем, что если множество A ограничено сыерху, то оно имеет супремум. Пусть множество A ограничено сверху, то множество $B = \{M \in R:\ \forall x \in A\ x \leq M\}$ верхних граней множества A является непустым множеством вещественных чисел. При этом выполняется условие:

$$\forall\ a \in A,\ \forall\ b \in B\ a \leq b.$$

Следовательно, согласно аксиоме непрерывности 16, существует такое число $c \in R$, что

$$\forall\ a \in A,\ \forall\ b \in B\ a \leq c \leq b. \tag{7}$$

Докажем, что число c является супремумом множества A/ Согласно (7) число c удовлетворяет условию (1) определения 3. При этом если $c' < c$, то согласно (7) выполнено условие $c' \notin B$. Поэтому c' не является верхней гранью множества A и, следовательно, существует такое $a' \in A$, что $a' > c$. Таким образом, для числа c выполнены условия (1) и (2) определения 3, то есть $c = \sup(A)$.

Докажем единственность супремума множества A. Предположим, что некоторое непустое множество $A \subset \bar{R}$ имеет два различных супремума $c, \hat{c} \in \bar{R}$. Тогда либо $c < \hat{c}$, либо $\hat{c} < c$. Пусть для определенности $\hat{c} < c$. Так как $c = \sup(A)$, то согласно условию (2) определения 5 $\exists\ a \in A :\ a > \hat{c}$. Но это противоречит условию $\hat{c} = \sup(A)$; следовательно, предположение не верно.

Рассмотрение инфинума проводится аналогично.

Определение 7. Число $M \in R$ называется максимальным (минимальным) элементом множества $A \subset R$, если выполняются условия:

1. $M \in A$;

2. для любого $x \in A$ выполняется неравенство $x \leq M$ (выполняется неравенство $x \geq M$).

Найти супремум, инфимум, максимальный и минимальный элемент либо доказать их отсутствие у следующих множеств – отрезка $[0, 1]$ и интервала $(0, 1)$.

Лемма 1. Если $A \subset R$ и M – максимальный элемент A, то $M = sup(A)$.
Доказать самим.

Лемма 2. Если $A \subset R$ и $M = \sup(A)$, то M является максимальным элементом в том и в только том случае, когда $M \in A$.

Определение 1. Множество A называется конечным, если $\exists\ n \in \mathbf{N}$ такое, что A не содержит собственных подмножеств, состоящих из n элементов. (называется бесконечным, если $\forall\ n \in \mathbf{N}$ множество A содержит собственное подмножество, состоящее из n элементов).

Если A – непустое конечгое множество, то существует $n \in \mathbf{N}$ такое, что множество A состоит из n элементов.

Теорема 1. Доказать, что у каждого конечного множества $A \subset R$ есть максимальный элемент и минимальный элемент.

Указание. Можно применить метод математической индукции по числу элементов конечного множества.

Для множества, состоящего из одного элемента, и множества, состоящено из двух элементов, утверждение верно (проверить). Пусть утверждение верно для любого множества A, состоящего из n элементов при некотором $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. Тогда если множество A состоит из $n+1$ элемента, то $\exists\, a \in A$, а множество $B = A \backslash \{a\}$ соситоит из n элементов. В силу предположения индукции B содержит максимальный элемент M_B и минимальный элемент m_B. Положим $M_a = \max\{a, M_B\}$ и $m_A = \min\{a, m_B\}$ (множество, состоящее из двух элементов, имеет максимальный и минимальный элементы). Тогда $M_A = \max A$ и $m_A = \min A$. По принципу математической индукции утверждение верно для любого множества A, состоящего из n при ипроизвольном $n \in \mathbf{N}$, то есть для любого конечного множества.

Теорема 2. Принцип Архимеда.

Множество $\mathbf{N}$ не ограничено сверху.

Предположим противное. Тогда множество $\mathbf{N}$ имеет точную верхнюю грань $b \in R$. Следовательно, $n \leq b \ \forall \ n \in \mathbf{N}$ и $\forall b' < b \ \exists n \in \mathbf{N} : \ n > b'$. Из второго утверждения при $b' = b - 1$ следует существование такого $n \in \mathbf{N}$, что $n > b - 1$. Согласно определению множества $\mathbf{N}$ выполняется включение $n + 1 \in \mathbf{N}$. Тогда справедливо условие $\exists \ n + 1 \in \mathbf{N} : \ n+1 > b$, а это противоречит предположению $b = \sup(\mathbf{N})$. Полученное противоречие доказывает утверждение.

Упражнение 1. Доказать, что у всякого непустого множества $A \subset \mathbf{N}$ существует единственный минимальный элемент.

Упражнение 2. Доказать, что у всякого непустого ограниченного сверху (снизу) множества $A \subset \mathbf{Z}$ существует единственный максимальный (минимальный) элемент.

Определение 2. Для каждого числа $x \in R$ его целой частью называется число $[x] = \max\{k \in \mathbf{Z} : \ k \leq x\}$, а дробной частью числа x называется число $\{x\} = x - [x]$.

