УДК 517
ББК 22.16
Б 53

Бесов О.В. **Лекции по математическому анализу.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. — 480 с. — ISBN 978-5-9221-1506-3.

Учебник содержит материалы по теории пределов, дифференциальному и интегральному исчислению функций одного и нескольких переменных, числовым и функциональным рядам, тригонометрическим рядам Фурье, преобразованиям Фурье, элементам нормированных и гильбертовых пространств и другим темам. Он написан на основе лекций, в течение многих лет читаемых автором в МФТИ.

Рекомендовано Научно-методическим советом по математике Министерства образования и науки Российской Федерации в качестве учебника для студентов вузов, обучающихся по направлениям 010400 «Прикладная математика и информатика», 010900 «Прикладные математика и физика».

ISBN 978-5-9221-1506-3

# ОГЛАВЛЕНИЕ

## Предисловие

Настоящий учебник написан на основе лекций автора, читаемых студентам Московского физико-технического института (государственного университета).

Отбор и порядок следования основных тем математического анализа и их содержание соответствуют Государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования по направлению и специальности «Прикладная математика и физика». Книга может быть использована студентами физико-математических, а также инженерно-физических специальностей и направлений с повышенной подготовкой по математике.

В ряде вопросов изложение несколько отличается от стандартного в сторону его упрощения, уточнения или доходчивости. В изложении доказательств теорем и лемм автор стремился к сравнительной краткости (не в ущерб завершённости), полагая, что необходимое обдумывание читаемого будет способствовать лучшему пониманию и усвоению материала. При изучении курса настоятельно рекомендуются самостоятельное выполнение предлагаемых упражнений и тщательный разбор примеров.

Автор благодарит профессоров А.А. Абрамова, Б.И. Голубова, С.А. Теляковского за конструктивные обсуждения ряда вопросов, изложенных в книге, и Т.Е. Денисову, прочитавшую рукопись всей книги и сделавшую много полезных замечаний, способствовавших её улучшению, а также сотрудника кафедры высшей математики МФТИ А.В. Полозова, взявшего на себя нелёгкий труд по подготовке рукописи к печати.

# Основные обозначения

Для сокращения записи используются следующие обозначения:

$\forall$ — «для каждого», «для любого», «для всех» (от англ. All);

$\exists$ — «существует», «найдётся» (от англ. Exists);

$:$ — «такой, что», «такие, что»;

$:=$, $=:$ — «по обозначению равно» [1]);

$\to$ — «соответствует», «поставлено в соответствие»;

$\Rightarrow$ — «следует»;

$\Longleftrightarrow$ — «равносильно».

*Множество* является одним из исходных понятий в математике, оно не определяется. Вместо слова «множество» говорят «набор», «совокупность», «собрание». Множество состоит из объектов, которые принято называть его *элементами*. Вводится также *пустое множество* $\varnothing$ как множество, не содержащее ни одного элемента. Множества часто обозначают прописными буквами $A$, $B$, $C$, …, а элементы множеств — строчными. Запись $a \in A$, или $A \ni a$ означает, что *элемент $a$ содержится во множестве $A$*, *принадлежит $A$*, *множество $A$ содержит элемент $a$*. Запись $a \notin A$ означает, что множество $A$ не содержит элемента $a$.

Запись $A \subset B$, $B \supset A$ означает, что множество $A$ является *подмножеством* множества $B$, т. е. что $a \in B \quad \forall\, a \in A$. Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то пишут $A = B$. Запись $a = b$ означает, что $a$ и $b$ — это один и тот же элемент.

Примеры множеств: $\mathbb{R}$ — множество всех действительных чисел, $A = \{x \in \mathbb{R}\colon x^2 < 1\}$, $A = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$.

$A \cup B$ (*объединение* множеств $A$ и $B$) — множество, состоящее из всех элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств $A$, $B$;

$A \cap B$ (*пересечение* множеств $A$ и $B$) — множество, состоящее из всех элементов, каждый из которых принадлежит как множеству $A$, так и множеству $B$;

$A \setminus B$ (*разность* множеств $A$ и $B$) — множество, состоящее из всех элементов, каждый из которых принадлежит множеству $A$ и не принадлежит множеству $B$.

В книге все теоремы, определения и т. п. нумеруются автономно внутри каждого параграфа. При ссылке на теорему (лемму и т. п.) из другого параграфа его номер указывается следующим образом: например, для теоремы 3 из § 14.8 используется обозначение «теорема 14.8.3».

---

[1]) Двоеточие ставится со стороны определяемого объекта.

Глава 1

# МНОЖЕСТВО ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

## § 1.1. Аксиоматика

**Определение 1.** Непустое множество $\mathbb{R}$ называется *множеством действительных* (*вещественных*) *чисел*, а его элементы — *действительными* (*вещественными*) *числами*, если на $\mathbb{R}$ определены операции сложения и умножения и отношение порядка, удовлетворяющие следующим аксиомам.

**(I) Аксиомы сложения** $(a, b \to a + b)$:

1. $a + b = b + a \ \ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$ (коммутативность);
2. $a + (b + c) = (a + b) + c \ \ \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$ (ассоциативность);
3. $\exists\, 0 \in \mathbb{R}$: $a + 0 = a \ \ \forall\, a \in \mathbb{R}$;
4. $\forall\, a \in \mathbb{R}\ \exists\, (-a) \in \mathbb{R}$: $a + (-a) = 0$, $(-a)$ называется *противоположным* числом для $a$.

**(II) Аксиомы умножения** $(a, b \to ab)$ [1]:

1. $ab = ba \ \ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$ (коммутативность);
2. $a(bc) = (ab)c \ \ \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$ (ассоциативность);
3. $\exists\, 1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$: $a1 = a \ \ \forall\, a \in \mathbb{R}$;
4. $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $\exists\, \dfrac{1}{a} \in \mathbb{R}$: $a\dfrac{1}{a} = 1$, $\dfrac{1}{a}$ называется *обратным* числом для $a$.

**(I–II) Связь сложения и умножения**:

1. $(a + b)c = ac + bc \ \ \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$ (дистрибутивность умножения относительно сложения).

**(III) Аксиомы порядка** (для любых $a, b \in \mathbb{R}$ установлено отношение $a \leqslant b$ или $b \leqslant a$):

1. $a \leqslant b$, $b \leqslant a \Rightarrow a = b \ \ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$;
2. $a \leqslant b$, $b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c \ \ \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$.
   $a \leqslant b$ записывается также в виде $b \geqslant a$; $a \leqslant b$ при $a \neq b$ — в виде $a < b$, или $b > a$.

**(I–III) Связь сложения и порядка**:

1. $a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c \ \ \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$.

**(II–III) Связь умножения и порядка**:

1. $0 \leqslant a$, $0 \leqslant b \Rightarrow 0 \leqslant ab \ \ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$.

---

[1] Иногда наряду с $ab$ используется также обозначение $a \cdot b$.

**(IV) Аксиома непрерывности** (вариант *принципа Дедекинда*):

1. Пусть $A$, $B$ — непустые подмножества $\mathbb{R}$, такие, что

$$a \leqslant b \quad \forall\, a \in A, \quad \forall\, b \in B.$$

Тогда существует $c \in \mathbb{R}$:

$$a \leqslant c \leqslant b \quad \forall\, a \in A, \quad \forall\, b \in B.$$

**Замечание 1.** Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел удовлетворяет аксиомам (I), (II), (I–II), (III), (I–III), (II–III), но не удовлетворяет аксиоме (IV). Покажем последнее. Пусть $A = \{a\colon a \in \mathbb{Q},\ a > 0,\ a^2 < 2\}$, $B = \{b\colon b \in \mathbb{Q},\ b > 0,\ b^2 > 2\}$. Тогда во множестве $\mathbb{Q}$ не существует числа $c$ ($\in \mathbb{Q}$) со свойством: $a \leqslant c \leqslant b$ $\forall\, a \in A$, $\forall\, b \in B$.

Действительные числа часто будем называть *числами*.

**Некоторые следствия из аксиом множества действительных чисел.**

**1.** Число 0, число, противоположное к $a$, и решение уравнения $a + x = b$ единственны, причём $x = b - a := b + (-a)$ $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$. Число $b - a$ называется *разностью между $b$ и $a$*.

**2.** Число $\frac{1}{a}$, обратное к $a$ (при $a \neq 0$), и решение уравнения $ax = b$ (при $a \neq 0$) единственны, причём

$$x = \frac{b}{a} := b\,\frac{1}{a} \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

Число $\frac{b}{a}$ называется *частным при делении $b$ на $a$*.

**3.** $a\,0 = 0$ $\forall\, a \in \mathbb{R}$.

**4.** $a, b \in \mathbb{R}$, $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ или $b = 0$.

**5.** Для любых $a, b \in \mathbb{R}$ всегда имеет место одно и только одно из соотношений $a < b$, $a = b$, $a > b$.

**6.** $0 < 1$. (У к а з а н и е. Допустив, что $1 < 0$, прийти к противоречию, использовав равенство $(-1)(-1) = 1$.)

**Примеры числовых множеств.**

Множество *натуральных* чисел $\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$, где $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, ….

Множество $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Множество *целых* чисел $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$.

Множество *рациональных* чисел

$$\mathbb{Q} = \left\{x\colon x = \frac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Множество *иррациональных* чисел $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

*Отрезок* $[a,b]$, *интервал* $(a,b)$, *полуинтервалы* $(a,b]$, $[a,b)$:

$$[a,b] := \{x\colon a \leqslant x \leqslant b\}, \quad (a,b) := \{x\colon a < x < b\},$$
$$(a,b] := \{x\colon a < x \leqslant b\}, \quad [a,b) := \{x\colon a \leqslant x < b\}.$$

Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ часто называют *числовой прямой*, а числа — *точками числовой прямой*.

## § 1.2. Верхние и нижние грани числовых множеств

**Определение 1.** Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным сверху* (*снизу*), если существует число $b$ (число $a$) такое, что $x \leqslant b \ \ \forall x \in X$ ($x \geqslant a \ \ \forall x \in X$).

При этом говорят, что *число $b$* (*число $a$*) *ограничивает множество $X$ сверху* (*снизу*).

**Определение 2.** Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным*, если оно ограничено сверху и снизу.

**Определение 3.** Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *неограниченным сверху* (*снизу*), если оно не является ограниченным сверху (снизу).

**Определение 4.** *Верхней гранью* непустого множества $X \subset \mathbb{R}$ называется число $b$, удовлетворяющее условиям:

1° $x \leqslant b \ \ \forall x \in X$;

2° $\forall\, b' < b \ \exists\, x_{b'} \in X\colon x_{b'} > b'$, или иначе: $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, x_\varepsilon \in X\colon x_\varepsilon > b - \varepsilon$.

**Определение 5.** *Нижней гранью* непустого множества $X \subset \mathbb{R}$ называется число $a$, удовлетворяющее условиям:

1° $x \geqslant a \ \ \forall x \in X$;

2° $\forall\, a' > a \ \exists\, x_{a'} \in X\colon x_{a'} < a'$, или иначе: $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, x_\varepsilon \in X\colon x_\varepsilon < a + \varepsilon$.

Верхняя и нижняя грани множества $X$ обозначаются символами $\sup X$, $\inf X$ соответственно.

**Примеры.**

$$\sup[a,b] = b, \quad \sup(a,b) = b.$$

Отметим, что верхняя грань множества может как принадлежать, так и не принадлежать этому множеству, ср. случаи $[a,b]$, $(a,b)$.

**Теорема 1** (единственности). *Числовое множество не может иметь больше одной верхней (нижней) грани.*

Доказательство проведём лишь для случая верхней грани. Допустив противное, предположим, что каждое из чисел $b$ и $b'$ ($b \neq b'$) является верхней гранью множества $X$.

Пусть, для определённости, $b' < b$. Тогда в силу того, что $b = \sup X$, из определения верхней грани следует, что для числа $b'$ $\exists\, x_{b'}\colon x_{b'} \in X$, $x_{b'} > b'$. Но тогда $b'$ не может быть верхней гранью множества $X$. Из полученного противоречия следуют ошибочность предположения и утверждение теоремы.

Заметим, что в условиях теоремы не предполагается существование верхней (нижней) грани. Теорема утверждает, что если верхняя (нижняя) грань существует, то она единственна.

Значительно более глубокой является теорема о существовании верхней грани.

**Теорема 2** (о существовании верхней (нижней) грани). *Всякое непустое ограниченное сверху (снизу) числовое множество имеет верхнюю (нижнюю) грань.*

Доказательство проведём лишь для верхней грани. Пусть $A$ — непустое ограниченное сверху множество. Рассмотрим непустое множество $B$, элементами которого являются все числа $b$, ограничивающие множество $A$ сверху.

Тогда

$$a \leqslant b \quad \forall\, a \in A, \quad \forall\, b \in B.$$

В силу аксиомы непрерывности для некоторого $c \in \mathbb{R}$

$$a \leqslant c \leqslant b \quad \forall\, a \in A, \quad \forall\, b \in B. \tag{1}$$

Покажем, что $\exists\, \sup A = c$. Первое условие из определения верхней грани выполняется для $c$ в силу левого из неравенств (1).

Убедимся, что выполняется и второе. Пусть $c' < c$. Тогда $c' \notin B$, так как для каждого элемента из $B$ выполняется правое из неравенств (1). Следовательно, $c'$ не ограничивает множество $A$ сверху, т. е.

$$\exists\, x_{c'} \in A\colon x_{c'} > c',$$

так что второе условие также выполняется.

Следовательно, $c = \sup A$, и теорема доказана.

**Определение 6.** *Расширенным множеством действительных чисел* $\overline{\mathbb{R}}$ называется множество

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\},$$

так что элементами множества $\overline{\mathbb{R}}$ являются все действительные числа и ещё два элемента: $-\infty$, $+\infty$.

На множестве $\overline{\mathbb{R}}$ не введены сложение и умножение, но имеется отношение порядка. Для двух элементов $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ в случае $a, b \in \mathbb{R}$ отношение порядка то же, что в $\mathbb{R}$. В других же случаях оно определено так: $-\infty < a$, $a < +\infty$ $\forall\, a \in \mathbb{R}$; $-\infty < +\infty$.

Рассматривая множество $X \subset \mathbb{R}$ как подмножество расширенного множества действительных чисел ($X \subset \overline{\mathbb{R}}$), можно обобщить понятие $\sup X$ ($\inf X$). Это обобщающее определение будет отличаться от приведённых выше лишь тем, что в качестве $b$ ($a$) можно брать не только число, но и элемент $+\infty$ ($-\infty$).

Тогда для непустого неограниченного сверху (снизу) числового множества $X$

$$\sup X = +\infty \qquad (\inf X = -\infty).$$

Учитывая теорему 2, приходим к выводу, что всякое непустое числовое множество имеет в расширенном множестве действительных чисел $\overline{\mathbb{R}}$ как верхнюю, так и нижнюю грани.

## § 1.3. Система вложенных отрезков

**Определение 1.** Множество отрезков

$$\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty} := \{[a_1, b_1],\ [a_2, b_2],\ \ldots\},$$
$$-\infty < a_n < b_n < +\infty \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

называется *системой вложенных отрезков*, если $[a_n, b_n] \supset$ $\supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, т. е. каждый отрезок содержит следующий за ним.

В следующей теореме формулируется свойство, называемое *непрерывностью множества действительных чисел по Кантору*.

**Теорема 1.** *Для всякой системы вложенных отрезков существует точка, принадлежащая всем отрезкам данной системы.*

Доказательство. Для системы вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ рассмотрим два непустых множества $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, \ldots\}$ и $B = \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_1, b_2, \ldots\}$.

Очевидно, что $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$

$$a_n \leqslant a_{n+m} < b_{n+m} \leqslant b_m.$$

В силу аксиомы непрерывности существует число $c$ такое, что

$$a_n \leqslant c \leqslant b_m \quad \forall\, n, m \in \mathbb{N}.$$

В частности, при $m = n$ получаем, что

$$c \in [a_n, b_n] \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

что и требовалось доказать.

**Определение 2.** Система вложенных отрезков

$$\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$$

называется стягивающейся, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n \in \mathbb{N}$: $b_n - a_n < \varepsilon$.

**Теорема 2.** *Стягивающаяся система вложенных отрезков имеет ровно одну точку, принадлежащую всем отрезкам.*

Доказательство. По крайней мере одна общая точка для отрезков рассматриваемой системы имеется в силу теоремы 1. Покажем, что общих точек не больше одной. Допустив противное, предположим, что каждая из двух различных точек $c$ и $c'$ является общей для всех отрезков системы. Пусть, для определённости, $c' < c$, т. е. $\varepsilon := c - c' > 0$. По определению стягивающейся системы $\exists\, n \in \mathbb{N}$: $b_n - a_n < \varepsilon$. Тогда $a_n \leqslant c' < c \leqslant b_n$. Отсюда $c - c' \leqslant c - a_n \leqslant b_n - a_n < \varepsilon$, что противоречит выбору $\varepsilon$. Теорема доказана.

## § 1.4. Связь между различными принципами непрерывности

**Теорема 1** (принцип Архимеда). $\forall\, a \in \mathbb{R}\ \exists\, n \in \mathbb{N}$: $n > a$.

Доказательство. Допустим, что теорема неверна. Это значит, что $\exists\, a \in \mathbb{R}$: $n \leqslant a\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $a$ ограничивает сверху множество $\mathbb{N}$ и по теореме 1.2.2 $\exists\, b \in \mathbb{R}$: $b = \sup \mathbb{N}$. Тогда, по определению верхней грани для числа $b' := b - 1$, $\exists\, n \in \mathbb{N}$: $n > b - 1$. Но тогда $n + 1 > b$, $n + 1 \in \mathbb{N}$, что противоречит тому, что $b = \sup \mathbb{N}$. Теорема доказана.

В диаграмме

$$\mathrm{IV_D} \Rightarrow \mathrm{IV_{sup}} \begin{array}{c} \nearrow\!\!\!\nearrow \\ \searrow\!\!\!\searrow \end{array} \left.\begin{array}{c} \mathrm{IV_K} \\ (\mathrm{A}) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{IV_D} \qquad (1)$$

приняты обозначения:

$\mathrm{IV_D}$ — вариант принципа Дедекинда,

$\mathrm{IV_{sup}}$ — *принцип верхней грани*, т. е. утверждение теоремы 1.2.2,

$\mathrm{IV_K}$ — *принцип Кантора*, т. е. утверждение теоремы 1.3.1,

(A) — принцип Архимеда.

Эта диаграмма показывает, что перечисленные принципы эквивалентны. Любой из них ($\mathrm{IV_K}$ в сочетании с (A)) можно было бы взять в качестве аксиомы непрерывности при определении множества действительных чисел, а другие доказать в качестве теорем.

Два из указанных в диаграмме логических следствий уже установлены, другие два предлагается доказать читателю в качестве упражнения. Было доказано также (теорема 1.3.1), что $\mathrm{IV_D} \Rightarrow \mathrm{IV_K}$.

**Теорема 2** (принцип математической индукции). *Пусть множество $A \subset \mathbb{N}$ обладает свойствами:*

$1^\circ$ $A \ni 1$; $2^\circ$ $A \ni n \Rightarrow A \ni n+1$.

*Тогда $A = \mathbb{N}$.*

Доказательство. Последовательно убеждаемся, что $A \ni 2 := 1+1$, $A \ni 3 := 2+1, \ldots$. Следовательно, $A \supset \mathbb{N}$. Отсюда и из $A \subset \mathbb{N}$ следует $A = \mathbb{N}$.

**Замечание 1.** Мы видим, что принцип математической индукции следует непосредственно из определения множества натуральных чисел. Существуют и другие построения теории действительных чисел, в которых этот принцип берется в качестве аксиомы.

## § 1.5. Счётные и несчётные множества

**Определение 1.** Будем говорить, что *между двумя множествами $X$ и $Y$ установлено взаимно однозначное соответствие*, и писать $X \leftrightarrow Y$, если:

$1^\circ$ каждому $x \in X$ поставлен в соответствие один и только один элемент $y \in Y$ $(x \to y)$;

$2^\circ$ если $x_1 \neq x_2$, $x_1 \to y_1$, $x_2 \to y_2$, то $y_1 \neq y_2$;

$3^\circ$ $\forall\, y \in Y\ \exists\, x \in X\colon x \to y$.

**Определение 2.** Два множества $X$ и $Y$ называются *эквивалентными* (пишут $X \sim Y$), если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие.

Эквивалентные множества называют также *равномощными*, при этом говорят, что они имеют одну и ту же мощность («одинаковое» количество элементов).

**Пример 1.** $\mathbb{N} \sim \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$.

**Определение 3.** Множество называется *счётным*, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел, иначе говоря, если его можно занумеровать всеми натуральными числами.

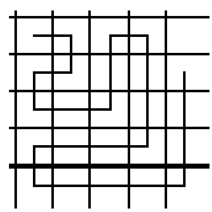
**Упражнение 1.** Доказать, что бесконечное подмножество счётного множества счётно.

**Теорема 1.** *Множество рациональных чисел счётно.*

Доказательство. Составим таблицу чисел (открытую снизу и справа), содержащую все рациональные числа:

| $n \diagdown m$ | 0 | 1 | $-1$ | 2 | $-2$ | 3 | $-3$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0/1 | 1/1 | $-1/1$ | 2/1 | $-2/1$ | 3/1 | $-3/1$ | ... |
| 2 | 0/2 | 1/2 | $-1/2$ | 2/2 | $-2/2$ | 3/2 | $-3/2$ | ... |
| 3 | 0/3 | 1/3 | $-1/3$ | 2/3 | $-2/3$ | 3/3 | $-3/3$ | ... |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

Будем двигаться по клеткам этой таблицы из левого верхнего угла по следующему пути:

,

нумеруя встречающиеся в клетках рациональные числа и пропуская при этом те из них, которые ранее уже встречались. Очевидно, таким способом мы занумеруем все рациональные числа всеми натуральными, что и требовалось доказать.

**Упражнение 2.** Доказать, что объединение счётного множества счётных множеств счётно.

**Теорема 2** (Кантора). *Множество всех точек отрезка* $[0, 1]$ *несчётно.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда все точки отрезка $[0, 1]$ можно занумеровать: $x_1$, $x_2$, $x_3$, .... Поделим отрезок $[0, 1]$ на три равных отрезка и обозначим через $[a_1, b_1]$ один из них, свободный от точки $x_1$. Поделим $[a_1, b_1]$ на три равных отрезка и обозначим через $[a_2, b_2]$ один из них, свободный от точки $x_2$. Продолжая процесс, получим систему вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$. По теореме о вложенных отрезках существует точка $c$, принадлежащая всем отрезкам системы. Эта точка $c$ не совпадает ни с одной из занумерованных точек $x_1$, $x_2$, $x_3$, ..., так как любая из них $x_j$ не содержится в отрезке $[a_j, b_j]$, в то время как $c$ содержится в этом отрезке.

Итак, при допущении, что все точки отрезка $[0, 1]$ занумерованы, мы пришли к противоречию, найдя точку $c \in [0, 1]$, отличную от каждой из занумерованных. Это противоречие показывает, что наше допущение неверно. Теорема доказана.

### Об изоморфизме различных множеств действительных чисел.

**Теорема 3.** *Пусть имеются два множества* $\mathbb{R}$ *и* $\mathbb{R}'$, *удовлетворяющие всем аксиомам множества действительных чисел. Тогда между ними можно установить взаимно однозначное соответствие* $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}'$, *при котором из того, что* $x, y \in \mathbb{R}$, $x', y' \in \mathbb{R}'$, $x \leftrightarrow x'$, $y \leftrightarrow y'$, *следует, что:*

$1^\circ$ $x + y \to x' + y'$;

$2^\circ$ $xy \to x'y'$;

$3^\circ$ $x \leqslant y \Rightarrow x' \leqslant y'$.

В этом случае говорят, что множества $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}'$ изоморфны друг другу и что множество действительных чисел единственно с точностью до изоморфизма.

Глава 2

# ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

## § 2.1. Определение предела последовательности

**Определение 1.** Пусть $A$ — произвольное множество, и пусть каждому $n \in \mathbb{N}$ поставлен в соответствие некоторый элемент $a_n \in A$. Тогда говорят, что задана *последовательность*

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

со значениями из $A$, которая обозначается также символами $\{a_n\}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Пара $(n, a_n)$ называется *$n$-м элементом* последовательности, $a_n$ — *значением $n$-го элемента* последовательности.

Всякая последовательность имеет счётное множество элементов. Множество значений элементов последовательности может быть конечным или счётным. Например, множество значений элементов последовательности

$$0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots \tag{1}$$

состоит из двух элементов: 0 и 1.

Пока мы будем рассматривать лишь последовательности со значениями из $\mathbb{R}$ и называть их *числовыми последовательностями*, или просто последовательностями.

**Замечание 1.** Часто вместо «значение элемента последовательности» говорят «элемент последовательности». Например, можно сказать: «Данный отрезок содержит бесконечно много элементов последовательности» и т. п.

**Определение 2.** Число $a \in \mathbb{R}$ называется *пределом последовательности* $\{a_n\}$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon \quad |a - a_n| < \varepsilon \quad \forall\, n \geqslant n_\varepsilon.$$

При этом пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, или $a_n \to a$ при $n \to \infty$, и говорят, что последовательность $\{a_n\}$ *сходится к $a$*.

Например, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Обобщим понятие предела (числовой) последовательности, рассматривая в качестве предела не только число, но и какой-либо из символов $+\infty$, $-\infty$, $\infty$. Для этого рассмотрим множества $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ и $\widehat{\mathbb{R}} = \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}$.

**Определение 3.** Пусть $\varepsilon > 0$. *$\varepsilon$-окрестностью числа $a$* называется $U_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ — интервал с центром в $a$; *$\varepsilon$-окрестностью элемента* $a = +\infty \in \overline{\mathbb{R}}$ ($a = -\infty \in \overline{\mathbb{R}}$, $a = \infty \in \widehat{\mathbb{R}}$) называется множество $U_\varepsilon(+\infty) = \left\{x\colon x \in \mathbb{R},\ x > \dfrac{1}{\varepsilon}\right\}$ ($U_\varepsilon(-\infty) = \left\{x\colon x \in \mathbb{R},\ x < -\dfrac{1}{\varepsilon}\right\}$, $U_\varepsilon(\infty) = \left\{x\colon x \in \mathbb{R},\ |x| > \dfrac{1}{\varepsilon}\right\}$).

Через $U(a)$ при $a \in \widehat{\mathbb{R}}$ обозначается произвольная $\varepsilon$-окрестность элемента $a$, называемая *окрестностью элемента $a$*.

Сформулируем общее определение предела последовательности в терминах окрестностей.

**Определение 4.** Элемент $a \in \widehat{\mathbb{R}}$ называется *пределом последовательности* $\{a_n\}$, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon\ a_n \in U_\varepsilon(a)$ $\forall\, n \geqslant n_\varepsilon$.

Это же определение можно перефразировать следующим образом.

**Определение 5.** Элемент $a \in \widehat{\mathbb{R}}$ называется *пределом последовательности* $\{a_n\}$, если в любой его окрестности $U(a)$ содержатся значения почти всех (т. е. всех за исключением, быть может, конечного числа) элементов последовательности.

**Определение 6.** Последовательность называется *сходящейся* (говорят, что она *сходится*), если она имеет конечный (т. е. принадлежащий $\mathbb{R}$) предел. В противном случае последовательность называется *расходящейся* (говорят, что она *расходится*).

Примерами расходящихся последовательностей являются $\{n\}$ и последовательность (1).

**Определение 7.** Последовательность называется *сходящейся в* $\overline{\mathbb{R}}$ (*в* $\widehat{\mathbb{R}}$), если она имеет предел, принадлежащий $\overline{\mathbb{R}}$ ($\widehat{\mathbb{R}}$).

Расходящаяся последовательность $\{n\}$ сходится в $\overline{\mathbb{R}}$ и в $\widehat{\mathbb{R}}$.

Расходящаяся последовательность $\{(-1)^n n\}$ сходится в $\widehat{\mathbb{R}}$ к $\infty$.

Бывает полезна формулировка в позитивных терминах утверждения, что число $a$ не является пределом последовательности $\{a_n\}$. Приведём её.

Число $a$ не является пределом последовательности $\{a_n\}$, если $\exists\, \varepsilon_0 > 0\colon \forall\, n_0 \in \mathbb{N}\ \exists\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0\colon |a_n - a| \geqslant \varepsilon_0$.

**Упражнение 1.** Воспользовавшись этой формулировкой, показать, что последовательность (1) расходится.

**Теорема 1** (единственности). *Числовая последовательность не может иметь в $\overline{\mathbb{R}}$ более одного предела.*

Доказательство. Предположив противное, допустим, что для данной последовательности $\{a_n\}$ каждый из двух различных элементов $a, a' \in \overline{\mathbb{R}}$ является пределом. Пусть $\varepsilon > 0$ столь мало, что $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(a') = \varnothing$. Тогда по определению предела $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ $(\exists\, n'_\varepsilon \in \mathbb{N})$, при котором $a_n \in U_\varepsilon(a)$ $\forall\, n \geqslant n_\varepsilon$ $(a_n \in U_\varepsilon(a')$ $\forall\, n \geqslant n'_\varepsilon)$.

Положив $\overline{n}_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon, n'_\varepsilon\}$, получаем, что $a_n \in U_\varepsilon(a) \cap \cap\, U_\varepsilon(a')$ $\forall\, n \geqslant \overline{n}_\varepsilon$, а это невозможно, так как данное пересечение пусто. Теорема доказана.

## § 2.2. Свойства пределов, связанные с неравенствами

**Определение 1.** Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной* (*ограниченной сверху*, *ограниченной снизу*), если множество значений её элементов ограничено (ограничено сверху, ограничено снизу).

**Определение 2.** Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной* (*ограниченной сверху*, *ограниченной снизу*), если

$$\exists\, b \in \mathbb{R}\colon |a_n| \leqslant b \quad (a_n \leqslant b,\ a_n \geqslant b) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Приведённые два определения, очевидно, эквивалентны (равносильны).

**Теорема 1.** *Сходящаяся последовательность ограничена. Обратное неверно.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{a_n\}$ сходится и $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Тогда для $\varepsilon = 1$ $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$: $|a - a_n| < 1$ $\forall\, n \geqslant n_1$, так что

$$a - 1 < a_n < a + 1 \quad \forall\, n \geqslant n_1.$$

Пусть $b := \max\{a + 1, a_1, a_2, \ldots, a_{n_1-1}\}$. Очевидно, что $\{a_n\}$ ограничена сверху числом $b$. Аналогично показывается, что $\{a_n\}$ ограничена снизу. Последовательность $\{a_n\}$ ограничена в силу её ограниченности сверху и снизу.

Пример последовательности (1) показывает, что не всякая ограниченная последовательность сходится.

Следующие три свойства, в которых $a, b \in \mathbb{R}$, устанавливают связь между неравенствами и предельным переходом:

1° $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a \Rightarrow \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$;

2° $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a < b \Rightarrow \exists\, n_b \in \mathbb{N}$: $a_n < b$ $\forall\, n \geqslant n_b$;

3° $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a_n \leqslant b\ \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leqslant b$ ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a_n \geqslant b$ $\forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \geqslant b$).

**Следствие.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $|a_n| \leqslant b\ \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow |a| \leqslant b$.

**Упражнение 1.** Показать, что свойство 3° не сохраняется при замене знака $\leqslant$ на $<$.

## § 2.3. Свойства пределов, связанные с арифметическими операциями

**Теорема 1.** *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$.
*Тогда:*
1° $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$;
2° $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$;
3° *если* $b_n \neq 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.

Доказательство проведём лишь для свойства 3°. Положим $\alpha_n = a - a_n$, $\beta_n = b - b_n$. Тогда $\alpha_n \to 0$, $\beta_n \to 0$ при $n \to \infty$ в силу свойства 1°. Оценим разность между $\dfrac{a_n}{b_n}$ и предполагаемым пределом $\dfrac{a}{b}$:

$$\Delta_n = \left|\frac{a}{b} - \frac{a_n}{b_n}\right| = \left|\frac{ab_n - ba_n}{bb_n}\right| = \\ = \frac{|a(b-\beta_n) - b(a-\alpha_n)|}{|bb_n|} \leqslant \frac{|a|}{|bb_n|}|\beta_n| + \frac{1}{|b_n|}|\alpha_n|.$$

Возьмём $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists\, n'_\varepsilon, n''_\varepsilon, n'''_\varepsilon \in \mathbb{N}$: $|\alpha_n| < \varepsilon\quad \forall\, n \geqslant n'_\varepsilon$, $|\beta_n| < \varepsilon\ \ \forall\, n \geqslant n''_\varepsilon$, $|b_n| = |b - \beta_n| > \dfrac{|b|}{2}\ \forall\, n \geqslant n'''_\varepsilon$.

Положим $n^*_\varepsilon = \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon, n'''_\varepsilon\}$. Тогда при некотором $M > 0$

$$\Delta_n \leqslant \frac{2|a|}{b^2}\varepsilon + \frac{2}{|b|}\varepsilon = M\varepsilon \quad \forall\, n \geqslant n^*_\varepsilon,$$

так что $\Delta_n$ не превосходит сколь угодно малого числа $M\varepsilon$ при всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$, а это означает по определению предела последовательности, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.

**Определение 1.** Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется *бесконечно малой*, если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Следствием арифметических свойств пределов последовательностей является

**Лемма 1.** *Сумма, разность и произведение двух бесконечно малых последовательностей являются бесконечно малыми последовательностями.*

**Упражнение 1.** Построить примеры бесконечно малых последовательностей $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ ($\beta_n \neq 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$), для которых $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_n}{\beta_n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_n}{\beta_n} = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_n}{\beta_n} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_n}{\beta_n}$ не существует.

**Упражнение 2.** Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ тогда и только тогда, когда $a_n = a + \alpha_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, где $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность.

**Определение 2.** Последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно большой*, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Арифметические свойства пределов последовательностей не переносятся на бесконечно большие последовательности. Например: $\{a_n\} = \{n + (-1)^n\}$, $\{b_n\} = \{n\}$ — бесконечно большие последовательности, но $\{a_n - b_n\} = \{(-1)^n\}$ не сходится даже в $\widehat{\mathbb{R}}$.

## § 2.4. Предел монотонной последовательности

**Определение 1.** *Верхней* (*нижней*) *гранью последовательности* называется верхняя (нижняя) грань множества значений её элементов. При этом используются обозначения $\sup\{a_n\}$, $\inf\{a_n\}$ соответственно.

Каждая последовательность имеет в $\overline{\mathbb{R}}$ верхнюю и нижнюю грани.

**Определение 2.** Последовательность $\{a_n\}$ называется *возрастающей* (*убывающей*), если $a_n \leqslant a_{n+1}$ ($a_n \geqslant a_{n+1}$) $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Символ $a_n\!\uparrow$ ($a_n\!\downarrow$) означает, что последовательность $\{a_n\}$ возрастающая (убывающая). Символ $a_n\!\uparrow\! a$ ($a_n\!\downarrow\! a$) означает, что последовательность $\{a_n\}$ возрастает (убывает) и сходится к $a$.

Возрастающие и убывающие последовательности называются *монотонными*.

**Определение 3.** Последовательность $\{a_n\}$ называется *строго возрастающей* (*строго убывающей*), если $a_n < a_{n+1}$ ($a_n > a_{n+1}$) $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Строго возрастающие и строго убывающие последовательности называются *строго монотонными*.

**Замечание 1.** Возрастающие последовательности называют также *неубывающими*, а убывающие — *невозрастающими*.

**Теорема 1.** *Всякая возрастающая последовательность* $\{a_n\}$ *имеет в* $\overline{\mathbb{R}}$ *предел* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$. *Этот предел конечен (т. е. является числом), если последовательность* $\{a_n\}$ *ограничена сверху, и равен* $+\infty$, *если последовательность* $\{a_n\}$ *не ограничена сверху.*

Доказательство. Пусть $a := \sup\{a_n\} \leqslant +\infty$. Тогда по определению верхней грани $a_n \leqslant a \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ и $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$: $a_{n_\varepsilon} \in U_\varepsilon(a)$. Поскольку $a_{n_\varepsilon} \leqslant a_n \leqslant a$ при $n \geqslant n_\varepsilon$, получаем, что

$$a_n \in U_\varepsilon(a) \quad \forall\, n \geqslant n_\varepsilon.$$

Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, что и требовалось доказать.

**Упражнение 1.** Сформулировать и доказать аналогичную теорему для убывающей последовательности.

**Пример 1.** Пусть $\{[a_n, b_n]\}$ — стягивающаяся система вложенных отрезков, $\xi$ — (единственная) общая для всех отрезков точка.

Тогда $\{a_n\}$ — возрастающая, $\{b_n\}$ — убывающая последовательности. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$, то с помощью теоремы 1 заключаем, что $\sup\{a_n\} = \xi$.

Аналогично получаем, что $\inf\{b_n\} = \xi$.

## § 2.5. Число $e$

**Определение 1.** $e := \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

Покажем, что этот предел существует и конечен. Будем пользоваться *неравенством Бернулли*:

$$(1 + h)^n > 1 + nh \quad \text{при} \quad h > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 2. \tag{1}$$

**Упражнение 1.** Доказать (1), используя метод математической индукции.

Рассмотрим вспомогательную последовательность $\{x_n\}$, $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1} > 1 + \dfrac{n+1}{n} > 2$. Как видим, последовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу числом 2. Покажем, что она является убывающей последовательностью:

$$\frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n}{n+1}\left[\frac{n^2}{(n+1)(n-1)}\right]^n = \\ = \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n.$$

Используя неравенство Бернулли (1), получаем, что

$$\frac{x_{n-1}}{x_n} > \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{n}{n^2-1}\right) = \frac{n^3+n^2-n}{n^3+n^2-n-1} > 1.$$

На основании теоремы о сходимости монотонной последовательности заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in [2, x_1] = [2, 4].$$

Но тогда существует и

$$e := \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{1+\dfrac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} x_n,$$

что и требовалось показать.

Доказано, что $e$ — иррациональное число, десятичная запись которого

$$e = 2{,}718\ldots .$$

## § 2.6. Подпоследовательности

**Определение 1.** Пусть $\{n_k\}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда последовательность $\{a_{n_k}\}$ называется *подпоследовательностью* последовательности $\{a_n\}$.

**Пример 1.** Последовательность $\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots\}$ является подпоследовательностью последовательности натуральных чисел, а последовательность $\{1,\ 5,\ 3,\ 9,\ 7,\ \ldots\}$ не является подпоследовательностью последовательности натуральных чисел.

**Лемма 1.** *Отбрасывание конечного числа членов последовательности не влияет ни на её сходимость, ни на её предел (в случае сходимости).*

**Упражнение 1.** Доказать лемму.

**Определение 2.** *Частичным пределом последовательности* называется предел какой-либо её подпоследовательности, сходящейся в $\overline{\mathbb{R}}$.

**Определение 3.** *Частичным пределом последовательности* называется элемент $\mu \in \overline{\mathbb{R}}$, любая окрестность $U(\mu)$ которого содержит бесконечное множество элементов последовательности.

**Лемма 2.** *Определения 2 и 3 эквивалентны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала покажем, что из определения 2 следует определение 3 [1]. Пусть $\mu$ является частичным пределом в смысле определения 2. Тогда по определению предела в любой окрестности $U(\mu)$ содержатся почти все элементы некоторой подпоследовательности. Следовательно, $\mu$ удовлетворяет определению 3.

Теперь покажем, что определение 2 следует из определения 3. Пусть $\mu$ является частичным пределом последовательности $\{x_n\}$ в смысле определения 3. Выберем какой-либо элемент последовательности $x_{n_1} \in U_1(\mu)$, затем какой-либо элемент последовательности $x_{n_2} \in U_{1/2}(\mu)$, удовлетворяющий условию $n_2 > n_1$. Это возможно, так как $U_{1/2}(\mu)$ содержит бесконечное множество элементов. Затем выберем $x_{n_3} \in U_{1/3}(\mu)$, $n_3 > n_2$. Продолжая процесс, получим подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся в $\overline{\mathbb{R}}$ к $\mu$, так как для любого $\varepsilon > 0$ окрестность $U_\varepsilon(\mu)$ содержит все члены этой подпоследовательности, начиная с члена $x_{k_\varepsilon}$, где $k_\varepsilon > 1/\varepsilon$.

**Пример 2.** Последовательность (1) имеет два частичных предела: 0 и 1.

**Упражнение 2.** Пусть $\{r_n\}$ — каким-либо образом занумерованная последовательность всех рациональных чисел отрезка $[0, 1]$. Описать множество её частичных пределов.

**Лемма 3.** *Последовательность имеет единственный в $\overline{\mathbb{R}}$ частичный предел тогда и только тогда, когда она сходится в $\overline{\mathbb{R}}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Пусть последовательность $\{a_n\}$ сходится в $\overline{\mathbb{R}}$ к $a$. Пусть $\{a_{n_k}\}$ — произвольная её подпоследовательность. По определению предела последовательности любая окрестность $U(a)$ содержит значения почти всех элементов последовательности $\{a_n\}$, а следовательно, и почти все элементы подпоследовательности $\{a_{n_k}\}$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = a$.

*Достаточность.* Пусть последовательность $\{a_n\}$ имеет единственный частичный предел. Обозначим его через $a$ и покажем, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Допустим противное, т. е. что $a$ не является пределом последовательности. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$,

[1] Это означает, что если $\mu \in \overline{\mathbb{R}}$ удовлетворяет определению 2, то $\mu$ удовлетворяет и определению 3.

такое, что вне $U_{\varepsilon_0}(a)$ находятся значения бесконечного множества элементов последовательности. Построим подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$, все элементы которой лежат вне $U_{\varepsilon_0}(a)$. Ниже мы докажем теорему 2.7.2 (обобщающую теорему Больцано–Вейерштрасса), в силу которой последовательность $\{a_{n_k}\}$ имеет частичный предел, являющийся частичным пределом последовательности $\{a_n\}$. Он не совпадает с $a$, так как $a_{n_k} \notin U_{\varepsilon_0}(a)$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$, что противоречит предположению о единственности частичного предела последовательности $\{a_n\}$. Следовательно, $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

**Определение 4.** *Верхним* (*нижним*) *пределом последовательности* $\{a_n\}$ называется наибольший (наименьший) в $\overline{\mathbb{R}}$ из её частичных пределов.

Его обозначают символом $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$ ($\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$).

Всякая последовательность имеет верхний и нижний пределы, что будет установлено в теореме 2.7.2.

**Упражнение 3.** Пусть $x_n \geqslant 0$, $y_n \geqslant 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, последовательность $\{x_n\}$ сходится (т. е. имеет конечный предел), последовательность $\{y_n\}$ имеет конечный верхний предел. Доказать, что тогда
$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \varlimsup_{n\to\infty} y_n.$$

## § 2.7. Теорема Больцано–Вейерштрасса

**Теорема 1** (Больцано–Вейерштрасса). *Всякая ограниченная последовательность имеет хотя бы один частичный предел.*

Другая формулировка теоремы: *из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Теорема Больцано–Вейерштрасса является следствием следующей теоремы, более общей и более сильной.

**Теорема 2.** *Всякая последовательность имеет в* $\overline{\mathbb{R}}$ *верхний и нижний пределы.*

Доказательство (для верхнего предела). Пусть $\{a_n\}$ — произвольная последовательность, $X = \{x\colon x \in \mathbb{R}$, правее $x$ лежит бесконечно много элементов последовательности$\}$.

*Случай 1*: $X = \varnothing$. Это значит, что любая окрестность $U(-\infty)$ содержит почти все элементы последовательности, т. е. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Следовательно, $-\infty$ — единственный частичный предел последовательности $\{a_n\}$, так что $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

*Случай 2*: $X \neq \varnothing$. Тогда $\exists \sup X =: b$, $-\infty < b \leqslant +\infty$. Покажем, что $b = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$, и пусть $b'_\varepsilon \in U_\varepsilon(b)$, $b'_\varepsilon < b$. Тогда из определения верхней грани множества следует, что найдётся $x'_\varepsilon \in X$: $b'_\varepsilon < x'_\varepsilon \leqslant b$. Поэтому правее $b'_\varepsilon$ лежит бесконечно много элементов последовательности $\{a_n\}$. Если $b'' > b$, то $b'' \notin X$, так что правее $b''$ лежит не более конечного числа элементов последовательности. Следовательно, $U_\varepsilon(b)$ содержит бесконечное множество элементов последовательности $\{a_n\}$ и, в силу произвольности $\varepsilon > 0$, $b$ — частичный предел последовательности $\{a_n\}$.

Остаётся показать, что $b$ — наибольший частичный предел последовательности $\{a_n\}$, т. е. $b = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$. Допустив противное, предположим, что существует частичный предел $b^* > b$. Тогда всякая окрестность $U(b^*)$ содержит бесконечно много элементов последовательности. Но это противоречит тому, что при $b < b'' < b^*$ правее $b''$ (так как $b'' \notin X$) находится не более конечного числа элементов последовательности. Следовательно, $b = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

**Упражнение 1.** Доказать теорему Больцано–Вейерштрасса с помощью стягивающейся системы вложенных отрезков.

У к а з а н и е. В качестве первого отрезка рассмотреть отрезок, содержащий все элементы последовательности. Каждый из следующих отрезков получить с помощью деления предыдущего отрезка пополам и выбора первой справа из образовавшихся половин, содержащей бесконечное число элементов последовательности.

## § 2.8. Критерий Коши

**Определение 1.** Последовательность $\{a_n\}$ называется *фундаментальной*, если для неё выполняется *условие Коши*:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon |a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall\, n, m \geqslant n_\varepsilon. \tag{1}$$

**Теорема 1** (критерий Коши). *Для сходимости последовательности необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Пусть последовательность $\{a_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, n \geqslant n_\varepsilon.$$

Если теперь $n, m \geqslant n_\varepsilon$, то

$$|a_n - a_m| \leqslant |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

*Достаточность.* Пусть последовательность $\{a_n\}$ фундаментальна, т. е. удовлетворяет условию (1). Покажем, что она сходится.

Шаг 1. Покажем, что последовательность $\{a_n\}$ ограничена. Возьмём $\varepsilon = 1$. Тогда из (1) следует, что

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N}\colon |a_n - a_{n_1}| < 1 \quad \forall\, n \geqslant n_1,$$

так что

$$|a_n| < 1 + |a_{n_1}| \quad \forall\, n \geqslant n_1.$$

Следовательно, $\{a_n\}$ ограничена.

Шаг 2. По теореме Больцано–Вейерштрасса из $\{a_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$. Пусть $a := \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$.

Шаг 3. Покажем, что $a$ является пределом последовательности $\{a_n\}$. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда в силу (1)

$$\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon |a_n - a_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, n \geqslant n_\varepsilon, \quad \forall\, k \geqslant n_\varepsilon.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$, получаем, что

$$|a_n - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \forall\, n \geqslant n_\varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

## § 2.9. Изображение действительных чисел бесконечными десятичными дробями

**Определение 1.** Полуинтервал

$$I_n = [\underline{a_n}, \overline{a_n}) = \left[\underline{a_n}, \underline{a_n} + \frac{1}{10^n}\right),$$

где $\underline{a_n} \geqslant 0$, $\underline{a_n} = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$ — $n$-значная десятичная дробь ($\alpha_0 \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ при $i \geqslant 1$), будем называть *десятичным полуинтервалом*.

Символом $\{I_n\}_{n=0}^{\infty} = \{[\underline{a_n}, \overline{a_n})\}_{n=0}^{\infty}$ будем обозначать систему вложенных десятичных полуинтервалов. Очевидно, что $\underline{a_n} \uparrow$, $\overline{a_n} \downarrow$, $\overline{a_n} - \underline{a_n} = \dfrac{1}{10^n} \to 0$ при $n \to \infty$.

Пусть задано $a \geqslant 0$. По принципу Архимеда $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$: $n_0 > a$. Тогда на полуинтервале $[0, n_0)$ найдётся $\alpha_0 \in \mathbb{N}_0$: $\alpha_0 \leqslant a < \alpha_0 + 1$. Разобьём полуинтервал $I_0 := [\alpha_0, \alpha_0 + 1)$ на 10 равных полуинтервалов и обозначим через $I_1$ тот из них, который содержит $a$:

$$I_1 = \left[\alpha_0{,}\alpha_1;\ \alpha_0{,}\alpha_1 + \frac{1}{10}\right) \ni a.$$

Разобьём $I_1$ на 10 равных полуинтервалов и обозначим через $I_2$ тот из них, который содержит $a$:

$$I_2 = \left[\alpha_0{,}\alpha_1\alpha_2;\ \alpha_0{,}\alpha_1\alpha_2 + \frac{1}{100}\right) \ni a.$$

Продолжая процесс, получим систему вложенных десятичных полуинтервалов $\{I_n\}$ с непустым пересечением, $I_n = [\underline{a_n}, \overline{a_n})$, $\underline{a_n} = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n$, $\overline{a_n} = \underline{a_n} + \dfrac{1}{10^n}$, $I_n \ni a\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. При этом $\underline{a_n}$ ($\overline{a_n}$) называется *нижним* (*верхним*) *$n$-значным десятичным приближением* числа $a$.

Мы установили соответствие

$$a \to \{I_n\} = \{[\underline{a_n}, \overline{a_n})\}. \tag{1}$$

Множество всех систем вложенных десятичных полуинтервалов с непустым пересечением обозначим через $\Omega$.

Легко проверить, что соответствие (1) является взаимно однозначным соответствием:

$$\{a \in \mathbb{R}\colon a \geqslant 0\} \longleftrightarrow \Omega. \tag{2}$$

**Определение 2.** Символ $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots$, где $\alpha_0 \in \mathbb{N}_0$ и $\alpha_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ при $i \in \mathbb{N}$, называется *бесконечной десятичной дробью*.

Рассмотрим следующее соответствие:

$$\{I_n\} \to \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots, \quad \{I_n\} \in \Omega, \tag{3}$$

где $I_n = \left[\underline{a_n}, \underline{a_n} + \dfrac{1}{10^n}\right)$, $\underline{a_n} = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$.

В силу (1), (3) каждому действительному числу $a \geqslant 0$ поставлена в соответствие бесконечная десятичная дробь

$$a \to \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots \quad (a \geqslant 0) \tag{4}$$

по правилу

$$a \to \{I_n\} \to \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots .$$

Заметим, что при этом каждой конечной десятичной дроби $a$ поставлена в соответствие бесконечная десятичная дробь, получающаяся из данной конечной приписыванием справа нулей.

Изучим подробнее соответствие (3).

**Определение 3.** Последовательность $\{\overline{a_n}\}$ правых концов системы вложенных десятичных полуинтервалов назовём *застойной*, если

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\colon\ \overline{a_{n_0}} = \overline{a_{n_0+1}} = \overline{a_{n_0+2}} = \ldots .$$

**Лемма 1.** *Система вложенных десятичных полуинтервалов $\{I_n\}$ имеет общую точку (т. е. принадлежит $\Omega$) тогда и только тогда, когда последовательность $\{\overline{a_n}\}$ не является застойной.*

Доказательство. Пусть $a \in I_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$a < \overline{a_n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} \overline{a_n} = a,$$

откуда видно, что последовательность $\{\overline{a_n}\}$ не может быть застойной.

Пусть теперь последовательность $\{\overline{a_n}\}$ не является застойной. Рассмотрим систему вложенных отрезков $\{\overline{I}_n\} = \{[\underline{a_n}, \overline{a_n}]\}$. По теореме о вложенных отрезках 1.3.1 $\exists\, a \in \overline{I}_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. При этом $a \leqslant \overline{a_n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. Если $\overline{a_{n_0}} = a$ при некотором $n_0$, то $\{\overline{a_n}\}$ — застойная последовательность. Следовательно, $a < \overline{a_n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$, т. е. $a \in I_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$, что и требовалось доказать.

Лемма доказана.

**Определение 4.** Назовём бесконечную десятичную дробь *допустимой*, если она не является десятичной периодической дробью с периодом 9.

**Лемма 2.** *Соответствие* (3) *является взаимно однозначным соответствием между множеством $\Omega$ и множеством всех допустимых бесконечных десятичных дробей:*

$$\Omega \longleftrightarrow \{\text{\textit{допустимые бесконечные десятичные дроби}}\}. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $\{I_n\} \in \Omega$. По лемме 1 последовательность $\{\overline{a_n}\}$ не является застойной. Допустим, что бесконечная десятичная дробь, соответствующая $\{I_n\}$, в силу (3) имеет период 9. Это означает, что при некотором $n_0 \in \mathbb{N}$ для всех $n \geqslant n_0$ полуинтервал $I_{n+1}$ является крайним правым из десяти полуинтервалов, на которые разбивается $I_n$. Но тогда последовательность $\{\overline{a_n}\}$ застойная, что противоречит предположению. Таким образом, при соответствии (3)

$$\Omega \to \{\text{допустимые бесконечные десятичные дроби}\}.$$

Покажем, что это соответствие взаимно однозначное. В самом деле, различным $\{I_n\}$ и $\{I'_n\}$ отвечают, очевидно, различные допустимые бесконечные десятичные дроби.