Теорема 3. Для любых $a, b \in R$ таких, что $a < b$, существует рациональное число $r \in \mathbf{Q}$ такое, что $r \in (a, b)$. (Свойство плотности множества $\mathbf{Q}$ в множестве R.)

Поскольку $b - a > 0$, то $(b - a)^{-1} > 0$. В силу теоремы 2 существует $m \in \mathbf{N}$ такое, что $m > \delta^{-1}$. Следовательно,

$$m^{-1} < b - a. \tag{0}$$

Для произвольного числа $a \in R$ по определению 2 выполняется условие $[a] \leq a$.

Рассмотрим рациональные числа $[a] + \frac{k}{m}, \ k \in \mathbf{N}$. Согласно принципу Архимеда множество $\mathbf{K} = \{k \in \mathbf{N} : \ [a] + \frac{k}{m} > a\}$ не пусто. Согласно результату упражнения 1 множество $\mathbf{K}$ содержит минимальный элемент k_1. Так как $k_1 \in \mathbf{K}$, то число $r = [a] + \frac{k_1}{m}$ удовлетворяет неравенству $[a] + \frac{k_1}{m} > a$. Докажем, что $r < b$. Заметим, что так как $k_1 = \min(\mathbf{K})$, то $k_1 - 1 \notin \mathbf{K}$ и тогда $[a] + \frac{k-1}{m} \leq a$ в силу определения множества $\mathbf{K}$. Поэтому $[a] + \frac{k}{m} \leq a + \frac{1}{m} < b$ с учетом условия (0). Теорема доказана.

Последовательности.

Определение. Последовательностью вещественных чисел называется отображение множества $\mathbf{N}$ в множество R.

Обозначается $\{x_n\}$. По определению отображения последовательность $\{x_n\}$ есть множество упорядоченных пар $\{(n, x_n); \ n \in \mathbf{N}, \ x_n \in R \, \forall \, n \in \mathbf{N}\}$; пара (n, x_n) называется элементом последовательности $\{x_n\}$, число n называется номером элемента (n, x_n), а число x_n – значением элемента (n, x_n).

Таким образом, у любой числовой последовательности множество ее элементов счетно, множество значений последовательности может быть счетным $(x_n = n \ \forall \ n \in \mathbf{N})$, а может быть конечным $(x_n = (-1)^n \ \forall \ n \in \mathbf{N})$.

Определение. Последовательностью элементов множества M называется отображение множества $\mathbf{N}$ в множество M.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху, если множество ее значений ограничено сверху, то есть $\exists \ M \in R : \ \forall \ n \in \mathbf{N} \ x_n \leq M$.

Аналогично определяется ограниченность последовательности снизу. Последовательность называется ограниченной если множество ее значений ограничено, то есть $\exists \ M \geq 0 : \ \forall \ n \in \mathbf{N} \ |x_n| \leq M$.

Предел последовательности.

Определение. Пределом последовательностьи вещественных чисел $\{x_n\}$ называется такой элемент A расширенной числовой прямой $\bar{R}$, чтовыполнено условие:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}:\ \forall\ n \in \mathbf{N},\ n > N,\ x_n \in O_\varepsilon(A). \tag{1}$$

Второй замечательный предел.

Напомним, что число e определялось как предел монотонной ограниченной последовательности $(1+\frac{1}{n})^n$.

Лемма 1. Если $\{n_k\}$ – бесконечно большая последовательность натуральных чисел (не обязательно монотонная), то $\lim\limits_{k\to\infty}(1+\frac{1}{n_k})^{n_k} = e$.

Доказательство. Выберем некоторое $\varepsilon > 0$. Согласно определению числа e существует такое $N_\varepsilon \in \mathbf{N}$, что при всех $n \in \mathbf{N}$ таких, что $n > N_\varepsilon$, выполняется условие $(1+\frac{1}{n})^n \in (e-\varepsilon, e+\varepsilon)$. По условию $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$, поэтому существует такое $K_\varepsilon \in \mathbf{N}$, что при всех $k > K_\varepsilon$ выполняется условие $n_k > N_\varepsilon$. Следовательно, при всех $k > K_\varepsilon$ выполняется условие $(1+\frac{1}{n_k})^{n_k} \in (e-\varepsilon, e+\varepsilon)$. Поскольку $\varepsilon > 0$ выбрано произвольно, то $\lim\limits_{k\to\infty}(1+\frac{1}{n_k})^{n_k} = e$.

Теорема 1. (Второй замечательный предел) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$.

Пусть $\{x_k\}$ – произвольная последовательность чисел из интервала $(1, +\infty)$, такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$. Для каждого $k \in \mathbf{N}$ определим натуральное число $n_k = [x_k]$ (целая часть). Таким образом, определена последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ такая, что $n_k \le x_k \le n_k + 1$, следовательно, $1 < 1 + \frac{1}{n_k+1} \le 1 + \frac{1}{x_k} \le 1 + \frac{1}{n_k}$ при всех $k \in \mathbf{N}$.