Проверим теперь, что для всякой допустимой бесконечной десятичной дроби найдётся последовательность $\{I_n\}$, которой именно эта допустимая бесконечная десятичная дробь оказалась поставленной в соответствие. Пусть $a^* = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots$ — произвольная допустимая бесконечная десятичная дробь. Построим последовательность $\{I_n\} = \{[\underline{a_n}, \overline{a_n})\}$, для которой $\underline{a_n} =$ $= \alpha_0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$, $\overline{a_n} = \underline{a_n} + \dfrac{1}{10^n}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Последовательность $\{\overline{a_n}\}$ при этом не является застойной, так как иначе все десятичные знаки числа $\underline{a_n}$, начиная с некоторого $n_0$, были бы равны 9, что противоречит допустимости бесконечной десятичной дроби $a^*$. Следовательно, $\{I_n\} \in \Omega$ по лемме 1. Очевидно, что в силу (3) построенной последовательности $\{I_n\}$ соответствует именно $a^*$.

Лемма доказана.

**Теорема 1.** *Отображение* (4) *является взаимно однозначным соответствием между множеством всех неотрицательных чисел и множеством всех допустимых бесконечных десятичных дробей:*

$$\{a\colon a \in \mathbb{R},\ a \geqslant 0\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{допустимые бесконечные} \\ \text{десятичные дроби} \end{array} \right\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из (2) и (5).

Распространим отображение (4) на множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел, доопределив (4) для отрицательных чисел $-a < 0$ ($a > 0$) соответствием

$$-a \to -\alpha_0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots,$$

если $a \to \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots$ в (4).

При этом $\underline{(-a)_n} = -\alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_n - \dfrac{1}{10^n}$, $\overline{(-a)}_n = -\alpha_0,\alpha_1\ldots$ $\ldots\alpha_n$ называются соответственно *нижним* и *верхним* *$n$-значными приближениями числа $-a$.*

Отображение, доопределённое таким образом, является, очевидно, взаимно однозначным соответствием между множеством $\mathbb{R}$ всех действительных чисел и множеством всех (положительных и отрицательных) допустимых бесконечных десятичных дробей. Построенное взаимно однозначное соответствие даёт возможность записывать (изображать) действительные числа в виде допустимых бесконечных десятичных дробей вида

$$a = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots .$$

Это соответствие позволяет также перенести операции сложения и умножения и отношение порядка на множество всех (положительных и отрицательных) допустимых бесконечных десятичных дробей. Эквивалентным способом эти операции можно определить в терминах нижних и верхних $n$-значных приближений и предельного перехода.

Глава 3

# ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

## § 3.1. Понятие функции

**Определение 1.** Пусть $X$ и $Y$ — произвольные множества. Пусть каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие один и только один элемент $y \in Y$. Будем говорить, что *на множестве $X$ задана функция со значениями в $Y$*. Обозначив эту функцию буквой $f$, можно записать $f : X \to Y$. Через $f(x)$ обозначают *значение функции $f$ на элементе $x$*, т. е. тот элемент $y \in Y$, который поставлен в соответствие элементу $x \in X$, $y = f(x)$.

Элемент $x \in X$ называется *аргументом*, или *независимым переменным*, элемент $y = f(x) \in Y$ называется *значением функции*, или *зависимым переменным*.

При этом $X$ называют *областью определения функции $f$*, а $Y_f = \{y : y = f(x),\ x \in X\} \subset Y$ называют *областью значений функции $f$*.

Вместо термина «функция» употребляют равнозначные ему термины «соответствие», «отображение». Наряду с $f$ применяют также обозначения $f(x)$, $y = f(x)$. Таким образом, $f(x)$ может обозначать как значение функции $f$ на элементе $x$, так и саму функцию $f$.

Говорят, что функция $f : X \to Y$ *определена на элементе $x$* (*в точке $x$*), если $x \in X$. При $E \subset X$ будем говорить, что функция $f$ *определена на $E$*.

При $E \subset X$ множество $f(E) := \{y\colon\ y = f(x),\ x \in E\}$ называется *образом $E$*, $f(X) = Y_f$.

При $D \subset Y$ множество $f^{-1}(D) := \{x\colon\ x \in X,\ f(x) \in D\}$ называется *полным прообразом $D$*.

При $E \subset X$ функция $f_E\colon E \to Y$, $f_E(x) := f(x)$ при $x \in E$, называется *сужением* (*ограничением*, *следом*) *функции $f$* на $E$.

*Графиком функции* $f : X \to Y$ называется множество пар $\{(x, f(x))\colon x \in X\}$.

Пусть функция $f$ определена на $X$, а функция $\varphi$ — на $T$, причём $\varphi(T) \subset X$. Тогда *сложная функция* (*суперпозиция*, *композиция* функций $f$ и $\varphi$) $f \circ \varphi$ определяется на $T$ формулой

$$(f \circ \varphi)(t) = f(\varphi(t)), \quad t \in T.$$

Функция называется *числовой*, если её значениями являются действительные числа.

Для числовых функций запись $f \leqslant g$ *на* $E$ будет означать, что $f(x) \leqslant g(x) \quad \forall x \in E$. Аналогичный смысл будут иметь записи $f < g$, $f = g$, $f \geqslant g$, $f > g$, $f > C$, $f \geqslant C$, $f \neq C$, $f = C$ *на* $E$ и т. п.

**Определение 2.** Числовая функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется *ограниченной* (*сверху*, *снизу*), если область её значений $f(X)$ ограничена (сверху, снизу).

**Определение 3.** Пусть функция $f$ определена на множестве $E$. Тогда $\sup\limits_E f := \sup f(E)$ $(\inf\limits_E f := \inf f(E))$ называется *верхней* (*нижней*) *гранью* числовой функции на множестве $E$.

В ближайших параграфах будут изучаться лишь числовые функции, заданные на числовом множестве $X \subset \mathbb{R}$.

## § 3.2. Элементарные функции и их классификация

*Основными элементарными функциями* называются функции: постоянная $y = c$ ($c$ — константа), степенная $x^\alpha$, показательная $a^x$ $(a > 0)$, логарифмическая $\log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, тригонометрические $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ и обратные тригонометрические $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

*Элементарной функцией* называется всякая функция, представимая с помощью конечного числа арифметических действий и композиций основных элементарных функций.

Элементарные функции разбивают на следующие классы.

**(I) Многочлены (полиномы):**

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

**(II) Рациональные функции (рациональные дроби):**

$$\frac{P(x)}{Q(x)}, \text{ где } P(x),\ Q(x) — \text{многочлены}, \quad Q(x) \neq 0.$$

**(III) Иррациональные функции.** *Иррациональной* называется функция, которая не является рациональной и может быть задана с помощью композиций конечного числа рациональных функций, степенных функций с рациональными показателями и четырёх арифметических действий.

**Пример 1.** $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{x}+1/\sqrt{x}}{x+1/x}}$.

**(IV) Трансцендентные функции.** Элементарные функции, не являющиеся ни рациональными, ни иррациональными, называются *трансцендентными* функциями. Все тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, показательная и логарифмическая функции являются трансцендентными.

## § 3.3. Понятие предела функции

Как и раньше, $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty\}\cup\{+\infty\}$, $\widehat{\mathbb{R}}=\overline{\mathbb{R}}\cup\{\infty\}$, $U_\varepsilon(a)$ — $\varepsilon$-окрестность точки $a$ при $\varepsilon>0$, $U(a)$ — *окрестность* $a$. Множества

$$\mathring{U}_\varepsilon := U_\varepsilon(a)\setminus\{a\},\quad \mathring{U}(a) := U(a)\setminus\{a\} \tag{1}$$

называются *проколотыми окрестностями точки* $a$ (точкой будем называть как число, так и любой из элементов $-\infty$, $+\infty$, $\infty$).

**Определение 1′.** Пусть числовая функция $f$ определена на $\mathring{U}(x_0)$, $x_0\in\mathbb{R}$. Число $A\in\mathbb{R}$ называется *пределом функции* $f$ *при* $x\to x_0$, если

$$\forall\,\varepsilon>0\quad \exists\,\delta=\delta(\varepsilon)>0\colon\ |f(x)-A|<\varepsilon \quad \text{при } 0<|x-x_0|<\delta. \tag{2}$$

Более общим является

**Определение 1″.** Пусть числовая функция $f$ определена на $\mathring{U}(a)$, $a\in\overline{\mathbb{R}}$. Точка $A\in\widehat{\mathbb{R}}$ называется *пределом функции* $f$ *при* $x\to a$, если

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta=\delta(\varepsilon)>0\colon\ f(x)\in U_\varepsilon(A) \text{ при } x\in\mathring{U}_\delta(a).$$

В иной форме определение 1″ можно записать так.

**Определение 1.** Пусть числовая функция $f$ определена на $\mathring{U}(a)$, $a\in\overline{\mathbb{R}}$. Точка $A\in\widehat{\mathbb{R}}$ называется *пределом* $f$ *при* $x\to a$, если

$$\forall\,U(A)\quad \exists\,U(a)\colon\ f(\mathring{U}(a))\subset U(A).$$

Для обозначения предела пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, или $f(x)\to A$ при $x\to a$.

Определения 1′, 1″, 1 сформулированы в терминах окрестностей. Приведём определение предела в терминах последовательностей.

**Определение 2.** Пусть числовая функция $f$ определена на $\mathring{U}(a)$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Точка $A \in \widehat{\mathbb{R}}$ называется *пределом функции* $f$ *при* $x \to a$, если $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ для любой последовательности $\{x_n\}$, такой, что $x_n \in \mathring{U}(a)$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

**Теорема 1.** *Определения* 1 *и* 2 *эквивалентны.*

Доказательство. Покажем сначала, что $1 \Rightarrow 2$ (т. е. что если $A$ является пределом функции $f$ при $x \to a$ по определению 1, то $A$ является пределом функции $f$ при $x \to a$ по определению 2).

Пусть $f\colon \mathring{U}(a) \to \mathbb{R}$, и пусть $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ в смысле определения 1. Пусть последовательность $\{x_n\}$ такова, что $x_n \in \mathring{U}(a)$, $x_n \to a$ при $n \to \infty$. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда в силу определения 1 ($1''$) $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $f(x) \in U_\varepsilon(A)$ $\forall\, x \in \mathring{U}_\delta(a)$.

В силу сходимости $x_n \to a$ ($n \to \infty$) для выбранного $\delta = \delta(\varepsilon)$ $\exists\, n_\delta \in \mathbb{N}$: $x_n \in \mathring{U}_\delta$ $\forall\, n \geqslant n_{\delta(\varepsilon)}$. Но тогда $f(x_n) \in U_\varepsilon(A)$ $\forall\, n \geqslant n_\delta$, т. е. $f(x_n) \to A$ при $n \to \infty$, что и требовалось показать.

Докажем теперь, что $2 \Rightarrow 1$. Пусть $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ в смысле определения 2. Покажем, что $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ в смысле определения 1. Допустим противное, т. е. что

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0\colon \forall\, \delta > 0 \quad \exists\, x \in \mathring{U}_\delta(a)\colon\, f(x) \notin U_{\varepsilon_0}(A).$$

Будем в качестве $\delta$ брать $\delta = \dfrac{1}{n}$, а соответствующее значение $x$ обозначать через $x_n$, т. е.

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, x_n \in \mathring{U}_{1/n}(a)\colon\, f(x_n) \notin U_{\varepsilon_0}(A).$$

Но это означает, что для последовательности $\{x_n\}$ имеем

$$x_n \neq a, \quad x_n \to a \quad (n \to \infty), \quad f(x_n) \not\to A \quad (n \to \infty),$$

т. е. $A$ не является пределом функции $f$ при $x \to a$ в смысле определения 2, что противоречит исходному условию. Утверждение доказано.

**Пример 1.** Покажем, что $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$ не существует.

Для этого рассмотрим две сходящиеся к нулю последовательности: $\{x_n\} = \left\{\dfrac{1}{2\pi n}\right\}$ и $\{x'_n\} = \left\{\dfrac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}\right\}$. Имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\dfrac{1}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\dfrac{1}{x'_n} = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$.

С помощью определения 2 заключаем, что никакая точка $A$ не может быть пределом $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$, т. е. что этот предел не существует.

## § 3.4. Свойства пределов функции

**Теорема 1.** *Пусть функции $f$, $g$, $h$ определены на некоторой окрестности $\mathring{U}(a)$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $f \leqslant g \leqslant h$ на $\mathring{U}(a)$, $f(x) \to A$, $h(x) \to A$ при $x \to a$, $A \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда $g(x) \to A$ при $x \to a$.*

Доказательство. Убедимся, что $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$ по определению 3.3.2. Для этого рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}$:

$$x_n \in \mathring{U}(a) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_n \to a \quad (n \to \infty).$$

Имеем

$$f(x_n) \leqslant g(x_n) \leqslant h(x_n).$$

Поскольку $f(x_n) \to A$, $h(x_n) \to A$ $(n \to \infty)$, то в силу соответствующего свойства последовательностей получаем, что

$$g(x_n) \to A \quad (n \to \infty).$$

В силу произвольности последовательности $\{x_n\}$ с помощью определения 3.3.2 заключаем, что $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

**Теорема 2** (арифметические свойства пределов). *Пусть $a \in \overline{\mathbb{R}}$, функции $f$, $g$ определены на $\mathring{U}(a)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$; $A, B \in \mathbb{R}$. Тогда:*

1° $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$;

2° $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = AB$;

3° *если, кроме того, $B \neq 0$ и $\exists\, \delta > 0$: $g(x) \neq 0$ при $x \in \mathring{U}_\delta(a)$, то*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Доказательство всех свойств проводится по одной и той же схеме, поэтому приведём доказательство лишь для свойства 2°.

Пусть последовательность $\{x_n\}$ такова, что

$$x_n \in \mathring{U}(a) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_n \to a \quad (n \to \infty).$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = B$ в силу определения 3.3.2. По свойству пределов последовательностей $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)g(x_n) = AB$. В силу произвольности последовательности $\{x_n\}$ по определению 3.3.2 получаем, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = AB$.

## § 3.5. Критерий Коши

**Теорема 1** (критерий Коши существования конечного предела функции). *Пусть функция $f$ определена на $\mathring{U}(x_0)$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.*

*Тогда для существования конечного предела $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось* <u>*условие Коши:*</u>

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon |f(x') - f(x'')| < \varepsilon \ \ \forall\, x', x'' \in \mathring{U}_\delta(x_0).$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$. Тогда $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $|f(x') - A| < \varepsilon$, $|f(x'') - A| < \varepsilon \quad \forall\, x', x'' \in \mathring{U}_\delta(x_0)$. Отсюда $|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - A| + |f(x'') - A| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ $\forall\, x', x'' \in \mathring{U}_\delta(x_0)$, что и требовалось показать.

*Достаточность.* Пусть выполняется условие Коши. Покажем, что существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Для этого воспользуемся определением 3.3.2 предела функции (т. е. определением в терминах последовательностей). Пусть $x_n \in \mathring{U}(x_0)$, $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ взято из условия Коши. В силу определения предела последовательности найдётся $n_{\delta(\varepsilon)} \in \mathbb{N}$, такое, что $x_n \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \quad \forall\, n \geqslant n_{\delta(\varepsilon)} = \overline{n_\varepsilon}$. Отсюда и из условия Коши имеем

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon \quad \forall\, n, m \geqslant \overline{n_\varepsilon}.$$

Последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится в силу критерия Коши для последовательностей. Пусть $A = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.

Для завершения доказательства остаётся показать, что для любой последовательности $\{x'_n\}$, $x'_n \in \mathring{U}(x_0)$, $x'_n \to x_0$ $(n \to \infty)$, предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n)$ (существующий по уже доказанному) также равен $A$. Предположим противное: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = B \neq A$ для некоторой последовательности $\{x'_n\}$, $x'_n \in \mathring{U}(x_0)$, $x'_n \to x_0$ $(n \to \infty)$. Рассмотрим последовательность $\{f(x_1), f(x'_2), f(x_3), f(x'_4), \ldots\}$. Она, очевидно, расходится (имеет два различных частичных предела $A$ и $B$). Это противоречит доказанной сходимости всякой последовательности значений функции для сходящейся к $x_0$ последовательности значений аргументов.

Теорема доказана.

## § 3.6. Односторонние пределы

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Множество $U_\delta(x_0 - 0) = (x_0 - \delta, x_0]$ называют *левой полуокрестностью точки $x_0$ радиуса $\delta$*. Через $U(x_0 - 0)$ обозначают левую полуокрестность точки $x_0$ произвольного радиуса.

Множество $U_\delta(x_0 + 0) = [x_0, x_0 + \delta)$ называется *правой полуокрестностью точки $x_0$ радиуса $\delta$*. Через $U(x_0 + 0)$ обозначают правую полуокрестность точки $x_0$ произвольного радиуса.

*Проколотыми полуокрестностями* называют соответственно:

$$\mathring{U}_\delta(x_0 - 0) = U_\delta(x_0 - 0) \setminus \{x_0\} = (x_0 - \delta, x_0),$$

$$\mathring{U}(x_0 - 0) = U(x_0 - 0) \setminus \{x_0\},$$

$$\mathring{U}_\delta(x_0 + 0) = U_\delta(x_0 + 0) \setminus \{x_0\} = (x_0, x_0 + \delta),$$

$$\mathring{U}(x_0 + 0) = U(x_0 + 0) \setminus \{x_0\}.$$

**Определение 1.** Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, и пусть функция $f$ определена на $\mathring{U}(x_0 - 0)$. Точка $A \in \widehat{\mathbb{R}}$ называется *пределом слева функции $f$ в точке $x_0$* (пишут $f(x_0 - 0) = A$, или $\lim\limits_{x\to x_0 - 0} f(x) = A$), если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon \forall\, x \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0 - 0) \quad f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Аналогично определяется *предел справа функции $f$ в точке* $x_0 \in \mathbb{R}$. Он обозначается через $f(x_0 + 0)$, или $\lim\limits_{x\to x_0 + 0} f(x)$.

Пределы функции слева и справа называются *односторонними* пределами функции.

Будем пользоваться также следующими обозначениями для пределов:

$$f(-\infty) := \lim_{x \to -\infty} f(x), \quad f(+\infty) := \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

**Упражнение 1.** Сформулировать определения пределов слева и справа в терминах последовательностей.

**Упражнение 2.** Сформулировать и доказать критерий Коши существования конечного одностороннего предела функции.

**Замечание 1.** Можно расширить общее определение предела функции $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $A \in \widehat{\mathbb{R}}$, считая в нём $a$ либо числом, либо одним из символов $-\infty$, $+\infty$, $\infty$, $x_0 - 0$, $x_0 + 0$, где $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда это определение предела функции будет содержать и только что введённые понятия предела слева и предела справа.

**Лемма 1.** *Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, функция $f$ определена на $\mathring{U}(x_0)$. Тогда для существования $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ необходимо и достаточно существования каждого из пределов $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$ и их равенства $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$.*

**Упражнение 3.** Доказать лемму.

## § 3.7. Пределы монотонных функций

**Определение 1.** Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется *возрастающей* (*убывающей*) *на* $E \subset X$, если из $x_1, x_2 \in E$, $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ $(f(x_1) \geqslant f(x_2))$.

Если вместо $\leqslant$ $(\geqslant)$ можно написать $<$ $(>)$, то функцию называют *строго возрастающей* (*строго убывающей*).

Возрастающие и убывающие функции называются *монотонными*. Строго возрастающие и строго убывающие функции называются *строго монотонными*.

**Теорема 1.** *Пусть $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, функция $f$ возрастает на $(a, b)$. Тогда*

$$\exists \lim_{x \to b-0} f(x) = \sup_{(a,b)} f.$$

**Замечание 1.** В случае $b = +\infty$ под $+\infty - 0$ понимается $+\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\sup\limits_{(a,b)} f = B \leqslant +\infty$. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Из определения верхней грани функции следует, что $\exists\, x_\varepsilon \in (a, b)$: $f(x_\varepsilon) \in U_\varepsilon(B)$. Выберем $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ таким, что $x_\varepsilon \notin U_\delta(b)$ (т. е. $U_\delta(b)$ лежит правее $x_\varepsilon$). Тогда

$f(\mathring{U}_\delta(b-0)) \subset U_\varepsilon(B)$ в силу возрастания функции $f$. Следовательно, $\exists\, f(b-0) = B$.

**Упражнение 1.** Доказать соответствующую теорему для убывающей функции, а также для предела $f(a+0)$.

**Следствие.** *Пусть функция $f$ монотонна на $(a, b) \ni x_0$. Тогда существуют конечные пределы $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$.*

## § 3.8. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Сравнение функций

Пусть $a \in \mathbb{R}$ или $a$ является одним из символов $-\infty$, $+\infty$, $x_0-0$, $x_0+0$ ($x_0 \in \mathbb{R}$).

**Определение 1.** Функция $f$, определённая на некоторой проколотой окрестности $U(a)$, называется *бесконечно малой* (*бесконечно большой*) *при $x \to a$*, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ ($\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$).

**Упражнение 1.** Показать, что произведение конечного числа бесконечно малых функций является бесконечно малой функцией.

**Упражнение 2.** Показать, что произведение бесконечно малой функции на ограниченную является бесконечно малой функцией.

Далее будем считать, что функции $f$, $g$ определены на некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(a)$, где $a \in \mathbb{R}$ либо $a$ является одним из символов: $-\infty$, $+\infty$, $x_0-0$, $x_0+0$ ($x_0 \in \mathbb{R}$).

**Определение 2.** Пусть существует постоянная $C > 0$, такая, что

$$|f(x)| \leqslant C|g(x)| \quad \forall\, x \in \mathring{U}(a).$$

Тогда пишут $f = O(g)$ при $x \to a$ [1]).

**Определение 3.** Функции $f$ и $g$ называются *функциями одного порядка при $x \to a$*, если

$$f = O(g), \quad g = O(f) \quad \text{при} \quad x \to a.$$

При этом пишут $f(x) \asymp g(x)$ при $x \to a$.

**Лемма 1.** *Пусть $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = K \in \mathbb{R}$, $K \neq 0$. Тогда $f$ и $g$ являются функциями одного порядка при $x \to a$.*

---

[1]) Читается: $f$ есть «$O$» *большое* относительно $g$ при $x$, стремящемся к $a$.

Доказательство. Имеем $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{|g(x)|}{|f(x)|} = |K| > 0$. Следовательно, при некотором $\delta > 0$

$$\frac{1}{2}|K| \leqslant \frac{|g(x)|}{|f(x)|} \leqslant \frac{3}{2}|K| \quad \forall\, x \in \mathring{U}_\delta(a).$$

Отсюда

$$|g(x)| \leqslant \frac{3}{2}|K|\,|f(x)|, \quad |f(x)| \leqslant \frac{2}{|K|}|g(x)| \quad \forall\, x \in \mathring{U}_\delta(a),$$

т. е. $f$ и $g$ — функции одного порядка.

**Определение 4.** Функции $f$ и $g$ называются *эквивалентными* (*асимптотически равными*) *при* $x \to a$ (записывается $f \sim g$ при $x \to a$), если $f(x) = \lambda(x)g(x)$, $x \in \mathring{U}(a)$, причём $\lim\limits_{x\to a} \lambda(x) = 1$.

Отношение эквивалентности обладает свойствами:

1° $f \sim g$ при $x \to a \Rightarrow g \sim f$ при $x \to a$ (симметрия);

2° $f \sim g$, $g \sim h$ при $x \to a \Rightarrow f \sim h$ при $x \to a$ (транзитивность).

**Упражнение 3.** Доказать свойства 1°, 2°.

**Лемма 2.** *Пусть* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$. *Тогда* $f \sim g$ *при* $x \to a$.

**Примеры.**

а) $x^2 = O(x)$ при $x \to 0$;

б) $x = O(x^2)$ при $x \to +\infty$;

в) $\dfrac{2x^4+1}{x^2-1} \asymp x^2$ при $x \to +\infty$;

г) $\dfrac{x}{x^2-1} \sim -x$ при $x \to 0$;

д) ниже будет показано, что при $x \to 0$

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1.$$

**Определение 5.** Функция $g$ называется *бесконечно малой по сравнению с функцией* $f$ *при* $x \to a$ (записывается $g = o(f)$ при $x \to a$) [1)], если $g(x) = \varepsilon(x)f(x)$, $x \in \mathring{U}(a)$, причём $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.

---

[1)] Читается $g$ есть «$o$» *малое* относительно $f$ при $x$, стремящемся к $a$.

Если при этом функции $f$, $g$ являются бесконечно малыми при $x \to a$, то говорят, что функция $g$ является *бесконечно малой более высокого порядка*, чем функция $f$.

Запись $\alpha(x) = o(1)$ при $x \to a$ означает по определению, что $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to a$.

**Примеры.**

а) $x^2 = o(x)$ при $x \to 0$;

б) $x = o(x^2)$ при $x \to +\infty$.

**Замечание 1.** Последние три определения наиболее содержательны, когда $f$ и $g$ — бесконечно малые или бесконечно большие функции.

**Теорема 1.** *Пусть $f \sim f_1$, $g \sim g_1$ при $x \to a$. Если существует $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$\frac{f}{g} = \frac{\lambda_1 f_1}{\lambda_2 g_1}$$

и что

$$\lim_{x\to a} \frac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)} = 1.$$

**Пример 1.**

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

# Глава 4
# НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

## § 4.1. Непрерывность функции в точке

Будем считать, что функция $f$ определена на $U(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Обозначим: $\Delta x = x - x_0$, $\Delta f = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

**Определения.** Функция $f$ называется *непрерывной в точке* $x_0$, если выполняется какое-либо из следующих условий:

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$;

(2) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$ $\left(\lim\limits_{\Delta x \to 0} \equiv \lim\limits_{x \to x_0}\right)$;

(3) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\ \ \forall\, x$: $|x - x_0| < \delta$;

(4) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $f(U_\delta(x_0)) \subset U_\varepsilon(f(x_0))$;

(5) $\forall\, U(f(x_0))\ \exists\, U(x_0)$: $f(U(x_0)) \subset U(f(x_0))$;

(6) $\forall\, \{x_n\}$: $x_n \in U(x_0)$, $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ имеет место $f(x_n) \to f(x_0)$ $(n \to \infty)$.

Эквивалентность определений (1) – (6) следует из эквивалентности соответствующих определений предела функции.

Обратим внимание на то, что в определении (3) $x$ может совпадать с $x_0$, а в определении (6) $x_n$ может совпадать с $x_0$. Однако при добавлении условия $x \neq x_0$ в определение (3) или условия $x_n \neq x_0$ в определение (6) соответствующее определение заменяется на эквивалентное.

**Теорема 1** (о сохранении знака функции). *Пусть функция $f$ непрерывна в $x_0$, $f(x_0) > 0$ $(f(x_0) < 0)$. Тогда $\exists\, U(x_0)$: $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$ $\ \forall\, x \in U(x_0)$.*

Доказательство. Непрерывность функции $f$ в точке $x_0$ означает, в частности, что $f$ определена на некоторой окрестности точки $x_0$. Пусть, для определённости, $f(x_0) = d > 0$. Возьмём $\varepsilon = d/2 > 0$. Тогда, по определению (3) непрерывности, существует $\delta > 0$, такое, что $|f(x) - f(x_0)| < d/2$ при $|x - x_0| < \delta$, откуда следует, что

$$f(x) = f(x_0) + (f(x) - f(x_0)) > d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2} > 0 \text{ при } x \in U_\delta(x_0).$$

**Теорема 2** (арифметические свойства непрерывных функций). *Пусть функции $f$, $g$ непрерывны в точке $x_0$. Тогда функции $f + g$, $f - g$, $fg$, а при $g(x_0) \neq 0$ и $\dfrac{f}{g}$ непрерывны в точке $x_0$.*

Доказательство. Напомним, что $(f \pm g)(x) := f(x) \pm \pm g(x)$. Аналогично определяются произведение и частное двух функций. Докажем лишь, что функция $\dfrac{f}{g}$ непрерывна в $x_0$ (для $f \pm g$ и $fg$ доказательства аналогичны).

По предыдущей теореме $\exists\, U(x_0)$: $g(x) \neq 0$ при $x \in U(x_0)$, так что частное $\dfrac{f}{g}$ определено на $U(x_0)$. Имеем теперь, используя свойства пределов и непрерывность функций $f, g$:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g}\,(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{f}{g}\,(x_0),$$

что и требовалось доказать.

**Упражнение 1.** Доказать непрерывность многочленов и рациональных функций в каждой точке областей их определения.

## § 4.2. Предел и непрерывность сложной функции

Пусть функция $f$ определена на $X$, а функция $\varphi$ — на $T$, причём $\varphi(T) \subset X$. Тогда сложная функция (суперпозиция, композиция функций $f$, $\varphi$) $f \circ \varphi$ определяется на $T$ формулой

$$(f \circ \varphi)(t) = f(\varphi(t)), \quad t \in T.$$

**Теорема 1** (о непрерывности суперпозиции непрерывных функций). *Пусть функция $f$ непрерывна в точке $x_0$, а функция $\varphi$ непрерывна в точке $t_0$, причём $\varphi(t_0) = x_0$. Тогда функция $f \circ \varphi$ непрерывна в точке $t_0$.*

Доказательство. Пусть $y_0 = f(x_0)$, $U(y_0)$ — произвольная окрестность $y_0$. Поскольку функция $f$ непрерывна в $x_0$, то

$$\exists\, U(x_0)\colon\ f(U(x_0)) \subset U(y_0)$$

(это означает, в частности, что $f$ определена на $U(x_0)$). Так как $\varphi$ непрерывна в точке $t_0$, то $\exists\, U(t_0)$: $\varphi(U(t_0)) \subset U(x_0)$.

Последнее означает, в частности, что $\varphi$ определена на $U(t_0)$ и значения $\varphi$ в точках $U(t_0)$ лежат в $U(x_0)$. Следовательно, на $U(t_0)$ определена сложная функция $f \circ \varphi$, причём

$$(f \circ \varphi)(U(t_0)) \subset U(y_0), \quad \text{где} \quad y_0 = (f \circ \varphi)(t_0).$$

В силу произвольности $U(y_0)$ это означает непрерывность $f \circ \varphi$ в точке $t_0$ (см. определение (5) непрерывности).

Установим теперь две теоремы о пределе сложной функции.

**Теорема 2** (о пределе суперпозиции). *Пусть функция $f$ непрерывна в точке $x_0$, а функция $\varphi$ определена на $\mathring{U}(t_0)$ и* $\exists \lim\limits_{t \to t_0} \varphi(t) = x_0$. *Тогда*

$$\exists \lim_{t \to t_0} (f \circ \varphi)(t) = f(\lim_{t \to t_0} \varphi(t)) = f(x_0).$$

Доказательство. Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 1, приходим к тому, что $\forall U(y_0)\ \exists U(t_0)$: $(f \circ \varphi)(\mathring{U}(t_0)) \subset U(y_0)$, $y_0 = f(x_0)$.

В силу произвольности $U(y_0)$ это означает, что утверждение теоремы доказано.

Другое доказательство теоремы состоит в следующем. Доопределим функцию $\varphi$ в точке $t_0$ (или переопределим её, если она изначально была определена в $t_0$), положив $\varphi(t_0) = x_0$. Тогда $\varphi$ становится непрерывной в точке $t_0$, и остаётся воспользоваться теоремой 1.

**Теорема 3.** *Пусть* $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$. *Пусть $\varphi$ определена на* $\mathring{U}(t_0)$, $\varphi(\mathring{U}(t_0)) \not\ni x_0$ *и* $\exists \lim\limits_{t \to t_0} \varphi(t) = x_0$.

*Тогда*
$$\exists \lim_{t \to t_0} (f \circ \varphi)(t) = y_0.$$

Доказательство. Доопределим (переопределим) функцию $f$ в точке $x_0$, положив $f(x_0) = y_0$. Остаётся воспользоваться теоремой 1.

**Упражнение 1.** Доказать теоремы 1, 2, 3, используя определение предела через последовательности.

## § 4.3. Односторонняя непрерывность и точки разрыва

Напомним (см. § 3.6), что $U(x_0 + 0)$ $(U(x_0 - 0))$, $x_0 \in \mathbb{R}$, означает полуинтервал $[x_0, x_0 + \delta)$ $((x_0 - \delta, x_0])$ при некотором $\delta > 0$.

**Определение 1.** Функция $f$, определённая на $U(x_0 + 0)$ $(U(x_0 - 0))$, называется *непрерывной справа* (*слева*) *в точке* $x_0$, если

$$\exists f(x_0 + 0) = f(x_0) \quad (\exists f(x_0 - 0) = f(x_0)).$$

**Упражнение 1.** Доказать, что функция $f$ непрерывна в точке $x_0$ тогда и только тогда, когда она непрерывна в $x_0$ слева и справа.

**Определение 2.** Функция $f$, определённая на $\mathring{U}(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, называется *разрывной в точке* $x_0$, если она не определена в $x_0$ или определена в $x_0$, но не является непрерывной в $x_0$. При этом точка $x_0$ называется *точкой разрыва*.

**Определение 3.** Точка $x_0$ разрыва функции $f$ называется *точкой разрыва I рода*, если существуют конечные пределы $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$. При этом разность $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называется *скачком функции $f$ в точке* $x_0$. Если при этом $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$, т. е. скачок равен нулю, то $x_0$ называется *точкой устранимого разрыва*.

Точка разрыва, не являющаяся точкой разрыва I рода, называется *точкой разрыва II рода*.

**Пример 1.** Функция

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ 1 & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

(sgn произносится «сигнум») имеет в точке 0 разрыв I рода.

**Упражнение 2.** Доказать, что монотонная на отрезке функция имеет на этом отрезке не более чем счётное (т. е. конечное или счётное) множество точек разрыва.

## § 4.4. Свойства функций, непрерывных на отрезке

**Определение 1.** Функция, определённая на отрезке $[a, b]$ и непрерывная в каждой его точке, называется *непрерывной на* этом *отрезке*. При этом под непрерывностью в точках $a$, $b$ понимается непрерывность справа и слева соответственно.

Аналогично определяется непрерывность на интервале, на полуинтервале.

**Определение 2.** Будем говорить, что функция $f$, определённая на множестве $E$, *достигает на $E$ своей верхней* (*нижней*) *грани*, если

$$\exists\, x_0 \in E\colon\, f(x_0) = \sup_E f \quad \left(f(x_0) = \inf_E f\right).$$

**Теорема 1** (Вейерштрасса). *Функция, непрерывная на отрезке, ограничена и достигает на нём своих верхней и нижней граней.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функция $f$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, и пусть $B := \sup\limits_{[a,b]} f \leqslant +\infty$. В силу определения верхней грани

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, x_n \in [a, b]\colon f(x_n) \in U_{1/n}(B).$$

Следовательно, $f(x_n) \to B$ при $n \to \infty$.

Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, так как $a \leqslant x_n \leqslant b$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. По теореме Больцано–Вейерштрасса из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} \to x_0$ при $k \to \infty$.

Переходя к пределу в неравенстве $a \leqslant x_{n_k} \leqslant b$, получаем, что $x_0 \in [a, b]$. В силу непрерывности в точке $x_0$ функции $f$ имеем

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0) \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

С другой стороны, $\{f(x_{n_k})\}$ — подпоследовательность сходящейся к $B$ последовательности. Поэтому

$$f(x_{n_k}) \to B \text{ при } k \to \infty.$$

Из последних двух соотношений получаем, что

$$\sup_{[a,b]} f = B = f(x_0).$$

Отсюда следует, во-первых, что $\sup\limits_{[a,b]} f < +\infty$, т. е. что функция $f$ ограничена сверху, и, во-вторых, что функция $f$ достигает своей верхней грани в точке $x_0$.

Аналогично можно доказать, что функция $f$ ограничена снизу и достигает своей нижней грани.

Теорема доказана.

**Упражнение 1.** Сохранится ли доказательство теоремы Вейерштрасса, если в её условиях отрезок $[a, b]$ заменить на интервал $(a, b)$? Останется ли верным её утверждение?

**Следствие.** *Пусть функция $f$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, и пусть $f(x) > 0$ $\forall\, x \in [a, b]$. Тогда $\exists\, d > 0$: $f(x) \geqslant d$ $\forall\, x \in [a, b]$.*

**Определение 3.** Пусть функция $f$ задана на $E$ и для некоторой точки $x_0 \in E$ справедливо неравенство

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad \forall\, x \in E.$$

Тогда точка $x_0$ называется *точкой максимума* функции $f$ на $E$. Значение $f(x_0)$ называется *максимумом* функции $f$ на $E$ и обозначается $\max\limits_E f$.

Аналогично определяются *точка минимума* функции $f$ на $E$ и *минимум* $f$ на $E$, обозначаемый $\min\limits_E f$.

Теорема Вейерштрасса утверждает, в частности, что непрерывная на отрезке функция имеет на этом отрезке максимум и минимум.

**Теорема 2** (Коши о промежуточном значении функции). *Пусть функция $f$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, $f(a) = A$, $f(b) = B$. Пусть $C$ находится между $A$ и $B$. Тогда*

$$\exists\, \xi \in [a, b] \colon f(\xi) = C.$$

Доказательство. Пусть, для определённости, $A = f(a) \leqslant C \leqslant f(b) = B$. Поделим отрезок $[a, b]$ пополам и через $[a_1, b_1]$ обозначим такую его половину, для которой $f(a_1) \leqslant C \leqslant f(b_1)$. Затем поделим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам и через $[a_2, b_2]$ обозначим такую его половину, для которой $f(a_2) \leqslant C \leqslant f(b_2)$. Продолжая процесс, получим стягивающуюся систему вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}$, для которых

$$f(a_n) \leqslant C \leqslant f(b_n).$$

Пусть $\xi \in [a_n, b_n]\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Тогда $a_n \to \xi$, $b_n \to \xi$ при $n \to \infty$ и (в силу непрерывности функции $f$ в точке $\xi$)

$$f(a_n) \to f(\xi), \quad f(b_n) \to f(\xi) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Переходя к пределу в последнем неравенстве, получаем

$$f(\xi) \leqslant C \leqslant f(\xi) \Rightarrow f(\xi) = C,$$

что и требовалось доказать.

**Следствие 1.** *Пусть функция $f$ непрерывна на $[a, b]$, причём $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки. Тогда*

$$\exists\, \xi \in (a, b) \colon f(\xi) = 0.$$

**Следствие 2.** *Пусть функция $f$ непрерывна на $[a, b]$, $m = \min\limits_{[a,b]} f$, $M = \max\limits_{[a,b]} f$. Тогда функция $f$ принимает все значения из $[m, M]$ и только эти значения.*

## § 4.5. Обратные функции

Рассмотрим (числовую) функцию $f : X \to Y_f$, заданную на (числовом) множестве $X$. Здесь $Y_f$ означает область её значений. Пусть $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Тогда функция (отображение) $f$ задаёт взаимно однозначное соответствие $X \leftrightarrow Y_f$. Поставив в соответствие каждому $y \in Y_f$ именно то (единственное) значение $x \in X$, для которого $f(x) = y$, обозначим полученную функцию символом

$$f^{-1}\colon Y_f \to X.$$

Функция $f^{-1}$ называется *обратной* по отношению к $f$. В силу этого определения

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y),$$
$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall\, x \in X,$$
$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall\, y \in Y_f.$$

**Лемма 1.** *Пусть функция $f\colon X \to Y_f$ строго монотонна на множестве $X$. Тогда обратная функция $f^{-1}\colon Y_f \to X$ строго монотонна на множестве $Y_f$.*

Доказательство очевидно.

**Упражнение 1.** Показать, что графики функций $f$ и $f^{-1}$ симметричны относительно прямой $y = x$.

**Теорема 1.** *Пусть функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ задана на отрезке $[a, b]$, строго возрастает и непрерывна.*

*Тогда обратная функция задана на отрезке $[A, B] = [f(a), f(b)]$, строго возрастает и непрерывна на нём.*

Доказательство. Найдём область значений $Y_f$ функции $f$. Поскольку $A \leqslant f(x) \leqslant B \quad \forall\, x \in [a, b]$, то $Y_f \subset [A, B]$. С другой стороны, по теореме Коши $\forall\, C \in [A, B]\ \exists\, c \in [a, b]$: $f(c) = C$, так что $[A, B] \subset Y_f$. Следовательно, $Y_f = [A, B]$.

Строгое возрастание $f^{-1}$ следует из леммы.

Установим непрерывность $f^{-1}$. Пусть сначала $y_0 \in (A, B)$, так что $x_0 = f^{-1}(y_0) \in (a, b)$. Пусть $\varepsilon > 0$ столь мало, что

$$[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset [a, b].$$

Пусть $y_1 := f(x_0 - \varepsilon)$, $y_2 := f(x_0 + \varepsilon)$.

Функция $f$ устанавливает взаимно однозначное соответствие отрезка $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ и отрезка $[y_1, y_2] \subset [A, B]$ (рис. 1). При этом $y_1 < y_0 < y_2$. Возьмём $\delta > 0$ столь малым, что $(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subset (y_1, y_2)$. Тогда

$$f^{-1}(U_\delta(y_0)) \subset f^{-1}((y_1, y_2)) = U_\varepsilon(x_0).$$

Следовательно, функция $f^{-1}$ непрерывна в точке $y_0$.

Пусть теперь $y_0 = A$ или $y_0 = B$. Тогда (односторонняя) непрерывность $f^{-1}$ в точке $y_0$ доказывается аналогично (с использованием односторонних окрестностей).

Теорема доказана.

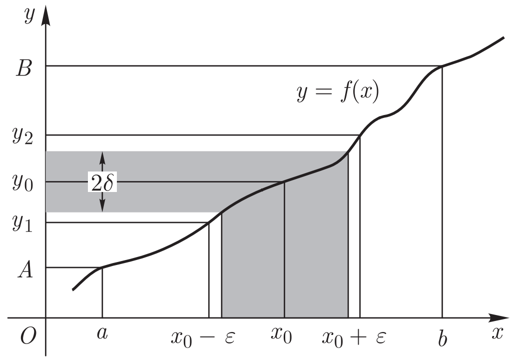



Рис. 1

Аналогично формулируется и доказывается теорема для непрерывной и строго убывающей на отрезке функции.

**Теорема 2.** *Пусть функция* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *задана на интервале* $(a,b)$*, строго возрастает и непрерывна на нём.*

*Тогда обратная функция задана, строго возрастает и непрерывна на интервале* $(A,B) = \left(\inf\limits_{(a,b)} f, \sup\limits_{(a,b)} f\right)$.

Доказательство. Найдём область значений $Y_f$ функции $f$. Покажем, что

$$A < f(x) < B \quad \forall\, x \in (a,b). \tag{1}$$

В самом деле, допущение, например, того, что $f(x_0) \geqslant B$ при некотором $x_0 \in (a,b)$, означало бы в силу строгого возрастания $f$, что $f(x) > B$ $\forall\, x \in (x_0, b)$, что противоречит тому, что $B = \sup\limits_{(a,b)} f$.

Покажем теперь, что

$$\forall\, y_0 \in (A,B) \quad \exists\, x_0 \in (a,b)\colon f(x_0) = y_0. \tag{2}$$

Из определения верхней и нижней граней следует, что

$$\exists\, x_1, x_2 \in (a,b)\colon f(x_1) < y_0, \quad f(x_2) > y_0.$$

Применяя к сужению $f_{[x_1,\,x_2]}$ функции $f$ на отрезок $[x_1, x_2]$ теорему Коши о промежуточном значении непрерывной функции, получаем, что

$$\exists\, x_0 \in [x_1, x_2]\colon f(x_0) = y_0.$$

Таким образом, (2) установлено.

Из (1), (2) следует, что $f(a,b) = (A,B)$.

Остаётся показать, что обратная функция $f^{-1}$ непрерывна в каждой точке $y_0 \in (A, B)$. Это делается так же, как в теореме 1. Теорема доказана.

Аналогично формулируются вариант теоремы 2 для функции, строго убывающей на интервале, а также варианты теоремы об обратной функции для полуинтервалов.

## § 4.6. Показательная функция

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Функция $f(x) = x^n$: $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$ (называемая *степенной функцией* с показателем степени $n$) строго возрастает и непрерывна на $[0, +\infty)$. По теореме об обратной функции обратная функция $f^{-1}$, обозначаемая символами $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$, строго возрастает и непрерывна на $[0, +\infty)$.

В этом параграфе буквами $r, \rho$ с индексами будем обозначать рациональные числа, число $a > 0$.

Для рационального показателя степени $\frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{N}$ и дробь $\frac{m}{n}$ несократима, полагают при $a > 0$

$$a^{m/n} := \left(a^{1/n}\right)^m, \quad a^{-m/n} := \frac{1}{a^{m/n}}.$$

Тем самым $a^r$ определено $\forall\, a \in (0, +\infty)$, $\forall\, r \in \mathbb{Q}$;

$$a^r > 0 \quad \forall\, r \in \mathbb{Q}. \tag{1}$$

Будем считать известными следующие свойства показательной функции $a^r$ рационального аргумента $r$.

1° $r_1 < r_2 \Rightarrow a^{r_1} < a^{r_2}$ при $a > 1$, $a^{r_1} > a^{r_2}$ при $0 < a < 1$;
2° $a^{r_1} a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$;
3° $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$;
4° $a^0 = 1$;
5° $(ab)^r = a^r b^r$.

**Лемма 1** (Бернулли). *Пусть $a > 1$, $r \in \mathbb{Q}$, $|r| \leqslant 1$. Тогда*

$$|a^r - 1| \leqslant 2|r|(a - 1). \tag{2}$$

Доказательство. Пусть сначала $r = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Положим $\lambda := a^{1/n} - 1 > 0$. Тогда $a^{1/n} = 1 + \lambda$, $a \geqslant 1 + n\lambda$, откуда $\lambda \leqslant \frac{a-1}{n}$, т. е.

$$a^{1/n} - 1 \leqslant \frac{1}{n}(a - 1), \tag{3}$$

откуда легко получается (2).

Пусть теперь $0 < r \leqslant 1$. Тогда $\dfrac{1}{n+1} < r \leqslant \dfrac{1}{n}$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. Используя (3) и монотонность функции $a^r$, получаем

$$a^r - 1 \leqslant a^{1/n} - 1 \leqslant \frac{1}{n}(a-1) \leqslant \frac{2}{n+1}(a-1) < 2r(a-1),$$

и неравенство (2) в этом случае установлено.

Пусть теперь $-1 \leqslant r < 0$. Тогда

$$|a^r - 1| = a^r|a^{-r} - 1| \leqslant a^r \cdot 2(-r)(a-1).$$

Учитывая, что $a^r < 1$, получаем отсюда (2).

Лемма доказана.

**Определение 1.** Пусть $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$.

Тогда

$$a^x := \lim_{n\to\infty} a^{r_n}.$$

Это определение корректно в следующем смысле:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ существует и конечен;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ не зависит от выбора сходящейся к $x$ последовательности $\{r_n\}$;

3) в случае $x = r$ значение $a^r$ по этому определению совпадает с прежним.

Установим 1). Пусть $a > 1$, $r_n \to x$ $(n \to \infty)$. Тогда $|r_n - r_m| \leqslant 1$ $\forall\, n, m \geqslant n_1$ в силу сходимости последовательности $\{r_n\}$. С помощью неравенства Бернулли имеем для $n, m \geqslant n_1$:

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| = a^{r_m}|a^{r_n - r_m} - 1| \leqslant a^{r_m} \cdot 2|r_n - r_m|(a-1). \tag{4}$$

Заметим, что последовательность $\{r_n\}$ ограничена (как всякая сходящаяся), поэтому при некотором $M > 0$

$$\frac{1}{M} \leqslant a^{r_m} \leqslant M \quad \forall\, m \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

В силу сходимости последовательности $\{r_n\}$ для неё выполняется условие Коши:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon |r_n - r_m| < \varepsilon \quad \forall\, n, m \geqslant n_\varepsilon.$$

Отсюда и из (4) при $0 < \varepsilon \leqslant 1$ имеем

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| \leqslant M \cdot 2(a-1)\varepsilon \quad \forall\, n, m \geqslant n_\varepsilon.$$

Это означает, что для последовательности $\{a^{r_n}\}$ выполняется условие Коши. В силу критерия Коши она сходится, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ существует и конечен. Из (5) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} > 0$.

Пусть теперь $0 < a < 1$. Тогда $a^{r_n} = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n}}$, и существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ следует из уже установленного существования положительного предела $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{a}\right)^{r_n}$.

Случай $a = 1$ тривиален.

Установим 2). Пусть $a > 1$, $r_n \to x$, $r'_n \to x$ при $n \to \infty$. Тогда $r_n - r'_n \to 0$ при $n \to \infty$, и с помощью неравенства Бернулли имеем

$$|a^{r_n} - a^{r'_n}| = a^{r'_n}|a^{r_n - r'_n} - 1| \leqslant M \cdot 2|r_n - r'_n|(a-1) \to 0 \ (n \to \infty).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} - \lim_{n\to\infty} a^{r'_n} = \lim_{n\to\infty} (a^{r_n} - a^{r'_n}) = 0,$$

что и требовалось показать.

Случай $0 < a < 1$ сводится к рассмотренному с помощью равенства $a^{r_n} = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n}}$.

Установим 3). Для этого достаточно рассмотреть последовательность $\{r_n\}$, где $r_n = r \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

**Определение 2.** При $a > 0$ функция $x \to a^x$, $x \in (-\infty, +\infty)$, называется *показательной* с основанием $a$.

Функция $x \to e^x$, $x \in (-\infty, +\infty)$, называется *экспоненциальной*. Иногда вместо $e^x$ пишут $\exp x$.

**Теорема 1.** *Показательная функция имеет следующие свойства:*

1° $a^x > 0 \ \ \forall\, x \in (-\infty, +\infty)$*;*

2° $a^x$ *при* $a > 1$ *строго возрастает, при* $0 < a < 1$ *строго убывает;*

3° $a^x a^y = a^{x+y}$*;*

4° $(bc)^x = b^x c^x$*;*

5° $(a^x)^y = a^{xy}$*;*

6° $a^x$ *непрерывна на* $(-\infty, +\infty)$.

Доказательство. 1°. Это свойство следует из 2° и из (1).

2°. Пусть $a > 1$, $x < y$. Пусть $r, \rho$ — рациональные числа, причём $x < r < \rho < y$.

Пусть $r_n \to x$, $\rho_n \to y$ $(n \to \infty)$, причём $r_n \leqslant r$, $\rho_n \geqslant \rho$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Тогда, используя монотонность показательной функции с рациональным показателем и предельный переход в неравенстве, получаем

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} \leqslant a^r < a^\rho \leqslant \lim_{n\to\infty} a^{\rho_n} = a^y,$$

откуда следует, что $a^x < a^y$.

Случай $0 < a < 1$ рассматривается аналогично.

3°. Пусть $r_n \to x$, $\rho_n \to y$ $(n \to \infty)$. Тогда

$$a^x a^y = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} \lim_{n\to\infty} a^{\rho_n} = \lim_{n\to\infty} (a^{r_n} a^{\rho_n}) = \lim_{n\to\infty} a^{r_n+\rho_n} = a^{x+y}.$$

В качестве следствия получаем отсюда, что $a^x a^{-x} = a^0 = 1$, $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$.

4°. Доказать самостоятельно.

В качестве следствия получаем, что

$$a^x > b^x \quad \text{при} \quad a > b, \quad x > 0,$$

для чего в 4° достаточно взять $c > 1$, $bc = a$.

5°. Пусть $a > 1$, $x > 0$, $y > 0$, $r'_n \uparrow x$, $r''_n \downarrow x$, $\rho'_n \uparrow y$, $\rho''_n \downarrow y$. Тогда

$$a^{xy} \leftarrow a^{r'_n \rho'_n} = (a^{r'_n})^{\rho'_n} \leqslant (a^x)^{\rho'_n} \leqslant (a^x)^y \leqslant (a^x)^{\rho''_n} \leqslant (a^{r''_n})^{\rho''_n} = \\ = a^{r''_n \rho''_n} \to a^{xy},$$

откуда следует, что $(a^x)^y = a^{xy}$.

При других знаках чисел $x$, $y$ доказательства аналогичны.

Случай $0 < a < 1$ сводится к случаю $a > 1$ с помощью соотношения $a^x = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$.

6°. Заметим сначала, что неравенство Бернулли допускает следующее обобщение:

$$|a^x - 1| \leqslant 2|x|(a-1) \quad \text{при} \quad a > 1, \quad |x| \leqslant 1.$$

Его можно получить, записав неравенство (2) для $r_n$ (вместо $r$), где $r_n \to x$ $(n \to \infty)$, и перейдя в этом неравенстве к пределу.

Установим непрерывность функции $a^x$ в произвольной точке $x_0 \in (-\infty, +\infty)$. Пусть сначала $a > 1$. Тогда

$$|a^{x_0+\Delta x} - a^{x_0}| = a^{x_0}|a^{\Delta x} - 1| \leqslant a^{x_0} \cdot 2|\Delta x|(a-1) \to 0$$

при $\Delta x \to 0$, что и требовалось показать.

Случай $0 < a < 1$ сводится к случаю $a > 1$ с помощью соотношения $a^x = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$.

## § 4.7. Логарифмическая и степенная функции

**Определение 1.** Функция, обратная к функции $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), называется *логарифмической функцией* и обозначается $y = \log_a x$. В случае $a = e$ она обозначается $\ln x := \log_e x$.

**Теорема 1.** *Логарифмическая функция*

$$\log_a x: \quad (0, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$$

*строго монотонна и непрерывна на* $(0, +\infty)$, *область её значений есть* $(-\infty, +\infty)$.

Доказательство. Пусть $a > 1$. Тогда $A = \inf\limits_{(-\infty,+\infty)} a^x = 0$, $B = \sup\limits_{(-\infty,+\infty)} a^x = +\infty$.

В самом деле, $a^n = (1 + \alpha)^n > 1 + n\alpha \to +\infty$, $a^{-n} < \dfrac{1}{1 + n\alpha} \to 0$ $(n \to \infty)$.

Остаётся воспользоваться теоремой 4.5.2 об обратной функции.

Случай $0 < a < 1$ рассматривается аналогично.

Из того, что при $a \neq 1$ показательная и логарифмическая функции являются взаимно обратными, вытекают тождества

$$a^{\log_a x} = x, \qquad \log_a a^x = x.$$

Установим некоторые свойства логарифмической функции.

1°. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ при $x, y > 0$.

Сравним $a^{\log_a xy} = xy$ и $a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = xy$. Из их совпадения следует 1° (объяснить, почему).

2°. $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$ при $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Сравним $a^{\log_a x^\alpha} = x^\alpha$ и $a^{\alpha \log_a x} = (a^{\log_a x})^\alpha = x^\alpha$. Из их совпадения следует 2°.

3°. $\log_a b \log_b a = 1$ при $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$.

Сравним $a^{\log_a b \log_b a} = (a^{\log_a b})^{\log_b a} = b^{\log_b a} = a$ и $a^1 = a$. Из их совпадения следует 3°.

**Определение 2.** Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Функция

$$x \to x^\alpha \colon (0, +\infty) \to (0, +\infty)$$

называется *степенной функцией* с показателем степени $\alpha$.

Степенную функцию можно представить в виде

$$x^\alpha = (e^{\ln x})^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

По теореме о непрерывности суперпозиции непрерывных функций степенная функция непрерывна на области определения $(0, +\infty)$.

При $\alpha > 0$ степенную функцию доопределяют в точке 0 значением 0. Тогда степенная функция становится непрерывной на $[0, +\infty)$.

## § 4.8. Тригонометрические и обратные тригонометрические функции

Определение тригонометрических функций известно из школьного курса. Здесь будет установлена их непрерывность.

**Лемма 1.**

$$|\sin x| \leqslant |x| \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть сначала $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Рассмотрим часть тригонометрического круга, лежащую в первом квадранте (рис. 1).

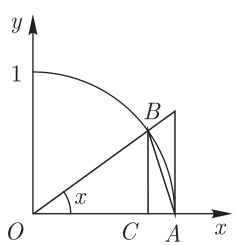


Рис. 1

Пусть радианная мера угла $\angle AOB$ равна $x$. Тогда длина дуги $\overset{\frown}{AB}$ равна $x$, а длина отрезка $[BC]$ равна $\sin x = |BC|$. Из геометрии известно, что

$$\sin x = |BC| < |BA| < x.$$

Этим оценка (1) установлена при $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. В силу чётности обеих частей (1) она верна и при $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$. Остаётся заметить, что (1) очевидно при $x = 0$ и при $|x| \geqslant 1$.

**Теорема 1.** *Функции* $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ *непрерывны на своих областях определения.*

Доказательство. Покажем, что функция $y = \sin x$ непрерывна в произвольной точке $x_0 \in \mathbb{R}$. Имеем

$$\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

В силу (1)

$$|\Delta y| \leqslant 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| \leqslant |\Delta x|,$$

так что $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$, что и доказывает непрерывность функции $\sin x$ в точке $x_0$.

Непрерывность функции $\cos x$ доказывается аналогично или с использованием равенства $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ и теоремы о непрерывности суперпозиции непрерывных функций.

Функции $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ непрерывны в точках, где знаменатели отличны от нуля, как частные непрерывных функций.

Символами

$$\arcsin x\colon [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$
$$\arccos x\colon [-1, 1] \to [0, \pi],$$
$$\operatorname{arctg} x\colon (-\infty, \infty) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$
$$\operatorname{arcctg} x\colon (-\infty, \infty) \to (0, \pi)$$

обозначаются функции, обратные к сужению $\sin x$ на $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, к сужению $\cos x$ на $[0, \pi]$, к сужению $\operatorname{tg} x$ на $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, к сужению $\operatorname{ctg} x$ на $(0, \pi)$ соответственно.

**Теорема 2.** *Функции* $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ *непрерывны на своих областях определения (непрерывность функций* $\arcsin x$, $\arccos x$ *в концах отрезков — их областей определения понимается как односторонняя).*

Доказательство следует из теоремы об обратной функции.

## § 4.9. Некоторые замечательные пределы

1°.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{1}$$

Рассматривая в тригонометрическом круге сектор с углом радианной меры $x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, и два треугольника с тем же углом (см. рис. 4.8.1) и сравнивая их площади, получаем

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x,$$

откуда

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Из чётности функций $\frac{\sin x}{x}$ и $\cos x$ следует, что те же неравенства верны и при $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$. Переходя в них к пределу при $x \to 0$

и учитывая, что $\cos x \to \cos 0 = 1$ в силу непрерывности функции $\cos x$, получаем (1).

2°. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$. Из непрерывности функции $\cos x$ имеем

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

3°. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = 1$.

Заметим, что $\dfrac{\arcsin x}{x} = \dfrac{y}{\sin y}\Big|_{y=\arcsin x}$, где вертикальная черта означает, что в дробь $\dfrac{y}{\sin y}$ вместо $y$ следует подставить $\arcsin x$. Таким образом, функция $\dfrac{\arcsin x}{x}$ представлена в виде суперпозиции двух функций. Используя непрерывность функции $\arcsin x$ в точке $x = 0$, равенство (1) и теорему о пределе суперпозиции двух функций, завершаем доказательство.

Видоизменённый вариант доказательства состоит в доопределении функции $\dfrac{y}{\sin y}$ единицей в точке $y = 0$ и использовании теоремы о непрерывности суперпозиции двух непрерывных функций.

4°. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$. Представив $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$ в виде $\dfrac{y}{\operatorname{tg} y}\Big|_{y=\operatorname{arctg} x}$, повторяем рассуждения из доказательства 3°.

5°. $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$. Покажем сначала, что

$$\lim_{x\to 0+0} (1+x)^{1/x} = e. \qquad (2)$$

Напомним, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} = e$ и что при доказательстве этого было установлено убывание последовательности $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$.

Пусть $0 < x < 1$, $n_x \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n_x+1} < x \leqslant \dfrac{1}{n_x}$. Тогда

$$\left(1+\frac{1}{n_x+1}\right)^{-2}\left(1+\frac{1}{n_x+1}\right)^{n_x+2} = \left(1+\frac{1}{n_x+1}\right)^{n_x} \leqslant$$
$$\leqslant (1+x)^{1/x} \leqslant \left(1+\frac{1}{n_x}\right)^{n_x+1}. \qquad (3)$$

Правая часть неравенства является, как легко проверить, монотонной функцией аргумента $x$. Поэтому

$$\exists \lim_{x\to 0+0} \left(1+\frac{1}{n_x}\right)^{n_x+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

Обоснование первого из этих равенств состоит в том, что если функция $f$ имеет предел $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x)$, то он совпадает с пределом $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$ для произвольной последовательности $\{x_n\}$: $x_n \to 0+0$ при $n \to \infty$. В нашем случае $x_n = \dfrac{1}{n}$.

Итак, показано, что правая часть (3) стремится к $e$ при $x \to \to 0+0$.

Аналогично показывается, что левая часть (3) также стремится к $e$.

Переходя к пределу в неравенствах (3), получаем (2).

Теперь покажем, что

$$\lim_{x \to 0-0} (1+x)^{1/x} = e. \tag{4}$$

Пусть $-1 < x < 0$. Положив $y := -x$, $z := \dfrac{y}{1-y} = \dfrac{-x}{1+x} > 0$, имеем

$$(1+x)^{1/x} = (1-y)^{-1/y} = \left(\frac{1}{1-y}\right)^{1/y} = \left(1 + \frac{y}{1-y}\right)^{1/y} = \\ = (1+z)^{1/z+1}.$$

Таким образом,

$$(1+x)^{1/x} = (1+z)^{1/z+1}\big|_{z=-x/(1+x)}, \quad -1 < x < 0,$$

т. е. функция $(1+x)^{1/x}$ представлена в виде суперпозиции $(f \circ \varphi)(x)$ двух функций, где

$$f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad \varphi\colon (-1, 0) \to (0, +\infty),$$

причём $\lim\limits_{x \to 0-0} \varphi(x) = 0$, $\lim\limits_{z \to 0+0} f(z) = e$.

Применяя теорему о пределе суперпозиции, получаем, что

$$\lim_{x \to 0-0} (1+x)^{1/x} = e. \tag{5}$$

Из (4), (5) следует 5°.

**Замечание 1.** Теорема о пределе суперпозиции $f \circ \varphi$ была установлена для случая, когда функции $f, \varphi$ определены в проколотых окрестностях предельных точек.

**Упражнение 1.** Перенести эту теорему на нужный нам случай односторонних пределов.

**Замечание 2.** Вместо теоремы о пределе суперпозиции можно воспользоваться доказанной теоремой о непрерывности суперпозиции непрерывных функций для $\widetilde{f} \circ \widetilde{\varphi}$, где

$$\widetilde{f}(z) = \begin{cases} e & \text{при } z \leqslant 0, \\ (1+z)^{1/z+1} & \text{при } z > 0; \end{cases}$$

$$\widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{1+x} & \text{при } -1 < x < 0, \\ 0 & \text{при } x \geqslant 0. \end{cases}$$

6°. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

Представив $\dfrac{1}{x}\log_a(1+x) = \log_a(1+x)^{1/x}$ в виде суперпозиции логарифмической функции и функции $\varphi(x) = (1+x)^{1/x}$, применяем теорему о пределе суперпозиции с учётом примера 5°.

7°. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (частный случай 6°).

8°. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

Пусть $y = a^x - 1$.

Тогда $x = \dfrac{\ln(1+y)}{\ln a}$, $\dfrac{a^{x-1}}{x} = \dfrac{y \ln a}{\ln(1+y)}\Big|_{y=a^x-1}$.

Остаётся воспользоваться теоремой о пределе суперпозиции и примером 7°.

9°. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ (частный случай 8°).

Из рассмотренных примеров следует, что при $x \to 0$

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1.$$

10°. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ (доказать самостоятельно, используя 9°).

Глава 5

# ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

## § 5.1. Производная

**Определение 1.** Пусть функция $f$ определена на $U(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Предел $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, если он существует и конечен, называется *производной* (*от*) *функции* $f$ *в точке* $x_0$ и обозначается символом $f'(x_0)$.

Нахождение производной от функции называется *дифференцированием*. При дифференцировании конкретных функций используются обозначения вида $(f(x))'$.

**Упражнение 1.** Доказать, что функция, имеющая производную в данной точке, непрерывна в этой точке.

**Примеры.** $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(x^n)' = nx^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$, $(a^x)' = a^x \ln a$.

**Теорема 1** (арифметические свойства производных). *Пусть существуют* $f'(x_0)$, $g'(x_0)$. *Тогда:*

1° $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$;

2° $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$; *в частности,* $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$, *где* $c$ — *постоянная;*

3° *если* $g(x_0) \neq 0$, *то*

$$\exists \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Доказательство приведём лишь для дифференцирования дроби. Другие формулы устанавливаются аналогично. Положим $\Delta x = x - x_0$, $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, $\Delta g = g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)$. Тогда

$$\frac{\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}}{\Delta x} = \frac{[f(x_0) + \Delta f]g(x_0) - f(x_0)[g(x_0) + \Delta g]}{\Delta x\, g(x_0 + \Delta x)g(x_0)} =$$

$$= \frac{\dfrac{\Delta f}{\Delta x} g(x_0) - f(x_0)\dfrac{\Delta g}{\Delta x}}{g(x_0 + \Delta x)g(x_0)} \to \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

при $x \to x_0$.

## § 5.2. Дифференциал

**Определение 1.** Пусть функция $f$ определена на $U(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Пусть её приращение в точке $x_0$ может быть представлено в виде

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x) \tag{1}$$

при $\Delta x \to 0$, где $A \in \mathbb{R}$.

Тогда функцию $f$ называют *дифференцируемой в точке* $x_0$, а линейную функцию

$$df(x_0) = A\Delta x, \quad -\infty < \Delta x < \infty, \tag{2}$$

— *дифференциалом функции* $f$ *в точке* $x_0$.

**Теорема 1.** *Функция* $f$ *дифференцируема в точке* $x_0$ *тогда и только тогда, когда существует* $f'(x_0)$. *При этом* $A = f'(x_0)$.

Доказательство. 1°. Пусть функция $f$ дифференцируема в точке $x_0$. Тогда справедливо равенство (1).

Поделив его почленно на $\Delta x$, получим

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A + o(1).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$, получим, что $\exists\, f'(x_0) = A$.

2°. Пусть теперь существует

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Тогда $f'(x_0) - \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = o(1)$ при $\Delta x \to 0$.

Умножая последнее равенство почленно на $\Delta x$, получаем

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \text{ при } \Delta x \to 0. \tag{3}$$

Это означает, что приращение функции $f$ представлено в виде (1) с $A = f'(x_0)$, так что функция $f$ дифференцируема в точке $x_0$.

**Теорема 2.** *Пусть функция* $f$ *дифференцируема в точке* $x_0$. *Тогда* $f$ *непрерывна в точке* $x_0$.

Доказательство. По условию теоремы приращение $\Delta f(x_0)$ представимо в виде (1). Из (1) следует, что $\Delta f(x_0) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, а это и означает непрерывность функции $f$ в точке $x_0$.

Пример $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$, показывает, что непрерывность функции в точке не влечёт за собой её дифференцируемости в этой точке.

Последние две теоремы утверждают, что дифференцируемость функции в точке $x_0$ и существование производной $f'(x_0)$ — эквивалентные свойства и что каждое из них сильнее свойства непрерывности функции в точке $x_0$.

Представление (1), как показано, можно записать в виде (3). Выражение (2) дифференциала функции $f$ в точке $x_0$ записывается также в виде

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x, \quad -\infty < \Delta x < \infty.$$

В последней формуле переменное $\Delta x$ часто (ради симметрии записи) обозначают через $dx = \Delta x$. Тогда дифференциал $df(x_0)$ принимает вид

$$df(x_0) = f'(x_0)\,dx, \quad -\infty < dx < +\infty.$$

При этом $dx$ называют *дифференциалом независимого переменного*, а $df(x_0)$ — *дифференциалом функции*. Символом $\frac{df}{dx}$ часто обозначают производную $f'$, но теперь видно, что на него можно смотреть как на частное двух дифференциалов.

**Теорема 3** (арифметические свойства дифференциалов). *Пусть функции $f$, $g$ дифференцируемы в точке $x_0$. Тогда функции $f \pm g$, $fg$, и в случае $g(x_0) \neq 0$ также и $\frac{f}{g}$ дифференцируемы в точке $x_0$, причём в этой точке:*

$1^\circ$ $d(f \pm g) = df \pm dg$;

$2^\circ$ $d(fg) = g\,df + f\,dg$;

$3^\circ$ $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,df - f\,dg}{g^2}$.

Доказательство следует из соответствующих формул для производных. Установим для примера $2^\circ$. Формулу производной произведения $(fg)' = f'g + fg'$ умножим почленно на $dx$. Получим

$$d(fg) = (fg)'dx = g\,f'dx + f\,g'dx = g\,df + f\,dg.$$

## § 5.3. Геометрический смысл производной и дифференциала

Проведём секущую $M_0M_h$ через точки $M_0 = (x_0, f(x_0))$ и $M_h = (x_0 + h, f(x_0 + h))$ графика функции $y = f(x)$, где $h \neq 0$ (см. рис. 1).

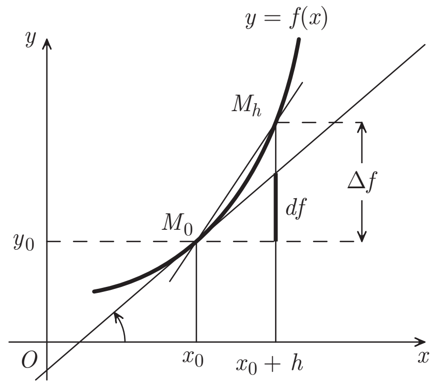



Рис. 1

Уравнение секущей $M_0M_h$ имеет вид

$$y = k(h)(x - x_0) + y_0,$$

где $y_0 = f(x_0)$, $k(h) = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Устремим $h$ к нулю. Тогда точка $M_h$ будет стремиться к $M_0$, секущая — поворачиваться, меняя свой угловой коэффициент $k(h)$, который стремится к конечному пределу тогда и только тогда, когда существует $f'(x_0)$: $k(h) \to k_0 = f'(x_0)$.

Прямую, проходящую через точку $(x_0, f(x_0))$ графика и являющуюся «предельным положением секущей», называют *касательной*. Дадим точное определение.

**Определение 1.** Пусть существует $f'(x_0)$. *Касательной* к графику функции $f$ в точке $(x_0, f(x_0))$ называется прямая

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0), \text{ где } y_0 = f(x_0).$$

**Теорема 1.** *Пусть функция $f$ определена на $U(x_0)$ и существует $f'(x_0)$. Тогда среди всех прямых, проходящих через точку $(x_0, f(x_0))$ ($y_{\text{пр}} = \lambda(x - x_0) + y_0$, $y_0 = f(x_0)$), касательная к графику функции $f$ и только она обладает свойством*

$$f(x) - y_{\text{пр}} = o(x - x_0) \textit{ при } x \to x_0.$$

Доказательство. Поскольку функция $f$ дифференцируема в точке $x_0$, то имеем

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \text{ при } x \to x_0.$$

Отсюда

$$f(x) - y_{\text{пр}} = [f'(x_0) - \lambda](x - x_0) + o(x - x_0).$$

Правая часть равенства есть $o(x-x_0)$ при $x\to x_0$ тогда и только тогда, когда $\lambda=f'(x_0)$, т. е. когда прямая $y_{\text{пр}}=\lambda(x-x_0)+y_0$ является касательной.

Доказанная теорема показывает, что касательная в окрестности точки касания расположена «ближе» к графику функции, чем другие прямые.

Производная $f'(x_0)$, являясь угловым коэффициентом касательной, равна $\operatorname{tg}\alpha$, где $\alpha$ — угол между осью абсцисс и касательной, отсчитываемый от оси абсцисс в направлении кратчайшего поворота от базисного вектора оси абсцисс к базисному вектору оси ординат. Дифференциал функции $df(x_0)=f'(x_0)\Delta x$ при заданном $\Delta x$ равен приращению ординаты касательной.

**Определение 2.** Пусть функция $f$ непрерывна в точке $x_0$ и $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}\to+\infty$ $(-\infty,\ \infty)$ при $\Delta x\to 0$. Тогда говорят, что $f$ имеет *бесконечную производную* в точке $x_0$, $f'(x_0)=+\infty$ $(-\infty,\infty)$, и что график функции $f$ имеет в точке $(x_0,f(x_0))$ *вертикальную касательную* $x=x_0$.

Ранее рассмотренную касательную с конечным угловым коэффициентом $f'(x_0)$ часто называют *наклонной касательной*.

**Определение 3.** *Правой* (*левой*) *односторонней производной функции $f$ в точке $x_0$* называется число

$$f'_+(x_0):=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
$$\left(f'_-(x_0):=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right),$$

если этот предел существует и конечен.

Слово «односторонняя» часто опускают и называют $f'_+(x_0)$ *правой*, а $f'_-(x_0)$ — *левой* производной.

**Теорема 2.** *Производная $f'(x_0)$ существует тогда и только тогда, когда существуют односторонние производные $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.*

Докажите в качестве упражнения.

**Теорема 3.** *Пусть существует односторонняя производная $f'_+(x_0)$. Тогда функция $f$ непрерывна справа в точке $x_0$.*

Докажите в качестве упражнения. Сформулируйте и докажите аналогичную теорему о непрерывности слева.

**Замечание 1.** На основе односторонней производной можно ввести понятие односторонней касательной.

**Упражнение 1.** Рассмотреть с этой точки зрения пример $f(x)=|\sin x|$.

## § 5.4. Производная обратной функции

**Теорема 1.** *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна на $U(x_0)$, и пусть $f'(x_0) \neq 0$. Тогда обратная функция $x = f^{-1}(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, причём* $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Доказательство. По теореме 4.5.2 об обратной функции $f^{-1}$ определена, строго монотонна и непрерывна на некоторой окрестности $U(y_0)$ точки $y_0$.

Из дифференцируемости функции $f$ в точке $x_0$ следует, что приращения $\Delta x = x - x_0$ и $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ связаны соотношением

$$\Delta y = [f'(x_0) + \varepsilon(\Delta x)]\Delta x,$$

где $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

В силу строгой монотонности $f$ каждое из приращений $\Delta x$, $\Delta y$ однозначно определяется другим. Будем считать теперь $\Delta y$ независимым, тогда $\Delta x = \varphi(\Delta y)$. При этом $\varphi(0) = 0$, $\varphi$ строго монотонна и непрерывна на некоторой окрестности $U(0)$ точки 0. Тогда

$$\Delta y = [f'(x_0) + \varepsilon(\varphi(\Delta y))]\Delta x.$$

По теореме о пределе суперпозиции $\varepsilon(\varphi(\Delta y)) \to 0$ при $\Delta y \to 0$. Тогда

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{f'(x_0) + \varepsilon(\varphi(\Delta y))} \to \frac{1}{f'(x_0)} \text{ при } \Delta y \to 0,$$

что и требовалось доказать.

Другое доказательство этой же теоремы можно провести так:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}(\Delta x)\Big|_{\Delta x = \varphi(\Delta y)} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}(\varphi(\Delta y))} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}(\Delta x)}\Bigg|_{\Delta x = \varphi(\Delta y)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}(\Delta x)} = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad (1)$$

Здесь запись $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}(\Delta x)$ означает, что отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ рассматривается как функция аргумента $\Delta x$. Принципиально важным является предпоследнее равенство, которое следует из теоремы о пределе суперпозиции.

## § 5.5. Производная сложной функции

**Теорема 1.** *Пусть* $\exists\, f'(y_0), \varphi'(x_0)$, *где* $y_0 = \varphi(x_0)$. *Тогда* $\exists\, (f(\varphi))'(x_0) = f'(y_0)\varphi'(x_0)$.

Доказательство. Из существования $f'(y_0)$, $\varphi'(x_0)$ следует, что $f$, $\varphi$ непрерывны в точках $y_0$, $x_0$ соответственно. По теореме о непрерывности суперпозиции непрерывных функций суперпозиция

$$z = F(x) = f(\varphi(x))$$

определена на некоторой окрестности $U(x_0)$ точки $x_0$. Из условий теоремы следует, что приращения $\Delta z$ и $\Delta y$ соответственно функций $f$ и $\varphi$ представимы в виде

$$\Delta z = f'(y_0)\Delta y + \varepsilon(\Delta y)\Delta y, \quad \varepsilon(\Delta y) \to 0 \text{ при } \Delta y \to 0,$$
$$\Delta y = \varphi'(x_0)\Delta x + \varepsilon_1(\Delta x)\Delta x, \quad \varepsilon_1(\Delta x) \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Доопределим функцию $\varepsilon$ в точке 0, положив $\varepsilon(0) = 0$, тогда первое из этих равенств окажется верным и при $\Delta y = 0$.

Считая, что в первом из этих равенств приращение $\Delta y$ вызвано приращением $\Delta x$, выразим $\Delta z$ через $\Delta x$, подставляя $\Delta y$ из второго равенства в первое:

$$\Delta z = \Delta F(x_0) = f'(y_0)[\varphi'(x_0)\Delta x + \varepsilon_1(\Delta x)\Delta x] + \varepsilon(\Delta y)\Delta y =$$
$$= f'(y_0)\varphi'(x_0)\Delta x + f'(y_0)\varepsilon_1(\Delta x)\Delta x + \varepsilon(\Delta y)\Delta y.$$

Поделив это равенство почленно на $\Delta x$, получим

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = f'(y_0)\varphi'(x_0) + f'(y_0)\varepsilon_1(\Delta x) + \varepsilon(\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Учитывая, что $\Delta y \to 0$, а $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to \varphi'(x_0)$ при $\Delta x \to 0$, и переходя в последнем равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем утверждение теоремы.

Рассмотрим в точке $t_0 \in (\alpha, \beta)$ дифференциал сложной функции $f(x)$, где функции $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ и $x\colon (\alpha, \beta) \to (a, b)$ имеют соответственно производные $f'(x_0)$ и $x'(t_0)$, где $x_0 = x(t_0)$. В силу теоремы о производной сложной функции

$$df(x)(t_0) = f'(x(t_0))x'(t_0)\,dt = f'(x(t_0))\,dx(t_0).$$

Опустим обозначение аргумента $t_0$:

$$df(x) = f'(x)\,dx, \quad \text{где} \quad x\colon\ (\alpha, \beta) \to (a, b).$$

Здесь $dx$ — дифференциал функции. Мы видим, что дифференциал $df(x)$ имеет ту же форму, как если бы $x$ было независимым переменным. Это свойство называется *инвариантностью формы первого дифференциала*.

**Пример 1.** Найдём производную функции $y = x^\alpha\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Эту функцию можно представить в виде $y = e^{\alpha \ln x} = e^u$, $u = \alpha \ln x$.

Применяя теорему о производной сложной функции, имеем $(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \alpha \dfrac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$.

**Замечание 1.** В теореме 1 функции $f$, $\varphi$ определены на некоторых окрестностях $U(y_0)$, $U(x_0)$ соответственно. Это условие можно заменить более общим, потребовав, чтобы какая-либо из функций $f$, $\varphi$ или обе функции были определены лишь на полуокрестностях точек $y_0$, $x_0$ соответственно, но чтобы при этом сложная функция имела смысл. Тогда равенство $(f(\varphi))'(x_0) = f'(y_0)\varphi'(x_0)$ по-прежнему будет иметь место, если под производными при необходимости понимать односторонние производные.

Покажем это. Пусть, например, функция $f\colon U(y_0 - 0) \to \mathbb{R}$ имеет одностороннюю производную $f'_-(y_0)$. Доопределим $f$ на $\mathring{U}(y_0 + 0)$, положив

$$f(y) = f(y_0) + f'_-(y_0)(y - y_0) \quad \text{при} \quad y > y_0.$$

Тогда функция $f\colon U(y_0) \to \mathbb{R}$ будет иметь обычную производную $f'(y_0) = f'_-(y_0)$.

Аналогично можно продолжить на $U(x_0)$ функцию $\varphi$, если она задана лишь на полуокрестности точки $x_0$. После возможных доопределений функций $f$, $\varphi$ указанным способом остаётся лишь применить к ним теорему 1.

Покажем, как находить производную *параметрически заданной функции*, т. е. функции $y(x)$, заданной в виде

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

Пусть $x_0 = \varphi(t_0)$. Будем считать, что функция $\varphi$ непрерывна и строго монотонна на $U(t_0)$ и что существуют производные $\varphi'(t_0)$, $\psi'(t_0)$. Тогда $t = \varphi^{-1}(x)$, $y = \psi(t) = \psi(\varphi^{-1}(x))$. Применяя формулу дифференцирования сложной функции, получаем

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = \psi'(t_0) \frac{1}{\varphi'(t_0)} = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

Рассмотрим теперь неявно заданную функцию. Пусть задано уравнение $F(x, y) = 0$, имеющее для каждого $x \in U(x_0)$ решение $y = f(x)$, так что

$$F(x, f(x)) = 0 \quad \forall\, x \in U(x_0).$$

При этом говорят, что функция $f$ *неявно задана* уравнением $F(x, y) = 0$.

Предполагая, что $f$ дифференцируема на $U(x_0)$ и что левая часть тождества $F(x, f(x)) \equiv 0$ представляет собой дифференцируемую функцию, продифференцируем это тождество почленно. Иногда оказывается (это зависит от вида $F$), что продифференцированное тождество может быть разрешено относительно $f'$. Найдя $f'$, мы тем самым получим производную неявно заданной функции.

**Пример 2.** Пусть $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Пусть $y = f(x)$ — одно из решений уравнения $x^2 + y^2 - 1 = 0$ при $x \in (-1, 1)$. Тогда $x^2 + (f(x))^2 - 1 \equiv 0$ является тождеством на $(-1, 1)$. Предполагая, что функция $f$ дифференцируема на $(-1, 1)$, продифференцируем это тождество. Получим $2x + 2f(x)f'(x) = 0$, т. е. $f'(x) = -\dfrac{x}{f(x)}$.

## § 5.6. Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть на $U(x_0)$ функция $f$ определена и имеет производную $f'(x)$. Производная $f'(x)$ также является функцией переменного $x$. Если в точке $x_0$ она имеет производную $(f')'(x_0)$, то эту производную называют *второй производной* функции $f$ в точке $x_0$ и обозначают $f''(x_0)$.

Вообще, *производная порядка $n$ функции $f$* определяется равенством

$$f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)}(x))'\Big|_{x=x_0}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Из него видно, в частности, что если существует производная $f^{(n)}(x_0)$, то производная $f^{(n-1)}$ должна быть определена на некоторой окрестности $U(x_0)$ точки $x_0$.

Производную порядка $n$ обозначают также символом $\dfrac{d^n f(x_0)}{dx^n}$.

Удобно считать по определению, что $f^{(0)}(x) := f(x)$.

**Теорема 1** (свойства производных высших порядков). *Пусть существуют $f^{(n)}(x_0)$, $g^{(n)}(x_0)$. Тогда в точке $x_0$:*

1° $(f \pm g)^{(n)} = f^{(n)} \pm g^{(n)}$;

2° (формула Лейбница)

$$(fg)^{(n)} = f^{(n)}g + C_n^1 f^{(n-1)}g^{(1)} + \ldots + fg^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}g^{(k)},$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

**Следствие** из формулы Лейбница.

$$(cf)^{(n)}(x_0) = cf^{(n)}(x_0), \text{ если } \exists\, f^{(n)}(x_0).$$

Доказательство формулы Лейбница проведём по индукции. В случае $n = 1$ эта формула была установлена выше. В предположении, что она верна для производной порядка $n$, установим её для производной порядка $n+1$.

Имеем

$$(fg)^{(n+1)} = ((fg)^{(n)})' = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}g^{(k)}\right)' =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(f^{(n-k+1)}g^{(k)} + f^{(n-k)}g^{(k+1)}\right) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n+1-k)}g^{(k)} + \sum_{j=1}^{n+1} C_n^{j-1} f^{(n+1-j)}g^{(j)} =$$
$$= C_n^0 f^{(n+1)}g + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1}) f^{(n+1-k)}g^{(k)} + C_n^n f^{(0)}g^{(n+1)}.$$

Осталось показать, что $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$. Имеем

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} =$$
$$= \frac{n!(n-k+1+k)}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = C_{n+1}^k.$$

Введём теперь понятие дифференциалов высших порядков.

Если функция $f$ такова, что её производная $f'$ существует на некоторой окрестности $U(x_0)$ точки $x_0$, то дифференциал функции $f$

$$df(x) = f'(x)\,dx, \quad x \in U(x_0),$$

является функцией аргумента $x$ (помимо этого, дифференциал является линейной функцией аргумента $dx$, но в данном случае будем считать $dx$ фиксированным). Если $f'$ дифференцируема в точке $x_0$ (т. е. $\exists\, f''(x_0)$), то можно рассмотреть дифференциал от $df(x)$, т. е. $\delta(df(x))$ (этот дифференциал обозначается новым символом $\delta$, чтобы отличить его от ранее построенного дифференциала $df$). Соответственно дифференциал независимого переменного в выражении дифференциала $\delta$ будем обозначать через $\delta x$.

**Определение 1.** *Вторым дифференциалом* функции $f$ в точке $x_0$ называется

$$d^2 f(x_0) := \delta(df)(x_0)\Big|_{\delta x = dx} = \delta(f'(x)\,dx)(x_0)\Big|_{\delta x = dx} = \\ = (f'(x)\,dx)'(x_0)\delta x\Big|_{\delta x = dx} = f''(x_0)(dx)^2.$$

В этой цепочке равенств содержится не только определение второго дифференциала (первое равенство), но и его выражение через $f''(x_0)$.

**Определение 2.** *$n$-м дифференциалом функции* $f$ в точке $x_0$ называется

$$d^n f(x_0) := \delta(d^{n-1} f)(x_0)\Big|_{\delta x = dx}.$$

Применяя метод математической индукции, легко убеждаемся, что если существует $f^{(n)}(x_0)$, то существует

$$d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)(dx)^n. \tag{1}$$

Последняя формула при $n \geqslant 2$ (в отличие от $n = 1$) верна лишь в случае, когда $x$ — независимое переменное. Покажем это в случае $n = 2$. Найдём выражение второго дифференциала сложной функции $f(x)$, считая, что функция $f$ дважды дифференцируема в точке $x_0$, а её аргумент $x$ является дважды дифференцируемой в точке $t_0$ функцией $x = x(t)$ некоторого независимого переменного $t$, $x_0 = x(t_0)$. Имеем

$$d^2 f(x) = (f(x))''_{tt}(dt)^2 = (f'(x)x')'_t(dt)^2 = \\ = (f''(x)(x')^2 + f'(x)x'')(dt)^2 = f''(x)(dx)^2 + f'(x)\,d^2x.$$

Итак, $d^2 f(x) = f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2x$.

Сравнивая полученное выражение с (1) при $n = 2$, убеждаемся, что второй дифференциал не обладает свойством инвариантности формы.

**Упражнение 1.** Используя формулы для производных $(f \pm g)^{(n)}$, $(fg)^{(n)}$, получить с помощью (1) формулы для дифференциалов $d^n(f \pm g)$, $d^n(fg)$.

В дальнейшем будет использоваться

**Определение 3.** Функция $f$ называется *непрерывно дифференцируемой в точке* (*на интервале*, *на отрезке*), если её производная $f'$ непрерывна в этой точке (на интервале, на отрезке). При этом в концах отрезка производная и непрерывность понимаются как односторонние.

Если заменить в этом определении $f'$ на $f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, получим определение $n$ *раз непрерывно дифференцируемой* функции.

Глава 6

# СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

## § 6.1. Теоремы о среднем

**Теорема 1** (Ферма). *Пусть функция $f$ определена на $U(x_0)$ и в точке $x_0$ принимает наибольшее или наименьшее значение среди её значений на $U(x_0)$. Пусть существует $f'(x_0)$. Тогда $f'(x_0) = 0$.*

Доказательство. Пусть для определённости $f(x_0) = \min\limits_{U(x_0)} f$. Тогда $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \geqslant 0$ при $\Delta x > 0$ и $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \leqslant 0$ при $\Delta x < 0$. Переходя в этих неравенствах к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем соответственно $f'(x_0) \geqslant 0$ и $f'(x_0) \leqslant 0$. Отсюда следует, что $f'(x_0) = 0$.

**Теорема 2** (Ролля). *Пусть функция $f$:*

$1^\circ$ *непрерывна на $[a, b]$,*

$2^\circ$ *дифференцируема на $(a, b)$,*

$3^\circ$ *$f(a) = f(b)$.*

*Тогда $\exists\, \xi \in (a, b)\colon f'(\xi) = 0$.*

Доказательство. Случай $f \equiv \mathrm{const}$ тривиален. Будем считать далее, что $f \not\equiv \mathrm{const}$. По теореме Вейерштрасса в некоторых точках отрезка $[a, b]$ функция $f$ принимает максимальное и минимальное значения. По крайней мере одна из этих точек лежит на интервале $(a, b)$, так как $\min\limits_{[a,b]} f < \max\limits_{[a,b]} f$. Но тогда по теореме Ферма производная $f'$ в этой точке равна нулю, что и требовалось доказать.

**Теорема 3** (Лагранжа о конечных приращениях). *Пусть функция $f$:*

$1^\circ$ *непрерывна на $[a, b]$,*

$2^\circ$ *дифференцируема на $(a, b)$.*

*Тогда $\exists\, \xi \in (a, b)\colon f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.*

Доказательство. Построим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - \lambda x$, в которой число $\lambda$ выберем так, чтобы $F$

удовлетворяла условию 3° теоремы Ролля: $F(a) = F(b)$, т.е. $f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b$. Тогда

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{1}$$

Очевидно, для $F$ выполняются и условия 1°, 2° теоремы Ролля.

По теореме Ролля для функции $F$ получаем, что

$$\exists\, \xi \in (a, b)\colon\ F'(\xi) = 0, \quad \text{т. е.} \quad f'(\xi) - \lambda = 0. \tag{2}$$

Отсюда и из (1) следует утверждение теоремы Лагранжа.

Формулу

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a), \quad \xi \in (a, b), \tag{3}$$

называют *формулой конечных приращений Лагранжа*. Перепишем её в виде

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad \xi \in (a, b),$$

откуда легко понять геометрический смысл утверждения теоремы Лагранжа: найдётся точка $\xi \in (a, b)$ такая, что касательная к графику функции $f$ в точке $(\xi, f(\xi))$ параллельна хорде, соединяющей точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

**Упражнение 1.** Доказать, что если для непрерывной в точке $x_0$ функции $f$ существует $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$, то существует $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$. Каков аналог этого утверждения для односторонних пределов? Может ли существующая на $U(x_0)$ производная $f'$ иметь скачок в точке $x_0$?

**Упражнение 2.** Показать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

имеет производную на $(-\infty, +\infty)$, разрывную в точке $x_0 = 0$.

**Теорема 4** (Коши о среднем). *Пусть функции $f, g$:*

1° *непрерывны на $[a, b]$,*

2° *дифференцируемы на $(a, b)$,*

3° *$g' \neq 0$ на $(a, b)$.*

*Тогда $\exists\, \xi \in (a, b)$, при котором справедлива формула конечных приращений Коши*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Доказательство. Заметим сначала, что $g(b) \neq g(a)$, так как иначе в силу теоремы Ролля $g'$ должна была бы обращаться в нуль в некоторой точке интервала $(a, b)$, что противоречит условию 3°.

Пусть $F(x) = f(x) - \lambda g(x)$, $x \in [a, b]$. Выберем $\lambda$ так, чтобы $F(a) = F(b)$, т. е. $f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b)$. Отсюда

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Тогда функция $F$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Следовательно, $\exists\, \xi \in (a, b)\colon F'(\xi) = 0$. Последнее равенство переписывается в виде

$$f'(\xi) - \lambda g'(\xi) = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lambda,$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши, когда $g(x) = x$.

**Упражнение 3.** Можно ли доказать теорему Коши, написав формулы конечных приращений Лагранжа для функции $f$ и для функции $g$ и поделив почленно первую формулу на вторую?

## § 6.2. Формула Тейлора

В этом параграфе будем считать, что $n \in \mathbb{N}$, хотя некоторые утверждения сохраняются и для $n = 0$.

Пусть существует $f^{(n)}(x_0)$. Тогда на некоторой окрестности $U(x_0)$ можно написать равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_n(f, x) = P_n(f, x) + r_n(f, x), \tag{1}$$

которое называется *формулой Тейлора* функции $f$ в точке $x_0$. При этом $\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ называется *$k$-м членом* формулы Тейлора, $P_n(f, x)$ — *многочленом Тейлора*, $r_n(f, x)$ — *остаточным членом* формулы Тейлора (после $n$-го члена).

Часто вместо $P_n(f, x)$, $r_n(f, x)$ пишут соответственно $P_n(x)$, $r_n(x)$.

**Лемма 1.** *Пусть существуют $f^{(n)}(x_0)$, $f'$ на $\mathring{U}(x_0)$. Тогда при $x \in \mathring{U}(x_0)$*

$$(r_n(f, x))' = r_{n-1}(f', x).$$

Доказательство.

$$(r_n(f,x))' = \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right)' =$$
$$= f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1} = r_{n-1}(f',x).$$

**Теорема 1** (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). *Пусть $n \in \mathbb{N}$, и пусть существует $f^{(n)}(x_0)$. Тогда справедлива формула* (1), *в которой $r_n(f,x) = o((x-x_0)^n)$ при $x \to x_0$.*

Доказательство будем проводить по индукции. При $n = 1$ утверждение теоремы верно. В самом деле, в этом случае функция $f$ дифференцируема в точке $x_0$. Следовательно,

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0), \quad x \to x_0,$$

что совпадает с утверждением теоремы.

Предположим, что утверждение теоремы верно при $n-1$ ($\geqslant 1$) вместо $n$, и покажем, что оно верно в приведённой форме. Используя теорему Лагранжа о конечных приращениях и лемму, имеем (считая для определённости, что $x > x_0$)

$$r_n(f,x) = r_n(f,x) - r_n(f,x_0) = r_{n-1}(f',\xi)(x-x_0),$$

где $x_0 < \xi < x$.

По предположению индукции $r_{n-1}(f',\xi) = o((\xi-x_0)^{n-1}) = o((x-x_0)^{n-1})$ при $x \to x_0$. Следовательно,

$$r_n(f,x) = o((x-x_0)^n) \quad \text{при} \quad x \to x_0,$$

что и требовалось доказать.

**Теорема 2** (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа). *Пусть $x > x_0$ ($x < x_0$), $n \in \mathbb{N}_0$, $f^{(n)}$ непрерывна на отрезке $[x_0,x]$ ($[x,x_0]$), и пусть существует $f^{(n+1)}$ на интервале $(x_0,x)$ ($(x,x_0)$). Тогда справедлива формула* (1), *в которой*

$$r_n(f,x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} =$$
$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

*где $0 < \theta < 1$.*

Доказательство будем проводить по индукции, считая для определённости $x > x_0$. При $n = 0$ теорема утверждает, что при некотором $\theta \in (0, 1)$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0).$$

Это утверждение верно, так как оно совпадает с доказанной ранее формулой конечных приращений Лагранжа.

Предположим, что утверждение верно при $n - 1$ ($n \in \mathbb{N}$) вместо $n$ и установим, что оно верно в приведённом виде. Используя теорему Коши о среднем и лемму 1, имеем

$$\frac{r_n(f, x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{r_n(f, x) - r_n(f, x_0)}{(x - x_0)^{n+1} - (x_0 - x_0)^{n+1}} =$$
$$= \frac{r_{n-1}(f', \xi)}{(n + 1)(\xi - x_0)^n} = \frac{(f')^{(n)}(\eta)}{(n + 1)n!} = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n + 1)!},$$

где $x_0 < \eta < \xi < x$, а предпоследнее равенство выполняется в силу предположения индукции.

**Теорема 3** (единственности). *Пусть на* $\mathring{U}(x_0)$:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),$$
$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \ldots + b_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

*при* $x \to x_0$. *Тогда* $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, ..., $a_n = b_n$.

Доказательство. Вычитая почленно одно представление функции $f$ из другого, видим, что достаточно доказать, что из

$$c_0 + c_1(x - x_0) + \ldots + c_n(x - x_0)^n = o((x - x_0)^n) \text{ при } x \to x_0 \tag{2}$$

следует, что $c_0 = c_1 = \ldots = c_n = 0$.

Переходя в равенстве (2) к пределу при $x \to x_0$, получаем, что $c_0 = 0$. Учитывая это, поделим (2) почленно на $x - x_0$. Получим

$$c_1 + c_2(x - x_0) + \ldots + c_n(x - x_0)^{n-1} = o((x - x_0)^{n-1}) \text{ при } x \to x_0.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $x \to x_0$, получаем, что $c_1 = 0$.

Учитывая это и деля обе части последнего равенства на $x - x_0$, после перехода к пределу получаем, что $c_2 = 0$. Поступая так же и дальше, приходим к равенствам $c_0 = c_1 = \ldots = c_n = 0$, что и требовалось доказать.

**Следствие.** *Пусть существует $f^{(n)}(x_0)$, и пусть*

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \\ + o((x - x_0)^n) \quad \textit{при} \quad x \to x_0. \qquad (3)$$

*Тогда* (3) *является разложением $f$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.*

Доказательство. По теореме о разложении функции по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано имеет место равенство (1). В силу теоремы единственности (3) совпадает с (1).

**Упражнение 1.** Пусть для функции $f$ выполняется (3) при $n = 3$. Выяснить, влечёт ли это за собой существование $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $f'''(x_0)$.

**Пример 1.** При $|x| < 1$ имеем $1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$, т. е. $\dfrac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + r_n(x)$, где $r_n(x) = \dfrac{-x^{n+1}}{1 - x} = o(x^n)$ при $x \to 0$. По следствию из теоремы единственности полученное разложение функции $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$ является формулой Тейлора.

**Замечание 1.** Доказанные в этом параграфе три теоремы и следствие справедливы и в случае, когда функция $f$ задана в полуокрестности $U(x_0 + 0)$ или $U(x_0 - 0)$. При этом производные $f^{(k)}(x_0)$ понимаются как односторонние.

**Примеры** разложений функций по формуле Тейлора.

1° $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$. Имеем: $f^{(k)}(x) = e^x$,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x),$$

где $r_n(x) = \dfrac{e^{\theta x}}{(n + 1)!} x^{n+1} = O(x^{n+1}) = o(x^n)$ при $x \to 0$, $0 < \theta < 1$.

2° $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$. Имеем:

$$\{f^{(k)}(0)\}_{k=0}^{\infty} = \{0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1, \ldots\},$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n + 1)!} + o(x^{2n+2})$$

при $x \to 0$. Здесь выписан остаточный член после равного нулю $(2n + 2)$-го члена формулы Тейлора.

3°. $f(x) = \cos x$, $x_0 = 0$. Аналогично разложению для $\sin x$ получаем

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

при $x \to 0$.

4°. $f(x) = \ln(1+x)$, $x_0 = 0$. Имеем:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1},$$
$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k},$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + r_n(x),$$
$$r_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} = o(x^n) \text{ при } x \to 0,$$

где $0 < \theta < 1$.

5°. $f(x) = (1+x)^\alpha$, $x_0 = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Имеем:

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k},$$
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \text{ при } x \to 0.$$

**Упражнение 2.** Получить формулу *бинома Ньютона*

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}x^k,$$

используя разложение $(1+x)^n$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа (или в форме Пеано и теорему единственности).

**Упражнение 3.** Найти

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}, \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right),$$

используя разложения функций по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

**Замечание 2.** Формулу Тейлора в случае $x_0 = 0$ называют также *формулой Маклорена*.

## § 6.3. Раскрытие неопределённостей (правило Лопиталя)

Пусть в задаче о нахождении предела отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to x_0$ и числитель и знаменатель стремятся к нулю либо к бесконечности. В этих случаях говорят, что мы имеем дело с неопределённостью вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ соответственно. Нахождение этого предела (если он существует) называют *раскрытием неопределённости*. Одним из приёмов раскрытия неопределённости является выделение главных частей числителя и знаменателя (см. упр. 6.2.3). Здесь будет обоснован другой способ, называемый *правилом Лопиталя* и состоящий в том, что вычисление предела отношения функций заменяется вычислением предела отношения их производных.

**Теорема 1.** *Пусть:*

1° *функции $f$, $g$ дифференцируемы на интервале $(a, b)$, $b - a < \infty$;*

2° $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} g(x) = 0$*;*

3° $g' \neq 0$ *на* $(a, b)$*;*

4° *существует* $\lim\limits_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$.

*Тогда существует*

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. Доопределим $f$, $g$ в точке $a$, положив $f(a) = g(a) = 0$. Тогда функции $f$, $g$ непрерывны на $[a, b)$. По теореме Коши о среднем

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad a < \xi < x < b.$$

Пусть $\lim\limits_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \quad \delta < b - a\colon \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in U_\varepsilon(A)$$

при $a < x < a + \delta < b$.

Следовательно, $\lim\limits_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

**Теорема 2.** *Пусть:*

1° *функции $f$, $g$ дифференцируемы на $(c, +\infty)$, $c > 0$;*

2° $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$;

3° $g' \neq 0$ *на* $(c, +\infty)$;

4° *существует* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$.

*Тогда существует*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$. Рассмотрим сложные функции $f\left(\dfrac{1}{t}\right)$, $g\left(\dfrac{1}{t}\right)$ при $t \in \left(0, \dfrac{1}{c}\right)$. Тогда

$$\lim_{t\to0+0} \frac{\dfrac{d}{dt} f\left(\dfrac{1}{t}\right)}{\dfrac{d}{dt} g\left(\dfrac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to0+0} \frac{f'\left(\dfrac{1}{t}\right)\left(-\dfrac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\dfrac{1}{t}\right)\left(-\dfrac{1}{t^2}\right)} = A.$$

По теореме 1 $\exists \lim\limits_{t\to0+0} \dfrac{f\left(\dfrac{1}{t}\right)}{g\left(\dfrac{1}{t}\right)} = A$.

Отсюда следует, что $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$. Заметим, что в приведённом доказательстве два раза было использовано свойство предельного перехода в суперпозиции функций, причём в ситуации, не рассмотренной в § 4.2. Читателю предлагается обосновать соответствующие предельные переходы в качестве упражнения (один из способов такого обоснования опирается на определение 3.3.2).

**Теорема 3.** *Пусть:*

1° *функции $f$, $g$ дифференцируемы на интервале $(a, b)$, $-\infty < a < b < \infty$;*

2° $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to a+0} g(x) = \pm\infty$;

3° $g' \neq 0$ *на* $(a, b)$;

4° *существует* $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$.

*Тогда существует*

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$, $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{1}{3}\right)$. Выберем точку $x_\varepsilon \in (a, b)$ так, что

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \in U_\varepsilon(A) \quad \forall\, x \in (a, x_\varepsilon).$$

При $a < x < x_\varepsilon$ по теореме Коши о среднем

$$\frac{f(x) - f(x_\varepsilon)}{g(x) - g(x_\varepsilon)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{1}$$

Выберем теперь $\delta > 0$ столь малым, что при $a < x < a + \delta < x_\varepsilon < b$

$$f(x) \neq 0, \quad g(x) \neq 0, \quad \left|\frac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}\right| < \varepsilon.$$

Тогда, вынеся множитель $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ из левой части, (1) можно переписать в виде

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1 - \dfrac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}}\, \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad a < x < a + \delta. \tag{2}$$

Первый множитель правой части равенства (2) мало отличается от 1: его значение принадлежит интервалу $(1 - 3\varepsilon, 1 + 3\varepsilon)$. Второй множитель $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ правой части принадлежит $U_\varepsilon(A)$. Следовательно, правая часть (2) и равная ей левая принадлежат $U_\eta(A)$, где $\eta = \eta(\varepsilon) = \eta(A, \varepsilon) > 0$ при $x \in U_\delta(a + 0)$.

При этом $\eta(\varepsilon)$ можно взять сколь угодно малым, если предварительно выбрать $\varepsilon > 0$ достаточно малым. Следовательно, $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

Теорема доказана.

В качестве некоторого пояснения к её доказательству покажем, как выбрать $\eta(A, \varepsilon)$ в зависимости от $\varepsilon$. Остановимся лишь на случае $0 < A < +\infty$. Тогда второй множитель правой части равенства (2) лежит в $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$, а первый (как мы видели) — в $(1 - 3\varepsilon, 1 + 3\varepsilon)$. Следовательно, их произведение лежит в интервале

$$(A - 3A\varepsilon - \varepsilon + 3\varepsilon^2,\ A + 3A\varepsilon + \varepsilon + 3\varepsilon^2) \subset U_\eta(A),$$

где $\eta = \eta(A, \varepsilon) = 3A\varepsilon + \varepsilon + 3\varepsilon^2$.

**Замечание 1.** Теоремы 1–3 остаются в силе в случаях предельных переходов $x \to a+0$, $x \to a-0$, $x \to a$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ с соответствующими изменениями их формулировок.

**Пример 1.** Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\varepsilon x^{\varepsilon-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\varepsilon x^\varepsilon} = 0.$$

Здесь первое равенство написано при условии, что предел его правой части существует, и становится оправданным после доказательства существования этого предела.

**Пример 2.** Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{a^x}$, $n \in \mathbb{N}$, $a > 1$. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{a^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{nx^{n-1}}{a^x \ln a} = \lim_{x\to+\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^x \ln^2 a} = \ldots$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{a^x \ln^n a} = 0.$$

Теоремы 1–3 дают достаточные условия раскрытия неопределённостей. Однако эти условия не являются необходимыми.

**Пример 3.** Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\sin x}{x}$. Этот предел существует, но его нельзя найти с помощью правила Лопиталя.

Правило Лопиталя помогает раскрыть неопределённости вида $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$. Встречаются и другие виды неопределённостей:

$$0 \cdot \infty, \quad +\infty - (+\infty), \quad (+0)^0, \quad (+\infty)^0, \quad 1^\infty.$$

Неопределённость первого и второго из них преобразованием выражений сводят к неопределённости вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$. Выражения, представляющие каждую из трёх последних неопределённостей, полезно прологарифмировать.