Тогда $(1+\frac{1}{n_k+1})^{n_k} \le (1+\frac{1}{x_k})^{x_k} \le (1+\frac{1}{n_k})^{n_k+1}$ при всех $k \in \mathbf{N}$. В силу леммы 1 $\lim\limits_{k\to\infty}(1+\frac{1}{n_k+1})^{n_k} = e = \lim\limits_{k\to\infty}(1+\frac{1}{n_k})^{n_k+1}$, поэтому в силу теоремы о трех последовательностях $\lim\limits_{k\to\infty}(1+\frac{1}{x_k})^{x_k} = e$. Поскольку $\{x_k\}$ – произвольная последовательность Гейне функции $(1+\frac{1}{x})^x$, $x > 1$, в точке $x_0 = +\infty$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$.

Лемма 2. $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$.

Доказательство. Сделаем замену $x = \phi(t) = -t$, тогда $t \to +\infty$ при $x \to -\infty$. По теореме о замене переменной под знаком предела $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim\limits_{t\to+\infty}(\frac{t-1}{t})^{-t} = \lim\limits_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t-1})^t = \lim\limits_{s\to+\infty}((1+\frac{1}{s})^s(1+\frac{1}{s})) = e$.

Из теоремы 1 и леммы 2 следует

Следствие 1. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$.

Сделав замену $t = \frac{1}{x}$, устремив x к бесконечности и воспользовавшись теоремой о замене переменной под знаком предела получаем

Следствие 2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

В силу непрерывности функции $y = \ln(t)$, $t \in (0, +\infty)$ справедливо равенство $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln(e)$, то есть $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x) = 1$.

Упражнение. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}[e^x - 1] = 1$.

Первый замечательный предел.

Было дано определение ломанной, вписанной в дугу окружности, лежащей в верхней полуплоскости координатной плоскости. Было дано определение длины дуги окружности, установлена ограниченность длины половины окружности и введено число π.

Для каждого числа $x \in [0, \pi]$ определим точку M_x на верхней половине C^+ единичной окружности такую, что $|EM_x| = x$ (здесь E – точка единичной окружности с координатами $(1, 0)$). Отображение $\Psi: \ [0, \pi] \to C^+$ является инъективным (поскольку $M_x \neq M_y$ если $x \neq y$) и сюрьективным (поскоьку для любого $M \in C^+$ выполняется условие $|EM| \in [0, \pi]$).

Определим на отрезке $[0, \pi]$ функции $sin(x)$, $cos(x)$, $x \in [0, \pi]$, значения которых в точке $x \in [0, \pi]$ равны соответственно ординате и абсциссе точки M_x. Продолжим на отрезок $[-\pi, 0]$ функцию $cos(x)$ четным образом, а функцию $sin(x)$ нечетным образом; на всю числовую прямую каждую из этих функций продолжим 2π-периодически. Определим также функции $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ и $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ на области определения частного от деления двух функций.

Замечание 1. $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1, \ \cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}), \quad \forall \ x \in R.$

Лемма 1. Для любого $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ выполняются неравенства $\sin(x) \leq x \leq \operatorname{tg}(x)$.

Доказательство геометрическое, см. Г.Н. Яковлев.

Следствие 1. Функции $\sin x$, $x \in R$ и $\cos x$, $x \in R$ непрерывны в точке $x_0 = 0$.

Лемма 2. Для любого $x \in [-\pi, \pi]$ и для любого $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ выполняется неравенство $|\sin(x) - \sin(x + t)| \leq |t|$.

Следствие 2. Функции $\sin x$, $x \in R$, непрерывна в любой точке $x_0 \in R$.

Теорема (1-й замечательный предел).

$$\lim_{x \to 0} (\frac{\sin(x)}{x}) = 1.$$

Заметим, что $\lim\limits_{x \to +0} (\frac{\sin(x)}{x}) = 1$ по теореме о трех последовательностях согласно неравенству $\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$, справедливому согласно лемме 1 при всех $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ $(\lim\limits_{x \to 0} (\cos x) = 1$ в силу следствия 1).

В силу четности функций 1, $, \frac{\sin(x)}{x}, \ , \cos(x)$ справедливо равенство $\lim\limits_{x \to -0} (\frac{\sin(x)}{x}) = \lim\limits_{x \to +0} (\frac{\sin(x)}{x}) = 1$, что и доказывает теорему.

Упражнение. Доказать, что $\lim\limits_{x \to 0} (\frac{\arcsin(x)}{x}) = 1; \lim\limits_{x \to 0} (\frac{\operatorname{tg}(x)}{x}) = 1.$

Сравнение асимптотического поведения функции при $x \to x_0$. Эквивалентность функций, O и o. Вводится как у Г.Е. Иванова.

Список литературы.

Г.Н. Яковлев.
О.В. Бесов.
Г.Е. Иванов.
А.А. Зорич.
С.С. Кутателадзе.