**Упражнение 1.** Найти $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x$.

Глава 7

# ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ

## § 7.1. Монотонность и экстремумы функции

**Теорема 1.** *Пусть функция $f$ дифференцируема на $(a, b)$. Тогда:*

1° *условие $f' \geqslant 0$ ($f' \leqslant 0$) на $(a, b)$ необходимо и достаточно для того, чтобы функция $f$ возрастала (убывала) на $(a, b)$;*

2° *условие $f' > 0$ ($f' < 0$) на $(a, b)$ достаточно, чтобы функция $f$ строго возрастала (строго убывала) на $(a, b)$.*

Доказательство. *Достаточность* следует из формулы конечных приращений Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \quad a < x_1 < \xi < x_2 < b.$$

*Необходимость.* Пусть $f$ возрастает на $(a, b)$, $x_0, x \in (a, b)$. Тогда $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$. Следовательно, $f'(x_0) \geqslant 0$.

Заметим, что условие $f' > 0$ на $(a, b)$ не является необходимым для строгого возрастания функции $f$ на $(a, b)$, как это видно на примере $f(x) = x^3$, $x \in (-1, 1)$.

**Определение 1.** Точка $x_0$ называется *точкой максимума* (*минимума*) функции $f$, если на некоторой окрестности $U(x_0)$ функция $f$ определена и

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad (f(x) \geqslant f(x_0)) \quad \forall\, x \in \mathring{U}(x_0).$$

Если при этом знак $\leqslant$ ($\geqslant$) можно заменить на $<$ ($>$), то точка $x_0$ называется *точкой строгого максимума* (*строгого минимума*) функции $f$.

Точки максимума (строгого максимума) и точки минимума (строгого минимума) называются *точками экстремума* (*строгого экстремума*).

Поскольку определение точки максимума связано с поведением функции в сколь угодно малой окрестности этой точки, часто вместо термина «максимум» употребляют термин «локальный максимум». Аналогично объясняются термины «локальный минимум», «строгий локальный максимум (минимум)», «локальный экстремум», «строгий локальный экстремум».

**Теорема 2** (Ферма) (необходимые условия экстремума). *Пусть $x_0$ — точка экстремума функции $f$. Тогда либо производная $f'(x_0)$ не существует, либо $f'(x_0)=0$.*

Эта теорема по существу совпадает с теоремой 6.1.1.

Условие $f'(x_0)=0$ не является достаточным для точки экстремума, как видно на примере функции $f(x)=x^3$, $x_0=0$.

**Теорема 3** (достаточные условия строгого экстремума). *Пусть функция $f$ непрерывна в точке $x_0$ и дифференцируема на $\mathring{U}(x_0)$. Пусть $f'$ меняет знак при переходе через точку $x_0$. Тогда $x_0$ — точка строгого экстремума функции $f$.*

Доказательство. Пусть, для определённости, $f'>0$ на $\mathring{U}(x_0-0)$, $f'<0$ на $\mathring{U}(x_0+0)$. Тогда из формулы конечных приращений Лагранжа $f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)$ видно, что приращение функции $f$ меняет знак с «$-$» на «$+$» при переходе через точку $x_0$. Следовательно, $x_0$ является точкой строгого максимума функции $f$.

Условия теоремы не являются необходимыми условиями экстремума, как это видно на примере функции

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2+x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0.\end{cases}$$

**Определение 2.** Точка $x_0$ называется *точкой возрастания* (*убывания*) функции $f$, если на некоторых полуокрестностях $U(x_0-0)$ и $U(x_0+0)$ точки $x_0$

$$f(x)-f(x_0)<0\ (>0)\ \forall\, x\in\mathring{U}(x_0-0),$$
$$f(x)-f(x_0)>0\ (<0)\ \forall\, x\in\mathring{U}(x_0+0).$$

**Пример 1.**

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0.\end{cases}$$

Точка $x_0=0$ не является ни точкой экстремума, ни точкой возрастания, ни точкой убывания функции $f$.

**Упражнение 1.** Показать, что если $f'(x_0)>0$, то $x_0$ является точкой возрастания функции $f$.

**Теорема 4** (достаточные условия точек строгого экстремума, точек возрастания и точек убывания в терминах производных высших порядков). *Пусть $f'(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. Тогда точка $x_0$ является:*

$1^\circ$ *при чётном* $n = 2k$ *точкой строгого экстремума (строгого минимума при* $f^{(2k)}(x_0) > 0$*, строгого максимума при* $f^{(2k)}(x_0) < 0$*) функции* $f$*;*

$2^\circ$ *при нечётном* $n = 2k+1$ *точкой возрастания (точкой убывания) функции* $f$ *при* $f^{(2k+1)}(x_0) > 0$ *(*$f^{(2k+1)}(x_0) < 0$*).*

Доказательство. По формуле Тейлора при $x \in \mathring{U}(x_0)$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \varepsilon(x-x_0)(x-x_0)^n = \\ = \left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \varepsilon(x-x_0)\right](x-x_0)^n,$$

где $\varepsilon(x-x_0) \to 0$ при $x \to x_0$.

Будем считать окрестность $\mathring{U}(x_0)$ столь малой, что $|\varepsilon(x - x_0)| \leqslant \frac{1}{2}\left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\right|$. Тогда знак выражения в квадратных скобках совпадает со знаком $f^{(n)}(x_0)$, так что $\operatorname{sgn}(f(x) - f(x_0)) = \operatorname{sgn} f^{(n)}(x_0) \operatorname{sgn}(x-x_0)^n$. Сохранение или изменение знака $(x-x_0)^n$ при переходе через $x_0$ зависит от чётности $n$. Отсюда можно сделать вывод о знаке разности $f(x) - f(x_0)$ при $x \in \mathring{U}(x_0)$, что и приводит к утверждению теоремы.

**Следствие 1.** *Если* $f'(x_0) > 0$*, то* $x_0$ *— точка возрастания, а если* $f'(x_0) < 0$*, то* $x_0$ *— точка убывания функции* $f$*.*

**Следствие 2.** *Пусть* $f'(x_0) = 0$*. Тогда: если* $f''(x_0) > 0$*, то* $x_0$ *— точка строгого минимума, если* $f''(x_0) < 0$*, то* $x_0$ *— точка строгого максимума функции* $f$*.*

**Замечание 1.** В задаче об отыскании наибольшего (или наименьшего) значения функции $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ с помощью доказанных теорем можно найти точки экстремума, лежащие лишь на интервале $(a,b)$. После этого следует сравнить значения функции $f$ в них со значениями $f(a)$, $f(b)$.

## § 7.2. Выпуклость и точки перегиба

Пусть функция $f$ определена на $(a,b)$. Для каждого отрезка $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$ построим хорду графика функции $f$, соединяющую точки $(\alpha, f(\alpha))$ и $(\beta, f(\beta))$. Её уравнение имеет вид

$$y = l_{\alpha,\beta}(x), \ x \in [\alpha,\beta],$$

где $l_{\alpha,\beta}(x) = \dfrac{\beta - x}{\beta-\alpha}f(\alpha) + \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha}f(\beta)$.

**Определение 1.** Функция $f$ называется *выпуклой вверх* (*выпуклой вниз*) *на* $(a, b)$, если для любых $\alpha, \beta$: $a < \alpha < \beta < b$ $f(x) \geqslant l_{\alpha,\beta}(x)$ (соответственно $f(x) \leqslant l_{\alpha,\beta}(x)$) при $x \in (\alpha, \beta)$.

Если же вместо $\geqslant$ ($\leqslant$) в последнем определении можно написать $>$ ($<$), то функция $f$ называется *строго выпуклой вверх* (*строго выпуклой вниз*) на интервале $(a, b)$.

При этом интервал $(a, b)$ называется соответственно *интервалом выпуклости вверх*, *выпуклости вниз*, *строгой выпуклости вверх*, *строгой выпуклости вниз* функции $f$.

Условие выпуклости вверх функции можно записать в виде

$$f(x) - l_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\beta - x}{\beta - \alpha}[f(x) - f(\alpha)] + \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}[f(x) - f(\beta)] \geqslant 0 \tag{1}$$

или в виде

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \geqslant \frac{f(\beta) - f(x)}{\beta - x}.$$

Последнее неравенство является соотношением между угловыми коэффициентами двух различных хорд с концами в точке $(x, f(x))$.

**Упражнение 1.** Сравнивая угловые коэффициенты различных хорд с концами в точке $(x_0, f(x_0))$, показать, что на интервале выпуклости вверх функция $f$ непрерывна и в каждой точке имеет обе односторонние производные. Показать, что при этом каждая из односторонних производных монотонна и что

$$f'_-(x_0) \geqslant f'_+(x_0) \geqslant f'_-(x_0 + 0).$$

Вывести отсюда, что функция имеет производную в каждой точке интервала выпуклости вверх за исключением, быть может, не более чем счётного множества точек.

Пример функции $f(x) = 1 - |x|$, $x \in (-1, 1)$, показывает, что производная не обязательно существует во всех точках интервала выпуклости вверх.

**Замечание 1.** Нередко функцию, выпуклую вниз, называют выпуклой, а выпуклую вверх — вогнутой.

**Теорема 1** (условия выпуклости функций). *Пусть функция $f$ имеет вторую производную $f''$ на $(a, b)$. Тогда:*

$1^\circ$ *условие $f'' \leqslant 0$ ($\geqslant 0$) на $(a, b)$ необходимо и достаточно для выпуклости вверх (вниз) функции $f$ на $(a, b)$;*

$2^\circ$ *если $f'' < 0$ ($> 0$) на $(a, b)$, то функция $f$ строго выпукла вверх (вниз) на $(a, b)$.*

Доказательство (для случая выпуклости вверх). *Достаточность.* При $a < \alpha < x < \beta < b$ имеем, используя (1) и формулу конечных приращений Лагранжа,

$$f(x) - l_{\alpha,\beta}(x) = \frac{(\beta - x)f'(\xi)(x-\alpha) + (x-\alpha)f'(\eta)(x-\beta)}{\beta - \alpha} =$$

$$= \frac{(x-\alpha)(\beta - x)f''(\zeta)(\xi - \eta)}{\beta - \alpha} \geqslant 0 \quad (> 0 \text{ при } f''(\zeta) > 0),$$

где $a < \alpha < \xi < \zeta < \eta < \beta < b$.

Отсюда следует достаточность в утверждении 1° и утверждение 2°.

**Упражнение 2.** Доказать необходимость условия 1°. Можно использовать при этом анализ расположения кривой относительно касательной, который будет приведен ниже.

**Определение 2.** Точка $x_0$ называется *точкой перегиба функции* $f$, а точка $(x_0, f(x_0))$ — *точкой перегиба графика* функции $f$, если:

1° существует производная $f'(x_0)$ (конечная или бесконечная);

2° точка $x_0$ является концом интервала строгой выпуклости вверх и концом интервала строгой выпуклости вниз.

Напомним, что при выполнении условия 1° функция $f$ непрерывна в точке $x_0$.

**Теорема 2** (необходимые условия точки перегиба). *Пусть $x_0$ — точка перегиба функции $f$, причём $f''$ непрерывна в точке $x_0$. Тогда $f''(x_0) = 0$.*

Доказательство проведём от противного. Допустим, что $f''(x_0) \neq 0$ и для определённости $f''(x_0) > 0$. Тогда $f'' > 0$ на некоторой окрестности $U(x_0)$. По предыдущей теореме точка $x_0$ находится внутри интервала $U(x_0)$ строгой выпуклости вниз и поэтому не может быть точкой перегиба.

**Теорема 3** (достаточные условия точки перегиба). *Пусть существует $f'(x_0)$, а $f''$ меняет знак при переходе через точку $x_0$.*

*Тогда $x_0$ — точка перегиба функции $f$.*

Доказательство сводится к проверке определения точки перегиба с помощью теоремы о достаточных условиях строгой выпуклости функции.

**Следствие.** Пусть $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$.

Тогда $x_0$ — точка перегиба функции $f$.

**Теорема 4** (о расположении графика функции относительно касательной).

*1°. Если $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$), то $\exists\, U(x_0)$: график функции $y = f(x)$ лежит строго выше (строго ниже) касательной $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ при $x \in \mathring{U}(x_0)$.*

*2°. Если $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$, то $\exists\, U(x_0)$: график функции $y = f(x)$ переходит через касательную, т. е. при $x < x_0$ и при $x > x_0$ ($x \in \mathring{U}(x_0)$) лежит строго по разные стороны от касательной.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 7.1.4. Утверждение 1° следует из формулы Тейлора

$$f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) = \left[\frac{f''(x_0)}{2!} + \varepsilon(x - x_0)\right](x - x_0)^2,$$

а утверждение 2° — из формулы Тейлора

$$f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) = \left[\frac{f'''(x_0)}{3!} + \varepsilon(x - x_0)\right](x - x_0)^3,$$

написанных для $x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$, где $\delta > 0$ достаточно мало.

## § 7.3. Асимптоты

**Определение 1.** Пусть функция $f$ определена на $(a, +\infty)$. Прямая $y = kx + b$ называется *асимптотой* (или *наклонной асимптотой*) графика функции $f$ при $x \to +\infty$, если

$$f(x) = kx + b + o(1) \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

Аналогично определяется (наклонная) асимптота при $x \to -\infty$.

**Теорема 1.** *Для того чтобы график функции $f$ имел при $x \to +\infty$ наклонную асимптоту $y = kx + b$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \qquad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = b.$$

Доказательство предлагается провести в качестве упражнения.

Аналогично формулируется теорема о существовании (наклонной) асимптоты при $x \to -\infty$.

**Определение 2.** Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $f$, если хотя бы один из пределов $f(x_0 + 0)$, $f(x_0 - 0)$ существует и равен $+\infty$ или $-\infty$.

**Упражнение 1.** Выяснить наличие наклонных и вертикальных асимптот у графиков функций $f(x) = x - 2\operatorname{arctg} x$, $f(x) = \ln(1 + x)$.

## § 7.4. Построение графика функции

Построение графика функции рекомендуется проводить по следующей схеме.

1°. Найти область определения функции, точки разрыва.

2°. Найти асимптоты.

3°. Построить приблизительный график функции.

4°. Найти первую и вторую производные.

5°. Найти точки, в которых эти производные не существуют или равны нулю.

6°. Составить таблицу изменения знаков первой и второй производных.

7°. Найти области возрастания и убывания функции и точки экстремума.

8°. Найти интервалы выпуклости вверх (вниз) функции, точки перегиба.

9°. Найти точки пересечения графика функции с осью $Ox$, вычислить значения функции в точках экстремума и в точках перегиба.

10°. Построить уточнённый график функции.

**Пример 1.** Построить график функции $f\colon f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ $\left(f'(x) = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2},\ f''(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3}\right)$.

Составляем таблицу в соответствии с приведенной схемой:

| $x$ | $(-\infty, 0)$ | $0$ | $(0, 1)$ | $1$ | $(1, 2)$ | $2$ | $(2, +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $+$ | $0$ | $-$ | не сущ. | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f''$ | $-$ | $-$ | $-$ | не сущ. | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f$ | строго возр. | строгий макс. | строго убыв. | не сущ. | строго убыв. | строгий мин. | строго возр. |
| | выпуклость вверх | | | точка разр. | выпуклость вниз | | |

Построенный график функции $f$ изображен на рис. 1.

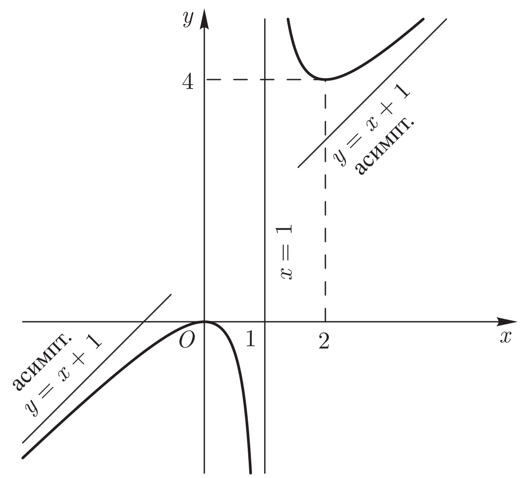



Рис. 1

Глава 8

# КРИВЫЕ В ТРЁХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

## § 8.1. Векторнозначные функции

**Определение 1.** Пусть каждой точке $t \in T \subset \mathbb{R}$ поставлен в соответствие вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ трёхмерного пространства. Тогда будем говорить, что *на $T$ задана вектор-функция* (или *векторная функция*, или *векторнозначная функция*) $\mathbf{r}$.

Пусть в трёхмерном пространстве зафиксирована декартова прямоугольная система координат. Тогда $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — координаты (компоненты) вектора $\mathbf{r}(t)$. Таким образом, задание на $T$ вектор-функции равносильно заданию на $T$ трёх числовых функций.

Символом $|\mathbf{r}|$ обозначают длину вектора $\mathbf{r}$.

**Определение 2.** Вектор $\mathbf{r}_0$ называется *пределом вектор-функции* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ при $t \to t_0$ (пишут $\mathbf{r}_0 = \lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{r}(t)$), если $\lim\limits_{t \to t_0} |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0| = 0$.

Как видим, в этом определении предполагается, что вектор-функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ определена на некоторой окрестности $\mathring{U}(t_0)$.

Определение предела вектор-функции сведено к известному определению предела числовой функции $f(t) = |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0|$. Написав последнее в ($\varepsilon$-$\delta$)-терминах, приходим к иной форме определения предела вектор-функции.

**Определение 3.** Пусть вектор-функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ определена на $\mathring{U}(t_0)$. Вектор $\mathbf{r}_0$ называется *пределом* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ при $t \to t_0$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0| < \varepsilon \quad \forall\, t\colon 0 < |t - t_0| < \delta.$$

Если $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ и $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, то

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0| = \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 + (z(t) - z_0)^2}\,.$$

Из этого равенства видно, что существование предела $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0$ равносильно существованию следующих трёх пределов числовых функций:

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = x_0, \quad \lim_{t \to t_0} y(t) = y_0, \quad \lim_{t \to t_0} z(t) = z_0.$$

**Теорема 1.** *Пусть существуют пределы*

$$\lim_{t\to t_0} \mathbf{r}_1(t), \quad \lim_{t\to t_0} \mathbf{r}_2(t), \quad \lim_{t\to t_0} f(t),$$

*где $f$ — числовая функция. Тогда существуют следующие пределы:*

1° $\lim\limits_{t\to t_0}(\mathbf{r}_1(t) \pm \mathbf{r}_2(t)) = \lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{r}_1(t) \pm \lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{r}_2(t)$;

2° $\lim\limits_{t\to t_0}(f(t)\mathbf{r}_1(t)) = \lim\limits_{t\to t_0} f(t) \lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{r}_1(t)$;

3° $\lim\limits_{t\to t_0}(\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t)) = \left(\lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{r}_1(t), \lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{r}_2(t)\right)$;

4° $\lim\limits_{t\to t_0}[\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t)] = \left[\lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{r}_1(t), \lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{r}_2(t)\right]$ [1]).

Доказательство. Эти свойства можно вывести из свойств числовых функций, перейдя к соответствующим равенствам для координат векторов.

Эти свойства можно доказать и непосредственно, опираясь на определение предела вектор-функции. Установим для примера свойство 4°. Пусть $\lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_{10}$, $\lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}_{20}$. Тогда $\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_{10} + \boldsymbol{\alpha}(t)$, $\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}_{20} + \boldsymbol{\beta}(t)$, где $\boldsymbol{\alpha}(t), \boldsymbol{\beta}(t) \to \mathbf{0} = (0,0,0)$ при $t \to t_0$.

Имеем $\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_{10} \times \mathbf{r}_{20} = (\mathbf{r}_{10} + \boldsymbol{\alpha}(t)) \times (\mathbf{r}_{20} + \boldsymbol{\beta}(t)) - \mathbf{r}_{10} \times \mathbf{r}_{20} = \mathbf{r}_{10} \times \boldsymbol{\beta}(t) + \boldsymbol{\alpha}(t) \times \mathbf{r}_{20} + \boldsymbol{\alpha}(t) \times \boldsymbol{\beta}(t) \to \mathbf{0}$ при $t \to t_0$, так как

$$|\mathbf{r}_{10} \times \boldsymbol{\beta}(t)| \leqslant |\mathbf{r}_{10}|\,|\boldsymbol{\beta}(t)| \to 0, \quad |\boldsymbol{\alpha}(t) \times \mathbf{r}_{20}| \leqslant |\boldsymbol{\alpha}(t)|\,|\mathbf{r}_{20}| \to 0,$$
$$|\boldsymbol{\alpha}(t) \times \boldsymbol{\beta}(t)| \leqslant |\boldsymbol{\alpha}(t)|\,|\boldsymbol{\beta}(t)| \to 0.$$

**Определение 4.** Пусть вектор-функция $\mathbf{r}$ определена на $\mathring{U}(t_0+0)$. Вектор $\mathbf{r}_0$ называют её *пределом справа* в точке $t_0$, и пишут

$$\mathbf{r}_0 = \lim_{t\to t_0+0} \mathbf{r}(t) =: \mathbf{r}(t_0+0),$$

если $\lim\limits_{t\to t_0+0} |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0| = 0$.

Аналогично определяется *предел слева* $\lim\limits_{t\to t_0-0} \mathbf{r}(t) =: \mathbf{r}(t_0-0)$.

Свойства 1°–4° верны и для односторонних пределов.

[1]) Наряду с обозначением $[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]$ для векторного произведения будет использоваться также $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$.

**Определение 5.** Пусть вектор-функция $\mathbf{r}$ определена на $U(t_0)$. Она называется *непрерывной в точке* $t_0$, если $\lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0)$.

Из свойств пределов вектор-функций следует, что непрерывность вектор-функции равносильна непрерывности трёх числовых функций — её координат.

**Теорема 2.** *Пусть вектор-функции* $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ *и числовая функция* $f$ *непрерывны в точке* $t_0$. *Тогда* $\mathbf{r}_1 \pm \mathbf{r}_2$, $f\mathbf{r}_1$, $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, $[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]$ *непрерывны в точке* $t_0$.

Доказательство следует из свойств пределов вектор-функций.

Аналогично определению непрерывности даётся определение односторонней непрерывности. На этот случай переносятся и свойства, указанные в последней теореме.

Производная вектор-функции $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, определённой на $U(t_0)$, определяется как предел

$$\mathbf{r}'(t_0) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}_0(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)}{\Delta t},$$

если этот предел существует.

Если $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, то, как легко видеть,

$$\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

Односторонние производные вектор-функции определяются как соответствующие односторонние пределы отношения приращения вектор-функции к приращению аргумента.

**Определение 6.** Вектор-функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, определённая на $U(t_0)$, называется *дифференцируемой в точке* $t_0$, если существует такой вектор $\mathbf{A}$, что при $t = t_0 + \Delta t \in \mathring{U}(t_0)$

$$\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{A}\Delta t + \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t)\Delta t,$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t) \to \mathbf{0}$ при $\Delta t \to 0$.

Как и в случае числовых функций, показывается, что существование производной $\mathbf{r}'(t_0)$ и дифференцируемость $\mathbf{r}$ в точке $t_0$ — эквивалентные свойства и что $\mathbf{A} = \mathbf{r}'(t_0)$.

Дифференцируемость $\mathbf{r}$ в точке $t_0$ (существование $\mathbf{r}'(t_0)$) влечёт, очевидно, непрерывность $\mathbf{r}$ в точке $t_0$.

*Дифференциалом вектор-функции* $\mathbf{r}$ в точке $t_0$ называется линейная функция

$$d\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}'(t_0)\, dt, \quad -\infty < dt < +\infty.$$

**Теорема 3.** *Пусть в точке* $t_0$ *существуют производные вектор-функций* $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ *и числовой функции* $f$. *Тогда в точке* $t_0$ *существуют производные:*

1° $(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)' = \mathbf{r}_1' + \mathbf{r}_2'$;

2° $(f\mathbf{r}_1)' = f'\mathbf{r}_1 + f\mathbf{r}_1'$;

3° $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)' = (\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2) + (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2')$;

4° $[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]' = [\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2] + [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2']$.

Доказательство приведём лишь для свойства 4°. Имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1(t_0 + \Delta t) \times \mathbf{r}_2(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}_1(t_0) \times \mathbf{r}_2(t_0) = \\ = (\mathbf{r}_1(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}_1(t_0)) \times \mathbf{r}_2(t_0 + \Delta t) + \\ + \mathbf{r}_1(t_0) \times (\mathbf{r}_2(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}_2(t_0)).\end{aligned}$$

Поделив обе части этого равенства на $\Delta t$ и перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим 4°.

Выведем правило дифференцирования сложной вектор-функции $\mathbf{r}(t(\tau))$, $\tau \in U(\tau_0)$.

Из равенства $\mathbf{r}(t(\tau)) = \big(x(t(\tau)), y(t(\tau)), z(t(\tau))\big)$ дифференцированием получаем

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t(\tau)) = \big(x'(t(\tau))t'(\tau), y'(t(\tau))t'(\tau), z'(t(\tau))t'(\tau)\big) = \\ = \mathbf{r}'(t(\tau))t'(\tau).\end{aligned}$$

Из этой формулы получаем выражение для дифференциала сложной вектор-функции

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'t'\,d\tau = \mathbf{r}'\,dt.$$

Как видим, дифференциал $d\mathbf{r}$ записывается в том же виде $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'\,dt$, как и в случае, когда $t$ — независимое переменное. В этом состоит свойство *инвариантности формы дифференциала первого порядка.*

Производные высших порядков и дифференциалы высших порядков вектор-функций определяются аналогично тому, как это было сделано для числовых функций. Именно, $\mathbf{r}''(t) = (\mathbf{r}'(t))'$ и вообще $\mathbf{r}^{(n)}(t) = (\mathbf{r}^{(n-1)}(t))'$,

$$d^2\mathbf{r}(t) = \delta(d\mathbf{r}(t))\big|_{\delta t = dt} = \delta(\mathbf{r}'(t)\,dt)\big|_{\delta t = dt} = \mathbf{r}''(t)dt^2,$$

и вообще

$$d^n\mathbf{r}(t) = \delta(d^{n-1}\mathbf{r}(t))\big|_{\delta t = dt} = \delta(\mathbf{r}^{(n-1)}(t)dt^{n-1})\big|_{\delta t = dt} = \mathbf{r}^{(n)}(t)dt^n.$$

**Теорема 4** (формула Тейлора). *Пусть существует* $\mathbf{r}^{(n)}(t_0)$. *Тогда существует окрестность* $U(t_0)$ *такая, что при* $t \in \mathring{U}(t_0)$

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathbf{r}^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k + \boldsymbol{\varepsilon}(t-t_0)(t-t_0)^n,$$

*где* $\boldsymbol{\varepsilon}(t-t_0) \to \mathbf{0}$ *при* $t \to t_0$.

Доказательство. Каждую координату вектор-функции $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ заменим её разложением по формуле Тейлора. Полученное представление $\mathbf{r}(t)$ запишем в виде суммы векторов, стоящих в правой части доказываемой формулы Тейлора.

**Замечание 1.** Модуль остаточного члена доказанной формулы Тейлора есть, конечно, $o((t-t_0)^n)$ при $t \to t_0$.

**Определение 7.** Вектор-функцию $\mathbf{r}$ называют *непрерывной* (*дифференцируемой*) *на интервале* или *на отрезке*, если она непрерывна (дифференцируема) в каждой точке интервала или соответственно отрезка. При этом непрерывность (дифференцируемость) в концах отрезка понимается как односторонняя.

Вектор-функцию $\mathbf{r}$ называют *непрерывно дифференцируемой в точке* (*на интервале*, *на отрезке*), если $\mathbf{r}'$ непрерывна в точке (на интервале, на отрезке).

Мы видим, что многие свойства числовых функций переносятся на вектор-функции. Однако не так обстоит дело с формулой конечных приращений Лагранжа. В самом деле, пусть $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Тогда $\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$, $|\mathbf{r}'(t)| = 1$ и

$$\mathbf{0} = \mathbf{r}(2\pi) - \mathbf{r}(0) \neq \mathbf{r}'(\xi)(2\pi - 0)$$

ни при каком значении $\xi$.

Справедлив, однако, векторный аналог оценки, вытекающей из теоремы Лагранжа.

**Теорема 5.** *Пусть вектор-функция* $\mathbf{r}$ *непрерывна на* $[a, b]$ *и дифференцируема на* $(a, b)$. *Тогда* $\exists\, \xi \in (a, b)$:

$$|\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)| \leqslant |\mathbf{r}'(\xi)|(b-a). \tag{1}$$

Доказательство. Считая, что $\mathbf{r}(b) \neq \mathbf{r}(a)$, положим $\mathbf{e} = \dfrac{\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)}{|\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)|}$. Тогда $|\mathbf{e}| = 1$ и

$$|\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)| = (\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(b), \mathbf{e}) = (\mathbf{r}(b), \mathbf{e}) - (\mathbf{r}(a), \mathbf{e}).$$

Рассмотрим функцию $f(t) = (\mathbf{r}(t), \mathbf{e})$. Для неё выполняются условия теоремы Лагранжа. Поэтому

$$\exists\, \xi \in (a,b)\colon |\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)| = f(b) - f(a) = \\ = f'(\xi)(b-a) = (\mathbf{r}'(\xi), \mathbf{e})(b-a).$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

## § 8.2. Кривая

Будем считать, что в трёхмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ фиксирована декартова прямоугольная система координат.

**Определение 1.** Множество точек $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ с конкретным его описанием:

$$\Gamma = \{(x(t), y(t), z(t))\colon a \leqslant t \leqslant b\},$$

где $x$, $y$, $z$ — непрерывные функции на $[a,b]$, называется (*непрерывной*) *кривой*.

Говорят ещё, что кривой называется «непрерывное отображение отрезка в пространство $\mathbb{R}^3$». На разъяснении этого понятия здесь останавливаться не будем.

Подчеркнём, что кривая определяется не только положением множества точек в пространстве $\mathbb{R}^3$, но и способом его задания.

Ту же кривую $\Gamma$ можно задать в виде

$$\Gamma = \{\mathbf{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant b\} \quad \text{или} \quad \Gamma = \{\widehat{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant b\},$$

где $\mathbf{r}(t) := (x(t), y(t), z(t))$ — радиус-вектор точки $\widehat{r}(t) := (x(t), y(t), z(t))$. *Точкой кривой* $\Gamma$ называют пару $\{t, \widehat{r}(t)\}$.

Точка $M \in \mathbb{R}^3$ называется *кратной точкой* (*точкой самопересечения*) кривой $\Gamma$, если $\exists\, t_1, t_2 \in [a,b]$, $t_1 \neq t_2$: $\widehat{r}(t_1) = \widehat{r}(t_2) = M$.

Кривая без кратных точек называется *простой кривой* (или *простой дугой*).

Кривая $\Gamma$ называется *замкнутой кривой*, или *контуром*, если $\widehat{r}(a) = \widehat{r}(b)$. Контур называется *простым контуром*, если из $a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant b$, $\widehat{r}(t_1) = \widehat{r}(t_2)$ следует $t_1 = a$, $t_2 = b$.

Возрастание параметра $t$ определяет некоторое направление движения точки $\widehat{r}(t)$ по кривой (некоторый порядок прохождения точек кривой).

Поэтому говорят, что *на кривой* $\Gamma$ *задана ориентация*, рассматриваемую кривую называют *ориентированной кривой*, точку $\widehat{r}(a)$ — *началом кривой*, а точку $\widehat{r}(b)$ — *концом кривой*.

Введём понятие касательной к кривой $\Gamma$. Пусть $t_0$, $t_0 + \Delta t \in [a,b]$. Проведём секущую через точки $\widehat{r}(t_0)$, $\widehat{r}(t_0 + \Delta t)$, и пусть $\mathbf{l}(\Delta t)$ — единичный вектор секущей, так что $\mathbf{l}(\Delta t) = \pm\dfrac{\Delta\mathbf{r}}{|\Delta\mathbf{r}|}$, где

$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)$ (предполагаем, что $|\Delta\mathbf{r}| > 0$ при всех достаточно малых $|\Delta t|$).

**Определение 2.** Пусть при всех достаточно малых $|\Delta t|$ можно выбрать $\mathbf{l}(\Delta t)$ так, что существует $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\mathbf{l}(\Delta t) =: \mathbf{t}$. Тогда прямая

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{t}\tau, \quad -\infty < \tau < +\infty$$

называется *касательной к кривой $\Gamma$* в точке $(t_0, \widehat{r}(t_0))$.

Как мы видим, касательная проходит через точку $\widehat{r}(t_0)$ и $\mathbf{t}$ — её направляющий вектор.

**Лемма 1.** *Пусть $\Gamma = \{\mathbf{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant b\}$, $t_0 \in (a, b)$ и $\exists\,\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$. Тогда $\Gamma$ имеет касательную в точке $(t_0, \widehat{r}(t_0))$ и вектор $\mathbf{r}'(t_0)$ коллинеарен касательной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из того, что $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$, следует, что $\Delta\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ при всех достаточно малых $|\Delta t|$ и что $\left|\dfrac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}\right| \to |\mathbf{r}'(t_0)|$ при $\Delta t \to 0$. Тогда при $\Delta t \to 0$

$$\mathbf{l}(\Delta t) := \frac{\dfrac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}}{\left|\dfrac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}\right|} \to \frac{\mathbf{r}'(t_0)}{|\mathbf{r}'(t_0)|} =: \mathbf{t}.$$

Следовательно, касательная в точке $(t_0, \widehat{r}(t_0))$ существует, а её уравнение можно записать в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{r}'(t_0)\tau, \quad -\infty < \tau < +\infty.$$

**Замечание 1.** Вектор $\Delta\mathbf{r}$ при $\Delta t > 0$ направлен от точки $\widehat{r}(t_0)$ к точке $\widehat{r}(t_0 + \Delta t)$ с бо́льшим значением параметра. Поэтому можно сказать, что векторы $\mathbf{r}'$, $\mathbf{t}$ направлены в сторону возрастания параметра кривой.

Вектор $\mathbf{t}$ называется *единичным вектором касательной* к кривой $\Gamma$.

Если $t_0 = a$ или $t_0 = b$ и в $t_0$ существует отличная от $\mathbf{0}$ односторонняя производная вектора $\mathbf{r}$, то существует и односторонняя касательная (которая определяется по аналогии с касательной).

**Определение 3.** Кривая $\Gamma = \{\mathbf{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant b\}$ называется *дифференцируемой* (*непрерывно дифференцируемой*), если вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ дифференцируема (непрерывно дифференцируема) на $[a, b]$.

**Определение 4.** Точка $(t_0, \widehat{r}(t_0))$ дифференцируемой кривой $\Gamma$ называется *неособой* точкой, если $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$, и называется *особой* точкой в противном случае.

В лемме 1 показано, что дифференцируемая кривая в каждой неособой точке имеет касательную.

**Определение 5.** Непрерывно дифференцируемая кривая без особых точек называется *гладкой кривой*.

**Определение 6.** Пусть $\Gamma = \{\widehat{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant b\}$, $c \in (a, b)$. Тогда каждая из кривых

$$\Gamma' = \{\widehat{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant c\}, \quad \Gamma'' = \{\widehat{r}(t)\colon c \leqslant t \leqslant b\}$$

называется *дугой кривой* $\Gamma$.

Аналогичное определение можно дать и в случае, когда кривая $\Gamma$ разбита на любое конечное число дуг.

При этом кривая $\Gamma$ называется *кусочно-непрерывно дифференцируемой* (*кусочно-гладкой*), если каждая из её дуг является непрерывно дифференцируемой (гладкой).

Рассмотрим вопрос о преобразовании (замене) параметра на кривой. Пусть

$$\Gamma = \{\mathbf{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant b\}, \quad t = g(\tau), \quad \boldsymbol{\rho}(\tau) = \mathbf{r}(g(\tau)),$$
$$\widetilde{\Gamma} = \{\boldsymbol{\rho}(\tau)\colon \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta\}.$$

Будем считать кривую $\widetilde{\Gamma}$ той же, что и $\Gamma$, но иначе параметризованной, если замена параметра $t = g(\tau)$ является *допустимой*.

При этом под допустимой заменой параметра понимается такая, при которой выполняются следующие условия.

$1^\circ$ $g$: $[\alpha, \beta] \leftrightarrow [a, b]$ непрерывна и строго монотонна на $[\alpha, \beta]$.

Обратим внимание, что при этом от $\widetilde{\Gamma}$ можно перейти к $\Gamma$ также с помощью непрерывной и строго монотонной замены параметра $g^{-1}$ (обратной к $g$).

Понятие «допустимой» замены параметра определяется нашим желанием сохранить те или иные свойства кривой при такой замене. Так, например, если мы хотим сохранить ориентацию кривой, то к требованию $1^\circ$ присоединяется требование

$1^{\circ\circ}$ $g$ строго возрастает на $[\alpha, \beta]$.

Последнее равносильно, очевидно, условию $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$.

Если $\Gamma$ — дифференцируемая (непрерывно дифференцируемая) кривая, то *допустимой* заменой параметра на $\Gamma$ будем называть замену $t = g(\tau)$, удовлетворяющую, помимо условия $1^\circ$, ещё и условиям:

$2^\circ$ $g$ дифференцируема (непрерывно дифференцируема) на $[\alpha, \beta]$;

$3^\circ$ $g'(\tau) \neq 0$ при $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$.

При этом, очевидно, дифференцируемая (непрерывно дифференцируемая) кривая $\Gamma$ переходит в дифференцируемую (непрерывно дифференцируемую) кривую $\widetilde{\Gamma}$.

При выполнении условий 1°, 2°, 3° обратная к $g$ функция $g^{-1}$ будет, очевидно, удовлетворять тем же условиям. Кривые $\Gamma$ и $\widetilde{\Gamma}$ при этом отождествляют (иначе говоря, их называют одной и той же кривой, различным образом параметризованной).

**Упражнение 1.** Показать, что при замене параметра, удовлетворяющей условиям 1°, 2°, 3° (т. е. при допустимой замене параметра):

а) неособая точка переходит в неособую;

б) касательная в неособой точке сохраняется;

в) гладкая кривая переходит в гладкую кривую.

**Упражнение 2.** Показать, что всякую гладкую кривую $\Gamma = \{\widehat{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant b\}$ можно разбить на конечное число гладких дуг $\Gamma_i = \{\widehat{r}(t)\colon t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i\}$, где $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$, так, что на каждой дуге $\Gamma_i$ в качестве параметра (при допустимой его замене) можно взять либо $x$, либо $y$, либо $z$.

## § 8.3. Длина дуги кривой

Пусть $\Gamma = \{\mathbf{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant b\}$. Систему точек $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i_\tau}$ называют *разбиением отрезка* $[a, b]$, если $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{i_\tau} = b$.

Соединив точки $\widehat{r}(t_{i-1})$ и $\widehat{r}(t_i)$ отрезками прямых ($i = 1, \ldots$ $\ldots, i_\tau$), получим так называемую *вписанную в кривую $\Gamma$ ломаную* (обозначим её символом $\Lambda_\tau$), длина которой

$$S_{\Lambda_\tau} = \sum_{i=1}^{i_\tau} |\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})|.$$

**Определение 1.** *Длиной кривой $\Gamma$* называется

$$S_\Gamma := \sup_\tau S_{\Lambda_\tau}.$$

**Определение 2.** Кривая $\Gamma$ называется *спрямляемой*, если её длина конечна (т. е. $S_\Gamma < +\infty$).

Ясно, что длина кривой и её спрямляемость не меняются при допустимой замене параметра на кривой.

**Упражнение 1.** Пусть $\Gamma = \{\mathbf{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant b\}$ — спрямляемая кривая, $c \in (a, b)$. Показать, что кривые

$$\Gamma' = \{\mathbf{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant c\}, \quad \Gamma'' = \{\mathbf{r}(t)\colon c \leqslant t \leqslant b\}.$$

спрямляемы и сумма их длин равна длине кривой $\Gamma$.

**Теорема 1.** *Пусть кривая* $\Gamma = \{\mathbf{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant b\}$ *непрерывно дифференцируема. Тогда она спрямляема и её длина удовлетворяет условию*

$$|\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)| \leqslant S_\Gamma \leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} |\mathbf{r}'(t)| \cdot (b - a).$$

Доказательство. Функция $|\mathbf{r}'(t)|$ как непрерывная на отрезке $[a, b]$ достигает на нём своего максимума. Пусть $\tau = \{t_i\}_{i=1}^{i_\tau}$ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$. Тогда с помощью (1) имеем

$$|\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)| \leqslant S_{\Lambda_\tau} = \sum_{i=1}^{i_\tau} |\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} |\mathbf{r}'(t)| \sum_{i=1}^{i_\tau} (t_i - t_{i-1}) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |\mathbf{r}'(t)|(b - a).$$

Переходя в этом неравенстве к верхней грани по $\tau$, получаем утверждение теоремы.

**Теорема 2.** *Пусть кривая* $\Gamma = \{\mathbf{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant b\}$ *непрерывно дифференцируема. Тогда переменная длина дуги* $s = s(t)$, *отсчитываемая от её начала* $(a, \widehat{r}(a))$, *является возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией параметра* $t$, *причём*

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2},$$
$$ds^2 = |d\mathbf{r}|^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Доказательство. Пусть $s = s(t)$ — длина дуги кривой

$$\Gamma_t = \{\mathbf{r}(u)\colon a \leqslant u \leqslant t\}, \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

являющейся дугой кривой $\Gamma$. Пусть $a \leqslant t_0 < t_0 + \Delta t \leqslant b$. Применяя теорему 1 к дуге $\{\mathbf{r}(t)\colon t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \Delta t\}$ длины $\Delta s(t_0) = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$ (см. упражнение 1), получаем

$$|\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)| \leqslant \Delta s \leqslant \max_{t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \Delta t} |\mathbf{r}'(t)| \Delta t.$$

Деля последнее неравенство на $\Delta t$ и переходя к пределу при $\Delta t \to 0 + 0$, получаем, что существует $s'_+(t_0) = |\mathbf{r}'(t_0)|$.

Аналогично устанавливается, что существует $s'_-(t_0) = |\mathbf{r}'(t_0)|$.

Отсюда следует, что существует $s'(t_0) = |\mathbf{r}'(t_0)|$. Из неотрицательности $s'(t)$ следует, что $s(t)$ возрастает на $[a, b]$.

**Следствие 1.** *Если параметром непрерывно дифференцируемой кривой $\Gamma = \{\mathbf{r}(s)\colon 0 \leqslant s \leqslant S_\Gamma\}$ является длина её дуги $s$, то* $\left|\dfrac{d\mathbf{r}}{ds}\right| = 1$.

**Замечание 1.** Геометрический смысл равенства $\left|\dfrac{d\mathbf{r}}{ds}\right| = 1$ состоит в том, что предел отношения $\dfrac{|\Delta s|}{|\Delta\mathbf{r}|}$ длины дуги к длине стягивающей её хорды, когда один из концов дуги фиксирован, а длина дуги стремится к нулю, равен единице.

**Следствие 2.** *С помощью допустимой замены параметра на гладкой ориентированной кривой можно перейти к параметру $s$, являющемуся переменной длиной дуги, отсчитываемой от начала кривой.*

Запишем равенство $\left|\dfrac{d\mathbf{r}}{ds}\right| = 1$ в виде

$$\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

где $\alpha, \beta, \gamma$ — углы, образованные вектором $\dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$ (а значит, и касательной) с положительными направлениями осей $Ox$, $Oy$, $Oz$ соответственно. Отсюда:

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \cos\beta, \quad \frac{dz}{ds} = \cos\gamma,$$

в чём и состоит геометрический смысл координат вектора $\dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$.

## § 8.4. Кривизна, главная нормаль, соприкасающаяся плоскость

**Лемма 1.** *Пусть вектор-функция $\mathbf{r}$ постоянна по модулю:*

$$|\mathbf{r}(t)| = C \quad \text{при} \quad t \in U(t_0),$$

*и пусть существует $\mathbf{r}'(t_0)$. Тогда $\mathbf{r}'(t_0) \perp \mathbf{r}(t_0)$.*

Доказательство. Дифференцируя скалярное произведение $(\mathbf{r}(t), \mathbf{r}(t)) = |\mathbf{r}(t)|^2 = C^2$, получаем

$$(\mathbf{r}'(t_0), \mathbf{r}(t_0)) + (\mathbf{r}(t_0), \mathbf{r}'(t_0)) = 2(\mathbf{r}'(t_0), \mathbf{r}(t_0)) = 0.$$

**Определение 1.** Пусть $\Gamma$ — спрямляемая кривая,

$$\Gamma = \{\mathbf{r}(s) \colon 0 \leqslant s \leqslant S\},$$

где $s$ — переменная длина её дуги, и пусть $s_0 \in [0, S]$. Пусть также существуют $\mathbf{t} := \dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$ на $U(s_0) \cap [0, S]$ и $\dfrac{d\mathbf{t}}{ds} = \dfrac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$ в точке $s_0$.

Тогда $k = k(s_0) := \left|\dfrac{d\mathbf{t}}{ds}(s_0)\right|$ называется *кривизной* кривой $\Gamma$ в точке $(s_0, \widehat{r}(s_0))$.

Если $s_0 = 0$ или $s_0 = S$, то производные понимаются как односторонние.

Геометрический смысл кривизны $k(s_0)$ состоит в том, что $k(s_0)$ является мгновенной угловой скоростью поворота касательной (если параметр $s$ считать временем). В самом деле, поскольку $\mathbf{t}$ — единичный вектор, то $|\Delta\mathbf{t}| = |\mathbf{t}(s_0 + \Delta s) - \mathbf{t}(s_0)|$ характеризует величину его поворота при изменении параметра на $\Delta s$. Если величину угла между векторами $\mathbf{t}(s_0 + \Delta s)$ и $\mathbf{t}(s_0)$, выраженную в радианах, обозначить через $\varphi = \varphi(\Delta s)$, то

$$|\Delta\mathbf{t}| = 2\sin\frac{\varphi}{2} \sim \varphi \quad \text{при} \quad \Delta s \to 0+0$$

(в последнем равенстве легко убедиться, построив равнобедренный треугольник с боковыми сторонами, совпадающими с векторами $\mathbf{t}(s_0 + \Delta s)$ и $\mathbf{t}(s_0)$, отложенными от одной точки). Тогда

$$k = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\mathbf{t}}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s \to 0+0}\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0+0}\frac{\varphi(\Delta s)}{\Delta s}.$$

**Определение 2.** Величина $R = \dfrac{1}{k} \leqslant +\infty$, обратная кривизне, называется *радиусом кривизны*.

**Упражнение 1.** Проверить, что в каждой точке окружности её радиус кривизны совпадает с радиусом этой окружности.

**Теорема 1.** *Пусть $\Gamma = \{\mathbf{r}(t) \colon a \leqslant t \leqslant b\}$ — гладкая дважды дифференцируемая кривая. Тогда в каждой её точке существует кривизна.*

Доказательство. Имеем:

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{r}'\frac{dt}{ds} = \frac{\mathbf{r}'}{s'},$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}'}{s'}\right)\frac{dt}{ds} = \frac{s'\mathbf{r}'' - s''\mathbf{r}'}{s'^3}. \tag{1}$$

Следовательно, $\exists\, k = \left|\dfrac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right| = \dfrac{|s'\mathbf{r}'' - s''\mathbf{r}'|}{s'^3}$.

Выведем другое выражение для кривизны $k$. Поскольку $\dfrac{d\mathbf{t}}{ds} \perp \mathbf{t}$ в силу леммы 1, то имеем

$$k = \left|\frac{d\mathbf{t}}{ds}\right| = \left|\frac{d\mathbf{t}}{ds} \times \mathbf{t}\right| = \left|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \times \frac{d\mathbf{r}}{ds}\right| =$$

$$= \left|\frac{s'\mathbf{r}'' - s''\mathbf{r}'}{s'^3} \times \frac{\mathbf{r}'}{s'}\right| = \frac{|\mathbf{r}'' \times \mathbf{r}'|}{s'^3},$$

т. е.

$$k = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3} = \frac{\left\|\begin{matrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{matrix}\right\|}{\left(\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\right)^3}.$$

Если $k = \left|\dfrac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right| \neq 0$, то можно написать *формулу Френе*:

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = k\mathbf{n}, \quad \text{где} \quad |\mathbf{n}| = 1, \quad (\mathbf{t}, \mathbf{n}) = 0. \tag{2}$$

Вектор $\mathbf{n}$ называется *единичным вектором главной нормали*.

**Определение 3.** *Нормалью к кривой* в данной точке называется всякая прямая, проходящая через эту точку и перпендикулярная касательной в этой точке.

Нормаль к кривой, коллинеарная $\mathbf{n}$, называется *главной нормалью*.

Пусть $\Gamma = \{\mathbf{r}(s)\colon\ 0 \leqslant s \leqslant S\}$, и пусть в точке $(s_0, \widehat{r}(s_0))$ существует $k = \left|\dfrac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right| \neq 0$. Тогда в силу формулы Тейлора

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(s_0 + \Delta s) - \mathbf{r}(s_0) = \frac{d\mathbf{r}(s_0)}{ds}\Delta s +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{d^2\mathbf{r}(s_0)}{ds^2}(\Delta s)^2 + \mathbf{o}((\Delta s)^2) \quad \text{при} \quad \Delta s \to 0.$$

В иной записи

$$\Delta\mathbf{r} = (\Delta s)\mathbf{t} + \frac{1}{2}k(\Delta s)^2\mathbf{n} + \mathbf{o}((\Delta s)^2), \quad \Delta s \to 0.$$

Это равенство показывает, что в окрестности данной точки кривая отклоняется от своей касательной в сторону вектора $\mathbf{n}$ с точностью до $\mathbf{o}((\Delta s)^2)$.

**Определение 4.** Плоскость, проходящая через касательную и главную нормаль в данной точке кривой, называется *соприкасающейся плоскостью*.

Последнюю формулу для $\Delta\mathbf{r}$ можно интерпретировать и так: в окрестности данной точки кривая лежит в соприкасающейся плоскости с точностью до $\mathbf{o}((\Delta s)^2)$.

Выведем уравнение соприкасающейся плоскости в такой точке гладкой кривой $\Gamma = \{\mathbf{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant b\}$, в которой кривизна $k \neq 0$. Эта плоскость проходит через точку $\widehat{r}(t_0)$ и коллинеарна векторам $\mathbf{t} = \dfrac{\mathbf{r}'}{s'}$ и $\dfrac{d\mathbf{t}}{ds} = \dfrac{s'\mathbf{r}'' - s''\mathbf{r}'}{s'^3}$ (см. (1)), а значит, и вектору $\mathbf{r}''$ $(s' = |\mathbf{r}'| \neq 0)$. Поэтому уравнение соприкасающейся плоскости имеет вид

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}'(t_0), \mathbf{r}''(t_0)) = 0 \iff \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0,$$

где $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0) = (x_0, y_0, z_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$.

Если в данной точке кривой $k = 0$, то *соприкасающейся плоскостью* называется всякая плоскость, содержащая касательную в этой точке.

**Определение 5.** Точка пространства, лежащая на главной нормали к кривой в данной её точке и находящаяся на расстоянии $R = 1/k$ от этой точки в направлении вектора $\mathbf{n}$ главной нормали, называется *центром кривизны кривой* в данной точке кривой.

Центр кривизны лежит в соприкасающейся плоскости.

Если $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки кривой, то радиус-вектор центра кривизны в этой точке имеет вид

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} + R\mathbf{n} = \mathbf{r} + \frac{1}{k^2}\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}.$$

Отсюда и из (1) имеем:

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} + \frac{1}{k^2}\frac{s'\mathbf{r}'' - s''\mathbf{r}'}{s'^3}, \quad \text{где} \quad s' = |\mathbf{r}'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2};$$

$$s'' = \frac{x'x'' + y'y'' + z'z''}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}.$$

**Определение 6.** Кривая $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(t)$, описывающая множество центров кривизны данной кривой $\Gamma$, называется её *эволютой*.

Сама кривая $\Gamma$ по отношению к своей эволюте называется *эвольвентой*.

Кривая вида $\Gamma = \{(x(t), y(t), 0)\colon a \leqslant t \leqslant b\}$ называется *плоской кривой*. Её уравнение записывают в виде

$$\Gamma = \{(x(t), y(t))\colon a \leqslant t \leqslant b\}.$$

Будем считать плоскую кривую $\Gamma$ гладкой. Радиус-вектор $\mathbf{r}$ кривой $\Gamma$ лежит в плоскости $xOy$, как и векторы $\mathbf{r}'$, $\mathbf{r}''$, $\mathbf{n}$.

Пусть $\alpha$ — угол между единичным вектором касательной к кривой и осью $Ox$. Тогда:

$$\mathbf{t} = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\sin\alpha, \quad \frac{d\mathbf{t}}{ds} = (-\mathbf{i}\sin\alpha + \mathbf{j}\cos\alpha)\frac{d\alpha}{ds},$$

$$k = \left|\frac{d\mathbf{t}}{ds}\right| = |-\mathbf{i}\sin\alpha + \mathbf{j}\cos\alpha| \left|\frac{d\alpha}{ds}\right| = \left|\frac{d\alpha}{ds}\right| = \pm\frac{d\alpha}{ds} \geqslant 0,$$

$$k = \frac{1}{R} = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}.$$

Радиус-вектор центра кривизны при $k > 0$:

$$\boldsymbol{\rho} = (\xi, \eta), \quad \text{где} \quad \begin{cases} \xi = x + R^2\dfrac{d^2x}{ds^2}, \\ \eta = y + R^2\dfrac{d^2y}{ds^2}, \end{cases}$$

$$\xi = x - y'\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}, \quad \eta = y + x'\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}.$$

В случае, когда кривая $\Gamma$ является графиком непрерывно дифференцируемой функции $y = f(x)$, имеем:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2 + f'^2(x)\,dx^2, \quad ds = \sqrt{1 + f'^2}\,dx,$$

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}};$$

уравнения эволюты при $k > 0$: $\begin{cases} \xi = x - \dfrac{1 + y'^2}{y''}y', \\ \eta = y + \dfrac{1 + y'^2}{y''}. \end{cases}$

**Определение 7.** Пусть $\Gamma = \{\mathbf{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant b\}$ — гладкая дважды непрерывно дифференцируемая кривая, и пусть $\dfrac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \dfrac{d\mathbf{t}}{ds} = k\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$. Тогда вектор $\boldsymbol{\beta} := [\mathbf{t}, \mathbf{n}]$ называется *единичным вектором бинормали* кривой $\Gamma$.

Прямая с направляющим вектором $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}(t_0)$, проходящая через точку $\widehat{r}(t_0)$, называется *бинормалью* кривой $\Gamma$ в точке $(t_0, \widehat{r}(t_0))$.

**Определение 8.** *Сопровождающим трёхгранником Френе* кривой $\Gamma$ в точке $(t_0, \widehat{r}(t_0))$ называется трёхгранник, образованный векторами $\mathbf{t}(t_0)$, $\mathbf{n}(t_0)$, $\boldsymbol{\beta}(t_0)$, отложенными от точки $\widehat{r}(t_0)$.

Сопровождающий трёхгранник задаёт следующие три взаимно перпендикулярные плоскости, проходящие через точку $\widehat{r}(t_0)$:

1) соприкасающуюся плоскость, ортогональную вектору $\boldsymbol{\beta}$ бинормали,

2) *нормальную плоскость*, ортогональную вектору $\mathbf{t}$ касательной,

3) *спрямляющую плоскость*, ортогональную вектору $\mathbf{n}$ главной нормали.

Если $\Gamma$ — гладкая трижды непрерывно дифференцируемая кривая, то справедливы *формулы Френе*:

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = k\mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -k\mathbf{t} + \varkappa\boldsymbol{\beta}, \quad \frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = -\varkappa\mathbf{n}.$$

Первая из формул Френе приведена в (2).

Для вывода третьей формулы Френе, дифференцируя векторное произведение $\boldsymbol{\beta} = [\mathbf{t}, \mathbf{n}]$, получаем

$$\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = \left[\frac{d\mathbf{t}}{ds}, \mathbf{n}\right] + \left[\mathbf{t}, \frac{d\mathbf{n}}{ds}\right] = [k\mathbf{n}, \mathbf{n}] + \left[t, \frac{d\mathbf{n}}{ds}\right] = \left[\mathbf{t}, \frac{d\mathbf{n}}{ds}\right].$$

Отсюда следует, что вектор $\dfrac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}$ ортогонален вектору $\mathbf{t}$ и (в силу леммы 1) вектору $\boldsymbol{\beta}$, так что $\dfrac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = -\varkappa\mathbf{n}$ при некотором $\varkappa \in (-\infty, +\infty)$. При этом коэффициент $\varkappa$ называется *кручением кривой $\Gamma$* в точке $(t_0, \widehat{r}(t_0))$. Геометрический смысл $|\varkappa|$ состоит в том, что $|\varkappa|$ является мгновенной угловой скоростью поворота бинормали (или, что то же, поворота соприкасающейся плоскости), если параметр $s$ считать временем. Это выясняется так же, как геометрический смысл кривизны кривой.

Вторая формула Френе легко выводится с помощью дифференцирования равенства $\mathbf{n} = [\boldsymbol{\beta}, \mathbf{t}]$ и применения первой и третьей формул Френе.

# Глава 9

# НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

## § 9.1. Первообразная и неопределённый интеграл

Символом $\langle a, b\rangle$ будем обозначать *промежуток*, т. е. либо отрезок $[a, b]$, либо полуинтервал $[a, b)$, либо полуинтервал $(a, b]$, либо интервал $(a, b)$. При этом полуинтервал и интервал могут быть как конечными, так и бесконечными.

**Определение 1.** Пусть функции $f$ и $F$ определены на $\langle a, b\rangle$. Функция $F$ называется *первообразной для* $f$ *на* $\langle a, b\rangle$, если $F' = f$ на $\langle a, b\rangle$. При этом в случаях $a \in \langle a, b\rangle$, $b \in \langle a, b\rangle$ производные $F'(a)$, $F'(b)$ соответственно понимаются как односторонние.

Пусть $F$ — первообразная для $f$ на $\langle a, b\rangle$. Тогда $F + C$, где $C$ — постоянная, также является первообразной для $f$ на $\langle a, b\rangle$. В самом деле, $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$.

Верно и обратное утверждение: если $F$ и $\Phi$ — две первообразные для функции $f$ на $\langle a, b\rangle$, то $\Phi(x) = F(x) + C$, где $C$ — постоянная. В самом деле,

$$(F(x) - \Phi(x))' = f'(x) - f'(x) = 0.$$

Тогда с помощью формулы конечных приращений Лагранжа получаем

$$F(x) - \Phi(x) = C.$$

**Определение 2.** Операция перехода от данной функции к её первообразной называется (*неопределённым*) *интегрированием*. При этом функции $f$ ставится в соответствие некоторая конкретная произвольно выбранная первообразная. Эта первообразная называется *неопределённым интегралом* функции $f$ и обозначается символом $\int f(x)\,dx$. Функция $f$ при этом называется *подынтегральной*.

Таким образом, каждый неопределённый интеграл функции $f$ является для неё первообразной, и наоборот, каждую первообразную можно выбрать в качестве неопределённого интеграла функции $f$.

Рассмотренные свойства первообразных дают возможность описать общий вид неопределённого интеграла функции $f$ на $\langle a, b\rangle$:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где $F$ — некоторая конкретная первообразная для $f$, а $C$ — произвольная постоянная.

Будем пользоваться также следующими обозначениями:

$$\int dg(x) := \int g'(x)\,dx, \qquad \int f(x)\,dg(x) := \int f(x)g'(x)\,dx.$$

**Основные свойства неопределённого интеграла на промежутке.**

1° $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$.

2° $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, где $F$ — некоторая фиксированная первообразная для $f$. Это равенство можно переписать в виде

2°° $\int F'(x)\,dx = F(x) + C$.

3° Пусть существуют $\int f_1(x)\,dx$, $\int f_2(x)\,dx$. Тогда при $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ существует интеграл

$$\int (\alpha f_1(x) + \beta f_2(x))\,dx = \alpha \int f_1(x)\,dx + \beta \int f_2(x)\,dx + C.$$

Свойство 1° содержится в определении неопределённого интеграла, свойство 2° уже было установлено.

Для доказательства свойства 3° проверим, что $F(x) = \alpha \int f_1(x)\,dx + \beta \int f_2(x)\,dx$ является первообразной для $\alpha f_1 + \beta f_2$. Это в самом деле так, поскольку

$$F'(x) = \left(\alpha \int f_1(x)\,dx\right)' + \left(\beta \int f_2(x)\,dx\right)' = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x).$$

Остаётся сослаться на свойство 2°.

Свойства 1°, 2°° показывают, что операции дифференцирования и (неопределённого) интегрирования обратны друг другу.

В дальнейшем будет показано, что для любой функции $f$, непрерывной на некотором промежутке, на этом промежутке существует неопределённый интеграл $\int f(x)\,dx$.

Каждую формулу для производной вида $F'(x) = f(x)$ можно истолковать как утверждение, что $F$ на соответствующем промежутке является первообразной для $f$ и, значит, $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ в силу 2°. Поэтому из таблицы производных основных элементарных функций получаем таблицу неопределённых интегралов, которая приводится в приложении.

Каждая из формул таблицы рассматривается на тех промежутках, на которых определена соответствующая подынтегральная функция. Например, формулу

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C$$

следует рассматривать отдельно на каждом из двух промежутков: $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$.

## § 9.2. Методы интегрирования

**Теорема 1** (интегрирование по частям). *Пусть на некотором промежутке функции $u, v$ дифференцируемы и существует $\int u'(x)v(x)\, dx$. Тогда на этом промежутке существует*

$$\int u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\, dx + C.$$

Доказательство. Правая часть последнего равенства имеет вид $F(x) + C$. При этом

$$F' = \Big(uv - \int u'v\, dx\Big)' = u'v + uv' - u'v = uv',$$

так что функция $F$ является первообразной для $uv'$. Остаётся сослаться на свойство $2^\circ$.

**Теорема 2** (интегрирование заменой переменного). *Пусть функция $f$ имеет первообразную на $\langle a, b\rangle$, функция $\varphi\colon \langle \alpha, \beta\rangle \to \to \langle a, b\rangle$ дифференцируема на $\langle \alpha, \beta\rangle$. Тогда на $\langle \alpha, \beta\rangle$ существует*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt = \int f(x)\, dx\Big|_{x=\varphi(t)} + C. \tag{1}$$

Доказательство. Дифференцируя стоящую в правой части равенства сложную функцию $F \circ \varphi$, где $F(x) = \int f(x)\, dx$, получаем

$$(F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t))\varphi'(t),$$

см. теорему 5.5.1 и замечание 5.5.1. Остаётся использовать свойство $2^\circ$.

Формулу (1) легко запомнить в виде

$$\int f(\varphi(t))\, d\varphi(t) = \int f(x)\, dx\Big|_{x=\varphi(t)} + C.$$

Её называют формулой *интегрирования подстановкой* (в интеграл $\int f(\varphi(t))\,d\varphi(t)$ вместо $\varphi(t)$ подставляют $x$, находят $\int f(x)\,dx$, а затем возвращаются к переменному $t$).

Если в условиях теоремы 2 дополнительно предположить, что функция $\varphi$ строго монотонна на $\langle\alpha,\beta\rangle$, то на промежутке $\langle\xi,\eta\rangle := \varphi(\langle\alpha,\beta\rangle)$ существует обратная функция $\varphi^{-1}$. Тогда из (1) следует, что на $\langle\xi,\eta\rangle$

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} + C.$$

Эту формулу называют формулой *замены переменного в неопределённом интеграле*.

**Пример 1** (интегрирование подстановкой).

$$\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} = \int \frac{1}{2}\frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} = \int \frac{1}{2}\frac{dx}{x}\Big|_{x=t^2+a^2} + C_1 =$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x|\Big|_{x=t^2+a^2} + C_2 = \frac{1}{2}\ln(t^2+a^2) + C_2.$$

## § 9.3. Комплексные числа

*Комплексным числом* называется выражение вида

$$z = x + iy, \tag{1}$$

где $x, y \in \mathbb{R}$, $i$ — некоторый элемент, называемый *мнимой единицей*. Число $x$ называется *действительной частью* числа $z$ ($x = \operatorname{Re} z$), а число $y$ — *мнимой частью* числа $z$ ($y = \operatorname{Im} z$).

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ называются *равными*, если $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Комплексное число $z = x + i0$ отождествляется с действительным числом $x$. В этом случае пишут $z = x$.

*Модулем* комплексного числа $z = x + iy$ называется неотрицательное действительное число

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}\,.$$

Для каждого комплексного числа $z = x + iy$ определено *сопряжённое* ему комплексное число

$$\overline{z} = x - iy := x + i(-y).$$

*Суммой* $z_1 + z_2$ двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число

$$z = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

*Произведением* $z_1 z_2$ двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число

$$z = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

В частности, $i \cdot i = -1$.

**Определение 1.** Множество выражений вида (1), в котором описанным способом введены операции сложения и умножения, называется *множеством комплексных чисел* и обозначается через $\mathbb{C}$.

Во множестве $\mathbb{C}$ нет отношения порядка.

Легко проверить, что сумма и произведение комплексных чисел обладают теми же свойствами, что сумма и произведение действительных чисел. В частности, существуют $0 = 0 + i0$ и $1 = 1 + i0$, для каждого $z \in \mathbb{C}$ существует противоположное комплексное число, для каждого $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, существует обратное комплексное число, определены разность двух комплексных чисел и частное двух комплексных чисел (если делитель не равен нулю).

Разность $z_2 - z_1$ двух комплексных чисел $z_2 = x_2 + iy_2$ и $z_1 = x_1 + iy_1$ вычисляется по правилу

$$z_2 - z_1 = x_2 - x_1 + i(y_2 - y_1).$$

Частное $z := \dfrac{z_1}{z_2}$ двух комплексных чисел $z_1$ и $z_2$ ($z_2 \neq 0$) определяется как решение уравнения $zz_2 = z_1$ относительно $z = x + iy$. Практический приём нахождения частного состоит в почленном умножении равенства $zz_2 = z_1$ на число $\overline{z}_2$, сопряжённое числу $z_2$, и нахождении $z = x + iy$ из уравнения $z|z_2|^2 = z_1\overline{z}_2$, где $|z_2|$ — модуль $z_2$, $|z_2| > 0$:

$$z = \frac{z_1\overline{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{-x_1y_2 + x_2y_1}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Для вычисления частного двух комплексных чисел удобно представить каждое из этих чисел в тригонометрической форме, с которой мы познакомимся ниже.

Для геометрического изображения комплексных чисел пользуются комплексной плоскостью. При этом комплексное число $z = x + iy$ изображается точкой $(x, y)$ или радиус-вектором этой точки. Сложение и вычитание комплексных чисел сводится к сложению и вычитанию соответствующих векторов. Сопряжённые комплексные числа $z$ и $\overline{z}$ изображаются точками, симметричными относительно действительной оси.

Нам понадобятся следующие свойства операции комплексного сопряжения:

$$\overline{\overline{z}} = z, \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_1, \quad \overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2,$$
$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2, \quad z\overline{z} = |z|^2.$$

Эти свойства устанавливаются непосредственной проверкой.

## § 9.4. Разложение многочлена на множители

*Многочленом степени* $n \in \mathbb{N}_0$ называется функция

$$P_n(z) = A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \ldots + A_1 z + A_0, \quad A_n \neq 0,$$

где $z \in \mathbb{C}$, $A_k \in \mathbb{C}$ при $k = 0, 1, \ldots, n$.

*Корнем многочлена* $P_n$ называется комплексное число $z_0$, такое, что $P_n(z_0) = 0$.

При произвольном $z_0 \in \mathbb{C}$ многочлен $P_n(z)$ можно разделить на одночлен $(z - z_0)$, т. е. представить $P_n(z)$ в виде

$$P_n(z) = (z - z_0) Q_{n-1}(z) + r,$$

где частное $Q_{n-1}$ — многочлен степени $n - 1$, а остаток $r \in \mathbb{C}$.

**Теорема 1** (Безу). *Число $z_0$ является корнем многочлена $P_n$ тогда и только тогда, когда $P_n(z)$ делится без остатка на $z - z_0$.*

Доказательство очевидно.

Если многочлен $P_n$ при некотором $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$ представи́м в виде

$$P_n(z) = (z - z_0)^k Q_{n-k}(z), \quad Q_{n-k}(z_0) \neq 0,$$

где $Q_{n-k}$ — многочлен, то $z_0$ называют *корнем* многочлена $P_n$ *кратности* $k$. Если $k = 1$, то $z_0$ называют *простым корнем*.

В курсе теории функций комплексного переменного доказывается, что всякий многочлен имеет в $\mathbb{C}$ хотя бы один корень. Отсюда сразу следует разложение многочлена $P_n$ на множители

$$P_n(z) = A_n (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \ldots (z - z_r)^{k_r}, \quad \sum_{i=1}^{r} k_i = n,$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_r$ — различные корни многочлена $P_n$, кратности которых равны $k_1, k_2, \ldots, k_r$ соответственно.

В дальнейшем будем рассматривать многочлены $P_n$ лишь с действительными коэффициентами.

**Лемма 1.** *Пусть $P_n$ — многочлен с действительными коэффициентами, и пусть $z_0 = a + ib$ $(b \neq 0)$ — его корень кратности $k$. Тогда $\overline{z}_0 = a - ib$ также является его корнем кратности $k$.*

Доказательство. Имеем

$$P_n(z) = (z - z_0)^k Q_{n-k}(z).$$

Переходя в этом равенстве к сопряжённым значениям в его левой и правой частях, получим

$$\overline{P_n(z)} = \overline{(z - z_0)^k Q_{n-k}(z)}.$$

Отсюда в силу свойств сопряжённых чисел следует, что

$$P_n(\overline{z}) = (\overline{z} - \overline{z}_0)^k \overline{Q}_{n-k}(\overline{z}),$$

где коэффициенты многочлена $\overline{Q}_{n-k}$ являются сопряжёнными к соответствующим коэффициентам многочлена $Q_{n-k}$.

Заменив в последнем равенстве $\overline{z}$ на $z$, получаем

$$P_n(z) = (z - \overline{z}_0)^k \overline{Q}_{n-k}(z).$$

Отсюда следует, что $\overline{z}_0$ — корень многочлена $P_n$, причём кратность корня $\overline{z}_0$ не меньше кратности корня $z_0$.

Аналогично показывается, что если $\overline{z}_0$ — корень многочлена $P_n$ кратности $k$, то $\overline{\overline{z}}_0 = z_0$ является корнем многочлена $P_n$ кратности не меньше $k$. Отсюда следует, что кратности корней $z_0$ и $\overline{z}_0$ совпадают.

**Замечание 1.** При $z_0 = a + ib$, $b \neq 0$,

$$(z - z_0)(z - \overline{z}_0) = z^2 + pz + q,$$

где $p, q \in \mathbb{R}$, $p^2/4 - q < 0$.

В самом деле,

$$(z - a - bi)(z - a + bi) = (z - a)^2 + b^2 = z^2 - 2az + a^2 + b^2;$$

тогда $p = -2a$, $q = a^2 + b^2$, и

$$\frac{p^2}{4} - q = a^2 - (a^2 + b^2) = -b^2 < 0.$$

Учитывая лемму 1 и замечание 1, приходим к выводу, что для многочлена $P_n$ с действительными коэффициентами справедливо следующее разложение на множители:

$$P_n(x) = A_n(x - a_1)^{\alpha_1} \ldots (x - a_r)^{\alpha_r}(x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1} \ldots (x^2 + p_s x + q_s)^{\beta_s},$$

где $\sum\limits_{i=1}^{r} a_i + 2 \sum\limits_{j=1}^{s} \beta_j = n$, $\dfrac{p_j^2}{4} - q_j < 0 \quad (j = 1, \ldots, s)$.

Здесь $A_n \in \mathbb{R}$, $a_i$ — различные действительные корни многочлена $P_n$, $\alpha_i$ — их кратности ($\alpha_i \in \mathbb{N}$).

$$x^2 + p_j x + q_j = (x - z_j)(x - \overline{z}_j),$$

$z_j$, $\overline{z}_j$ — комплексные корни $P_n$ ($\operatorname{Im} z_j \neq 0$), $\beta_j$ — их кратности ($\beta_j \in \mathbb{N}$).

## § 9.5. Разложение правильных рациональных дробей на простейшие

Рациональная дробь (т. е. частное двух многочленов) $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ называется *правильной*, если степень многочлена $P$ меньше степени многочлена $Q$. Неправильную рациональную дробь (деля числитель на знаменатель по правилу деления многочленов) можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби (второе слагаемое отсутствует, если при делении не оказалось остатка).

В этом параграфе все многочлены имеют лишь действительные коэффициенты.

**Лемма 1.** *Пусть* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *— правильная рациональная дробь и $a$ — действительный корень кратности $\alpha$ многочлена $Q$, т. е.*

$$Q(x) = (x - a)^\alpha \widetilde{Q}(x), \quad \widetilde{Q}(a) \neq 0.$$

*Тогда справедливо разложение*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{\widetilde{P}(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\widetilde{Q}(x)},$$

*где $A \in \mathbb{R}$, и рациональная дробь $\dfrac{\widetilde{P}(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\widetilde{Q}(x)}$ является правильной.*

Доказательство. При произвольном $A \in \mathbb{R}$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{A}{(x-a)^\alpha} = \frac{P(x) - A\widetilde{Q}(x)}{(x-a)^\alpha \widetilde{Q}(x)}, \tag{1}$$

где правая часть — правильная рациональная дробь.

Выберем $A$ таким, при котором $a$ является корнем числителя правой части, т. е. $A = \dfrac{P(a)}{\widetilde{Q}(a)}$. Тогда по теореме Безу

$$P(x) - A\widetilde{Q}(x) = (x - a)\widetilde{P}(x).$$

Сократив правую часть (1) на $x - a$, приходим к утверждению леммы.

**Лемма 2.** *Пусть* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *— правильная рациональная дробь,* $z_0 = a + ib$ $(b \neq 0)$ *— корень кратности* $\beta$ *многочлена* $Q$, *т. е. при* $x^2 + px + q = (x - z_0)(x - \overline{z}_0)$

$$Q(x) = (x^2 + px + q)^\beta \widetilde{Q}(x), \quad \widetilde{Q}(a + ib) \neq 0.$$

*Тогда справедливо разложение*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\beta} + \frac{\widetilde{P}(x)}{(x^2 + px + q)^{\beta - 1}\widetilde{Q}(x)},$$

*где* $M, N \in \mathbb{R}$ *и рациональная дробь* $\dfrac{\widetilde{P}(x)}{(x^2 + px + q)^{\beta - 1}\widetilde{Q}(x)}$ *является правильной.*

Доказательство. При произвольных $M, N \in \mathbb{R}$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\beta} = \frac{P(x) - (Mx + N)\widetilde{Q}(x)}{(x^2 + px + q)^\beta \widetilde{Q}(x)}, \tag{2}$$

где правая часть — правильная рациональная дробь. Очевидно, достаточно выбрать $M$, $N$ так, чтобы числитель правой части (2) делился на $x^2 + px + q$, т. е. чтобы число $a + ib$ являлось корнем числителя. Имеем

$$P(a + ib) - (M(a + ib) + N)\widetilde{Q}(a + ib) = 0,$$

т. е.

$$M(a + ib) + N = \frac{P(a + ib)}{\widetilde{Q}(a + ib)}.$$

Отсюда однозначно находятся $M$ и $N$:

$$M = \operatorname{Im}\left(\frac{P(a + ib)}{b\widetilde{Q}(a + ib)}\right), \quad N = \operatorname{Re}\left(\frac{P(a + ib)}{\widetilde{Q}(a + ib)} - Ma\right).$$

Из лемм 1, 2 следует

**Теорема 1.** *Пусть* $P$, $Q$ *— многочлены с действительными коэффициентами,* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *— правильная рациональная дробь,*

$$Q(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} \ldots (x - a_r)^{\alpha_r} (x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1} \ldots \\ \ldots (x^2 + p_s x + q_s)^{\beta_s},$$

*где* $a_1, \ldots, a_r$ *— различные действительные корни* $Q$, $x^2 + p_j x + q_j = (x - z_j)(x - \overline{z}_j)$, $\operatorname{Im} z_j > 0$, $z_1, \ldots, z_s$ *— попарно различные комплексные корни* $Q$.

*Тогда*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=0}^{\alpha_i-1} \frac{A_{ik}}{(x-a_i)^{\alpha_i-k}} + \sum_{j=1}^{s}\sum_{m=0}^{\beta_j-1} \frac{M_{jm}x+N_{jm}}{(x^2+p_jx+q_j)^{\beta_j-m}}, \quad (3)$$

*где $A_{ik}$, $M_{jm}$, $N_{jm}$ — некоторые действительные числа.*

Доказательство состоит в последовательном многократном применении лемм 1, 2. Именно, применяем лемму 1 сначала $\alpha_1$ раз с $a = a_1$, затем $\alpha_2$ раз с $a = a_2$ и т. д.

Рациональные дроби вида

$$\frac{A}{(x-a)^n} \quad (A \neq 0) \quad \text{и} \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} \quad (M^2+N^2>0), \quad (4)$$

где $n \in \mathbb{N}$; $a$, $p$, $q$, $A$, $M$, $N \in \mathbb{R}$ и $p^2/4 - q < 0$, называются *простейшими*, или *элементарными* рациональными дробями.

При нахождении коэффициентов $A_{ik}$, $M_{jm}$, $N_{jm}$ разложения (3) правильной рациональной дроби на простейшие в случае конкретной дроби $P/Q$ обычно применяют *метод неопределённых коэффициентов*. Он состоит в том, что записывают разложение (3) с неопределёнными коэффициентами $A_{ik}$, $M_{jm}$, $N_{jm}$, приводят все дроби к общему знаменателю и сравнивают числители. Из полученного равенства многочленов находят все нужные коэффициенты, сравнивая, например, коэффициенты при одинаковых степенях переменного $x$ или значения многочленов в некоторых точках.

## § 9.6. Интегрирование рациональных дробей

Всякую рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, которую в свою очередь можно разложить на сумму простейших.

Поэтому интегрирование рациональных дробей сводится к интегрированию простейших дробей, т. е. дробей вида (4).

Интеграл $\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx$ с помощью подстановки $t = x - a$ сводится к табличному интегралу.

Для вычисления интеграла $I_n = \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx$ предста́вим квадратный трёхчлен $x^2+px+q$ в виде $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$. Положив $a^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0$ и сделав в $I_n$ подстановку $t = x + \frac{p}{2}$, получаем

$$I_n = \int \frac{Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{(t^2+a^2)^n}\,dt + C_1 =$$
$$= \frac{M}{2}\int \frac{2t\,dt}{(t^2+a^2)^n} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} + C_2 =$$
$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^n} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) J_n + C_2.$$

**Замечание 1.** Во всех интегралах этой цепочки, зависящих от $t$, после их нахождения вместо $t$ следует подставить $t = x + \frac{p}{2}$. Здесь и ниже мы не отмечаем этого ради краткости записи.

Первый из интегралов правой части подстановкой сводится к табличному. Остаётся найти интеграл $J_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$.

При $n = 1$ имеем

$$I_1 = \frac{M}{2}\ln(t^2+a^2) + \frac{2N - Mp}{2a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{a} + C_3 =$$
$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{2\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C_3.$$

Вычислим при $n \geqslant 2$ интеграл

$$J_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2\,dt}{(t^2+a^2)^n} + C_1 =$$
$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{((t^2+a^2) - t^2)\,dt}{(t^2+a^2)^n} + C_1 = \frac{1}{a^2}J_{n-1} - \frac{1}{2a^2}\int t\frac{2t\,dt}{(t^2+a^2)^n} + C_2.$$

Для нахождения последнего интеграла применим формулу интегрирования по частям, считая $u = t$, $v' = \frac{2t}{(t^2+a^2)^n}$, $v = -\frac{1}{(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}}$.

Получим

$$J_n = \frac{1}{a^2}J_{n-1} + \frac{t}{2a^2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2(n-1)}J_{n-1} + C_3.$$

Отсюда получаем рекуррентную формулу

$$J_n = \frac{2n-3}{2a^2(n-1)}J_{n-1} + \frac{t}{2a^2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} + C_3.$$

Зная

$$J_1 = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{\left(\frac{t}{a}\right)^2 + 1} + C' = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C,$$

мы можем по рекуррентной формуле найти последовательно $J_2$, $J_3$, ....

## § 9.7. Интегрирование некоторых иррациональных функций

Функция вида

$$\sum_{k_1 + \ldots + k_n \leqslant k} a_{k_1, \ldots, k_n} u_1^{k_1} \ldots\ u_n^{k_n}, \quad k_i \in \mathbb{N}_0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

называется *многочленом* ($k$-*й степени*) *от переменных* $u_1$, ..., $u_n$.

Функция вида

$$R(u_1, \ldots, u_n) = \frac{P(u_1, \ldots, u_n)}{Q(u_1, \ldots, u_n)},$$

где $P$, $Q$ — многочлены от переменных $u_1$, ..., $u_n$, называется *рациональной функцией от* $u_1$, ..., $u_n$.

1°. Рассмотрим

$$I = \int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \ \ldots, \ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right) dx,$$

где $r_1$, ..., $r_s \in \mathbb{Q}$.

Запишем $r_i$ в виде $r_i = \dfrac{p_i}{m}$, где $m \in \mathbb{N}$, $p_i \in \mathbb{Z}$ $(i = 1, \ldots, s)$.

Введём новое переменное $t$ равенством $t^m = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Тогда $x = \dfrac{dt^m - b}{a - ct^m} = \rho(t)$ — рациональная функция, $dx = \rho'(t)\,dt$. Производя замену переменного в интеграле $I$, получаем

$$I = \int R\left(\frac{dt^m - b}{a - ct^m}, \ t^{p_1}, \ \ldots, \ t^{p_s}\right) \rho'(t)\,dt + C,$$

где под знаком интеграла стоит рациональная функция от $t$, интеграл от которой мы умеем находить.

2°. Интеграл вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\,)\,dx$ может быть сведен к интегралу от рациональной функции с помощью одной из *подстановок Эйлера*.

*Случай* 1: $a > 0$. Можно применить замену $x$ на $t$, определяемую формулой
$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm x\sqrt{a} + t,$$
откуда $x = \dfrac{t^2 - c}{b \mp 2t\sqrt{a}}$.

*Случай* 2: $c > 0$. Применяется замена $x$ на $t$, определяемая формулой
$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{c} + xt.$$

*Случай* 3: корни $x_1$, $x_2$ трёхчлена $ax^2 + bx + c$ действительны.

Если $x_1 = x_2$, то $\sqrt{ax^2 + bx + c} = |x - x_1|\sqrt{a}$.

Если $x_1 \neq x_2$, то можно применить замену $x$ на $t$, определяемую формулой
$$\sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)} = (x - x_1)t.$$

3°. Интегралом от *биномиального дифференциала* называется
$$I = \int x^m (a + bx^n)^p dx$$
($a \neq 0$, $b \neq 0$; $m$, $n$, $p \in \mathbb{Q}$). Применив замену $x = t^{1/n}$, $dx = (1/n)t^{1/n-1}dt$, получим
$$I = \frac{1}{n}\int (a + bt)^p t^{(m+1)/n-1} dt + C,$$
так что задача сводится к нахождению интеграла вида
$$J = \int (a + bt)^p t^q dt \quad \left(p,\ q \in \mathbb{Q},\ q = \frac{m+1}{n} - 1\right).$$

Этот интеграл в трёх случаях (и ни в каких других) сводится к интегралу от рациональной дроби.

*Случай* 1: $p$ — целое число.

*Случай* 2: $q$ — целое число.

*Случай* 3: $p + q$ — целое число.

В самом деле, в указанных случаях интеграл $J$ имеет вид интеграла, рассмотренного в начале параграфа. В случае 3 это становится ясным после записи $J$ в виде
$$J = \int \left(\frac{a + bt}{t}\right)^p t^{p+q} dt.$$

Итак, интеграл $I$ сводится к интегралу от рациональных функций в случаях целых $p$, $\dfrac{m+1}{n}$ или $\dfrac{m+1}{n} + p$.

В других случаях интеграл $I$ не является элементарной функцией, что было доказано П.Л. Чебышёвым.

4°. Интеграл вида

$$I = \int R(\sin x, \cos x)\, dx$$

сводится к интегралу от рациональной дроби *универсальной тригонометрической подстановкой*

$$u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad -\pi < x < \pi.$$

В самом деле, тогда:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2},$$

$$x = 2\operatorname{arctg} u, \quad dx = \frac{2du}{1+u^2},$$

так что

$$I = 2\int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{du}{1+u^2} + C.$$

Другие подстановки:

$$u = \sin x, \quad u = \cos x, \quad u = \operatorname{tg} x$$

— иногда приводят к нужной цели при менее громоздких вычислениях. Например, интеграл $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ $(m, n \in \mathbb{Q})$ подстановкой $u = \sin x$ или $u = \cos x$ сводится к интегралу от биномиального дифференциала.

5°. Некоторые интегралы от трансцендентных функций:

$$\int x^n \varphi(x)\, dx, \quad \int e^{\alpha x}\begin{Bmatrix}\cos\beta x\\ \sin\beta x\end{Bmatrix} dx,$$

где $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(x) = \cos\alpha x$, $\sin\alpha x$, $e^{\alpha x}$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, $\ln x$, — вычисляются интегрированием по частям.

Например,

$$I = \int e^{\alpha x}\cos\beta x\, dx = \frac{e^{\alpha x}\sin\beta x}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\sin\beta x\, dx + C_1 =$$

$$= \frac{e^{\alpha x}\sin\beta x}{\beta} + \frac{\alpha e^{\alpha x}\cos\beta x}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\int e^{\alpha x}\cos\beta x\, dx + C_2 =$$

$$= \frac{e^{\alpha x}(\beta\sin\beta x + \alpha\cos\beta x)}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2}I + C_2.$$

Из сравнения первой и последней частей равенства получаем

$$I = \frac{e^{\alpha x}(\beta \sin \beta x + \alpha \cos \beta x) + \beta^2 C_2}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{e^{\alpha x}(\beta \sin \beta x + \alpha \cos \beta x)}{\alpha^2 + \beta^2} + C.$$

6°. Как уже упоминалось при интегрировании биномиальных дифференциалов, некоторые интегралы от элементарных функций не являются элементарными функциями. К их числу относятся

$$\int \frac{e^x}{x}\, dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}\, dx, \quad \int e^{-x^2} dx$$

и эллиптические интегралы 1-го, 2-го и 3-го рода соответственно:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \qquad \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi}{(1 + h \sin^2 \varphi)\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Глава 10

# ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

## § 10.1. Метрическое пространство $\mathbb{R}^n$

**Определение 1.** Множество называется *метрическим пространством*, если каждой паре его элементов $x$, $y$ поставлено в соответствие действительное неотрицательное число $\rho(x, y) \geqslant 0$, называемое *расстоянием* (или *метрикой*) между элементами $x$ и $y$ и удовлетворяющее следующим аксиомам:

1° $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$;

2° $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (*аксиома симметрии*);

3° $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (*аксиома треугольника*).

Последнюю аксиому называют также *неравенством треугольника*.

Элементы метрического пространства называют также *точками*.

С помощью расстояния можно ввести понятия сходящейся последовательности точек метрического пространства, $\varepsilon$-окрестности точки, открытого и замкнутого множеств, замыкания множества и др. Мы познакомимся с этими понятиями на примере метрического пространства $\mathbb{R}^n$.

**Определение 2.** Пусть $n \in \mathbb{N}$. *Метрическим пространством* $\mathbb{R}^n$ называется множество всевозможных упорядоченных наборов $x := (x_1, \ldots, x_n)$ из $n$ действительных чисел с расстоянием

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}\,. \tag{1}$$

Элемент пространства $\mathbb{R}^n$ будем называть *точкой*, а числа $x_1$, …, $x_n$ — *координатами* точки $x$.

Свойства 1°, 2° расстояния в $\mathbb{R}^n$ очевидны. Свойство 3° будет установлено ниже.

В $\mathbb{R}^n$ можно ввести вектор $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$, операции сложения $x + y$ и умножения $\lambda x$ на число $\lambda \in \mathbb{R}$ следующим образом: при $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$

$$x + y := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n,$$
$$\lambda x := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Тогда $\mathbb{R}^n$ превращается в линейное (векторное) пространство, а точку $x \in \mathbb{R}^n$ называют также *вектором*. Разность $x-y$ в $\mathbb{R}^n$ имеет вид

$$x - y = (x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Определение линейного (векторного) пространства будет приведено в § 25.1. Структура векторного пространства $\mathbb{R}^n$ в этой и ближайших главах не будет играть роли.

Введём понятие *модуля вектора* $x = (x_1, \ldots, x_n)$:

$$|x| := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\,.$$

Тогда $\rho(x,y) = |x-y|$.

**Лемма 1** (неравенство Коши–Буняковского).

$$\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leqslant |x|\,|y| \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Доказательство. При $n=2$ и при $n=3$ это неравенство является хорошо известным свойством скалярного произведения. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим лишь нетривиальный случай, когда $|x| > 0$, $|y| > 0$.

Имеем

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0, \quad ab \leqslant \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

Заменив $a$ на $a\sqrt{t}$, $b$ на $b/\sqrt{t}$ при произвольном $t > 0$, получим

$$ab \leqslant \frac{a^2 t}{2} + \frac{b^2}{2t} \quad (a, b \geqslant 0,\ t > 0).$$

Применив это неравенство при $a = x_i$, $b = y_i$ и суммируя по $i$, будем иметь

$$\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leqslant \frac{|x|^2 t}{2} + \frac{|y|^2}{2t} \quad \forall\, t > 0.$$

Взяв $t = |y|/|x|$, получаем (2).

**Лемма 2** (неравенство Минковского).

$$|x + y| \leqslant |x| + |y| \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Доказательство. Имеем

$$|x+y|^2 = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 = |x|^2 + 2\sum_{i=1}^n x_i y_i + |y|^2.$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем отсюда, что

$$|x+y|^2 \leqslant |x|^2 + 2|x|\,|y| + |y|^2 = (|x|+|y|)^2,$$

откуда и следует утверждение леммы.

Неравенство (3) также называют *неравенством треугольника.*

Теперь вернемся к свойству 3° расстояния.

Пусть $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $x' = x - y$, $y' = y - z$. Тогда $x' + y' = x - z$. В силу (3)

$$|x' + y'| \leqslant |x'| + |y'|, \text{ т. е. } |x - z| \leqslant |x - y| + |y - z|,$$

что лишь обозначением отличается от неравенства

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Понятие расстояния в $\mathbb{R}^n$ даёт возможность ввести понятия $\varepsilon$-окрестности точки и предельного перехода в $\mathbb{R}^n$.

**Определение 3.** При $\varepsilon > 0$ назовем *$\varepsilon$-окрестностью* точки $a \in \mathbb{R}^n$ множество

$$U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ |x - a| < \varepsilon\}.$$

Множество $U_\varepsilon(a)$ называют ещё *шаром*, или *открытым шаром* в $\mathbb{R}^n$ радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке $a$.

**Определение 4.** Точку $a \in \mathbb{R}^n$ называют *пределом последовательности* $\{x^{(m)}\}_{m=1}^\infty$ *точек* $x^{(m)} \in \mathbb{R}^n$ (или говорят, что последовательность $\{x^{(m)}\}_{m=1}^\infty$ *сходится к точке* $a$), и пишут $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = a$ или $x^{(m)} \to a$ при $m \to \infty$, если

$$\lim_{m\to\infty} |x^{(m)} - a| = 0,$$

или, иначе, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что

$$|x^{(m)} - a| < \varepsilon \quad \forall\, m \geqslant m_\varepsilon.$$

Последнее соотношение можно переписать в виде

$$x^{(m)} \in U_\varepsilon(a) \quad \forall\, m \geqslant m_\varepsilon.$$

**Теорема 1.** *Последовательность $\{x^{(m)}\}_{m=1}^\infty$ точек из $\mathbb{R}^n$ сходится к точке $a = \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда при каждом $k = 1, \ldots, n$*

$$\lim_{m\to\infty} x_k^{(m)} = a_k,$$

*где $x_k^{(m)}$ и $a_k$ — координаты точек $x^{(m)}$ и $a$ соответственно.*

Доказательство очевидно, если воспользоваться неравенством

$$|x_k^{(m)} - a_k| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^{(m)} - a_i)^2} = |x^{(m)} - a|.$$

**Определение 5.** Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *ограниченным*, если $\exists\, R > 0$: $E \subset U_R(\mathbf{0})$.

**Определение 6.** Последовательность $\{x^{(m)}\}$ называется *ограниченной*, если множество её значений ограничено, т. е. $\exists\, R > 0$: $|x^{(m)}| < R \quad \forall\, m \in \mathbb{N}$.

**Теорема 2** (Больцано–Вейерштрасса). *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть $\{x^{(m)}\}$ — ограниченная последовательность. Тогда при любом $k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, числовая последовательность $\left\{x_k^{(m)}\right\}_{m=1}^{\infty}$ ограничена. Рассмотрим числовую последовательность $\left\{x_1^{(m)}\right\}_{m=1}^{\infty}$. По теореме Больцано–Вейерштрасса (§ 2.7) существует такая подпоследовательность $\left\{m_j^{(1)}\right\}_{j=1}^{\infty}$ последовательности натуральных чисел, что последовательность $\left\{x_1^{(m_j^{(1)})}\right\}_{j=1}^{\infty}$ сходится.

Рассмотрим последовательность $\left\{x_2^{(m_j^{(1)})}\right\}_{j=1}^{\infty}$. По той же теореме Больцано–Вейерштрасса существует подпоследовательность $\left\{m_j^{(2)}\right\}_{j=1}^{\infty}$ последовательности $\left\{m_j^{(1)}\right\}_{j=1}^{\infty}$ такая, что последовательность $\left\{x_2^{(m_j^{(2)})}\right\}_{j=1}^{\infty}$ сходится.

Продолжая это рассуждение, получим $n$ последовательностей натуральных чисел $\left\{m_j^{(1)}\right\}$, $\left\{m_j^{(2)}\right\}$, …, $\left\{m_j^{(n)}\right\}$, причём каждая следующая является подпоследовательностью предшествующей, и последовательности $\left\{x_k^{(m_j^{(k)})}\right\}_{j=1}^{\infty}$, где $k = 1, \ldots, n$, сходятся.

Но тогда сходятся и последовательности $\left\{x_k^{(m_j^{(n)})}\right\}_{j=1}^{\infty}$, $k = 1, \ldots, n$, как подпоследовательности сходящихся последовательностей. Следовательно, по теореме 1 последовательность $\left\{x^{(m_j^{(n)})}\right\}_{j=1}^{\infty}$ сходится, что и требовалось доказать.

## § 10.2. Открытые и замкнутые множества

**Определение 1.** Точка $x \in \mathbb{R}^n$ называется *внутренней точкой множества* $E \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\exists\, \varepsilon > 0\colon U_\varepsilon(x) \subset E.$$

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *открытым*, если каждая его точка является внутренней.

Примерами открытых множеств являются $\mathbb{R}^n$, $\varnothing$.

**Лемма 1.** *$\varepsilon$-окрестность $U_\varepsilon(a)$ точки $a \in \mathbb{R}^n$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Требуется доказать, что всякая точка из $U_\varepsilon(a)$ является внутренней. Пусть $x \in U_\varepsilon(a)$. Тогда $r := |x - a| < \varepsilon$ и $\delta := \varepsilon - r > 0$. Достаточно показать, что $U_\delta(x) \subset U_\varepsilon(a)$, т. е. что всякая точка $y$ из $U_\delta(x)$ принадлежит $U_\varepsilon(a)$. Пусть $y \in U_\delta(x)$, т. е. $|y - x| < \delta$. Тогда в силу неравенства треугольника

$$|y - a| \leqslant |y - x| + |x - a| < \delta + r = \varepsilon,$$

т. е. $y \in U_\varepsilon(a)$, что и требовалось доказать.

**Упражнение 1.** Доказать, что:

$1^\circ$ пересечение конечного числа открытых множеств является открытым множеством;

$2^\circ$ объединение любого набора открытых множеств является открытым множеством.

**Определение 2.** Всякое открытое множество, содержащее точку $x$, называется *окрестностью точки* $x$ и обозначается $U(x)$.

В силу леммы 1 $\varepsilon$-окрестность точки $x$ является её окрестностью. С другой стороны, для всякой окрестности $U(x)$ точки $x$ найдётся $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(x) \subset U(x)$.

**Упражнение 2.** Сформулировать определение предела $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = a$ последовательности, используя окрестности $U(a)$ вместо $\varepsilon$-окрестностей $U_\varepsilon(a)$.

В дальнейшем будут использоваться обозначения проколотых окрестностей:

$$\mathring{U}_\varepsilon(x) := U_\varepsilon(x) \setminus \{x\}, \quad \mathring{U}(x) := U(x) \setminus \{x\}.$$

**Определение 3.** Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется *предельной точкой множества* $E \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\exists\, \{x^{(m)}\}_1^\infty\colon a \neq x^{(m)} \in E \quad \forall\, m \in \mathbb{N},\ \lim_{m\to\infty} x^{(m)} = a.$$

**Определение 3$'$.** Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется *предельной точкой множества* $E \subset \mathbb{R}^n$, если

$$E \cap \mathring{U}_\varepsilon(a) \neq \varnothing \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

**Упражнение 3.** Доказать эквивалентность определений 3 и 3$'$.

**Определение 4.** Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Примерами замкнутых множеств являются $\mathbb{R}^n$, одноточечное множество, пустое множество $\varnothing$, замкнутый шар $\{x\colon |x-a| \leqslant r\}$ при $r > 0$, в том числе отрезок при $n = 1$.

**Упражнение 4.** Доказать, что

1° объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто;

2° пересечение любого набора замкнутых множеств замкнуто.

**Определение 5.** Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Множество

$$\overline{E} := E \cup \{x\colon x \in \mathbb{R}^n, x \text{ — предельная точка множества } E\}$$

называется *замыканием множества* $E$.

Используя символ $\overline{E}$, определение замкнутого множества можно сформулировать в виде $E = \overline{E}$.

**Лемма 2.** *Замыкание $\overline{E}$ множества $E \subset \mathbb{R}^n$ является замкнутым множеством.*

Доказательство. Случай $E = \varnothing$ тривиален. Пусть $E \neq \varnothing$ и $a$ — предельная точка множества $\overline{E}$. Требуется доказать, что $a \in \overline{E}$. По определению предельной точки

$$\exists\, \{y^{(m)}\}\colon a \neq y^{(m)} \in \overline{E}, \quad \varepsilon_m := |y^{(m)} - a| \to 0 \text{ при } m \to \infty.$$

Покажем, что $a$ — предельная точка множества $E$ (и, следовательно, $a \in \overline{E}$). Для этого построим последовательность

$$\{x^{(m)}\}\colon a \neq x^{(m)} \in E, \quad |x^{(m)} - a| \to 0 \text{ при } m \to \infty.$$

Если $y^{(m)} \in E$, то положим $x^{(m)} = y^{(m)}$. Если $y^{(m)} \notin E$, то $y^{(m)}$ — предельная точка множества $E$ (поскольку $y^{(m)} \in \overline{E}$). В этом случае найдется такая точка $x^{(m)}$ множества $E$, что $|x^{(m)} - y^{(m)}| < (1/2)\,\varepsilon_m$. Итак, для построенной последовательности $\{x^{(m)}\}$ имеем: $x^{(m)} \in E$,

$$|x^{(m)} - a| \leqslant |x^{(m)} - y^{(m)}| + |y^{(m)} - a| < \frac{3}{2}\,\varepsilon_m.$$

Отсюда видно, что $a$ — предельная точка множества $E$, что и требовалось доказать.

Доказанную лемму можно сформулировать в виде

$$\overline{\overline{E}} = \overline{E}.$$

Часто открытое множество обозначается буквой $G$, а замкнутое — буквой $F$.

**Упражнение 5.** Доказать, что если множество $F$ замкнуто, а $G$ открыто, то $F \setminus G$ замкнуто, а $G \setminus F$ открыто.

**Определение 6.** Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется *граничной точкой множества* $E \subset \mathbb{R}^n$, если $U_\varepsilon(a)$ при любом $\varepsilon > 0$ содержит как точки из $E$, так и точки не из $E$.

*Границей* $\partial E$ *множества* $E \subset \mathbb{R}^n$ называется множество граничных точек множества $E$.

Граничная точка множества $E$ может как принадлежать, так и не принадлежать множеству $E$. Так,

$$\partial U_\varepsilon(a) = \{x\colon |x-a| = \varepsilon\}, \quad U_\varepsilon(a) \cap \partial U_\varepsilon(a) = \varnothing,$$

$$\partial\{x\colon |x-a| \leqslant \varepsilon\} = \{x\colon |x-a| = \varepsilon\} \subset \{x\colon |x-a| \leqslant \varepsilon\}.$$

**Упражнение 6.** Доказать, что:

1° множество $E$ открыто тогда и только тогда, когда $E \cap \partial E = \varnothing$;

2° множество $E$ замкнуто тогда и только тогда, когда $\partial E \subset E$;

3° множество $E \subset \mathbb{R}^n$ замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение $\mathbb{R}^n \setminus E$ открыто;

4° множество $E \subset \mathbb{R}^n$ открыто тогда и только тогда, когда его дополнение замкнуто.

Указание. При доказательстве 3° можно использовать равенство $\partial E = \partial(\mathbb{R}^n \setminus E)$, вытекающее из определения границы.

Множество $\operatorname{int} E := \{x\colon x$ — внутренняя точка множества $E\}$ называется *внутренностью* множества $E$.

**Упражнение 7.** Доказать, что для $E \subset \mathbb{R}^n$ справедливы утверждения:

1° $\partial E$ — замкнутое множество ($\overline{\partial E} = \partial E$);

2° $E \setminus \partial E = \operatorname{int} E$;

3° $E \cup \partial E = \overline{E}$.

**Определение 7.** *Диаметром* непустого *множества* $E \subset \mathbb{R}^n$ называется число

$$\operatorname{diam} E := \sup_{x,y \in E} |x - y|.$$

**Определение 8.** *Расстоянием между* двумя непустыми *множествами* $E, F \subset \mathbb{R}^n$ называется число

$$\operatorname{dist}(E, F) := \inf_{x \in E, y \in F} |x - y|.$$

**Определение 9.** Непустое ограниченное замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$ называется *компактом.*

**Лемма 3.** *Пусть $E$, $F$ — компакты в $\mathbb{R}^n$, $E \cap F = \varnothing$. Тогда $\operatorname{dist}(E, F) > 0$.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{dist}(E, F) = d$. Из определения расстояния между множествами следует, что существуют две последовательности

$$\{x^{(m)}\},\ \{y^{(m)}\}, \quad x^{(m)} \in E,\ y^{(m)} \in F \quad \forall\, m \in \mathbb{N},$$

такие, что $|x^{(m)} - y^{(m)}| \to d$ $(m \to \infty)$.

С помощью теоремы Больцано–Вейерштрасса выделим из $\{x^{(m)}\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{x^{(m_k)}\}_{k=1}^{\infty}$, а затем из $\{y^{(m_k)}\}_{k=1}^{\infty}$ сходящуюся подпоследовательность $\{y^{(m_{k_j})}\}_{j=1}^{\infty}$, такую, что

$$x^{(m_{k_j})} \to a, \quad y^{(m_{k_j})} \to b \text{ при } j \to \infty.$$

В силу замкнутости множеств $E$, $F$ имеем $a \in E$, $b \in F$. Тогда

$$d \leqslant |a - b| \leqslant$$
$$\leqslant |a - x^{(m_{k_j})}| + |b - y^{(m_{k_j})}| + |x^{(m_{k_j})} - y^{(m_{k_j})}| \to 0 + 0 + d = d$$

при $j \to \infty$. Следовательно, $d = |a - b|$. Но $a \neq b$, так как $E \cap F = \varnothing$. Поэтому $d > 0$.

**Упражнение 8.** Обобщить лемму 3 на случай, когда $E$ — непустое замкнутое множество, $F$ — компакт.

**Определение 10.** Множество точек $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ с его конкретным описанием

$$\Gamma = \{x(t)\colon \alpha \leqslant t \leqslant \beta\} = \{(x_1(t), \ldots, x_n(t))\colon \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}, \qquad (1)$$

где $x_i$ — непрерывные на $[\alpha, \beta]$ функции $(i = 1, \ldots, n)$, называется (*непрерывной*) *кривой.*

При этом точка $x(\alpha)$ называется *началом кривой*, а точка $x(\beta)$ — *концом кривой.*

**Определение 11.** *Областью* в $\mathbb{R}^n$ называется открытое связное множество, т. е. такое открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$, что для любых двух его точек $a$, $b$ существует кривая $\Gamma$ вида (1), лежащая в $G$ ($\Gamma \subset G$) и соединяющая точки $a$ и $b$ ($x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$).

**Определение 12.** Замыкание $\overline{G}$ области $G \subset \mathbb{R}^n$ называется *замкнутой областью*.

**Упражнение 9.** Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называют *связным*, если для любого его разбиения на два непустых непересекающихся множества $X$ и $Y$ ($E = X \cup Y$, $X \cap Y = \varnothing$) существует принадлежащая $E$ точка, являющаяся граничной для $X$ и для $Y$ ($E \cap \partial X \cap \partial Y \neq \varnothing$). Доказать, что для открытого множества $E$ такое определение связности эквивалентно определению связности из определения 11.

**Упражнение 10.** Доказать следующую лемму.

**Лемма 4** (Гейне–Бореля). *Пусть $K$ — компакт в $\mathbb{R}^n$ и $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$ — покрытие $K$ открытыми множествами $G_k$ (т. е. $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k$). Тогда из $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$ можно выделить конечное покрытие $\{G_{k_i}\}_{i=1}^{m}$, $m \in \mathbb{N}$, компакта $K$.*

## § 10.3. Предел функции многих переменных

Будем рассматривать функции

$$f\colon X \to \mathbb{R}, \quad X \subset \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

т. е. числовые функции, определённые на множестве $X$ точек метрического пространства $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Множество $X$ называется *областью определения функции* $f$. Через $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ обозначается *значение функции* $f$ в точке $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$.

*Графиком функции* $f$ называется множество точек $\{(x, x_{n+1}) := (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in X,\ x_{n+1} = f(x)\}$.

**Определение 1.** Будем говорить, что функция $f$:

1° определена в точке $x$, если $x \in X$;

2° не определена в точке $x$, если $x \notin X$;

3° определена на множестве $E$, если $E \subset X$.

**Определение 2.** Пусть функция $f$ определена на множестве $E$ и $x^{(0)}$ — предельная точка множества $E$. Число $A$ называется *пределом функции $f$ при $x \to x^{(0)}$ по множеству $E$* (пишется $\lim\limits_{E \ni x \to x^{(0)}} f(x) = A$), если:

1) $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0$: $|f(x) - A| < \varepsilon\ \forall\,x \in E,\ 0 < |x - x^{(0)}| < \delta$, или

2) $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,U(x^{(0)})$: $|f(x) - A| < \varepsilon\ \forall\,x \in E \cap \mathring{U}(x^{(0)})$, или

3) $\lim\limits_{m\to\infty} f(x^{(m)}) = A\ \forall\,\{x^{(m)}\}$: $x^{(m)} \in E \setminus \{x^{(0)}\}$, $x^{(m)} \to x^{(0)}$ при $m \to \infty$.

Здесь даны три определения предела, их эквивалентность устанавливается так же, как в случае $n = 1$.

**Упражнение 1.** Сформулировать обобщение определения предела на случаи $A \in \overline{\mathbb{R}}$, $A \in \widehat{\mathbb{R}}$, ориентируясь на соответствующие обобщения для $n = 1$.

**Замечание 1.** Если $E \supset \mathring{U}_\delta(x^{(0)})$ при некотором $\delta > 0$ или $E = X$, то вместо $\lim\limits_{E\ni x\to x^{(0)}} f(x)$ пишут просто $\lim\limits_{x\to x^{(0)}} f(x)$ и этот предел называют *пределом функции* $f$ при $x \to x^{(0)}$.

**Теорема 1** (критерий Коши существования конечного предела функции). *Пусть функция $f$ определена на множестве $E$ и $x^{(0)}$ — предельная точка множества $E$. Для существования конечного предела $\lim\limits_{E\ni x\to x^{(0)}} f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Коши:*

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta > 0\colon |f(x') - f(x'')| < \varepsilon \quad \forall\,x', x'' \in E \cap \mathring{U}_\delta(x^{(0)}).$$

Доказательство не отличается по существу от приведённого выше для функций одного переменного.

Пределы функций многих переменных по множеству обладают арифметическими свойствами и свойствами, связанными с неравенствами, аналогичными соответствующим свойствам пределов функций одного переменного. Доказательства этих свойств аналогичны доказательствам теорем 3.4.1 и 3.4.2 для функций одного переменного.

**Определение 3.** Функция $f$, определённая на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, называется *ограниченной на множестве* $E$, если множество $f(E)$ ограничено, т. е. если существует число $B > 0$ такое, что

$$|f(x)| \leqslant B \quad \forall\,x \in E.$$

Аналогично вводятся (ср. случай $n = 1$) понятия ограниченности сверху (снизу) функции $f$ на множестве $E$.

**Теорема 2.** *Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $x^{(0)}$ — предельная точка множества $E$, и пусть существует конечный предел $\lim\limits_{E\ni x\to x^{(0)}} f(x)$. Тогда при некотором $\delta > 0$ функция $f$ ограничена на $E \cap \mathring{U}_\delta$.*

Доказательство такое же, как в случае $n = 1$, $E = U(x_0)$.

**Определение 4.** Если в определении предела функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ по множеству $E \subset X$ в качестве множества $E$ при некотором $\delta_0 > 0$ взято пересечение $\mathring{U}_{\delta_0}(x^{(0)})$ с некоторой кривой $\Gamma$ (проходящей через $x^{(0)}$), либо с прямой $L$ (проходящей через $x^{(0)}$), либо с лучом $l = \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ x = x^{(0)} + te,\ t \geqslant 0\}$, $|e| = 1$, то $\lim\limits_{E \ni x \to x^{(0)}} f(x)$ называется *пределом функции $f$ в точке $x^{(0)}$* соответственно *по кривой $\Gamma$, по прямой $L$, по направлению $e$.*

Очевидно, $\lim\limits_{l \ni x \to x^{(0)}} f(x)$ совпадает с $\lim\limits_{t \to 0+0} f(x_1^{(0)} + te_1, \ldots, x_n^{(0)} + te_n)$, где $e = (e_1, \ldots, e_n)$.

Если функция $f$ имеет предел в точке $x^{(0)}$, то она имеет в этой точке и пределы по всем направлениям, причём значения этих пределов совпадают с пределом функции $f$ в точке $x^{(0)}$. Обратное неверно, что видно на примере функции двух переменных

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } y = x^2, \\ 0 & \text{при } y \neq x^2, \end{cases}$$

которая в точке $(0, 0)$ не имеет предела, но имеет равные нулю пределы по каждому направлению.

**Упражнение 2.** Показать, что функция двух переменных

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad (x^2 + y^2 > 0)$$

имеет в точке $(0, 0)$ по каждому направлению предел, значение которого зависит от направления.

На примере функций двух переменных рассмотрим иное понятие предельного перехода, состоящее в последовательном предельном переходе по различным переменным.

**Определение 5.** Пусть функция $f$ определена на проколотой окрестности точки $(x_0, y_0)$. *Повторными пределами функции $f$ в точке* $(x_0, y_0)$ называют пределы

$$\lim_{x \to x_0} \left( \lim_{y \to y_0} f(x, y) \right), \quad \lim_{y \to y_0} \left( \lim_{x \to x_0} f(x, y) \right).$$

Покажем на примерах, что существование повторных пределов не связано с существованием обычного предела.

**Пример 1.**

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad (x^2+y^2>0).$$

Оба повторных предела существуют и равны нулю, а $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ не существует.

**Пример 2.**

$$g(x,y) = \begin{cases} y\sin\dfrac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Тогда $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} g(x,y)) = 0$, а повторный предел $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} g(x,y))$ не существует.

**Пример 3.**

$$h(x,y) = \frac{y^2}{x^2+y^2} \quad (x^2+y^2>0).$$

$\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} h(x,y)) = 0 \neq \lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} h(x,y)) = 1.$

**Упражнение 3.** Доказать, что если существует $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = A \in \mathbb{R}$ и при некотором $\delta > 0$ для любого $y \in \overset{\circ}{U}_\delta(0)$ существует $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$, то существует $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)) = A$.

## § 10.4. Функции, непрерывные в точке

**Определение 1.** Пусть функция

$$f\colon X \to \mathbb{R}, \quad X \subset \mathbb{R}^n,$$

определена на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ (т. е. $E \subset X$), и пусть $x^{(0)} \in E$.

Говорят, что функция $f$ *непрерывна в точке* $x^{(0)}$ *по множеству* $E$, если

1) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $|f(x) - f(x^{(0)})| < \varepsilon$ при $x \in E$, $|x - x^{(0)}| < \delta$ (в иной записи: $f(E \cap U_\delta(x^{(0)})) \subset U_\varepsilon(f(x^{(0)}))$), или

2) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, U(x^{(0)})$: $|f(x) - f(x^{(0)})| < \varepsilon\ \forall\, x \in E \cap U(x^{(0)})$ (в иной записи: $f(E \cap U(x^{(0)})) \subset U_\varepsilon(f(x^{(0)}))$), или

3) $\lim\limits_{m\to\infty} f(x^{(m)}) = f(x^{(0)})\ \forall\, \{x^{(m)}\}$: $x^{(m)} \in E$, $x^{(m)} \to x^{(0)}$ при $m \to \infty$.

Здесь даны три определения непрерывности функции в точке по множеству. Их эквивалентность вытекает из эквивалентности соответствующих определений предела функции в точке. Следует лишь учесть следующие замечания.

**Замечание 1.** Если $x^{(0)}$ — предельная точка множества $E$, то непрерывность функции $f$ в точке $x^{(0)}$ по множеству $E$ равносильна тому, что $\lim\limits_{E \ni x \to x^{(0)}} f(x) = f(x^{(0)})$.

**Замечание 2.** Если $x^{(0)}$ — изолированная точка множества $E$ (т. е. $E \cap \mathring{U}_\delta(x^{(0)}) = \varnothing$ при некотором $\delta > 0$), то всякая функция $f$ непрерывна в точке $x^{(0)}$ по множеству $E$, а понятие предела функции $f$ в точке $x^{(0)}$ по множеству $E$ не определено.

Арифметические свойства функций, непрерывных в точке $x^{(0)}$ по множеству $E$, и свойство ограниченности функции $f$ на $E \cap U_\delta(x^{(0)})$ при достаточно малом $\delta > 0$ очевидны, если $x^{(0)}$ — изолированная точка множества $E$, и вытекают непосредственно из соответствующих свойств пределов, если $x^{(0)}$ — предельная точка множества $E$.

**Лемма 1** (о сохранении знака). *Пусть функция $f$ непрерывна в точке $x^{(0)} \in E$ по множеству $E$, $f(x^{(0)}) \neq 0$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что*

$$\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} f(x^{(0)}) \quad \forall\, x \in E \cap U_\delta(x^{(0)}).$$

Доказательство такое же, как в случае $n = 1$.

Рассмотрим вопрос о непрерывности композиции (суперпозиции) функций (сложной функции).

**Теорема 1.** *Пусть $x^{(0)} \in E \subset \mathbb{R}^n$, и пусть каждая из $m$ функций $f_1$, ..., $f_m$ непрерывна в точке $x^{(0)}$ по множеству $E$. Пусть также*

$$(f_1(x), \ldots, f_m(x)) \in F \subset \mathbb{R}^m \quad \forall\, x \in E$$

*и функция $g$ непрерывна в точке $y^{(0)} = (f_1(x^{(0)}), \ldots, f_m(x^{(0)}))$ по множеству $F$.*

*Тогда определённая на $E$ сложная функция*

$$h(x) := g(f_1(x), \ldots, f_m(x)), \quad h\colon E \to \mathbb{R},$$

*непрерывна в точке $x^{(0)}$ по множеству $E$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists\, \eta = \eta(\varepsilon) > 0$:

$$|g(y) - g(y^{(0)})| < \varepsilon \text{ при } y \in F \cap U_\eta(y^{(0)}).$$

Выберем теперь $\delta = \delta(\eta) = \delta(\eta(\varepsilon)) = \delta_\varepsilon > 0$ столь малым, что

$$|f_1(x) - f_1(x^{(0)})| < \frac{\eta}{\sqrt{m}}, \ldots, |f_m(x) - f_m(x^{(0)})| < \frac{\eta}{\sqrt{m}} \quad (1)$$

при $x \in E \cap U_\delta(x^{(0)})$.

Мы использовали непрерывность функций $g$, $f_1$, …, $f_m$ в соответствующих точках. Из написанных соотношений, считая, что

$$y = (y_1, \ldots, y_m) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)),$$

получаем, что при $x \in E \cap U_\delta(x^{(0)})$:

$$|y - y^{(0)}| = \left\{ \sum_{i=1}^{m} [f_i(x) - f_i(x^{(0)})]^2 \right\}^{1/2} < \eta,$$

$$|h(x) - h(x^{(0)})| = |g(f_1(x), \ldots, f_m(x)) -$$
$$- g(f_1(x^{(0)}), \ldots, f_m(x^{(0)}))| = |g(y) - g(y^{(0)})| < \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ это означает, что $h$ непрерывна в $x^{(0)}$ по множеству $E$.

**Упражнение 1.** Сформулировать и доказать теорему о пределе сложной функции, аналогичную теореме 1 о непрерывности сложной функции. Сравнить с соответствующими теоремами для $n = m = 1$.

## § 10.5. Функции, непрерывные на множестве

**Определение 1.** *Верхней* (*нижней*) *гранью на множестве* $E \subset \mathbb{R}^n$ функции $f$, определённой на $E$, называется

$$\sup_E f := \sup_{x \in E} f(x) \quad (\inf_E f := \inf_{x \in E} f(x)).$$

**Определение 2.** Функция $f$, непрерывная в каждой точке $x \in E \subset \mathbb{R}^n$ по множеству $E$, называется *непрерывной на множестве* $E$.

**Теорема 1** (Вейерштрасса). *Пусть функция $f$ непрерывна на компакте $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда она ограничена на $E$ и достигает на $E$ своих верхней и нижней граней.*

Д о к а з а т е л ь с т в о проведём лишь для случая верхней грани. Как увидим, оно повторяет доказательство теоремы Вейерштрасса для случая $n = 1$, $E = [a, b]$.

Пусть $B := \sup_E f \leqslant +\infty$. Из определения верхней грани следует, что существует последовательность точек $\{x^{(m)}\}$, $x^{(m)} \in E$ $\forall\, m \in \mathbb{N}$, такая, что $\lim_{m \to \infty} f(x^{(m)}) = B$. Последовательность

$\{x^{(m)}\}$ ограничена в силу ограниченности множества $E$. На основании теоремы 10.1.2 Больцано–Вейерштрасса выделим из $\{x^{(m)}\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{x^{(m_k)}\}_{k=1}^{\infty}$. Пусть $x^{(0)} = \lim\limits_{k\to\infty} x^{(m_k)}$. Точка $x^{(0)}$ принадлежит $E$ в силу замкнутости $E$. Следовательно, $f$ непрерывна в точке $x^{(0)}$ по множеству $E$.

Теперь из соотношений

$$f(x^{(m_k)}) \to B, \quad f(x^{(m_k)}) \to f(x^{(0)}) \text{ при } k \to \infty$$

вытекает, что $f(x^{(0)}) = B$, т. е. что верхняя грань функции $f$ достигается в точке $x^{(0)} \in E$. Следовательно, верхняя грань $\sup\limits_E f$ конечна, а функция $f$ ограничена сверху на $E$.

Аналогично доказывается, что функция $f$ достигает своей нижней грани на $E$ и ограничена снизу на $E$. Теорема доказана.

**Определение 3.** Функция $f$ называется *равномерно непрерывной на множестве* $E \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \colon |f(x') - f(x'')| < \varepsilon \quad \forall\, x', x'' \in E \colon |x' - x''| < \delta. \tag{1}$$

Если функция $f$ равномерно непрерывна на $E$, то она и непрерывна на $E$ (т. е. непрерывна в каждой точке $x^{(0)} \in E$). В этом убеждаемся сразу, положив в (1) $x' = x$, $x'' = x^{(0)}$.

Обратное неверно. Например, при $n = 1$ функции $f(x) = 1/x$, $g(x) = \sin(1/x)$, непрерывные на $E = (0, 1)$, не являются равномерно непрерывными на $E$.

Однако если $E$ — компакт, то непрерывность функции на $E$ эквивалентна равномерной непрерывности этой функции на $E$ в силу следующей теоремы.

**Теорема 2** (Кантора). *Пусть функция $f$ непрерывна на компакте $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда $f$ равномерно непрерывна на $E$.*

Доказательство. Предположим, что теорема неверна, т. е. что существует функция $f$, непрерывная, но не равномерно непрерывная на $E$. Тогда

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0 \colon \forall\, \delta > 0\; \exists\, x, y \in E \colon |x - y| < \delta,\ |f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon_0.$$

Будем в качестве $\delta$ брать $\delta_m = 1/m$ и обозначать через $x^{(m)}$, $y^{(m)}$ соответствующую пару точек $x$, $y$.

Тогда имеем

$$x^{(m)}, y^{(m)} \in E, \quad |x^{(m)} - y^{(m)}| < \frac{1}{m},$$

$$|f(x^{(m)}) - f(y^{(m)})| \geqslant \varepsilon_0 > 0.$$

Выделим из последовательности $\{x^{(m)}\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{x^{(m_k)}\}_{k=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(m_k)} = x^{(0)}$, что возможно по теореме Больцано–Вейерштрасса в силу ограниченности $\{x^{(m)}\}$. Тогда из $|x^{(m)} - y^{(m)}| < 1/m$ следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} y^{(m_k)} = x^{(0)}$. Точка $x^{(0)} \in E$, так как $E$ замкнуто. В силу непрерывности $f$ в точке $x^{(0)}$ по множеству $E$ имеем

$$f(x^{(m_k)}) \to f(x^{(0)}), \quad f(y^{(m_k)}) \to f(x^{(0)}) \text{ при } k \to \infty,$$

так что

$$|f(x^{(m_k)}) - f(y^{(m_k)})| \leqslant |f(x^{(m_k)}) - f(x^{(0)})| + \\ + |f(y^{(m_k)}) - f(x^{(0)})| \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Это противоречит тому, что

$$|f(x^{(m_k)}) - f(y^{(m_k)})| \geqslant \varepsilon_0 > 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Теорема доказана.

**Упражнение 1.** Пусть функция $f$: $(a, b) \to \mathbb{R}$ имеет ограниченную производную на $(a, b)$. Показать, что $f$ равномерно непрерывна на $(a, b)$.

**Определение 4.** Пусть функция $f$ определена на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$. Её *модулем непрерывности* (на $E$) называется функция $\omega$: $(0, +\infty) \to [0, +\infty)$, где

$$\omega(\delta) = \omega(\delta; f) = \omega(\delta; f; E) = \sup\{|f(x) - f(y)|: \\ x, y \in E,\ |x - y| \leqslant \delta\}.$$

Очевидно, что $\omega$ — возрастающая функция и что для *выпуклого множества* $E$ (т. е. для множества, вместе с каждыми двумя точками содержащего и все точки отрезка, соединяющего эти две точки)

$$\omega(\delta_1 + \delta_2) \leqslant \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2) \text{ при } \delta_1, \delta_2 > 0.$$

**Теорема 3.** *Пусть функция $f$ определена на $E \subset \mathbb{R}$. Тогда для её равномерной непрерывности на $E$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\omega(0 + 0; f; E) = 0.$$

Доказательство.

1°. Пусть $f$ равномерно непрерывна на $E$. Тогда из (1) следует, что

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0\colon \omega(\delta; f) \leqslant \varepsilon < 2\varepsilon$$

при $0 < \delta < \delta(\varepsilon)$.

Следовательно, $\omega(0+0; f) = 0$.

2° Пусть $\omega(0+0; f) = 0$. Тогда

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0\colon \omega(\delta(\varepsilon); f) < \varepsilon.$$

Поэтому выполняется (1), т. е. функция $f$ равномерно непрерывна на $E$.

**Теорема 4** (Коши о промежуточном значении функции). *Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$, функция $f$ непрерывна на $G$. Тогда если $a, b \in G$, $f(a) < f(b)$, то*

$$\forall\, C \in (f(a), f(b)) \quad \exists\, c \in G\colon f(c) = C.$$

Доказательство. Напомним, что область — это открытое связное множество, так что для точек $a, b \in G$ существует кривая

$$\varGamma = \{x = \varphi(t)\colon \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}, \quad \varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b, \quad \varGamma \subset G.$$

Рассмотрим сложную функцию $g(t) = f(\varphi(t))$. Она непрерывна на $[\alpha, \beta]$ по теореме о непрерывности сложной функции. Кроме того, $g(\alpha) = f(a)$, $g(\beta) = f(b)$. По теореме Коши о промежуточном значении функции, непрерывной на отрезке,

$$\exists\, \xi \in [\alpha, \beta]\colon g(\xi) = f(\varphi(\xi)) = C.$$

Взяв $c = \varphi(\xi)$, приходим к утверждению теоремы.

**Следствие.** *Теорема Коши о промежуточном значении сохранится, если в её формулировке заменить область $G$ на замкнутую область $\overline{G}$.*

Доказательство. Напомним, что замкнутой областью называется замыкание области. Пусть $a, b \in \overline{G}$, $f(a) < C < f(b)$. Возьмём $\varepsilon_0 > 0$ столь малым, что $f(a) + \varepsilon_0 < C < f(b) - \varepsilon_0$. В силу непрерывности функции $f$ в точках $a$, $b$, найдутся точки $a^{(0)}$, $b^{(0)} \in G$ такие, что

$$|f(a) - f(a^{(0)})| < \varepsilon_0, \quad |f(b) - f(b^{(0)})| < \varepsilon_0.$$

Тогда $f(a^{(0)}) < C < f(b^{(0)})$, и остаётся применить доказанную теорему.

**Упражнение 2.** Доказать, что теорема 4 останется верной, если в её формулировке заменить область $G$ на произвольное связное множество (см. упр. 10.2.9).

Глава 11

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В этой главе изучаются дифференциальные свойства функций во внутренних точках их областей определения.

## § 11.1. Частные производные и дифференцируемость функций многих переменных

Пусть функция $f$ определена на некоторой окрестности точки $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$. Зафиксировав $x_2 = x_2^{(0)}$, $x_3 = x_3^{(0)}$, …, $x_n = x_n^{(0)}$, получим функцию одного переменного $f(x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$. Если она имеет производную в точке $x_1^{(0)}$, то эта производная называется *частной производной функции $f$ по $x_1$ в точке $x^{(0)}$* и обозначается

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^{(0)}), \quad f'_{x_1}(x^{(0)}) \quad \text{или} \quad f_{x_1}(x^{(0)}).$$

Таким образом,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) = \frac{df}{dx_1}(x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})\bigg|_{x_1 = x_1^{(0)}}.$$

Частные производные функции $f$ в точке $x^{(0)}$ по другим переменным $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x^{(0)})$, …, $\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x^{(0)})$ определяются аналогичным образом.

Сравнивая значения функции в точках $x$ и $x^{(0)}$, символом $\Delta x$ часто обозначают *приращение аргумента*: $\Delta x := x - x^{(0)}$. Таким образом,

$$\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) := (x_1 - x_1^{(0)}, \ldots, x_n - x_n^{(0)}),$$
$$|\Delta x| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\Delta x_i|^2\right)^{1/2}.$$

*Приращением функции $f$ в точке $x^{(0)}$*, соответствующим приращению аргумента $\Delta x$, называют

$$\Delta f(x^{(0)}) = f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)}) = \\ = f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, \ldots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) - f(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}).$$

**Определение 1.** Функция $f$ называется *дифференцируемой в точке* $x^{(0)}$, если приращение функции $f$ в точке $x^{(0)}$ можно представить в виде

$$\Delta f(x^{(0)}) = f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)}) = \\ = \sum_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i + o(|\Delta x|) \text{ при } \Delta x \to \mathbf{0}, \quad (1)$$

где $A_1$, …, $A_n$ — некоторые действительные числа, $\mathbf{0} = (0, \ldots$ …, 0).

В правой части (1) символ «$o$ малое» имеет тот же смысл, что и в случае функций одного переменного, так что вместо $o(|\Delta x|)$ можно написать $\varepsilon(\Delta x)|\Delta x|$, где функция $\varepsilon$ определена на $\mathring{U}(\mathbf{0})$, $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to \mathbf{0}$.

**Замечание 1.** Определение 1 останется эквивалентным, если в правой части (1) вместо $o(|\Delta x|)$ написать $\sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i(\Delta x)\Delta x_i$, где функции $\varepsilon_i$ определены на некоторой проколотой окрестности нуля $\mathring{U}(\mathbf{0})$, $\varepsilon_i(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to \mathbf{0}$. В самом деле, $\sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i(\Delta x)\Delta x_i = o(|\Delta x|)$, а с другой стороны,

$$\varepsilon(\Delta x)|\Delta x| = \varepsilon(\Delta x) \frac{|\Delta x|}{\sum\limits_{i=1}^{n} |\Delta x_i|} \sum_{i=1}^{n} |\Delta x_i| =: \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(\Delta x)\Delta x_i.$$

**Теорема 1.** *Пусть функция $f$ дифференцируема в точке $x^{(0)}$. Тогда в этой точке существуют частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ и $A_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})$ для всех $i = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. В (1) будем считать, что $\Delta x_1 \neq 0$, $\Delta x_2 = \ldots = \Delta x_n = 0$, т. е. $\Delta x = (\Delta x_1, 0, \ldots, 0)$. Тогда $f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) = A_1 \Delta x_1 + \varepsilon(\Delta x)|\Delta x_1|$.

Поделив обе части этого равенства на $\Delta x_1$ и переходя к пределу при $\Delta x_1 \to 0$, получим, что $\exists\, \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = A_1$. Аналогично доказывается, что $\exists\, \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = A_i$ при $i = 2, \ldots, n$.

Доказанная теорема даёт возможность записать формулу (1) в виде

$$\Delta f(x^{(0)}) = f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)}) = \\ = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})\Delta x_i + o(|\Delta x|) \text{ при } \Delta x \to \mathbf{0}. \quad (2)$$

**Определение 2.** Линейная функция

$$df(x^{(0)}) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})\Delta x_i, \quad \Delta x_i \in \mathbb{R} \quad (i = 1, \ldots, n),$$

называется *дифференциалом функции* $f$ в точке $x^{(0)}$.

Формулу (1) можно переписать, очевидно, и так:

$$\Delta f(x^{(0)}) = df(x^{(0)}) + o(|\Delta x|) \text{ при } \Delta x \to \mathbf{0}.$$

Ради симметрии записи дифференциал функции часто записывают в виде

$$df(x^{(0)}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i}\, dx_i, \quad dx_i \in \mathbb{R} \quad (i = 1, \ldots, n),$$

а $dx_i$ называют *дифференциалами независимых переменных*.

**Теорема 2.** *Пусть функция* $f$ *дифференцируема в точке* $x^{(0)}$. *Тогда* $f$ *непрерывна в точке* $x^{(0)}$.

Доказательство. Из (1) видно, что $\Delta f(x^{(0)}) \to 0$ при $\Delta x \to \mathbf{0}$.

Сравним три свойства функции многих переменных в точке: непрерывность, существование всех частных производных $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, дифференцируемость. Соотношения между ними не такие, как в случае функции одного переменного. Именно, для функций $n \geqslant 2$ переменных:

1° дифференцируемость функции $f$ в точке влечёт существование частных производных $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ и непрерывность функции $f$ в этой точке (см. теоремы 1, 2);

2° из существования всех частных производных $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ и непрерывности функции $f$ в точке не следует дифференцируемость функции $f$ в этой точке;

3° из существования всех частных производных $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ в точке не следует непрерывность функции $f$ в этой точке.

Для обоснования п. 3° приведём пример функции двух переменных ($n = 2$)

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } x = y \neq 0, \\ 0 & \text{при } x \neq y \text{ и при } x = y = 0, \end{cases}$$

имеющей частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, но не являющейся непрерывной в точке $(0,0)$.

В силу теоремы 2 эта функция не является дифференцируемой в точке $(0,0)$. Тем самым данный пример показывает также, что существование всех частных производных $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ в точке $x^{(0)}$ не влечёт дифференцируемости функции $f$ в этой точке.

Для обоснования п. 2° приведём пример функции двух переменных

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|},$$

непрерывной в точке $(0,0)$ и имеющей частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, но не дифференцируемой в точке $(0,0)$. В самом деле, если допустить, что $f$ дифференцируема в точке $(0,0)$, то согласно (2) было бы верно равенство

$$f(x, y) = f(x, y) - f(0,0) = o(\sqrt{x^2 + y^2}\,) \text{ при } (x, y) \to (0,0),$$

противоречащее тому, что при $x = y$

$$f(x, x) = |x| \neq o(|x|) \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

Для обоснования 2° подходит и функция

$$f(x, y) = \begin{cases} x & \text{при } x = y, \\ 0 & \text{при } x \neq y. \end{cases}$$

В следующей теореме в терминах частных производных устанавливаются достаточные условия дифференцируемости функции в точке.

**Теорема 3.** *Пусть в точке $x^{(0)}$ непрерывны все частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ функции $f$. Тогда $f$ дифференцируема в точке $x^{(0)}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о ради простоты записи проведём для случая функции двух переменных ($n = 2$). Непрерывность частных производных функции $f$ переменных $x$, $y$ в точке $(x_0, y_0)$ включает в себя предположение о существовании этих производных на некоторой окрестности $U_\delta((x_0, y_0))$.

Считая $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 < \delta^2$, рассмотрим приращение функции

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + \\ + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)].$$

Правая часть равенства представляет собой сумму приращений функции по одному переменному при фиксированном другом. Применяя теорему Лагранжа о конечных приращениях по соответствующему переменному, имеем

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta y.$$

Производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в точке $(x_0, y_0)$. Поэтому

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y),$$

где $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2 \to 0$ при $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

Подставляя полученные выражения в $\Delta f(x_0, y_0)$, имеем

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \\ + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y.$$

В силу замечания 1 последнее равенство означает, что функция $f$ дифференцируема в точке $(x_0, y_0)$.

Теорема доказана.

**Упражнение 1.** Показать, что непрерывность частных производных функции в данной точке не является необходимым условием дифференцируемости функции в данной точке, рассмотрев пример функции двух переменных $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 y^2}$ или функции

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{x^2 + y^2} & \text{при } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{при } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

**Определение 3.** Функцию $f$, имеющую в точке или на множестве непрерывные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ при всех $i = 1, \ldots, n$, называют *непрерывно дифференцируемой в данной точке* или *на данном множестве* соответственно.

Заметим, что эта точка или все точки этого множества должны быть внутренними точками области определения функции $f$ в соответствии с определением частной производной.

Используя этот термин, последнюю теорему можно сформулировать так: *функция, непрерывно дифференцируемая в точке, дифференцируема в этой точке.*

## § 11.2. Геометрический смысл дифференциала функции и частных производных

Рассмотрим функцию $f\colon U_\delta(x_0, y_0) \to \mathbb{R}$ двух переменных $x$, $y$, заданную на $\delta$-окрестности точки $(x_0, y_0)$.

Тогда $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U_\delta(x_0, y_0),\ z = f(x, y)\}$ — её график.

**Определение 1.** Пусть функция $f$ дифференцируема в точке $(x_0, y_0)$. *Касательной плоскостью* к графику функции $f$ в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ называется плоскость, уравнение которой имеет вид

$$\begin{gathered} z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0), \\ z_0 = f(x_0, y_0). \end{gathered} \tag{1}$$

Эта плоскость проходит через точку $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, а разность между значением $z = f(x, y)$ функции в точке $(x, y)$ и аппликатой $z_{\text{кас}}$ точки $(x, y, z_{\text{кас}})$ касательной плоскости, как следует из (11.1.2) при $n = 2$ и из (1), равна

$$\begin{gathered} f(x, y) - z_{\text{кас}} = o\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\,\right) \\ \text{при } (x, y) \to (x_0, y_0). \end{gathered} \tag{2}$$

**Упражнение 1.** Показать, что (2) является определяющим свойством касательной плоскости в том смысле, что никакая другая плоскость таким свойством не обладает.

Указание. Можно рассуждать аналогично тому, как это делалось при изучении касательной к графику функции одного переменного.

Из (1) видно, что дифференциал функции $f$ в точке $(x_0, y_0)$ совпадает с приращением аппликаты касательной плоскости к графику функции $f$ в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ (ср. (1) и определение 11.1.2). В этом состоит геометрический смысл дифференциала функции.

Рассмотрим сечение $\varGamma := S\big|_{y=y_0}$ графика $S$ функции плоскостью $y = y_0$. Можно считать для простоты, что функция $f$ непрерывна на $\overline{U}_\delta(x_0, y_0)$. Тогда

$$\varGamma = \{(x, y_0, f(x, y_0)) \colon |x - x_0| \leqslant \delta\}$$

— кривая, лежащая в плоскости $y = y_0$, а

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) := \frac{d}{dx} f(x, y_0)\Big|_{x=x_0} = \operatorname{tg} \alpha,$$

где $\alpha$ — угол между осью $Ox$ и (лежащей в плоскости $y = y_0$) касательной к $\varGamma$ в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, отсчитываемый в направлении кратчайшего поворота от базисного вектора оси абсцисс к базисному вектору оси аппликат. В этом состоит геометрический смысл частной производной $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.

Аналогично устанавливается геометрический смысл частной производной $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

## § 11.3. Дифференцируемость сложной функции

**Теорема 1.** *Пусть каждая из $m$ функций $f_1$, …, $f_m$, зависящих от $n$ переменных, дифференцируема в точке $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.*

*Пусть функция $g$, зависящая от $m$ переменных, дифференцируема в точке $y^{(0)} = (f_1(x^{(0)}), \ldots, f_m(x^{(0)}))$.*

*Тогда сложная функция*

$$h(x) := g(f_1(x), \ldots, f_m(x))$$

*дифференцируема в точке $x^{(0)}$ и для её частных производных справедливы равенства*

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x^{(0)}) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_k}(y^{(0)}) \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x^{(0)}), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из дифференцируемости функций $f_k$ в точке $x^{(0)}$ и функции $g$ в точке $y^{(0)}$ следует непрерывность $f_k$ и $g$ в этих точках. Поэтому по теореме о непрерывности суперпозиции непрерывных функций функция $h$ определена на некоторой окрестности точки $x^{(0)}$ и непрерывна в точке $x^{(0)}$. В силу дифференцируемости функций $g$ и $f_k$ запишем:

$$\Delta g(y^{(0)}) = g(y^{(0)} + \Delta y) - g(y^{(0)}) = \\ = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_k}(y^{(0)})\Delta y_k + \varepsilon_0(\Delta y)|\Delta y|,$$

$$\Delta f_k(x^{(0)}) = f_k(x^{(0)} + \Delta x) - f_k(x^{(0)}) = \\ = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x^{(0)})\Delta x_i + \varepsilon_k(\Delta x)|\Delta x|,$$

где функции $\varepsilon_0(\Delta y)$, $\varepsilon_k(\Delta x)$ можно считать непрерывными и равными нулю в точках $\Delta y = \mathbf{0}$ и $\Delta x = \mathbf{0}$ соответственно.

Мы получим приращение функции $h$, вызванное приращением аргумента $\Delta x$, если в $\Delta g(y^{(0)})$ вместо $\Delta y_k$ при $k = 1, \ldots, m$ подставим приращения $\Delta f_k(x^{(0)})$ функций $f_k$, вызванные приращением $\Delta x$ их аргумента. Тогда получим, что при достаточно малых $|\Delta x|$

$$\Delta h(x^0) = h(x^{(0)} + \Delta x) - h(x^{(0)}) = \\ = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_k}(y^{(0)}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x^{(0)})\Delta x_i + \sigma(\Delta x), \quad (2)$$

где $\sigma(\Delta x) = o(|\Delta x|)$ при $\Delta x \to \mathbf{0}$.

В самом деле, здесь

$$\sigma(\Delta x) = \varepsilon_0(\Delta y)|\Delta y|\Big|_{\substack{\Delta y_i = \Delta f_i \\ (i=1,\ldots,m)}} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_k}(y^{(0)})\varepsilon_k(\Delta x)|\Delta x|,$$

причём при некотором $M > 0$

$$|\Delta y| \leqslant \sum_{k=1}^{m} |\Delta y_k| = \sum_{k=1}^{m} |\Delta f_k| \leqslant \sum_{k=1}^{m} M|\Delta x| = mM|\Delta x|,$$

а

$$\varepsilon_0(\Delta y)\Big|_{\substack{\Delta y_i = \Delta f_i \\ (i=1,\ldots,m)}} \to 0 \text{ при } \Delta x \to \mathbf{0}$$

по теореме о непрерывности сложной функции.

Равенство (2) показывает, что функция $h$ дифференцируема в точке $x^{(0)}$ и что производная $\dfrac{\partial h}{\partial x_i}(x^{(0)})$ совпадает с коэффициентом при $\Delta x_i$ в правой части (2), т. е. что справедливы формулы (1).

**Следствие.** *Пусть каждая из $m$ функций $f_1, \ldots, f_m$ от $n$ переменных $x_1, \ldots, x_n$ имеет непрерывные в точке $x^{(0)}$ частные производные $\dfrac{\partial f_k}{\partial x_i}$ $(i = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, m)$. Пусть* *функция $g$ от $m$ переменных имеет непрерывные в точке $y^{(0)} = (f_1(x^{(0)}), \ldots, f_m(x^{(0)}))$ частные производные $\dfrac{\partial g}{\partial y_k}$ ($k = 1, \ldots, m$).*

*Тогда сложная функция $h(x) = g(f_1(x), \ldots, f_m(x))$ дифференцируема в точке $x^{(0)}$ и для её частных производных $\dfrac{\partial h}{\partial x_i}(x^{(0)})$ справедливы равенства (1).*

В качестве другого следствия из теоремы 1 можно получить свойство *инвариантности формы первого дифференциала.*

В условиях теоремы на основании (1) можно записать

$$dg(f_1(x^{(0)}), \ldots, f_m(x^{(0)})) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} g(f_1(x^{(0)}), \ldots, f_m(x^{(0)}))\, dx_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g(y^{(0)})}{\partial y_k} \frac{\partial f_k(x^{(0)})}{\partial x_i} dx_i = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g(y^{(0)})}{\partial y_k} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k(x^{(0)})}{\partial x_i} dx_i.$$

Здесь $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f_k}{\partial x_i}\, dx_i$ является дифференциалом функции $y_k = f_k(x)$. Поэтому дифференциал функции $g(y) = g(y_1, \ldots, y_m)$, где $y_k = f_k(x)$ ($k = 1, \ldots, m$), в точке $y^{(0)}$ можно записать в виде

$$dg(y^{(0)}) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g(y^{(0)})}{\partial y_k}\, dy_k, \tag{3}$$

где $dy_k$ — дифференциалы функций. Мы видим, что дифференциал $dg(y)$ имеет ту же форму, что и в случае, когда $y_1$, …, $y_m$ — независимые переменные и, следовательно, $dy_1$, …, $dy_m$ — дифференциалы независимых переменных. В этом и состоит свойство инвариантности формы первого дифференциала.

Приведём пример его применения. Формулы

$$d(u \pm v) = du \pm dv,$$
$$d(uv) = v\, du + u\, dv,$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\, du - u\, dv}{v^2}$$

для независимых переменных $u$, $v$ следуют из выражения дифференциала функции через частные производные и дифференциалы независимых переменных. Эти формулы верны и в случае, когда $u$, $v$ являются функциями $u = u(x)$, $v = v(x)$ переменного $x = (x_1, \ldots, x_n)$ в силу инвариантности формы первого дифференциала.

Свойство инвариантности формы первого дифференциала можно использовать при нахождении дифференциалов и производных сложных функций, сначала записывая дифференциал в виде (3), а затем выражая $dy_k$ через дифференциалы независимых переменных.

## § 11.4. Производная по направлению и градиент

Пусть функция $f$ определена на некоторой окрестности точки $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Пусть $e = (\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n)$ — единичный вектор, т. е. $|e| = 1$. Его координаты называют *направляющими косинусами* вектора $e$; $\sum\limits_{i=1}^{n} \cos^2\alpha_i = 1$.

Из точки $x^{(0)}$ проведём луч с направлением $e$:

$$x = (x_1, \ldots, x_n) = (x_1^{(0)} + t\cos\alpha_1, \ldots, x_n^{(0)} + t\cos\alpha_n), \; t \geqslant 0,$$
$$\text{или} \quad x = x^{(0)} + te, \quad t \geqslant 0.$$

**Определение 1.** *Производной функции $f$ в точке $x^{(0)}$ по направлению $e$* называется число

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x^{(0)}) := \lim_{t\to 0+0} \frac{f(x^{(0)} + te) - f(x^{(0)})}{t},$$

если этот предел существует и конечен.

Если функция $f$ дифференцируема в точке $x^{(0)}$, то по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x^{(0)}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \cos\alpha_i.$$

Если $n = 3$, то $e = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, где $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — углы между направлением вектора $e$ и положительными направлениями осей $Ox$, $Oy$, $Oz$ соответственно.

Для дифференцируемой в точке $(x_0, y_0, z_0)$ функции $f$ трёх переменных $x$, $y$, $z$

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\cos\alpha + \\ + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\cos\gamma.$$

Введём в рассмотрение вектор

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0) :=$$
$$:= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\right),$$

который называется *градиентом функции* $f$ в точке $(x_0, y_0, z_0)$.

Тогда, используя символ скалярного произведения, можно написать $\dfrac{\partial f}{\partial e} = (\operatorname{grad} f, e)$, т. е. *производная функции* $f$ *по направлению вектора* $e$ *совпадает с проекцией* $\operatorname{grad} f$ *на это направление.*

Из свойств скалярного произведения следует, что в точке $(x_0, y_0, z_0)$

$$\frac{\partial f}{\partial e} \leqslant |\operatorname{grad} f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

Если вектор $\operatorname{grad} f$ ненулевой, то существует единственное направление $e$, производная по которому $\dfrac{\partial f}{\partial e} = |\operatorname{grad} f|$. Это направление $e = \dfrac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|}$.

Отсюда вытекает геометрический смысл градиента: градиент — это вектор, по направлению которого производная имеет максимальное значение.

На этом основании условно можно сказать, что *направление градиента — это направление быстрейшего роста функции.*

## § 11.5. Частные производные и дифференциалы высших порядков

Если на некоторой окрестности точки $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ функция $f$ имеет частную производную $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, то в точке $x^{(0)}$ у этой производной может существовать частная производная $\dfrac{\partial}{\partial x_k}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)$. Если $k \neq i$, то эту производную называют *смешанной частной производной* второго порядка функции $f$ по переменным $x_i$ и $x_k$ и обозначают символом $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(x^{(0)})$ или $f''_{x_i x_k}(x^{(0)})$, а если $k = i$, то эту производную называют (*чистой*) *частной производной* второго порядка функции $f$ по переменному $x_i$ и обозначают символом $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x^{(0)})$ или $f''_{x_i x_i}(x^{(0)})$.

Аналогично вводятся частные производные третьего, четвёртого и вообще любого порядка, смешанные и чистые.

Частная производная порядка $m$ функции $f$ в точке $x^{(0)}$, вычисленная последовательным дифференцированием по $x_{i_1}, \ldots$ $\ldots, x_{i_m}$, обозначается символом $\dfrac{\partial^m f(x^{(0)})}{\partial x_{i_m} \ldots \partial x_{i_1}}$.

Если в данной точке $x^{(0)}$ существуют смешанные производные

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1},$$

то они не обязательно равны, в чём можно убедиться на примере функции двух переменных $x$, $y$

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2 + y^2} & \text{при } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{при } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

который мы предлагаем разобрать читателю.

Однако часто бывает, что смешанные производные, отличающиеся лишь порядком взятия частных производных, совпадают. В следующей теореме приводятся достаточные условия независимости смешанной производной от порядка дифференцирования.

**Теорема 1.** *Пусть у функции $f$ двух переменных $x, y$ частные производные $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ непрерывны в точке $(x_0, y_0)$.*

*Тогда*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0). \tag{1}$$

Доказательство. Обозначим символами $\Delta_x f$, $\Delta_y f$ приращения функции $f$ в точке $(x_0, y_0)$, вызванные приращением соответственно $\Delta x$ аргумента $x$ и $\Delta y$ аргумента $y$ при достаточно малых $|\Delta x|$, $|\Delta y|$. Легко убедиться, что

$$\Delta_x(\Delta_y f(x_0, y_0)) = \Delta_y(\Delta_x f(x_0, y_0))$$

(каждая из частей равенства совпадает с $f(x_0, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) + f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$). Из условий теоремы следует существование частных производных $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ на некоторой окрестности точки $(x_0, y_0)$. Применяя формулу конечных приращений Лагранжа к левой части равенства по аргументу $x$, а к правой — по $y$, имеем

$$\Delta_y \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0)\Delta x = \Delta_x \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta y.$$

Применяя к обеим частям последнего равенства ту же формулу Лагранжа по аргументам $y$ и $x$ соответственно, получим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_3 \Delta y)\Delta y \Delta x = \\ = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_4 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta x \Delta y,$$

где $0 < \theta_i < 1$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Сократим последнее равенство на $\Delta x \Delta y$. Считая в полученном равенстве $|\Delta x|$, $|\Delta y|$ сколь угодно малыми и учитывая непрерывность смешанных производных в точке $(x_0, y_0)$, приходим к (1).

С помощью теоремы 1 можно доказать её обобщение, относящееся к функциям $n$ переменных и к смешанным производным любого порядка $m \geqslant 2$.

**Теорема 2.** *Пусть у функции $n$ переменных в точке $x^{(0)} \in \in \mathbb{R}^n$ непрерывны все смешанные частные производные порядка $m \geqslant 2$, а в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$ непрерывны все производные порядков ниже $m$.*

*Тогда смешанные производные порядка $m$ в этой точке, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, совпадают.*

Доказательство. Пусть функция $f$ удовлетворяет условиям теоремы. Достаточно показать совпадение в точке $x^{(0)}$ двух смешанных частных производных: производной $\dfrac{\partial^m f}{\partial x_{i_m} \ldots \partial x_{i_1}}$ и производной, отличающейся от неё лишь порядком дифференцирования на $(k-1)$-м и $k$-м шагах при некотором и единственном $k$ $(2 \leqslant k \leqslant m)$.

Если $k = m$, то указанные две производные совпадают в точке $x^{(0)}$ в силу теоремы 1, применённой к функции $\dfrac{\partial^{m-2} f}{\partial x_{i_{m-2}} \ldots \partial x_{i_1}}$.

Если $k < m$, то достаточно убедиться в совпадении смешанных производных второго порядка

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x_{i_{k-1}} \partial x_{i_k}}, \quad \text{где} \quad g = \frac{\partial^{k-2} f}{\partial x_{i_{k-2}} \ldots \partial x_{i_1}},$$

в окрестности точки $x^{(0)}$, что следует из теоремы 1, применённой к функции $g$.

В качестве пояснения напишем цепочку равенств для случая $n = 3$, $m = 3$. Пусть мы хотим сравнить $f'''_{zyx} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$ и $f'''_{xyz} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}$. Тогда

$$
\begin{aligned}
f'''_{zyx} = (f'_z)''_{yx} = (f'_z)''_{xy} = (f''_{zx})'_y = \\
= (f''_{xz})'_y = (f'_x)''_{zy} = (f'_x)''_{yz} = f'''_{xyz}.
\end{aligned}
$$

Заметим, что в дальнейшем мы почти всегда будем рассматривать ситуации, в которых смешанные производные непрерывны и, следовательно, не зависят от порядка дифференцирования.

**Определение 1.** Функция $f$ называется *$m$ раз непрерывно дифференцируемой в точке* (*на множестве*), если все её частные производные порядка $m$ непрерывны в точке (на множестве). Заметим, что эта точка (каждая точка этого множества) считается внутренней точкой области определения функции $f$.

С помощью теорем 11.1.3 и 11.1.2 получаем, что $m$ раз непрерывно дифференцируемая в точке (на открытом множестве) функция имеет непрерывные в этой точке (на этом открытом множестве) все частные производные порядков не выше $m$.

Введём теперь понятие дифференциалов высших порядков. Пусть функция $f$ дифференцируема на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$. Её дифференциал, называемый также *первым дифференциалом*, или *дифференциалом первого порядка*, имеет вид

$$
df(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, dx_i, \quad x \in G.
$$

Будем изучать его как функцию точки $x$. Если все частные производные первого порядка функции $f$ дифференцируемы на $G$, то существует дифференциал $\delta(df(x))$ от первого дифференциала. При вычислении $\delta(df(x))$ дифференциалы $dx_i$ считаются постоянными. Имеем тогда

$$
\begin{aligned}
\delta(df(x)) = \sum_{i=1}^{n} \delta\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right) dx_i = \\
= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)\delta x_j\right) dx_i = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)\, dx_i\, \delta x_j.
\end{aligned}
$$

Значение дифференциала от первого дифференциала функции $f$ в точке $x$ при $\delta x_j = dx_j$ ($j = 1, \ldots, n$) называется *вторым* *дифференциалом*, или *дифференциалом второго порядка* функции $f$ в точке $x$ и обозначается $d^2 f(x)$. Итак,

$$d^2 f := \delta(df)\Big|_{\substack{\delta x_i = dx_i \\ (i=1,\ldots,n)}} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \, dx_i \, dx_j \, .$$

Если все частные производные порядка $m-1$ функции $f$ дифференцируемы в точке $x$, то *дифференциал порядка* $m$ функции $f$ в точке $x$ определяется как $d^m f(x) := \delta(d^{m-1} f(x))\Big|_{\substack{\delta x_i = dx_i \\ (i=1,\ldots,n)}}$.

Следовательно,

$$d^m f(x) = \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}}(x) \, dx_{i_1} \ldots dx_{i_m}.$$

Если функция $f$ от $n$ переменных $m$ раз непрерывно дифференцируема в точке $x$ и $(m-1)$ раз непрерывно дифференцируема на некоторой окрестности точки $x$, то в последней формуле слагаемые, в которых частные производные отличаются лишь порядком дифференцирования, совпадают, и саму формулу можно записать в более компактном виде.

Упорядоченный набор $n$ целых неотрицательных чисел

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad \alpha_i \in \mathbb{N}_0 \quad (i = 1, \ldots, n),$$

называется *мультииндексом*, а $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$ — его *длиной*. Полагают ещё $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$, $dx^\alpha = dx_1^{\alpha_1} \ldots \, dx_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha f = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \, \partial x_n^{\alpha_n}} f$.

В этих обозначениях для функции $f$ от $n$ переменных, $m$ раз непрерывно дифференцируемой в точке $x$ и $(m-1)$ раз непрерывно дифференцируемой на некоторой окрестности точки $x$,

$$d^m f(x) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha f(x) \, dx^\alpha.$$

В частности, для функции $f$ двух переменных $x$, $y$

$$d^m f = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-k} \partial y^k} \, dx^{m-k} dy^k.$$

Если же при этом $m = 2$, то для функции $f$, дважды непрерывно дифференцируемой в точке $(x, y)$,

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\, dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$$

в этой точке.

## § 11.6. Формула Тейлора

Пусть $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, и пусть все частные производные порядка $m$ функции $f$ непрерывны на $U_\delta(x^{(0)})$.

При этом предположении (согласно сделанным ранее замечаниям) все её частные производные до порядка $m$ включительно непрерывны на $U_\delta(x^{(0)})$.

Рассмотрим функцию $\varphi$: $[0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) = f(x^{(0)} + t\Delta x), \quad \text{где} \quad \Delta x = x - x^{(0)}.$$

Функция $\varphi$ имеет на отрезке $[0, 1]$ непрерывные производные порядка $m$, что вытекает из теоремы о дифференцируемости сложной функции. Поэтому для $\varphi$ справедлива формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$\varphi(1) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!}\varphi^{(k)}(0) + \frac{1}{m!}\varphi^{(m)}(\theta), \quad 0 < \theta < 1.$$

Выражая производные функции $\varphi$ через частные производные функции $f$, получаем

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f(x^{(0)})}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} \Delta x_{i_1} \ldots \Delta x_{i_k} + \\ + r_{m-1}(\Delta x), \quad (1)$$

где

$$r_m(\Delta x) = \frac{1}{m!} \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n} \frac{\partial^m f(x^{(0)} + \theta\Delta x)}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}} \Delta x_{i_1} \ldots \Delta x_{i_m}.$$

Полученная формула называется *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа*.

При сделанных предположениях о функции $f$ частные производные, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, совпадают. Поэтому формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа можно переписать в следующем виде:

$$f(x^{(0)}+\Delta x)=\sum_{|\alpha|\leqslant m-1}\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(x^{(0)})(\Delta x)^\alpha+$$
$$+\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(x^{(0)}+\theta\Delta x)(\Delta x)^\alpha. \quad (2)$$

Из этой формулы при предположениях, что функция $f$ непрерывно дифференцируема $m$ раз на $U_\delta(x^{(0)})$ и что $|\Delta x|<\delta$, следует *формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано*:

$$f(x^{(0)}+\Delta x)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(x^{(0)})(\Delta x)^\alpha+r_m(\Delta x), \quad (3)$$

где

$$r_m(\Delta x)=\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\alpha!}\left[D^\alpha f(x^{(0)}+\theta\Delta x)-D^\alpha f(x^{(0)})\right](\Delta x)^\alpha=$$
$$=\varepsilon(\Delta x)|\Delta x|^m,\quad \varepsilon(\Delta x)\to 0 \text{ при } \Delta x\to\mathbf{0}.$$

Из приведённых рассуждений следует

**Теорема 1.** *Пусть функция $f$ непрерывно дифференцируема $m$ раз на $\delta$-окрестности точки $x^{(0)}\in\mathbb{R}^n$. Тогда для функции $f$ при $|\Delta x|<\delta$ справедлива формула Тейлора в каждой из форм* (2), (3).

Для получения разложения конкретных функций по формуле Тейлора без вычисления коэффициентов формулы с помощью дифференцирования используется

**Теорема 2** (единственности). *Пусть $m\in\mathbb{N}_0$,*

$$f(x)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(\Delta x)^\alpha+o(|\Delta x|^m) \text{ при } \Delta x\to\mathbf{0},$$
$$f(x)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}b_\alpha(\Delta x)^\alpha+o(|\Delta x|^m) \text{ при } \Delta x\to\mathbf{0}.$$

*Тогда $a_\alpha=b_\alpha$ $\forall\,\alpha$: $|\alpha|\leqslant m$.*

Доказательство. После почленного вычитания приходим к требованию доказать, что из равенства

$$0=\sum_{|\alpha|\leqslant m}c_\alpha(\Delta x)^\alpha+o(|\Delta x|^m) \text{ при } \Delta x\to\mathbf{0}$$

следует, что $c_\alpha=0$ $\forall\,\alpha$: $|\alpha|\leqslant m$.

Покажем это. Зафиксируем $y=(y_1,\ldots,y_n)\neq\mathbf{0}$ и при $\Delta x=$ $=ty$ получаем

$$0 = \sum_{k=0}^{m} \left( \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha y^\alpha \right) t^k + o(|t|^m) \text{ при } t \to 0.$$

В силу ранее установленной теоремы единственности для случая $n = 1$ отсюда следует, что

$$\sum_{|\alpha|=k} c_\alpha y^\alpha = 0 \quad \forall\, k = 0, \ldots, m, \quad \forall\, y \neq \mathbf{0}.$$

Но тогда, обозначив через $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ произвольный мультииндекс длины $|\beta| = k$, имеем

$$0 = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial y_1^{\beta_1} \ldots \partial y_n^{\beta_n}} \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha y^\alpha = \beta! c_\beta.$$

Отсюда следует

$$c_\beta = 0 \quad \forall\, \beta \colon |\beta| = k, \quad \forall\, k = 0, \ldots, m,$$

что и требовалось доказать.

**Теорема 3.** *Пусть функция $f$ непрерывно дифференцируема $m$ раз на некоторой окрестности точки $x^{(0)}$ и*

$$f(x^{(0)} + \Delta x) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha (\Delta x)^\alpha + o(|\Delta x|^m) \text{ при } \Delta x \to \mathbf{0}.$$

*Тогда это равенство является формулой Тейлора* (3) *функции $f$ с остаточным членом в форме Пеано.*

Доказательство. Утверждение теоремы является непосредственным следствием теорем 1, 2.

**Пример 1.** Разложить по формуле Тейлора функцию $e^{x^2+y^2}$ двух переменных в окрестности точки $(0, 0)$ с точностью до $o((x^2 + y^2)^2)$ при $(x, y) \to (0, 0)$.

Воспользуемся известным разложением

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(|u|^2) \text{ при } u \to 0.$$

Подставив в него $u = x^2 + y^2$, получаем, что $e^{x^2+y^2} = 1 + x^2 + y^2 + \frac{1}{2}x^4 + x^2y^2 + \frac{1}{2}y^4 + o((x^2 + y^2)^2)$. В силу теоремы 3 это разложение и является искомым разложением функции по формуле Тейлора.

Глава 12

# НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ

## § 12.1. Неявные функции, определяемые одним уравнением

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$. Под *прямым* (или *декартовым*) *произведением множеств* $X$ и $Y$ понимают множество пар точек $(x, y)$:

$$X \times Y := \{(x, y)\colon x \in X,\ y \in Y\} \subset \mathbb{R}^{n+m}.$$

*Кубической $\varepsilon$-окрестностью* точки $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ называют множество

$$Q_\varepsilon(x^{(0)}) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i - x_i^{(0)}| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n\}.$$

При $n = 1$ имеем $Q_\varepsilon(x_0) = U_\varepsilon(x_0)$.

*Прямоугольной $(\delta, \varepsilon)$-окрестностью* точки $(x^{(0)}, y^{(0)}) \in \mathbb{R}^{n+m}$, где $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $y^{(0)} \in \mathbb{R}^m$, назовём множество

$$Q_{\delta,\varepsilon}(x^{(0)}, y^{(0)}) = Q_\delta(x^{(0)}) \times Q_\varepsilon(y^{(0)}).$$

В основной части этого параграфа мы будем иметь дело с точками $(x, y)$ плоскости, на которой зафиксирована декартова прямоугольная система координат.

Рассмотрим уравнение

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

где $F$ — функция двух переменных $x$, $y$, которые можно считать координатами точки плоскости.

**Определение 1.** Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, называется *неявной* (или *неявно заданной*) функцией, определяемой уравнением (1), если

$$F(x, f(x)) = 0 \quad \forall\, x \in X.$$

Если же на некотором множестве $E \subset \mathbb{R}^2$ уравнения (1) и $y = f(x)$ эквивалентны:

$$F(x, y) = 0 \iff y = f(x)$$

(т. е. их множества решений, принадлежащих $E$, совпадают), то говорят, что *уравнение* (1) *разрешимо на $E$ относительно переменного $y$*.

**Пример 1.** Пусть задано уравнение

$$x^2 + y^2 - 1 = 0, \tag{2}$$

которое определяет на отрезке $[-1, 1]$ две непрерывные функции:

$$f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}\,, \quad f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}\,.$$

Будем рассматривать это же уравнение (2) не на всей плоскости, а только на некоторой прямоугольной окрестности $Q_{\delta,\varepsilon}(x_0, y_0)$ точки $(x_0, y_0)$, координаты которой удовлетворяют уравнению (2): $x_0^2 + y_0^2 - 1 = 0$ (рис. 1).

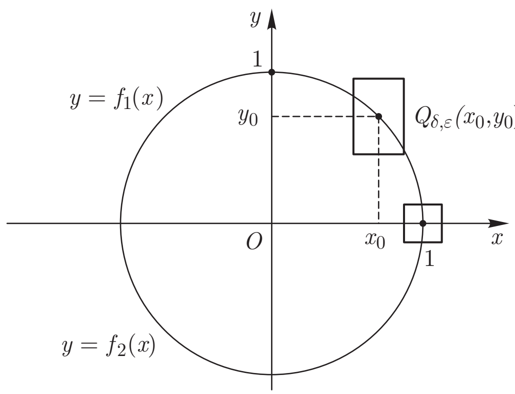



Рис. 1

Пусть сначала $x_0 > 0$, $y_0 > 0$. Тогда существуют столь малые $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, что на $Q_{\delta,\varepsilon}(x_0, y_0)$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = f_1(x).$$

Множество решений уравнения (2), принадлежащих $Q_{\delta,\varepsilon}(x_0, y_0)$, представляет собой часть графика функции $f_1$, лежащую в $Q_{\delta,\varepsilon}(x_0, y_0)$. Эта часть графика совпадает с графиком сужения функции $f_1$ на $Q_\delta(x_0)$ (если $\delta > 0$ достаточно мало́ сравнительно с $\varepsilon$) или с графиком сужения $f_1$ на некоторый интервал $(a, b) \subset Q_\delta(x_0)$ (если $\varepsilon > 0$ слишком мало́ сравнительно с $\delta$).

Если же в качестве $(x_0, y_0)$ взять точку $(x_0, y_0) = (1, 0)$, то ни на какой её окрестности $Q_{\delta,\varepsilon}(1, 0)$ уравнение (2) не является разрешимым относительно переменного $y$ (множество решений уравнения (2) из $Q_{\delta,\varepsilon}(1, 0)$ не является графиком никакой функции $y = f(x)$).

В следующей теореме приводятся достаточные условия, налагаемые на функцию $F$, при которых уравнение (1) разрешимо относительно переменного $y$ на некоторой прямоугольной окрестности $Q_{\delta,\varepsilon}(x_0, y_0)$.

**Теорема 1.** *Пусть функция $F$ двух переменных $x$ и $y$ удовлетворяет следующим условиям:*

1° *$F$ непрерывна на некоторой окрестности $U(x_0, y_0)$ точки $(x_0, y_0)$;*

2° *$F(x_0, y_0) = 0$;*

3° *$F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, $F'_y$ непрерывна в точке $(x_0, y_0)$.*

*Тогда существует прямоугольная окрестность $Q_{\delta,\varepsilon}(x_0, y_0) = Q_\delta(x_0) \times Q_\varepsilon(y_0)$ точки $(x_0, y_0)$ такая, что на ней*

$$F(x, y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = f(x),$$

*где функция*

$$f\colon Q_\delta(x_0) \to Q_\varepsilon(y_0)$$

*непрерывна на $Q_\delta(x_0)$, $f(x_0) = y_0$.*

*Если дополнительно считать, что*

4° *$F$ дифференцируема в точке $(x_0, y_0)$,*

*то $f$ дифференцируема в точке $x_0$ и*

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

*Если же при этом частные производные $F'_x$, $F'_y$ непрерывны на $U(x_0, y_0)$, то производная $f'(x) = -\dfrac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$ непрерывна на $Q_\delta(x_0)$.*

Доказательство. На самом деле утверждения теоремы верны, если её условие 3° заменить более общим:

3°° *$F'_y$ существует и сохраняет знак на $U(x_0, y_0)$.*

Мы будем проводить доказательство при условии 3°° вместо 3°.

Пусть $\sigma$, $\varepsilon > 0$ настолько малы, что в замыкании прямоугольной окрестности $Q_{\sigma,\varepsilon}(x_0, y_0)$ функция $F$ непрерывна, а $F'_y$ сохраняет знак. Ради определённости будем считать, что $F'_y > 0$ на $Q_{\sigma,\varepsilon}(x_0, y_0)$. Поэтому при каждом фиксированном $x \in Q_\sigma(x_0)$ функция $F(x, y)$, рассматриваемая как функция переменного $y$, строго возрастает на отрезке $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$.

Отсюда следует (поскольку $F(x_0, y_0) = 0$), что

$$F(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0, \quad F(x_0, y_0 + \varepsilon) > 0.$$

Функции $F(x, y_0 - \varepsilon)$, $F(x, y_0 + \varepsilon)$ как функции переменного $x$ непрерывны на $Q_\sigma(x_0)$ (и, следовательно, обладают свойством сохранения знака), так что найдётся $\delta \in (0, \sigma]$ такое, что

$$F(x, y_0 - \varepsilon) < 0, \quad F(x, y_0 + \varepsilon) > 0 \quad \forall\, x \in Q_\delta(x_0).$$

Зафиксируем произвольное значение $x^* \in Q_\delta(x_0)$. Поскольку $F(x^*, y_0 - \varepsilon) < 0$, $F(x^*, y_0 + \varepsilon) > 0$, то по теореме Коши о промежуточном значении непрерывной функции $F(x^*, y)$ найдётся $y^* \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$, при котором $F(x^*, y^*) = 0$. Такое значение $y^*$ единственно в силу строгой монотонности функции $F(x^*, y)$.

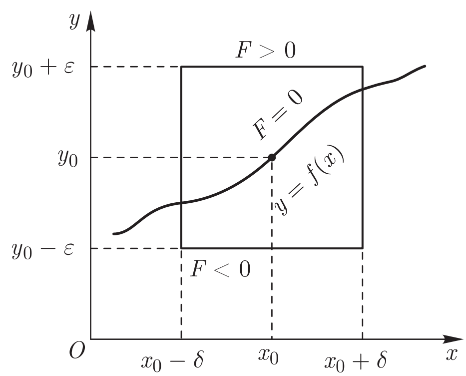



Рис. 2

Обозначим $y^* = f(x^*)$. Таким образом, построена (рис. 2) функция $f\colon Q_\delta(x_0) \to Q_\varepsilon(y_0)$ такая, что $f(x_0) = y_0$,

$$F(x, y) = 0 \iff y = f(x) \quad \text{на} \quad Q_{\delta,\varepsilon}(x_0, y_0).$$

Из последнего соотношения получаем, что

$$F(x, f(x)) = 0 \text{ при } x \in Q_\delta(x_0).$$

Установим непрерывность функции $f$ на $Q_\delta(x_0)$. Непрерывность $f$ в точке $x_0$ следует из того, что в приведённых построениях число $\varepsilon > 0$ можно считать сколь угодно малым, причём для каждого достаточно малого $\varepsilon > 0$ было указано $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $f(Q_\delta(x_0)) \subset Q_\varepsilon(y_0) = Q_\varepsilon(f(x_0))$.

Пусть теперь $x^*$ — произвольная точка из $Q_\delta(x_0)$, $y^* = f(x^*)$. Очевидно, что если условия теоремы 1 с заменой $3^\circ$ на $3^{\circ\circ}$ выполняются, то они выполняются и после замены в них $(x_0, y_0)$ на $(x^*, y^*)$. Следовательно, по уже доказанному, $f$ непрерывна в точке $x^*$.

Предположим теперь, что выполняется условие 4°. В силу дифференцируемости функции $F$ и замечания 11.1.1

$$F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0) = F'_x(x_0, y_0)\Delta x + \\ + F'_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y, \quad (3)$$

где $\varepsilon_i(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$, $i = 1, 2$. Здесь будем считать $|\Delta x|$ достаточно малым, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$, так что $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$.

Тогда из (3) получаем

$$0 = F'_x(x_0, y_0)\Delta x + F'_y(x_0, y_0)\Delta y + \\ + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y.$$

Так как $|\Delta x|$, а значит, и $|\Delta y| = |\Delta f|$ достаточно малы, имеем

$$\Delta y = -\frac{F'_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)}{F'_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)}\Delta x = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}\Delta x + o(\Delta x)$$

при $\Delta x \to 0$. Следовательно, функция $f$ дифференцируема в точке $x_0$ и

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)} = -\frac{F'_x(x_0, f(x_0))}{F'_y(x_0, f(x_0))}.$$

Если функция $F$ дифференцируема не только в точке $(x_0, y_0)$, но и на окрестности $Q_{\delta,\varepsilon}(x_0, y_0)$, то последняя формула верна для любого $x \in Q_\delta(x_0)$:

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))} \quad \forall\, x \in Q_\delta(x_0).$$

Из этой формулы вытекает последнее утверждение теоремы.

**Замечание 1.** В формулировке утверждения теоремы 1 можно отказаться от требования

$$f\colon Q_\delta(x_0) \to Q_\varepsilon(y_0).$$

Тогда, уменьшив при необходимости $\varepsilon$ или $\delta$, можно взять $\varepsilon = \delta$. При этом сохранятся свойство эквивалентности

$$F(x, y) = 0 \iff y = f(x)$$

на $Q_\delta(x_0, y_0) = Q_\delta(x_0) \times Q_\delta(y_0) \subset \mathbb{R}^2$, тождество $F(x, f(x)) = 0$ при $x \in Q_\delta(x_0)$ и дополнительное утверждение теоремы 1.

Изменённая таким образом теорема 1 равносильна, очевидно, исходной теореме 1.

Обобщим теорему 1 на случай неявной функции, заданной уравнением $F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$. Это понятие вводится так же, как в случае $n = 1$.

Далее будем пользоваться обозначениями:

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \quad x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}),$$
$$(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y), \quad (x^{(0)}, y_0) = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, y_0),$$
$$F(x, y) = F(x_1, \ldots, x_n, y).$$

**Теорема 2.** *Пусть функция $F$ переменных $x$ и $y$, где $(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y)$, удовлетворяет следующим условиям:*

*1° $F$ непрерывна на некоторой окрестности $U(x^{(0)}, y_0)$ точки $(x^{(0)}, y_0)$;*

*2° $F(x^{(0)}, y_0) = 0$;*

*3° $F'_y(x^{(0)}, y_0) \neq 0$, $F'_y$ непрерывна в точке $(x^{(0)}, y_0)$.*

*Тогда существует кубическая окрестность $Q_\delta(x^{(0)}, y_0)$ точки $(x^{(0)}, y_0)$ такая, что на ней*

$$F(x, y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = f(x),$$

*где функция*

$$f\colon Q_\delta(x^{(0)}) \to \mathbb{R}$$

*непрерывна на $Q_\delta(x^{(0)})$, $f(x^{(0)}) = y_0$, $F(x, f(x)) = 0$ при $x \in Q_\delta(x^{(0)})$.*

*Если дополнительно считать, что*

*4° $F$ дифференцируема в точке $(x^{(0)}, y_0)$,*

*то $f$ дифференцируема в точке $x^{(0)}$ и при $i = 1, \ldots, n$*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) = -\frac{F'_{x_i}(x^{(0)}, y_0)}{F'_y(x^{(0)}, y_0)}.$$

*Если же при этом все частные производные первого порядка функции $F$ непрерывны на $U(x^{(0)}, y_0)$, то при $i = 1, \ldots, n$ производные*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = -\frac{F'_{x_i}(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$$

*непрерывны на $Q_\delta(x^{(0)})$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

## § 12.2. Система неявных функций

Теоремы из § 12.1 дают достаточные условия разрешимости уравнения $F(x, y) = 0$ относительно переменного $y$. Рассмотрим более общую задачу — о возможности разрешить систему $m$ уравнений относительно $m$ переменных.

Для системы $m$ функций $\{u_j(t)\}_{j=1}^m$ переменного $t=(t_1,\ldots,t_m)$ определитель

$$\frac{\partial(u_1,\ldots,u_m)}{\partial(t_1,\ldots,t_m)}(t) := \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial t_1}(t) & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial t_m}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial u_m}{\partial t_1}(t) & \ldots & \frac{\partial u_m}{\partial t_m}(t) \end{vmatrix}$$

называется её *якобианом*.

Будем использовать обозначения: $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,\ldots,y_m)=(\widetilde{y},y_m)$, $\widetilde{y}=(y_1,\ldots,y_{m-1})$, $(x,y)=(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)\in\mathbb{R}^{n+m}$, $(x,y_m)=(x_1,\ldots,x_n,y_m)$, $F(x,y)=F(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)$.

**Теорема 1.** *Пусть:*

*1° функции $F_j(x,y)=F_j(x_1,\ldots,x_n,\,y_1,\ldots,y_m)$ $(j=1,\ldots,m)$ непрерывно дифференцируемы на некоторой окрестности $U(x^{(0)},y^{(0)})$ точки $(x^{(0)},y^{(0)})$;*

*2° $F_j(x^{(0)},y^{(0)})=0$ $(j=1,\ldots,m)$;*

*3° $J=\left.\dfrac{\partial(F_1,\ldots,F_m)}{\partial(y_1,\ldots,y_m)}\right|_{(x^{(0)},y^{(0)})}\neq 0$.*

*Тогда существует кубическая окрестность $Q_\varepsilon(x^{(0)},y^{(0)})$, на которой*

$$\{F_j(x,y)=0\}_{j=1}^m \iff \{y_j=f_j(x)\}_{j=1}^m,$$

*где $(f_1,\ldots,f_m)\colon Q_\varepsilon(x^{(0)})\to\mathbb{R}^m$, функции $f_j$ непрерывно дифференцируемы на $Q_\varepsilon(x^{(0)})$, $f_j(x^{(0)})=y_j^{(0)}$ $(j=1,\ldots,m)$. При этом*

$$F_j(x,f_1(x),\ldots,f_m(x))=0\ \forall\, x\in Q_\varepsilon(x^{(0)})\ (j=1,\ldots,m). \tag{1}$$

Доказательство проведём индукцией по числу $m$ уравнений системы

$$\{F_j(x,y)=0\}_{j=1}^m. \tag{2}$$

При $m=1$ теорема верна в силу теоремы 12.1.2 и замечания 12.1.1. Предположим, что теорема справедлива для $(m-1)$ уравнений, и покажем, что она верна и для случая $m$ уравнений.

Разложив определитель $J$ по элементам последнего столбца, видим, что по крайней мере для одного элемента этого столбца алгебраическое дополнение отлично от нуля. Ради определённости будем считать, что

$$J_{m-1}=\left.\frac{\partial(F_1,\ldots,F_{m-1})}{\partial(y_1,\ldots,y_{m-1})}\right|_{(x^{(0)},y^{(0)})}\neq 0.$$

В силу предположения индукции систему первых $(m-1)$ уравнений системы (2) можно разрешить относительно $y_1, \ldots, y_{m-1}$. Говоря точнее (см. теорему 12.1.2 и замечание 12.1.1), существуют число $\eta > 0$ и непрерывно дифференцируемые функции

$$\varphi_j\colon Q_\eta(x^{(0)}, y_m^{(0)}) \to \mathbb{R}, \quad \varphi_j(x^{(0)}, y_m^{(0)}) = y_j^{(0)}$$
$$(j = 1, \ldots, m-1)$$

такие, что (2) $\Longleftrightarrow$ (3) (т. е. системы уравнений (2) и

$$\begin{cases} \{y_j = \varphi_j(x, y_m)\}_{j=1}^{m-1}, \\ F_m(x, y) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

эквивалентны) на $Q_\eta(x^{(0)}, y^{(0)}) \subset U(x^{(0)}, y^{(0)})$. При этом

$$F_j(x, \varphi_1(x, y_m), \ldots, \varphi_{m-1}(x, y_m), y_m) = 0 \quad (j = 1, \ldots, m-1) \tag{4}$$

при $(x, y_m) \in Q_\eta(x^{(0)}, y_m^{(0)})$.

Очевидно, что (3) $\Longleftrightarrow$ (5) на $Q_\eta(x^{(0)}, y^{(0)})$, где

$$\begin{cases} \{y_j = \varphi_j(x, y_m)\}_{j=1}^{m-1}, \\ \Phi(x, y_m) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

при

$$\Phi(x, y_m) = F_m(x, \varphi_1(x, y_m), \ldots, \varphi_{m-1}(x, y_m), y_m),$$
$$\Phi(x^{(0)}, y_m^{(0)}) = F_m(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0.$$

Убедимся, что последнее уравнение системы (5) можно разрешить относительно $y_m$.

В самом деле, функция $\Phi$ непрерывно дифференцируема на $Q_\eta(x^{(0)}, y_m^{(0)})$ как суперпозиция непрерывно дифференцируемых функций, $\Phi(x^{(0)}, y_m^{(0)}) = 0$.

Остаётся проверить, что $\dfrac{\partial \Phi(x^{(0)}, y_m^{(0)})}{\partial y_m} \neq 0$, и сослаться на теорему 12.1.2. Осуществим эту проверку.

Заметим, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_m} = \frac{\partial F_m}{\partial y_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_m} + \ldots + \frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}}\frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial F_m}{\partial y_m}. \tag{6}$$

В то же время результатом дифференцирования тождеств (4) по $y_m$ являются тождества

$$\frac{\partial F_j}{\partial y_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_m} + \ldots + \frac{\partial F_j}{\partial y_{m-1}}\frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial F_j}{\partial y_m} = 0 \quad (j = 1, \ldots, m-1). \tag{7}$$

Но тогда

$$J = \left.\frac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}\right|_{(x^{(0)}, y^{(0)})} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_{m-1}} & 0 \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial \Phi}{\partial y_m} \end{vmatrix} \neq 0.$$

При этом последнее равенство получено прибавлением к последнему столбцу всех предшествующих столбцов, умноженных на $\frac{\partial \varphi_j}{\partial y_m}$ $(j = 1, \ldots, m-1)$ соответственно, и использованием равенств (6), (7).

Из последнего неравенства следует, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_m}(x^{(0)}, y^{(0)}) \neq 0.$$

Разрешив последнее уравнение системы (5) относительно $y_m$ в соответствии с теоремой 12.1.2, получаем, что на некоторой кубической окрестности $Q_\varepsilon(x^{(0)}, y_m^{(0)}) \subset Q_\eta(x^{(0)}, y_m^{(0)})$

$$\Phi(x, y_m) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y_m = f_m(x),$$

где функция $f_m$: $Q_\varepsilon(x^{(0)}) \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема, $f_m(x^{(0)}) = y_m^{(0)}$,

$$\Phi(x, f_m(x)) = 0 \quad \text{при} \quad x \in Q_\varepsilon(x^{(0)}). \tag{8}$$

Тогда (5) $\Longleftrightarrow$ (9) $\Longleftrightarrow$ (10) на $Q_\varepsilon(x^{(0)}, y^{(0)})$, где

$$\begin{cases} \{y_j = \varphi_j(x, y_m)\}_{j=1}^{m-1}, \\ y_m = f_m(x); \end{cases} \tag{9}$$

$$\{y_j = f_j(x)\}_{j=1}^{m}, \tag{10}$$

и

$$f_j(x) = \varphi_j(x, f_m(x)) \quad (i = 1, \ \ldots, \ m-1). \tag{11}$$

Следовательно, (2) $\Longleftrightarrow$ (10) на $Q_\varepsilon(x^{(0)}, y^{(0)})$. При этом функции $f_j$: $Q_\varepsilon(x^{(0)}) \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируемы и $f_j(x^{(0)}) = y_j^{(0)}$ $(j = 1, \ldots, m)$.

Тождества (1) следуют из (4), (11) и (8).

Теорема доказана.

**Замечание 1.** Дифференцируя тождества (1) по $x_k$, получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_j}{\partial y_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} = 0, \quad j = 1, \ldots, m,$$

относительно $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}$ с отличным от нуля определителем, из которой можно найти $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_k}$, ..., $\dfrac{\partial f_m}{\partial x_k}$.

## § 12.3. Дифференцируемые отображения

**Определение 1.** Функция

$$f\colon G \to \mathbb{R}^m, \quad G \subset \mathbb{R}^n \tag{1}$$

называется *отображением множества $G$ в $\mathbb{R}^m$*. Представляя $f(x) \in \mathbb{R}^m$ через координаты:

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)), \quad x \in G, \tag{2}$$

видим, что задание отображения $f$ равносильно заданию на $G$ числовых функций

$$f_1(x), \ldots, f_m(x)\colon G \to \mathbb{R}, \tag{3}$$

называемых *координатными функциями*.

Множество

$$f(E) = \{y \in \mathbb{R}^m\colon y = f(x),\ x \in E\}, \quad E \subset G,$$

называется *образом множества $E$*, множество $f(G)$ — *областью значений $f$*, а множество

$$f^{-1}(D) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon f(x) \in D\}, \quad D \subset \mathbb{R}^m,$$

— *прообразом множества $D$*.

**Определение 2.** Отображение (1) называется *непрерывным в точке $x^{(0)}$* $\in G$, если

$$\forall\, U(f(x^{(0)})) \quad \exists\, U(x^{(0)})\colon f(G \cap U(x^{(0)})) \subset U(f(x^{(0)})).$$

**Замечание 1.** Если $x^{(0)}$ — внутренняя точка $G$, то в этом определении вместо $G \cap U(x^{(0)})$ можно писать $U(x^{(0)})$.

**Лемма 1.** *Отображение* (1) *непрерывно в точке $x^{(0)} \in G$ тогда и только тогда, когда в точке $x^{(0)}$ непрерывны все координатные функции* (3).

Доказательство аналогично случаю $n = 1$, $m = 3$, с которым мы сталкивались при изучении вектор-функций.

**Определение 3.** Отображение (1) называется *непрерывным на множестве* $G$, если оно непрерывно в каждой точке множества $G$.

**Теорема 1.** *Отображение* (1) *открытого множества* $G$ *непрерывно на* $G$ *тогда и только тогда, когда прообраз всякого открытого множества является открытым множеством.*

Доказательство. Пусть отображение $f$ непрерывно на $G$, и пусть открытое множество $D \subset \mathbb{R}^m$. Покажем, что множество $f^{-1}(D)$ открыто. Пусть $x^{(0)} \in f^{-1}(D)$, т.е. $f(x^{(0)}) \in D$. Множество $D$ является окрестностью точки $f(x^{(0)})$. Следовательно, по определению 2 существует окрестность $U(x^{(0)}) \subset G$: $f(U(x^{(0)})) \subset D$. Последнее означает, что $U(x^{(0)}) \subset f^{-1}(D)$.

Мы получили, что каждая точка $x^{(0)} \in f^{-1}(D)$ принадлежит $f^{-1}(D)$ вместе с некоторой своей окрестностью, т.е. что множество $f^{-1}(D)$ открыто.

Пусть теперь дано, что прообраз каждого открытого множества при отображении $f$ открыт. Покажем, что $f$ непрерывно на $G$. Пусть $x^{(0)} \in G$, и пусть $D = U(f(x^{(0)}))$ — произвольная окрестность точки $f(x^{(0)})$. Тогда $f^{-1}(D)$ — открытое множество, содержащее точку $x^{(0)}$, т.е. $f^{-1}(D)$ — окрестность точки $x^{(0)}$. Обозначив $f^{-1}(D)$ через $U(x^{(0)})$, имеем

$$f(U(x^{(0)})) = f(f^{-1}(D)) \subset D = U(f(x^{(0)})).$$

По определению 2 отображение $f$ непрерывно в точке $x^{(0)}$. В силу произвольности выбора точки $x^{(0)} \in G$ отображение $f$ непрерывно на $G$.

**Определение 4.** Отображение (1) будем называть *непрерывно дифференцируемым в точке* $x^{(0)} \in G$ (*на множестве* $G$), если все его координатные функции (3) непрерывно дифференцируемы в точке $x^{(0)}$ (на $G$).

Далее будем считать $m = n$.

*Якобианом отображения* (1) при $m = n$ назовём

$$J(x) = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(x) := \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{vmatrix}.$$

Будем изучать непрерывно дифференцируемые отображения открытого множества с отличным от нуля якобианом.

В одномерном случае ($n = 1$) условие $J(x) \neq 0$ является достаточным условием взаимной однозначности отображения (см. теорему об обратной функции на интервале). Например, в одномерном случае отображение $y = x^2$ интервала $G = (-1, 1)$ с производной $y'(0) = 0$ не является взаимно однозначным.

В многомерном случае ($n \geqslant 2$) отличие якобиана отображения от нуля не гарантирует взаимной однозначности отображения, как показывает при $n = 2$

**Пример 1.** Пусть $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ — отображение области

$$G = \{(r, \varphi)\colon 1 < r < 2, \quad 0 < \varphi < 4\pi\}$$

на область $\{(x, y)\colon 1 < x^2 + y^2 < 4\}$.

Для всякой точки $(r_0, \varphi_0) \in G$ можно указать достаточно малую шаровую окрестность $U_\delta(r_0, \varphi_0)$, сужение рассматриваемого отображения на которую является взаимно однозначным.

Ниже будет установлена теорема 3, показывающая, что это свойство является общим.

**Теорема 2.** *Пусть открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$, отображение $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируемо на $G$ и его якобиан $J \neq 0$ на $G$.*

*Тогда $f(G)$ — открытое множество в $\mathbb{R}^n$.*

**Теорема 3** (о локальной обратимости отображения). *Пусть в условиях теоремы 2 $x^{(0)} \in G$, $y^{(0)} = f(x^{(0)})$. Тогда существуют окрестности $U(x^{(0)})$, $U(y^{(0)})$, для которых:*

*1° $f$ осуществляет взаимно однозначное отображение $U(x^{(0)}) \leftrightarrow U(y^{(0)})$;*

*2° отображение $g : U(y^{(0)}) \to U(x^{(0)})$, обратное к $f$, непрерывно дифференцируемо на $U(y^{(0)})$;*

*3° якобиан отображения $g$ отличен от нуля на $U(y^{(0)})$.*

Поясним, что если отображение $f\colon G \to D$ является взаимно однозначным: $G \leftrightarrow D$, то обратное отображение $f^{-1}\colon D \leftrightarrow G$ определяется следующим образом:

$$f^{-1}(y) = x, \text{ если } f(x) = y \quad (y \in D, \ x \in G).$$

Доказательство теорем 2 и 3 будем проводить одновременно. Пусть $y^{(0)} \in f(G)$, $x^{(0)} \in G$, $y^{(0)} = f(x^{(0)})$. Рассмотрим систему уравнений

$$F_i(x, y) := f_i(x_1, \ldots, x_n) - y_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Имеем

$$\left.\frac{\partial(F_1,\ldots,F_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}\right|_{(x^{(0)},y^{(0)})} = \left.\frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}\right|_{(x^{(0)})} \neq 0.$$

По теореме о системе неявных функций на декартовом произведении $V(x^{(0)}) \times U(y^{(0)})$ некоторых прямоугольных окрестностей

$$\begin{gathered}\{y_i = f_i(x)\}_1^n \iff \{x_i = g_i(y)\}_1^n, \\ \text{т. е.} \quad y = f(x) \iff x = g(y),\end{gathered} \tag{4}$$

где $g(y) = (g_1(y),\ldots,g_n(y))$, а отображение

$$g\colon U(y^{(0)}) \to V(x^{(0)}) \subset G$$

непрерывно дифференцируемо на $U(y^{(0)})$.

Следовательно,

$$U(y^{(0)}) \subset f(G),$$

так что $y^{(0)}$ — внутренняя точка $f(G)$. Поскольку в качестве $y^{(0)}$ можно взять любую точку из $f(G)$, то множество $f(G)$ открыто. Теорема 2 доказана.

Продолжим доказательство теоремы 3. Покажем, что якобиан отображения $g$ отличен от нуля на $U(y^{(0)})$.

Из (4) имеем, что $y = f(g(y))$ при $y \in U(y^{(0)})$, или в координатной записи

$$y_i = f_i(g_1(y),\ldots,g_n(y)), \quad i = 1,\ldots,n, \quad y \in U(y^{(0)}).$$

Дифференцируя эти тождества по переменному $y_j$, получаем

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\frac{\partial g_k}{\partial y_j} = \frac{\partial y_i}{\partial y_j} = \begin{cases}1 & \text{при } j = i,\\ 0 & \text{при } j \neq i.\end{cases}$$

Отсюда и из теоремы об определителе произведения двух матриц следует, что

$$\begin{gathered}\frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}\frac{\partial(g_1,\ldots,g_n)}{\partial(y_1,\ldots,y_n)} = 1 \\ \text{при } x = g(y) \in V(x^{(0)}),\ y \in U(y^{(0)}).\end{gathered} \tag{5}$$

Следовательно, $\dfrac{\partial(g_1,\ldots,g_n)}{\partial(y_1,\ldots,y_n)} \neq 0$ на $U(y^{(0)})$.

Рассмотрим множество

$$U(x^{(0)}) := g(U(y^{(0)})),$$

содержащее, очевидно, точку $x^{(0)}$. Множество $U(x^{(0)})$ открыто в силу теоремы 2, т. е. является окрестностью точки $x^{(0)}$. Ясно, что отображение $f$ осуществляет взаимно однозначное отображение $U(x^{(0)}) \leftrightarrow U(y^{(0)})$.

**Пример 2.** При $n = 1$ пример отображения $y = x^2$: $(-1, 1) \to$ $\to [0, 1)$ показывает, что в теореме 2 условие отличия якобиана от нуля нельзя отбросить.

**Теорема 4** (принцип сохранения области). *Образ области $G \subset \mathbb{R}^n$ при непрерывно дифференцируемом отображении $f$: $G \to \mathbb{R}^n$ с отличным от нуля якобианом является областью.*

Доказательство. Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$ и $f$: $G \to$ $\to \mathbb{R}^n$ — отображение, удовлетворяющее условиям теоремы. По теореме 2 множество $f(G)$ открыто. Покажем, что $f(G)$ связно и, следовательно, является областью.

Пусть $y^{(1)}$, $y^{(2)}$ — две произвольные точки из $f(G)$. Пусть $x^{(1)}$, $x^{(2)} \in G$ — такие точки, что $f(x^{(1)}) = y^{(1)}$, $f(x^{(2)}) = y^{(2)}$. Пусть $\Gamma = \{x(t)\colon \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$ — такая кривая в $\mathbb{R}^n$, что $\Gamma \subset G$, и пусть $x^{(1)}$ — начало $\Gamma$, $x^{(2)}$ — конец $\Gamma$. Тогда кривая $f(\Gamma) =$ $= \{f(x(t))\colon \alpha \leqslant t \leqslant \beta\} \subset f(G)$, $y^{(1)} = f(x^{(1)})$ — начало $f(\Gamma)$, $y^{(2)} = f(x^{(2)})$ — конец $f(\Gamma)$, что и требовалось доказать.

Глава 13

# ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В этой главе изучаются числовые функции многих переменных, определённые на некоторой окрестности некоторой точки пространства $\mathbb{R}^n$.

## § 13.1. Локальный экстремум

**Определение 1.** Пусть функция $f$ определена на некоторой окрестности точки $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. Точка $x^{(0)}$ называется *точкой* (*локального*) *минимума* функции $f$, если

$$\exists\, U(x^{(0)})\colon\, f(x^{(0)}) \leqslant f(x) \quad \forall\, x \in \mathring{U}(x^{(0)}).$$

Если же вместо $\leqslant$ можно написать $<$, то $x^{(0)}$ называется *точкой строгого* (*локального*) *минимума* функции $f$.

Аналогично определяются *точки* (*локального*) *максимума* и *строгого* (*локального*) *максимума* функции $f$.

Точки минимума и точки максимума функции называются её *точками* (*локального*) *экстремума*.

Аналогично определяются точки *строгого экстремума* функции.

Если $x^{(0)}$ является точкой экстремума (строгого экстремума, минимума и т. п.) функции $f$, то говорят также, что в точке $x^{(0)}$ функция $f$ достигает экстремума (строгого экстремума, минимума и т. п.)

**Теорема 1** (необходимые условия экстремума). *Пусть функция $f$ имеет в точке экстремума $x^{(0)}$ частную производную $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})$. Тогда $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) = 0$.*

Доказательство. Пусть, для определённости, $i = 1$. Рассмотрим функцию $\varphi$ одного переменного $x_1$: $\varphi(x_1) := f(x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$. Она имеет, очевидно, экстремум в точке $x_1^{(0)}$. Тогда по теореме Ферма

$$0 = \varphi'(x_1^{(0)}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^{(0)}).$$

**Определение 2.** Точка $x^{(0)}$ называется *стационарной точкой функции* $f$, если $f$ дифференцируема в точке $x^{(0)}$ и $df(x^{(0)}) = 0$.

Следствием теоремы 1 является

**Теорема 2** (необходимые условия экстремума). *Пусть функция $f$ имеет экстремум в точке $x^{(0)}$. Если $f$ дифференцируема в точке $x^{(0)}$, то $x^{(0)}$ — стационарная точка функции $f$.*

Стационарная точка функции не обязательно является её точкой экстремума, что можно увидеть на примере функции $f(x) = x^3$ одного переменного.

Достаточные условия наличия и отсутствия экстремума в стационарной точке можно сформулировать в терминах вторых производных.

Напомним в связи с этим некоторые сведения из алгебры.

Квадратичная форма

$$A(\xi) = A(\xi_1, \ldots, \xi_n) := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \tag{1}$$

($a_{ij} = a_{ji}$ при $i, j = 1, \ldots, n$) называется:

а) *положительно определённой*, если $A(\xi) > 0 \ \forall\, \xi \neq \mathbf{0}$,

б) *отрицательно определённой*, если $A(\xi) < 0 \ \forall\, \xi \neq \mathbf{0}$,

в) *определённой*, если она положительно определённа или отрицательно определённа,

г) *неопределённой*, если она принимает как положительные, так и отрицательные значения.

**Лемма 1.** *Пусть квадратичная форма $A(\xi)$ вида* (1) *положительно определённа. Тогда при некотором $\mu > 0$*

$$A(\xi) \geqslant \mu|\xi|^2 \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Доказательство. При $|\xi| = 0$ неравенство (2) очевидно. При $|\xi| > 0$, деля обе части (2) на $|\xi|^2$ и полагая $\eta = \dfrac{\xi}{|\xi|}$, сводим доказательство (2) к доказательству неравенства

$$\mu := \min_{\substack{\eta \in \mathbb{R}^n \\ |\eta| = 1}} A(\eta) > 0.$$

Последнее вытекает из теоремы 10.5.1 Вейерштрасса, в силу которой функция $A(\eta)$, непрерывная на единичной сфере $S := \{\eta \in \mathbb{R}^n \colon\ |\eta| = 1\}$ (являющейся компактом), достигает в некоторой точке $\eta^* \in S$ своего наименьшего значения $\mu = A(\eta^*) > 0$.

Для нас будут важны свойства второго дифференциала функции $f$
$$d^2 f(x^{(0)}) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^{(0)})\, dx_i\, dx_j, \tag{3}$$
представляющего собой квадратичную форму
$$d^2 f(x^{(0)}) = A(dx) = A(dx_1, \ldots, dx_n)$$
переменных $dx_1$, …, $dx_n$.

**Теорема 3** (достаточные условия строгого экстремума и отсутствия экстремума). *Пусть функция $f$ дважды непрерывно дифференцируема на некоторой окрестности стационарной точки $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.*

*Пусть второй дифференциал $d^2 f(x^{(0)})$ функции $f$ в точке $x^{(0)}$ является положительно определённой (отрицательно определённой) квадратичной формой. Тогда $x^{(0)}$ — точка строгого минимума (строгого максимума) функции $f$.*

*Если же квадратичная форма $d^2 f(x^{(0)})$ является неопределённой, то в точке $x^{(0)}$ у функции $f$ нет экстремума.*

Доказательство. Напишем разложение функции $f$ по формуле Тейлора в окрестности стационарной точки $x^{(0)}$ с остаточным членом в форме Пеано (11.6.3):
$$\Delta f(x^{(0)}) = f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)}) = \\ = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j + \varepsilon(\Delta x)|\Delta x|^2, \tag{4}$$
где $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to \mathbf{0}$.

В этой формуле отсутствуют члены с первыми производными, так как $x^{(0)}$ — стационарная точка.

Пусть сначала $d^2 f(x^{(0)})$ из (3) является положительно определённой формой. Тогда из последнего равенства в силу леммы 1 следует, что
$$\Delta f(x^{(0)}) \geqslant \left[\frac{1}{2}\,\mu + \varepsilon(\Delta x)\right] |\Delta x|^2, \quad \mu > 0.$$

Поскольку $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to \mathbf{0}$, то существует $\delta > 0$ такое, что
$$|\varepsilon(\Delta x)| < \frac{\mu}{4} \quad \forall\, \Delta x \colon 0 < |\Delta x| < \delta.$$
Следовательно,
$$\Delta f(x^{(0)}) \geqslant \frac{\mu}{4}\, |\Delta x|^2 > 0 \quad \forall\, \Delta x \colon 0 < |\Delta x| < \delta.$$
Неравенство $\Delta f(x^{(0)}) > 0$ означает, что $x^{(0)}$ является точкой строгого минимума функции $f$.

Аналогичным образом доказывается, что если $d^2f(x^{(0)})$ в формуле (3) является отрицательно определённой квадратичной формой, то $x^{(0)}$ — точка строгого максимума функции $f$.

Пусть теперь квадратичная форма $d^2f(x^{(0)})$ из (3) является неопределённой квадратичной формой. Это значит, что существуют две точки $\xi'$, $\xi'' \in \mathbb{R}^n$ такие, что $A(\xi') = \alpha < 0$, $A(\xi'') = \beta > 0$. Пусть $\Delta x = t\xi'$. Тогда из (4) имеем

$$f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)}) = \left[\frac{1}{2}\alpha + \varepsilon(t\xi')|\xi'|^2\right] t^2 \leqslant \frac{\alpha}{4}\, t^2 < 0$$

при всех $t$, достаточно малых по модулю.

Если же взять $\Delta x = t\xi''$, то аналогично получаем, что

$$f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)}) = \left[\frac{1}{2}\beta + \varepsilon(t\xi'')|\xi''|^2\right] t^2 \geqslant \frac{\beta}{4}\, t^2 > 0$$

при всех $t$, достаточно малых по модулю.

Мы видим, что на любой сколь угодно малой окрестности $U(x^{(0)})$ разность $f(x) - f(x^{(0)})$, $x \in U(x^{(0)})$, принимает как отрицательные, так и положительные значения. Следовательно, точка $x^{(0)}$ не является точкой экстремума функции $f$.

**Следствие** (необходимые условия экстремума). *Пусть функция $f$ дважды непрерывно дифференцируема на некоторой окрестности стационарной точки $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. Если функция $f$ имеет экстремум в точке $x^{(0)}$, то либо $d^2f(x^{(0)}) \geqslant 0$ $\forall\, dx \in \mathbb{R}^n$, либо $d^2f(x^{(0)}) \leqslant 0$ $\forall\, dx \in \mathbb{R}^n$.*

**Замечание 1.** Если квадратичная форма $d^2f(x^{(0)})$ из (3) в стационарной точке $x^{(0)}$ функции $f$ является *полуопределённой* (т. е. $d^2f(x^{(0)}) \geqslant 0$ либо $d^2f(x^{(0)}) \leqslant 0$), но не является определённой, то для изучения вопроса об экстремуме функции $f$ в точке $x^{(0)}$ можно использовать разложение $f$ по формуле Тейлора более высокого порядка, как это делалось в случае функции одного переменного.

Для выяснения, является или нет данная квадратичная форма положительно (отрицательно) определённой, часто используется

**Критерий Сильвестра** (положительной определённости квадратичной формы). *Квадратичная форма* (1) *положительно определённа тогда и только тогда, когда*

$$\Delta_1 = a_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \ldots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Очевидно, что квадратичная форма $A(\xi)$ вида (1) отрицательно определённа тогда и только тогда, когда квадратичная форма

$-A(\xi)$ положительно определённа. Следовательно, критерием отрицательной определённости формы (1) является условие

$$(-1)^k \Delta_k > 0 \quad \forall\, k = 1, \ldots, n.$$

Сформулируем отдельно случай теоремы 3, относящийся к функции двух переменных.

**Теорема 4.** *Пусть функция $f$ двух переменных дважды непрерывно дифференцируема на некоторой окрестности стационарной точки $(x_0, y_0)$, так что*

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

*а) Если в $(x_0, y_0)$*

$$f''_{xx} f''_{yy} - {f''_{xy}}^2 > 0,$$

*то точка $(x_0, y_0)$ является точкой строгого экстремума (строгого минимума при $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, строгого максимума при $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$) функции $f$.*

*б) Если в $(x_0, y_0)$*

$$f''_{xx} f''_{yy} - {f''_{xy}}^2 < 0,$$

*то в точке $(x_0, y_0)$ экстремума функции $f$ нет.*

*в) Если в $(x_0, y_0)$*

$$f''_{xx} f''_{yy} - {f''_{xy}}^2 = 0,$$

*то в точке $(x_0, y_0)$ экстремум функции $f$ может быть, а может и не быть.*

Доказательство. а) Определённость квадратичной формы (3) следует из критерия Сильвестра, так как $\Delta_1 > 0$ $(\Delta_1 < 0)$, $\Delta_2 > 0$. Остаётся сослаться на теорему 3.

б) Подставляя во второй дифференциал

$$d^2 f(x_0, y_0) = \\ = f''_{xx}(x_0, y_0)\, dx^2 + 2 f''_{xy}(x_0, y_0)\, dx\, dy + f''_{yy}(x_0, y_0)\, dy^2 \quad (5)$$

$dy = t\, dx$ (если $f''_{yy}(x_0, y_0) \neq 0$) или $dx = t\, dy$ (если $f''_{xx}(x_0, y_0) \neq$ $\neq 0$) и вынося $dx^2$ (или $dy^2$) за скобки, получаем в скобках квадратный трёхчлен относительно $t$ с положительным дискриминантом. Поэтому значение этого трёхчлена при различных $t$ может быть как положительным, так и отрицательным. Следовательно, квадратичная форма (5) является неопределённой.

Если же $f''_{xx} = f''_{yy} = 0$, то $f''_{xy} \neq 0$ и

$$d^2 f(x_0, y_0)\Big|_{dy = t\, dx} = 2 f''_{xy}(x_0, y_0) t\, dx^2$$

принимает различные по знаку значения при $t = -1$ и при $t = 1$. Так что и в этом случае квадратичная форма (5) является неопределённой.

В силу теоремы 3 получаем, что в точке $(x_0, y_0)$ нет экстремума функции $f$.

в) Достаточно рассмотреть в окрестности точки $(x_0, y_0) = (0, 0)$ две функции:

$$f(x, y) = x^4 + y^4, \quad g(x, y) = x^4 - y^4.$$

Все частные производные первого и второго порядков этих функций в точке $(0, 0)$ равны нулю, однако в этой точке функция $f$ имеет строгий минимум, а функция $g$ не имеет экстремума.

**Упражнение 1.** Доказать утверждение а) теоремы 4 методом, применённым для доказательства утверждения б).

## § 13.2. Условный локальный экстремум

Пусть на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ заданы функции $f$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ $(1 \leqslant m < n)$. Пусть

$$E := \{x \colon x \in G, \quad \varphi_j(x) = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant m\}.$$

Уравнения системы

$$\{\varphi_j(x) = 0\}_{j=1}^m \tag{1}$$

будем называть *уравнениями связи* (*связями*).

**Определение 1.** Точка $x^{(0)} \in E$ называется *точкой условного минимума* (*строгого условного минимума*) функции $f$ при связях (1), если

$$\exists \delta > 0 : \ f(x^{(0)}) \leqslant f(x) \ (f(x^{(0)}) < f(x)) \quad \forall x \in \ E \cap \mathring{U}_\delta(x^{(0)}).$$

Аналогично определяются точки *условного максимума* (*строгого условного максимума*), *условного экстремума* (*строгого условного экстремума*).

**Замечание 1.** Вместо термина «условный» употребляется также термин «относительный». Ради краткости вместо «при связях (1)» будем писать «при (1)».

**Пример 1.** $G = \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $m = 1$, $\varphi_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 1$. Найти точку условного экстремума функции $f$ при $x_1 + x_2 - 1 = 0$.

На прямой $\varphi_1(x_1, x_2) = 0$ имеем $f(x_1, x_2) = f(x_1, 1 - x_1) = 2x_1^2 - 2x_1 + 1 = 2\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$. Следовательно, точка $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

является точкой строгого условного минимума функции $f$ при $\varphi_1 = 0$.

В дальнейшем будем считать, что функции $f$, $\varphi_1$, … …, $\varphi_m$ непрерывно дифференцируемы на $G$, $\operatorname{rang}\left\|\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right\| = m$ на $G$, $x^{(0)} \in E$. Без ограничения общности предположим, что $\left.\frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)}\right|_{x^{(0)}} \neq 0$. Тогда по теореме о системе неявных функций существует прямоугольная окрестность $Q(x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}) \times Q(x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, на которой (1) $\Longleftrightarrow$ (1$'$), где

$$\{x_j = \mu_j(x_{m+1}, \ldots, x_n)\}_{j=1}^m, \tag{1$'$}$$

причём функции $\mu_j$ непрерывно дифференцируемы на $Q(x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$,

$$\{\varphi_j(\mu_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \mu_2(), \ldots, \mu_m(), x_{m+1}, \ldots, x_n) = 0\}_{j=1}^m. \tag{2}$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi(x_{m+1}, \ldots, x_n) :=$$
$$:= f(\mu_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \mu_2(), \ldots, \mu_m(), x_{m+1}, \ldots, x_n).$$

Очевидно, что точка $x^{(0)}$ тогда и только тогда является точкой условного экстремума функции $f$ при (1), когда точка $(x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ является точкой локального экстремума функции $\Phi$. Таким образом, вопрос о нахождении условного экстремума сведён к вопросу нахождения (локального) экстремума (который называют иногда *абсолютным экстремумом*, подчёркивая его отличие от условного экстремума). Однако такой подход малоэффективен в связи с трудностями получения в явном виде функций $\mu_1$, …, $\mu_m$ и построения суперпозиции.

Отметим эквивалентность (3) $\Longleftrightarrow$ $3'$ систем линейных уравнений относительно дифференциалов, где

$$\left\{\sum_{i=1}^n \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx_i = 0\right\}_{j=1}^m, \tag{3}$$

$$\left\{dx_j = \sum_{i=m+1}^n \frac{\partial\mu_j}{\partial x_i}dx_i\right\}_{j=1}^m, \tag{3$'$}$$

с коэффициентами, взятыми в точке $x^{(0)}$. В самом деле, при любых фиксированных $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$ решение системы уравнений (3) единственно, так как её определитель отличен от нуля; решение 3′ также, очевидно, единственно. В то же время решение 3′ удовлетворяет (3), так как результат подстановки решения 3′ в (3) совпадает с системой продифференцированных тождеств (2).

Через $\widetilde{dx_1}, \ldots, \widetilde{dx_n}$ будем обозначать дифференциалы, удовлетворяющие системам уравнений (3), 3′.

**Определение 2.** Точка $x^{(0)} \in E$ называется *условно стационарной точкой* функции $f$ при (1), если

$$\widetilde{df}(x^{(0)}) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \widetilde{dx_i} = 0.$$

**Теорема 1.** *Пусть $x^{(0)} \in E$. Следующие три условия эквивалентны.*

*1° Точка $(x^{(0)}_{m+1}, \ldots, x^{(0)}_n)$ является стационарной точкой функции $\Phi$.*

*2° Точка $x^{(0)} \in E$ является условно стационарной точкой функции $f$ при* (1).

*3° Существуют действительные числа $\lambda_1$, …, $\lambda_m$ (называемые множителями Лагранжа) такие, что $x^{(0)}$ является стационарной точкой функции Лагранжа*

$$L(x) := f(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_j(x).$$

*При этом числа $\lambda_j$ определяются однозначно.*

Доказательство. $1^\circ \iff 2^\circ$.

$$[d\Phi(x^{(0)}_{m+1}, \ldots, x^{(0)}_n) = 0] \iff \left[0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} dx_i \bigg|_{(1')} = \right.$$

$$\left. = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} dx_i \bigg|_{(3')} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \widetilde{dx_i} =: \widetilde{df}(x^{(0)})\right],$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что при доказательстве была использована инвариантность формы первого дифференциала.

$2^\circ \iff 3^\circ$. Рассмотрим систему из $(m+1)$ уравнений

$$\left.\begin{array}{c} \left\{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx_i = 0\right\}_{j=1}^{m}, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = 0 \end{array}\right\}. \tag{4}$$

Эти и следующие соотношения написаны для значений производных и дифференциалов в точке $x^{(0)}$.

Имеем

$$[x^{(0)} \text{— условно стационарная точка } f \text{ при } (1)] \iff$$
$$\iff [\,\widetilde{df} = 0] \iff [(3) \Rightarrow (df = 0)] \iff$$
$$\iff [\operatorname{rang}(4) = \operatorname{rang}(3) = m] \iff \Bigg[\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}\colon$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_n}\right)\Bigg] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\operatorname{grad} f = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \operatorname{grad} \varphi_j\right] \Leftrightarrow [\operatorname{grad} L = 0] \Leftrightarrow [dL = 0].$$

Следствием теоремы 1 является

**Теорема 2** (необходимое условие условного экстремума). *Точка $x^{(0)}$ условного экстремума функции $f$ при* (1) *является стационарной точкой функции Лагранжа $L$.*

Введение и использование функции Лагранжа для формулировки необходимых и достаточных условий условного экстремума называется *методом множителей Лагранжа*.

**Достаточные условия условного экстремума.** Дополнительно будем считать, что функции $f$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ дважды непрерывно дифференцируемы на некоторой окрестности точки $x^{(0)}$, где $x^{(0)}$ — условно стационарная точка $f$ при (1), т. е. стационарная точка функции Лагранжа из $E$. Пусть $\delta > 0$ достаточно мало́, $x = (x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) \in E \cap U_\delta(x^{(0)})$,

$$\varPhi(x_{m+1}, \ldots, x_n) = f(x)\big|_{(1')} =$$
$$= \left(f(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_j(x)\right)\Bigg|_{(1')} =: L(x)\Big|_{(1')}.$$

По теореме 1 точка $(x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ является стационарной точкой функции $\varPhi$. Выразим $d^2\varPhi$ в этой точке через $d^2L$.

Вычислим $d\varPhi$, $d^2\varPhi$ в точке $(x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, считая $x_{m+1}, \ldots$ $\ldots, x_n$ независимыми переменными:

$$d\varPhi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_i} dx_i\Big|_{(1')},$$

$$d^2\varPhi(x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 L(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_k}\, dx_i\, dx_k\Big|_{(1')} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L(x^{(0)})}{\partial x_i} d^2 x_i\Big|_{(1')} = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 L(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_k}\, \widetilde{dx_i}\, \widetilde{dx_k} =: \widetilde{d^2 L}(x^{(0)}).$$

Достаточные условия условного экстремума функции $f$ при (1), являясь достаточными условиями локального экстремума функции $\Phi$, формулируются в терминах свойств квадратичной формы $d^2\Phi$. Как видно из последней цепочки равенств, эти условия можно переформулировать в терминах квадратичной формы

$$\widetilde{d^2 L}(x^{(0)}) := \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 L(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_k} \widetilde{dx_i}\, \widetilde{dx_k}.$$

**Теорема 3** (достаточные условия строгого условного экстремума). *Пусть функции $f$, $\varphi_1$, ..., $\varphi_m$ дважды непрерывно дифференцируемы на некоторой окрестности стационарной точки $x^{(0)} \in E$ функции Лагранжа $L$.*

*Тогда:*

1° $d^2L(x^{(0)}) > 0$ $(< 0)$ *при* $|dx| > 0 \Rightarrow x^{(0)}$ — *точка строгого условного минимума (максимума) $f$ при* (1);

2° $\widetilde{d^2 L}(x^{(0)}) > 0$ $(< 0)$ *при* $|\widetilde{dx}| > 0 \Rightarrow x^{(0)}$ — *точка строгого условного минимума (максимума) $f$ при* (1);

3° $d^2L(x^{(0)})$ — *неопределённая квадратичная форма $\Rightarrow$ об условном экстремуме $f$ при* (1) *ничего сказать нельзя;*

4° $\widetilde{d^2 L}(x^{(0)})$ — *неопределённая квадратичная форма $\Rightarrow$ в точке $x^{(0)}$ нет условного экстремума функции $f$ при* (1).

**План исследования функции на условный экстремум методом множителей Лагранжа.** Пусть функции $f, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ $(1 \leqslant m < n)$ непрерывно дифференцируемы на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, $\operatorname{rang}\left\|\dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right\| = m$ на $G$. Пусть $E = \{x\colon x \in G,$ $\varphi_j(x) = 0,\ 1 \leqslant j \leqslant m\}$. Для нахождения точек условного экстремума функции $f$ при связях (1) поступают следующим образом.

1°. Составляют функцию Лагранжа

$$L(x) := f(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_j(x).$$

2°. Находят стационарные точки функции Лагранжа, лежащие на $E$ (только эти точки могут являться точками условного экстремума), т. е. решают систему $(n+m)$ уравнений

$$\left.\begin{array}{c} \left\{\dfrac{\partial}{\partial x_i} L(x) = 0\right\}_1^n, \\ \{\varphi_j(x) = 0\}_1^m \end{array}\right\}$$

относительно $(n+m)$ неизвестных $x_1$, $x_2$, …, $x_n$, $\lambda_1$, $\lambda_2$, …, $\lambda_m$. В каждой стационарной точке множители Лагранжа находятся однозначно.

Отметим, что система $\{\varphi_j(x)=0\}_1^m$ формально может быть записана в виде $\left\{\dfrac{\partial}{\partial\lambda_j}L(x)=0\right\}_1^m$.

3°. Для каждой стационарной точки $x^{(0)}$ функции Лагранжа, на окрестности которой функции $f$, $\varphi_1$, …, $\varphi_m$ дважды непрерывно дифференцируемы, составляют $d^2L$ и, если потребуется, $\widetilde{d^2L}$. Применяют теорему 2 для выяснения типа условного экстремума.

4°. Находят значения функции $f$ в точках условного экстремума.

**Пример 2.** Найдём точки условного экстремума функции $f(x,y,z)=xyz$, если $x^2+y^2+z^2=1$, $x+y+z=0$.

Здесь $\varphi_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$, $\varphi_2(x,y,z)=x+y+z$. В качестве множества $G$ можно взять, например,

$$G=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon |\varphi_j(x,y,z)|<\frac{1}{2},\quad j=1,2\right\}.$$

Для функции Лагранжа

$$L(x,y,z)=xyz-\lambda_1(x^2+y^2+z^2-1)-\lambda_2(x+y+z)$$

найдём стационарные точки, удовлетворяющие уравнениям связи, решив систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} L'_x\equiv yz-2\lambda_1x-\lambda_2=0,\\ L'_y\equiv xz-2\lambda_1y-\lambda_2=0,\\ L'_z\equiv xy-2\lambda_1z-\lambda_2=0,\\ x^2+y^2+z^2-1=0,\\ x+y+z=0\end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Сложив первые три уравнения, в силу последнего получим

$$yz+xz+xy-3\lambda_2=0. \tag{6}$$

Но $2(yz+xz+xy)=(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)=0-1$, и из (6) получаем $\lambda_2=-\dfrac{1}{6}$.

Разность первых двух уравнений (5) представляется в виде $(y-x)(z+2\lambda_1)=0$. Аналогично получаем ещё два уравнения:

$$(z-y)(x+2\lambda_1)=0,\quad (x-z)(y+2\lambda_1)=0.$$

Из этих трёх уравнений следует (в силу последних двух уравнений из (5)), что

$$(y-x)(z-y)(x-z)=0.$$

Рассмотрим для определённости лишь случай $y-x=0$ (остальные два исследуются аналогично).

В данном случае имеются две стационарные точки, удовлетворяющие уравнениям связи:

$$\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \text{ и } \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right);$$

при этом $\lambda_1=-\dfrac{\sqrt{6}}{12}$ и $\lambda_2=\dfrac{\sqrt{6}}{12}$ соответственно.

Будем исследовать эти точки одновременно. В них

$$d^2L=-2\lambda_1(dx^2+dy^2+dz^2)+2z\,dx\,dy+2y\,dx\,dz+$$
$$+2x\,dy\,dz=\pm\frac{\sqrt{6}}{6}(dx^2+dy^2+dz^2-4\,dx\,dy+2\,dx\,dz+2\,dy\,dz)$$

является неопределённой квадратичной формой, т. е. принимает положительные и отрицательные значения (ср. $dx=1, dy=dz=$ $=0$ и $dx=dy=1, dz=0$).

Построим $\widetilde{d^2L}$, связав дифференциалы $dx, dy, dz$ в $d^2L$ требованием (3):

$$\left.\begin{aligned} x\,dx+y\,dy+z\,dz=0,\\ dx+dy+dz=0 \end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

В каждой из рассматриваемых двух точек $x=y$, так что решение $(\widetilde{dx}, \widetilde{dy}, \widetilde{dz})$ системы (7) имеет вид $(\widetilde{dx}, -\widetilde{dx}, 0)$. Поэтому $\widetilde{d^2L}=\pm\sqrt{6}\,\widetilde{dx}^2$ является положительно (отрицательно) определённой квадратичной формой одного переменного.

С помощью теоремы 3 заключаем, что $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{6}, \dfrac{\sqrt{6}}{6}, -\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$ является точкой строгого условного минимума, а точка $\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{6}, -\dfrac{\sqrt{6}}{6}, \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$ — точкой строгого условного максимума функции $f$ при заданных связях. Значения функции $f$ в этих точках равны $-\dfrac{\sqrt{6}}{18}$ и $\dfrac{\sqrt{6}}{18}$ соответственно.

Глава 14

# ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

## § 14.1. Понятие определённого интеграла

**Определение 1.** *Разбиением* $\tau$ *отрезка* $[a,b]$ называется произвольная конечная система его точек $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i_\tau}$ такая, что $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i_\tau - 1} < x_{i_\tau} = b$.

Каждый из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ называется *отрезком разбиения* $\tau$, $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$. Величина $|\tau| := \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant i_\tau} \Delta x_i$ называется *мелкостью разбиения* $\tau$.

Будем говорить, что разбиение $\tau'$ *следует за разбиением* $\tau$, или *является измельчением* разбиения $\tau$, и писать $\tau' \succ \tau$, если каждая точка разбиения $\tau$ является точкой разбиения $\tau'$.

Разбиения данного отрезка обладают следующими свойствами:

1° если $\tau_1 \succ \tau_2$, $\tau_2 \succ \tau_3$, то $\tau_1 \succ \tau_3$;

2° для любых $\tau_1$, $\tau_2$ существует $\tau$: $\tau \succ \tau_1$, $\tau \succ \tau_2$.

Первое свойство очевидно. Для доказательства второго достаточно в качестве $\tau$ взять разбиение, содержащее все точки разбиения $\tau_1$ и все точки разбиения $\tau_2$.

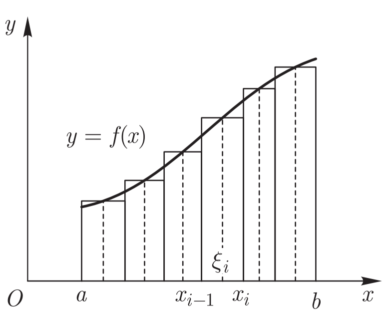



Рис. 1

Пусть теперь на отрезке $[a,b]$ определена (числовая) функция $f$ и $\tau = \{x_i\}_0^{i_\tau}$ — разбиение этого отрезка. Отметим в каждом отрезке разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ какую-либо точку $\xi_i$ и составим сумму

$$S_\tau(f; \xi_1, \ldots, \xi_{i_\tau}) := \sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

называемую *интегральной суммой Римана* функции $f$.

Если функция $f$ неотрицательна, то слагаемое $f(\xi_i)\Delta x_i$ суммы Римана равно площади прямоугольника с основанием $[x_{i-1}, x_i]$ и высотой $f(\xi_i)$, а вся сумма — площади ступенчатой фигуры, образованной объединением всех таких прямоугольников (рис. 1).

**Определение 2.** *Определённым интегралом Римана функции $f$ на отрезке* $[a, b]$ называется число $I$, обладающее свойством: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\left| \sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi_i)\Delta x_i - I \right| < \varepsilon$$

для любых $\tau$ с мелкостью $|\tau| < \delta$ и для любого набора отмеченных точек $\xi_1, \ldots, \xi_{i_\tau}$. Число $I$ обозначается символом $\int_a^b f(x)\,dx$.

Функцию $f$ называют *интегрируемой по Риману* на отрезке $[a, b]$ (по отрезку $[a, b]$), если существует $\int_a^b f(x)\,dx$.

Кратко можно записать

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx := \lim_{|\tau|\to 0} S_\tau(f; \xi_1, \ldots, \xi_{i_\tau}),$$

вкладывая в понятие предела тот смысл, который выражен в $(\varepsilon, \delta)$-терминах в определении 2 (это понятие отличается от изученных понятий предела последовательности и предела функции).

Поскольку ниже мы будем иметь дело лишь с определённым интегралом Римана, то будем называть его просто *определённым интегралом*, а функцию, интегрируемую по Риману, — *интегрируемой функцией*.

В следующей теореме показывается, что определённый интеграл может существовать только для ограниченных функций.

**Теорема 1.** *Если функция интегрируема на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть функция $f$ неограничена на отрезке $[a, b]$. Покажем, что она не интегрируема на $[a, b]$. Для произвольного разбиения $\tau$ отрезка представим сумму Римана функции $f$ в виде

$$S_\tau(f) = S_\tau(f; \xi_1, \ldots, \xi_{i_\tau}) = f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant i_\tau \\ i\neq k}} f(\xi_i)\Delta x_i, \qquad (1)$$

где $[x_{k-1}, x_k]$ — такой отрезок разбиения $\tau$, на котором $f$ неограничена. Сначала каким-либо образом выберем все отмеченные точки $\xi_i$, кроме одной из них с номером $k$. Тогда правую часть (1) можно сделать сколь угодно большой по модулю за счёт выбора $\xi_k$. Следовательно, при любом разбиении $\tau$ интегральная сумма Римана $S_\tau(f)$ может быть сколь угодно большой по модулю (например, $|S_\tau(f)| > 1/|\tau|$) при соответствующем выборе отмеченных точек. Это противоречит существованию (конечного) предела $\lim\limits_{|\tau|\to 0} S_\tau(f)$. Значит, функция $f$ не интегрируема на $[a, b]$.

Условие ограниченности функции, являясь необходимым, не является достаточным для интегрируемости функции, в чём можно убедиться на примере *функции Дирихле*:

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально}, \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально}. \end{cases}$$

Для этой функции при произвольном разбиении $\tau$ сумма Римана $S_\tau(f) = 1$, если все отмеченные точки рациональны, и $S_\tau(f) = 0$, если все отмеченные точки иррациональны.

Следовательно, функция Дирихле не является интегрируемой на $[0, 1]$.

## § 14.2. Критерий интегрируемости функции

**Определение 1.** Пусть функция $f$ определена на отрезке $[a, b]$. Её *колебанием* на этом отрезке называется число

$$\omega(f; [a,b]) := \sup_{x', x'' \in [a,b]} |f(x') - f(x'')| = \sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f.$$

Для $f$, определённой на отрезке $[a, b]$, и для разбиения $\tau = \{x_i\}_0^{i_\tau}$ этого отрезка положим $\omega_i(f) = \omega(f; [x_{i-1}, x_i])$.

**Теорема 1** (критерий интегрируемости функции). *Для интегрируемости функции $f$ на $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы* $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$:

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f) \Delta x_i < \varepsilon \ \ \forall\, \tau = \{x_i\}_1^{i_\tau} : |\tau| < \delta. \tag{1}$$

Критерий интегрируемости функции кратко можно записать так:

$$\lim_{|\tau|\to 0} \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f) \Delta x_i = 0, \tag{2}$$

вкладывая в понятие предела тот смысл, который выражен в $(\varepsilon, \delta)$-терминах в (1).

Доказательство. *Необходимость.* Пусть функция $f$ интегрируема на $[a, b]$, и пусть $\int_a^b f(x)\, dx = I$. Тогда

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ |S_\tau(f; \xi_1, \ldots, \xi_{i_\tau}) - I| < \varepsilon$$
$$\forall\, \tau \colon |\tau| < \delta, \quad \forall\, \xi_1, \ldots, \xi_{i_\tau}.$$

Зафиксируем $\varepsilon$, $\delta$ и $\tau$. Пусть $\xi_i'$, $\xi_i''$ — две такие точки интервала $[x_{i-1}, x_i]$, что $\omega_i(f) \leqslant 2(f(\xi_i') - f(\xi_i''))$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i \leqslant 2\sum_{i=1}^{i_\tau}(f(\xi_i') - f(\xi_i''))\Delta x_i \leqslant \\ \leqslant 2|I - S_\tau(f; \xi_1', \ldots, \xi_{i_\tau}')| + 2|I - S_\tau(f; \xi_1'', \ldots, \xi_{i_\tau}'')| < 4\varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{|\tau|\to 0} \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i = 0.$$

*Достаточность.* Покажем, что при $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{k}$, $\tau^* = \{x_j^*\}_{j=0}^{k^*} \succ \tau$

$$|S_\tau(f; \xi_1, \ldots, \xi_k) - S_{\tau^*}(f; \xi_1^*, \ldots, \xi_{k^*}^*)| \leqslant \\ \leqslant \sum_{i=1}^{k} \omega(f; [x_{i-1}, x_i])\Delta x_i. \quad (3)$$

Пусть $x_i = x_{j_i}^*$ $\forall\, i = 0, \ldots, i_\tau$, т. е. $x_{i-1} = x_{j_{i-1}}^* < \ldots < x_{j_i}^* = x_i$. Тогда

$$\left| f(\xi_i)\Delta x_i - \sum_{j=j_{i-1}+1}^{j_i} f(\xi_j^*)\Delta x_j^* \right| \leqslant \sum_{j=j_{i-1}+1}^{j_i} \omega_i(f)\Delta x_j^* = \omega_i(f)\Delta x_i.$$

Отсюда следует (3).

Пусть теперь разбиения $\tau'$, $\tau''$ отрезка $[a, b]$ произвольны. Возьмём разбиение $\tau^*$: $\tau^* \succ \tau'$, $\tau^* \succ \tau''$ (напомним, что при этом все точки разбиений $\tau'$ и $\tau''$ являются точками разбиения $\tau^*$). Тогда в силу (3) получаем

$$|S_{\tau'}(f) - S_{\tau''}(f)| \leqslant |S_{\tau'}(f) - S_{\tau^*}(f)| + |S_{\tau''}(f) - S_{\tau^*}(f)| \leqslant \\ \leqslant \sum_{i=1}^{k'} \omega(f; [x_{i-1}', x_i'])\Delta x_i' + \sum_{i=1}^{k''} \omega(f; [x_{i-1}'', x_i''])\Delta x_i''. \quad (4)$$

Из (1) и (4) следует, что

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon\ |S_{\tau'}(f) - S_{\tau''}(f)| < \varepsilon, \\ \text{если } |\tau'|, |\tau''| < \delta. \quad (5)$$

Исходя из свойства (5), проведём оставшуюся часть доказательства достаточности подобно тому, как при доказательстве критерия Коши для последовательности из фундаментальности последовательности мы получили её сходимость.

Возьмём произвольную последовательность разбиений $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которой $|\tau_n| \to 0$ при $n \to \infty$. Для каждого разбиения $\tau_n = \{x_i^{(n)}\}_{i=0}^{k_n}$, отметив произвольно точки $\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_{k_n}^{(n)}$, составим сумму Римана $S_{\tau_n}(f)$. Рассмотрим числовую последовательность $\{S_{\tau_n}(f)\}_{n=1}^{\infty}$. Она является фундаментальной (т.е. удовлетворяет условию Коши), так как в силу (5) $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$: $|S_{\tau_n}(f) - S_{\tau_m}(f)| < \varepsilon$ $\forall\, n, m \geqslant n_\varepsilon$. Следовательно, по критерию Коши последовательность $\{S_{\tau_n}(f)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится. Пусть

$$I = \lim_{n\to\infty} S_{\tau_n}(f; \xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_{k_n}^{(n)}).$$

В силу (4) имеем

$$|S_{\tau_n}(f) - S_\tau(f)| \leqslant \sum_{i=1}^{k_n} \omega(f; [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}])\Delta x_i^{(n)} + \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$|I - S_\tau(f)| \leqslant \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i. \tag{6}$$

На основании (2) отсюда следует, что

$$\lim_{|\tau|\to 0} S_\tau(f) = I.$$

**Замечание 1.** Оценка (6) показывает, с какой точностью интеграл может быть приближен интегральной суммой Римана. Эта оценка может использоваться для приближённого вычисления интеграла.

**Определение 2.** Пусть функция $f$ определена на отрезке $[a, b]$, и пусть $\tau = \{x_i\}_0^{i_\tau}$ — разбиение $[a, b]$. Пусть

$$m_i := \inf_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i} f(x), \quad M_i := \sup_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i} f(x).$$

Тогда суммы

$$\underline{S_\tau}(f) := \sum_{i=1}^{i_\tau} m_i\Delta x_i, \quad \overline{S_\tau}(f) := \sum_{i=1}^{i_\tau} M_i\Delta x_i$$

называют соответственно *нижней* и *верхней интегральными суммами Дарбу* функции $f$, отвечающими разбиению $\tau$.

Ясно, что

$$\underline{S_\tau}(f) \leqslant S_\tau(f) \leqslant \overline{S_\tau}(f)$$

для любой интегральной суммы Римана $S_\tau(f)$.

Нетрудно показать (предоставим это читателю), что [1])

$$\overline{S_\tau}(f) - \underline{S_\tau}(f) = \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i.$$

С помощью последнего равенства можно перефразировать критерий интегрируемости функции в терминах сумм Дарбу:

*для интегрируемости на отрезке $[a, b]$ функции $f$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon \overline{S_\tau}(f) - \underline{S_\tau}(f) < \varepsilon \quad \forall\, \tau\colon |\tau| < \delta.$$

**Упражнение 1.** Выяснить геометрический смысл интегральных сумм Дарбу для неотрицательных функций.

**Упражнение 2.** С помощью теоремы 1 установить *критерий интегрируемости Римана*: *для интегрируемости функции $f$ на $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \tau\colon \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i < \varepsilon.$$

Установим интегрируемость монотонных функций и интегрируемость непрерывных функций.

**Теорема 2.** *Функция, монотонная на отрезке, интегрируема на этом отрезке.*

Доказательство. Для определённости будем считать, что функция $f$ возрастает на отрезке $[a, b]$. Тогда для произвольного $\delta > 0$ при $|\tau| < \delta$ имеем

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{i_\tau} (f(x_i) - f(x_{i-1}))\Delta x_i \leqslant \\ \leqslant |\tau| \sum_{i=1}^{i_\tau} (f(x_i) - f(x_{i-1})) < \delta(f(b) - f(a)),$$

так что выполняется условие (1). Следовательно, $f$ интегрируема в силу критерия интегрируемости (теоремы 1).

**Теорема 3.** *Функция, непрерывная на отрезке, интегрируема на нём.*

Доказательство. Пусть функция $f$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда по теореме Кантора 10.5.2 она равномерно непрерывна на нём, так что при $a \leqslant c < d \leqslant b$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon \omega(f; [c, d]) \leqslant \varepsilon, \text{ если } d - c < \delta.$$

[1]) Разность $b - a$ считается равной $+\infty$, если $b = +\infty$, $a < +\infty$.

Следовательно, при произвольном $\varepsilon > 0$ для разбиения $\tau$ отрезка $[a, b]$ с мелкостью $|\tau| < \delta$

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i \leqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{i_\tau} \Delta x_i = \varepsilon(b-a).$$

В силу критерия интегрируемости функция $f$ интегрируема на $[a, b]$.

**Теорема 4.** *Пусть функция $f$ ограничена на отрезке $[a, b]$ и непрерывна на интервале $(a, b)$.*

*Тогда она интегрируема на отрезке $[a, b]$.*

Доказательство. Пусть $|f(x)| \leqslant M$ при $x \in [a, b]$. Возьмём произвольное $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{b-a}{2}\right)$. Тогда при любом разбиении $\tau$ отрезка $[a, b]$

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i = \sum_{[x_{i-1},x_i]\not\subset[a+\varepsilon,b-\varepsilon]} \omega_i(f)\Delta x_i + \\ + \sum_{[x_{i-1},x_i]\subset[a+\varepsilon,b-\varepsilon]} \omega_i(f)\Delta x_i = \Sigma' + \Sigma''.$$

Очевидно, что

$$\Sigma' \leqslant 4M(\varepsilon + |\tau|).$$

Поскольку функция $f$ непрерывна и, следовательно, по теореме 3 интегрируема на $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$, то в силу критерия интегрируемости существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\Sigma'' < \varepsilon \quad \text{при} \quad |\tau| < \delta.$$

Будем считать, что $\delta \leqslant \varepsilon$. Тогда при $|\tau| < \delta \leqslant \varepsilon$

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i = \Sigma' + \Sigma'' < 8M\varepsilon + \varepsilon = (8M+1)\varepsilon.$$

Это означает, что выполняется условие (1), и в силу критерия интегрируемости функция $f$ интегрируема на $[a, b]$.

**Определение 3.** Функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ называется *кусочно-непрерывной* на $[a, b]$, если существует разбиение $\tau = \{a_i\}_0^{i_\tau}$ отрезка $[a, b]$ такое, что при любом $i = 1, \ldots, i_\tau$ функция $f$ либо является непрерывной на отрезке $[a_{i-1}, a_i]$, либо становится таковой после надлежащего её переопределения в одном или в обоих концах этого отрезка. Это равносильно тому, что при любом $i = 1, \ldots, i_\tau$:

1° функция $f$ непрерывна на $(a_{i-1}, a_i)$;

2° существуют конечные пределы $f(a_{i-1}+0)$, $f(a_i-0)$.

Так же, как теорема 4, доказывается и

**Теорема 5.** *Кусочно-непрерывная на отрезке функция интегрируема на нём.*

## § 14.3. Свойства интегрируемых функций

**1.** Пусть функция $f$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, и пусть $[a^*,b^*] \subset [a,b]$. Тогда $f$ интегрируема на $[a^*,b^*]$.

Доказательство. Пусть $\tau^* = \{x_i^*\}$ — произвольное разбиение отрезка $[a^*,b^*]$. Дополним $\tau^*$ до разбиения $\tau = \{x_i\}$ отрезка $[a,b]$ с мелкостью $|\tau| = |\tau^*|$. Тогда

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant i_{\tau^*}} \omega_i^*(f)\Delta x_i^* \leqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant i_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i,$$

где $\omega_i^*(f) = \omega(f; [x_{i-1}^*, x_i^*])$.

Для правой части неравенства выполняется (так как $f$ интегрируема на $[a,b]$) условие (14.2.2). Следовательно, оно выполняется и для левой части. В силу критерия интегрируемости $f$ интегрируема на $[a^*,b^*]$.

**2** (аддитивность относительно отрезков интегрирования). Пусть $a<c<b$, функция $f$ интегрируема на $[a,c]$ и на $[c,b]$. Тогда $f$ интегрируема на $[a,b]$, причём

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Доказательство. Функция $f$ как интегрируемая на $[a,c]$ и на $[c,b]$ ограничена: $|f(x)| \leqslant M$ при $x \in [a,b]$.

Пусть $\tau = \{x_i\}_0^{i_\tau}$ — произвольное разбиение отрезка $[a,b]$, $\tau_c$ — разбиение $[a,b]$, полученное дополнением разбиения $\tau$ точкой $c$ (или совпадающее с $\tau$, если $c \in \tau$). Пусть $\tau_c'$, $\tau_c''$ — соответственно разбиения отрезков $[a,c]$, $[c,b]$, порождённые разбиением $\tau_c$.

Сравним интегральные суммы Римана $S_\tau(f)$, $S_{\tau_c'}(f)$, $S_{\tau_c''}(f)$, считая, что отмеченные точки в первой из них выбраны произвольно, а во второй и в третьей — по возможности совпадающими с отмеченными точками в $S_\tau(f)$.

Тогда

$$S_\tau(f) - S_{\tau_c'}(f) - S_{\tau_c''}(f) = 0, \text{ если } c \in \tau.$$

Если же $c \notin \tau$, $c \in (x_{i_0-1}, x_{i_0})$, то при $\xi_{i_0} \in [x_{i_0-1}, x_{i_0}]$, $\xi' \in \in [x_{i_0-1}, c]$, $\xi'' \in [c, x_{i_0}]$

$$S_\tau(f) - S_{\tau'_c}(f) - S_{\tau''_c}(f) = \\ = f(\xi_{i_0})\Delta x_{i_0} - f(\xi')(c - x_{i_0-1}) - f(\xi'')(x_{i_0} - c).$$

Отсюда получаем

$$\left|S_\tau(f) - S_{\tau'_c}(f) - S_{\tau''_c}(f)\right| \leqslant 2M\Delta x_{i_0} \leqslant 2M|\tau|.$$

Устремляя $|\tau|$ к нулю и учитывая, что при этом

$$S_{\tau'_c}(f) \to \int_a^c f(x)\,dx, \quad S_{\tau''_c}(f) \to \int_c^b f(x)\,dx,$$

заключаем, что

$$\exists \lim_{|\tau|\to 0} S_\tau(f) =: \int_a^b f(x)\,dx$$

и что выполняется равенство (1).

**Замечание 1.** Положим $\int_a^a f(x)\,dx := 0$ и $\int_b^a f(x)\,dx := := -\int_a^b f(x)\,dx$ при $a < b$. Тогда равенство (1) справедливо при любом расположении точек $a$, $b$, $c$ для функции $f$, интегрируемой на отрезке, содержащем эти точки.

**3** (линейность). Если функции $f$, $g$ интегрируемы на $[a, b]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, то функция $\lambda f + \mu g$ также интегрируема на $[a, b]$, причём

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

Доказательство получается предельным переходом при $|\tau| \to 0$ из соответствующего равенства для интегральных сумм Римана.

**4.** Если функции $f$, $g$ интегрируемы на $[a, b]$, то их произведение $fg$ также интегрируемо на $[a, b]$.

Доказательство. Запишем

$$\Delta(fg)(x_0) = (fg)(x_0 + \Delta x) - (fg)(x_0) = \\ = f(x_0 + \Delta x)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0 + \Delta x) + \\ + f(x_0)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0) = \\ = \Delta f(x_0)g(x_0 + \Delta x) + f(x_0)\Delta g(x_0).$$

Эта формула аналогична формуле Лейбница для дифференцирования произведения двух функций.

Отсюда при условии ограниченности функций $f$, $g$ на отрезке $[a,b]$

$$\omega(fg;[c,d]) \leqslant M\,\omega(f;[c,d]) + M\,\omega(g;[c,d]),$$

если $[c,d]\subset[a,b]$, а $|f|$, $|g|\leqslant M$ на $[a,b]$.

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{i_\tau}\omega_i(fg)\Delta x_i \leqslant M\sum_{i=1}^{i_\tau}\omega_i(f)\Delta x_i + M\sum_{i=1}^{i_\tau}\omega_i(g)\Delta x_i.$$

Устремляя $|\tau|$ к нулю и пользуясь критерием интегрируемости функции, получаем, что произведение $fg$ интегрируемо на $[a,b]$.

**5.** Пусть функция $f$ интегрируема на $[a,b]$ и $\inf\limits_{[a,b]} f > 0$. Тогда функция $\dfrac{1}{f}$ интегрируема на $[a,b]$.

Доказательство основывается на оценке колебания $\omega_i\left(\dfrac{1}{f}\right)$ через колебание $\omega_i(f)$.

**6.** Пусть функции $f$, $g$ интегрируемы на $[a,b]$ и $f\leqslant g$ на $[a,b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Доказательство. Достаточно воспользоваться предельным переходом при $|\tau|\to 0$ в неравенстве для интегральных сумм Римана:

$$S_\tau(f;\xi_1,\ldots,\xi_{i_\tau}) \leqslant S_\tau(g;\xi_1,\ldots,\xi_{i_\tau}).$$

**7.** Если функция $f$ интегрируема на $[a,b]$, то функция $|f|$ интегрируема на $[a,b]$ и

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx. \tag{2}$$

Доказательство. Интегрируемость $|f|$ следует из оценки

$$|f(\xi')| - |f(\xi'')| \leqslant |f(\xi') - f(\xi'')|,$$

откуда $\omega_i(|f|)\leqslant\omega_i(f)$ и

$$\sum_{i=1}^{i_\tau}\omega_i(|f|)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{i_\tau}\omega_i(f)\Delta x_i.$$

Оценка (2) получается предельным переходом из соответствующей оценки для интегральных сумм Римана:

$$S_\tau(f;\xi_1,\ldots,\xi_{i_\tau}) \leqslant S_\tau(|f|;\xi_1,\ldots,\xi_{i_\tau}).$$

**Замечание 2.** Интегрируемость $|f|$ на $[a,b]$ не влечёт интегрируемость $f$ на $[a,b]$, что можно увидеть на примере функции $\psi$: $[0,1]\to\mathbb{R}$,

$$\psi(x)=\begin{cases} 1 & \text{при } x \text{ рациональном,}\\ -1 & \text{при } x \text{ иррациональном.}\end{cases}$$

**8** (интеграл «не замечает» изменения функции в конечном числе точек). Пусть функция $f$ интегрируема на $[a,b]$, функция $f^*$ отличается от $f$ лишь значениями в конечном числе точек. Тогда $f^*$ интегрируема на $[a,b]$ и

$$\int\limits_a^b f^*(x)\,dx=\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно доказать, что функция $\varphi=f^*-f$ интегрируема на $[a,b]$ и $\int_a^b\varphi(x)\,dx=0$. Пусть $\varphi$ отлична от нуля в $N$ точках и $\max\limits_{[a,b]}|\varphi|=M$. Тогда

$$|S_\tau(\varphi)|\leqslant M2N|\tau|,$$

и остаётся перейти в этом неравенстве к пределу при $|\tau|\to 0$.

**Упражнение 1.** Доказать теорему 14.2.5, пользуясь последовательно теоремой 14.2.4 и свойством 2.

**Теорема 1.** *Пусть на отрезке $[a,b]$ функция $f$ непрерывна и $f\geqslant 0$, причём $f(x_0)>0$ для некоторого $x_0\in[a,b]$. Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx>0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f(x_0)=d>0$. Тогда найдётся отрезок $[a^*,b^*]\subset[a,b]$, $b^*-a^*>0$, на котором $f\geqslant\dfrac{d}{2}$. В силу свойства 5 имеем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_a^{a^*} f(x)\,dx+\int\limits_{a^*}^{b^*} f(x)\,dx+\int\limits_{b^*}^{b} f(x)\,dx\geqslant$$

$$\geqslant 0+\int\limits_{a^*}^{b^*}\frac{d}{2}\,dx+0=\frac{d}{2}(b^*-a^*)>0.$$

**Теорема 2** (теорема о среднем для интеграла). *Пусть функции $f$, $g$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$,*

$$m \leqslant f \leqslant M \quad \text{на} \quad [a, b],$$

*и пусть функция $g$ не меняет знака на отрезке $[a, b]$.*

*Тогда*

$$\exists\, \mu \in [m, M]\colon \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int\limits_a^b g(x)\,dx. \tag{3}$$

*При дополнительном предположении непрерывности функции $f$ на отрезке $[a, b]$*

$$\exists\, \xi \in (a, b)\colon \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi) \int\limits_a^b g(x)\,dx. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть, для определённости, $g \geqslant 0$ на $[a, b]$. Тогда

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x) \quad \forall\, x \in [a, b].$$

Отсюда в силу свойства 6

$$m \int\limits_a^b g(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M \int\limits_a^b g(x)\,dx. \tag{5}$$

Пусть сначала $\int_a^b g(x)\,dx = 0$. Тогда из (5) следует, что $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$, и в (3) в качестве $\mu$ можно взять произвольное число.

Пусть теперь $\int_a^b g(x)\,dx > 0$. Тогда из (5) получаем

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leqslant M.$$

Взяв $\mu = \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$, приходим к (3).

Установим (4). Будем рассматривать лишь нетривиальный случай, когда $\int_a^b g(x)\,dx > 0$. Считая $m = \min\limits_{[a,b]} f$, $M = \max\limits_{[a,b]} f$, рассмотрим в равенстве (3) три возможных случая: $m < \mu < M$, $\mu = m$, $\mu = M$. В первом из них по теореме о промежуточном значении непрерывной функции $\exists\, \xi \in (a, b)$: $f(\xi) = \mu$, и из (3) следует (4).

Случаи $\mu = m$ и $\mu = M$ рассматриваются одинаково. Поэтому рассмотрим лишь случай $\mu = M$.

Если максимум $M$ функции $f$ достигается в некоторой точке $\xi \in (a, b)$, то из (3) следует (4) с этим значением $\xi$.

Остаётся рассмотреть случай, когда $\mu = M$, $f(x) < M$ при $x \in (a, b)$. Покажем, что такая ситуация неосуществима, что и завершит доказательство теоремы.

В условиях этого случая из (3) следовало бы

$$\int_a^b [M - f(x)]g(x)\,dx = 0.$$

Тогда при $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{b-a}{2}\right)$

$$0 = \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} [M - f(x)]g(x)\,dx \geqslant \alpha_\varepsilon \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} g(x)\,dx,$$

где $\alpha_\varepsilon = \min\limits_{[a+\varepsilon, b-\varepsilon]} [M - f(x)] > 0$.

Отсюда

$$G(\varepsilon) := \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} g(x)\,dx = 0 \quad \forall\, \varepsilon \in \left(0, \frac{b-a}{2}\right). \tag{6}$$

Заметим, что

$$|G(0)| = |G(0) - G(\varepsilon)| \leqslant 2\varepsilon \sup_{[a,b]} g.$$

Поэтому, переходя в равенстве (6) к пределу при $\varepsilon \to 0 + 0$, получаем

$$G(0) = \int_a^b g(x)\,dx = 0,$$

что противоречит предположению.

## § 14.4. Связь между определённым и неопределённым интегралами

Пусть функция $f$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда на $[a, b]$ определена функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{1}$$

называемая *интегралом с переменным верхним пределом*.

**Теорема 1.** *Пусть функция $f$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда функция $F$ непрерывна на $[a, b]$.*

Доказательство. Пусть $x_0$, $x_0 + \Delta x \in [a, b]$. Тогда

$$F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = \int\limits_a^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt - \int\limits_a^{x_0} f(t)\,dt = \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt.$$

На $[a, b]$ функция $f$ ограничена (поскольку она интегрируема), так что при некотором $M \in \mathbb{R}$

$$|f(t)| \leqslant M \quad \forall\, t \in [a, b].$$

Следовательно,

$$|F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)| \leqslant M|\Delta x| \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0,$$

что и требовалось доказать.

**Теорема 2.** *Пусть функция $f$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$. Тогда функция $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ имеет производную в точке $x_0$ и*

$$F'(x_0) = f(x_0) \tag{2}$$

*(в случае $x_0 = a$ или $x_0 = b$ под $F'(x_0)$ подразумевается односторонняя производная).*

Доказательство. Вычитая из $\dfrac{\Delta F(x_0)}{\Delta x}$ предполагаемый предел $f(x_0)$, при $x_0 + \Delta x \in [a, b]$ имеем

$$\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) = \frac{1}{\Delta x} \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} [f(t) - f(x_0)]\,dt.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда в силу непрерывности $f$ в точке $x_0$

$$\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon, \text{ если } t \in [a, b],\ |t - x_0| < \delta.$$

Следовательно, при $|\Delta x| < \delta$ (и $x_0 + \Delta x \in [a, b]$)

$$\left|\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| \leqslant \frac{1}{\Delta x} \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t) - f(x_0)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \frac{1}{\Delta x} \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} 1\,dt = \varepsilon.$$

А это означает, что

$$\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} \to f(x_0) \quad \text{при} \quad x_0 + \Delta x \in [a, b],\ \Delta x \to 0,$$

что и требовалось доказать.

Пусть функция $f$ интегрируема на $[a, b]$. Тогда на $[a, b]$ определена функция

$$G(x) = \int\limits_x^b f(t)\,dt, \quad x \in [a, b],$$

называемая *интегралом с переменным нижним пределом*. Поскольку

$$G(x) = \int\limits_a^b f(t)\,dt - F(x),$$

то функция $G$ непрерывна на $[a, b]$. Если же $f$ непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$, то существует

$$G'(x_0) = -F'(x_0) = -f(x_0). \tag{3}$$

Как и раньше, через $\langle a, b\rangle$ будем обозначать промежуток (т. е. отрезок, интервал или какой-либо из полуинтервалов) с концами в точках $a$, $b$.

**Теорема 3.** *Пусть функция $f$ непрерывна на промежутке $\langle a, b\rangle$. Тогда она имеет на $\langle a, b\rangle$ первообразную*

$$F(x) = \int\limits_{x_0}^x f(t)\,dt, \quad \text{где} \quad x_0 \in \langle a, b\rangle.$$

Доказательство следует из (2) при $x \in \langle a, b\rangle$, $x \geqslant x_0$ или из (3) при $x \in \langle a, b\rangle$, $x \leqslant x_0$, если учесть, что в последнем случае $F$ можно представить в виде $F(x) = -\int_x^{x_0} f(t)\,dt$.

**Теорема 4** (основная теорема интегрального исчисления). *Пусть функция $f$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $\Phi$ — её первообразная на этом отрезке. Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{4}$$

Эта формула называется *формулой Ньютона–Лейбница*.

Доказательство. Функция $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ является первообразной для функции $f$ на отрезке $[a, b]$. Поэтому

$$F(x) = \Phi(x) + C, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Отсюда

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a) = (\Phi(x) + C) - (\Phi(a) + C) =$$
$$= \Phi(x) - \Phi(a), \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

При $x = b$ последнее равенство совпадает с (4).

Значение формулы Ньютона–Лейбница состоит в том, что она связывает два понятия: неопределённого и определённого интегралов, которые были введены и изучались независимо. Она даёт возможность вычислить определённый интеграл, если найден неопределённый.

**Упражнение 1.** Пусть на $[a, b]$ функция $f$ интегрируема и имеет первообразную $F$. Доказать, что $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

## § 14.5. Замена переменного и интегрирование по частям

**Теорема 1** (о замене переменного). *Пусть функция $\varphi$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$, а функция $f$ непрерывна на отрезке $\varphi([\alpha, \beta])$, $a := \varphi(\alpha)$, $b := \varphi(\beta)$. Тогда*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \qquad (1)$$

Доказательство. Пусть $\Phi$ — первообразная для $f$ на отрезке $\varphi([\alpha, \beta])$. Тогда $\Phi(\varphi)$ — первообразная для $f(\varphi)\varphi'$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, поскольку $(\Phi(\varphi))'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, где производные при $t = \alpha$ и при $t = \beta$ понимаются как односторонние (см. теорему 5.5.1 и замечание 5.5.1).

Дважды воспользовавшись формулой Ньютона–Лейбница, получаем (при любом расположении точек $a$ и $b$)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a),$$

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \Phi(\varphi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha)) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Из этих двух равенств вытекает утверждение теоремы.

**Упражнение 1.** Доказать, что если функция $\varphi'$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$, $\varphi' \neq 0$ на $[\alpha, \beta]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то из существования одного из интегралов формулы (1) следуют существование другого и равенство (1).

**Теорема 2** (интегрирование по частям). *Пусть функции $u$, $v$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$. Тогда*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx, \tag{2}$$

где $u(x)v(x)\Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

Доказательство. Из равенства

$$u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x), \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

следует

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \int_a^b (u(x)v(x))'\,dx - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Остаётся заметить, что по формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b (u(x)v(x))'\,dx = u(b)v(b) - u(a)v(a).$$

**Определение 1.** Функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной и кусочно-непрерывно дифференцируемой*, или *непрерывной и кусочно-гладкой*, на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна на $[a, b]$ и существует разбиение $\{a_i\}_0^k$ отрезка $[a, b]$, при котором производная $f'$ непрерывна на каждом отрезке $[a_{i-1}, a_i]$, если в его концах производную понимать как одностороннюю.

Обобщим понятие определённого интеграла.

**Определение 2.** *Интегралом по отрезку $[a, b]$ функции $f$*, определённой на отрезке $[a, b]$ за исключением конечного числа точек, называется число

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^b \widetilde{f}(x)\,dx,$$

если стоящий справа интеграл существует. Здесь $\widetilde{f}\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ — функция $f$, каким-либо образом доопределённая в этих точках.

Интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ определён здесь корректно, так как $\int_a^b \widetilde{f}(x)\,dx$ не зависит от способа доопределения функции $f$, что следует из свойства 8 интеграла.

**Теорема 3** (интегрирование по частям). *Пусть функции $u$, $v$ непрерывны и кусочно-непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a,b]$. Тогда справедлива формула* (2).

Доказательство. В силу определения 1 существует разбиение $\{a_i\}_0^k$ отрезка $[a,b]$, при котором функции $u$, $v$ непрерывно дифференцируемы на каждом отрезке $[a_{i-1},a_i]$ $(i=1,\ldots$ $\ldots,k)$. Производные же $u'$, $v'$ в точках $a_i$ $(i=0,\ldots,k)$ могут не существовать. В силу определения 2 и свойства 8 интеграла

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)\,dx=\sum_{i=1}^k\int\limits_{a_{i-1}}^{a_i} u(x)v'(x)\,dx.$$

Применяя к каждому слагаемому правой части теорему 2, получаем

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)\,dx=\sum_{i=1}^k\left(u(x)v(x)\Big|_{a_{i-1}}^{a_i}-\int\limits_{a_{i-1}}^{a_i}u'(x)v(x)\,dx\right)=$$
$$=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int\limits_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

## § 14.6. Приложения определённого интеграла

В этом параграфе будет показано, как с помощью определённого интеграла вычислить площадь криволинейной трапеции, объём тела вращения и другие величины. Фигуру в $\mathbb{R}^2$, имеющую площадь, называют *квадрируемой*, а тело в $\mathbb{R}^3$, имеющее объём, — *кубируемым*. Обобщением этих понятий является понятие измеримого множества в $\mathbb{R}^n$ $(n\in\mathbb{N})$. Здесь же мы ограничимся лишь констатацией некоторых свойств измеримости (по Жордану) и (жордановой) меры, позволяющих вычислить меры (площади) плоских фигур и меры (объёмы) трёхмерных тел простых геометрических форм [1]). Меру множества $E\subset\mathbb{R}^n$ будем обозначать символом $\mu E$.

[1]) Ниже (гл. 18) будет показано, что такие множества измеримы (т. е. имеют меру).

Перечислим свойства меры, которые будут использованы в этом параграфе:

а) если $P$ — прямоугольный параллелепипед в $\mathbb{R}^n$, определяемый соотношениями

$$(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n) \subset P \subset [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n],$$

где $a_j \leqslant b_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, то $\mu P = \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j)$;

б) (монотонность меры) если множества $E_1$, $E_2$ измеримы, и $E_1 \subset E_2$, то $\mu E_1 \leqslant \mu E_2$;

в) (аддитивность меры) если множества $E_1$, $E_2$ измеримы, и $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, то $\mu(E_1 \cup E_2) = \mu E_1 + \mu E_2$.

Из а) и б) следует, что $\mu E \geqslant 0$ для всякого измеримого множества $E$ (неотрицательность меры).

Из б) и в) следует

г) (полуаддитивность меры) если множества $E_1$, $E_2$ измеримы, то $\mu(E_1 \cup E_2) \leqslant \mu E_1 + \mu E_2$.

**(I) Площадь криволинейной трапеции.** *Криволинейной трапецией* называется множество $G \subset \mathbb{R}^2$ вида

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon a \leqslant x \leqslant b, \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}, \tag{1}$$

где функция $f$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, $f \geqslant 0$ на $[a, b]$.

Пусть $\tau = \{x_i\}_0^{i_\tau}$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i_\tau} = b$, $m_i = \min\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f$, $M_i = \max\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f$.

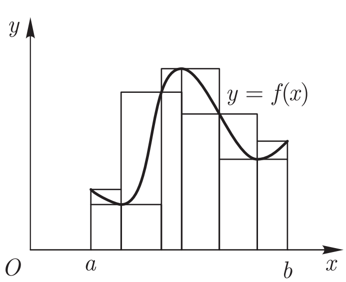



Рис. 1

Построим две ступенчатые фигуры $G_*(\tau)$, $G^*(\tau)$ следующим образом (рис. 1):

$$G_*(\tau) = \bigcup_{i=1}^{i_\tau} (x_{i-1}, x_i) \times (0, m_i),$$

$$G^*(\tau) = \bigcup_{i=1}^{i_\tau} [x_{i-1}, x_i] \times [0, M_i].$$

Очевидно, $G_*(\tau) \subset G \subset G^*(\tau)$, откуда следует

$$\mu G_*(\tau) \leqslant \mu G \leqslant \mu G^*(\tau).$$

Поскольку

$$\mu G_*(\tau) = \sum_{i=1}^{i_\tau} m_i \Delta x_i = \underline{S}_\tau,$$

$$\mu G^*(\tau) = \sum_{i=1}^{i_\tau} M_i \Delta x_i = \overline{S}_\tau,$$

где $\underline{S}_\tau$, $\overline{S}_\tau$ — соответственно наименьшая и наибольшая интегральные суммы Римана функции $f$ для разбиения $\tau$, то

$$\underline{S}_\tau \leqslant \mu G \leqslant \overline{S}_\tau.$$

Отсюда, устремляя мелкость $|\tau|$ разбиения $\tau$ к нулю, получаем, что площадь криволинейной трапеции $G$ равна

$$\mu G = \int\limits_a^b f(x)\, dx.$$

**Замечание 1.** Аналогично показывается, что

$$\mu(\operatorname{int} G) = \int\limits_a^b f(x)\, dx \quad (\operatorname{int} G := G \setminus \partial G).$$

**Упражнение 1.** Выяснить геометрический смысл интеграла $\int_a^b f(x)\, dx$, где непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f$ отрицательна или меняет знак.

**Упражнение 2.** Выразить с помощью определенных интегралов площадь круга радиуса $R$ и площадь его сектора.

**(II) Площадь криволинейного сектора.** Пусть в полярной системе координат задана кривая

$$\varGamma = \{(r, \theta)\colon r = r(\theta),\ \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta\},$$

где функция $r = r(\theta)$ непрерывна и неотрицательна на $[\alpha, \beta] \subset \subset [0, 2\pi]$, $G = \{(r, \theta)\colon \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\ 0 \leqslant r \leqslant r(\theta)\}$ — криволинейный сектор.

Пусть $\tau = \{\alpha_i\}_0^{i_\tau}$ — разбиение отрезка $[\alpha, \beta]$, $m_i = \min\limits_{[\alpha_{i-1}, \alpha_i]} r$, $M_i = \max\limits_{[\alpha_{i-1}, \alpha_i]} r$.

Построим две фигуры $G_*(\tau)$, $G^*(\tau)$ (рис. 2):

$$G_*(\tau) = \bigcup_{i=1}^{i_\tau} \{(r,\theta)\colon \alpha_i < \theta < \beta_i,\ 0 < r < m_i\},$$

$$G^*(\tau) = \bigcup_{i=1}^{i_\tau} \{(r,\theta)\colon \alpha_i \leqslant \theta \leqslant \beta_i,\ 0 \leqslant r \leqslant M_i\}.$$

Тогда площадь криволинейного сектора $\mu G$ удовлетворяет двойному неравенству (см. упражнение 2)

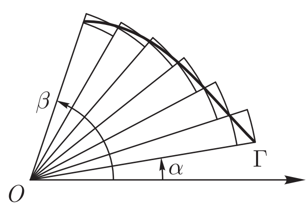



Рис. 2

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i_\tau} m_i^2 \Delta\alpha_i = \mu G_*(\tau) \leqslant \mu G \leqslant$$
$$\leqslant \mu G^*(\tau) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i_\tau} M_i^2 \Delta\alpha_i.$$

Отсюда при $|\tau| \to 0$ получаем, что площадь криволинейного сектора $G$ равна

$$\mu G = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r^2(\theta)\,d\theta.$$

**(III) Объём тела вращения.** Множество $D \subset \mathbb{R}^3$, определяемое соотношением

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a < x < b,\ y^2 + z^2 < R^2\} \subset D \subset$$
$$\subset \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leqslant x \leqslant b,\ y^2 + z^2 \leqslant R^2\},$$

называется *прямым круговым цилиндром*.

**Упражнение 3.** Вывести формулу $\mu D = \pi R^2(b-a)$.

Пусть функция $f$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a,b]$, тело $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ образовано вращением криволинейной трапеции (1) вокруг оси $Ox$.

Пусть $\tau = \{x_i\}_0^{i_\tau}$ — разбиение отрезка $[a,b]$, $m_i = \min\limits_{[x_{i-1},x_i]} f$, $M_i = \max\limits_{[x_{i-1},x_i]} f$,

$$\Omega_*(\tau) = \bigcup_{i=1}^{i_\tau} \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x_{i-1} < x < x_i,\ y^2 + z^2 < m_i^2\},$$

$$\Omega^*(\tau) = \bigcup_{i=1}^{i_\tau} \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i,\ y^2 + z^2 \leqslant M_i^2\}.$$

Тогда

$$\pi \sum_{i=1}^{i_\tau} m_i^2 \Delta x_i = \mu\Omega_*(\tau) \leqslant \mu\Omega \leqslant \mu\Omega^*(\tau) = \pi \sum_{i=1}^{i_\tau} M_i^2 \Delta x_i.$$

Отсюда при $|\tau| \to 0$ получаем, что объём тела вращения $\Omega$ равен

$$\mu\Omega = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx.$$

**(IV) Вычисление длины кривой.** Пусть кривая $\varGamma = \{\mathbf{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant b\}$ непрерывно дифференцируема.

Ранее было установлено, что непрерывно дифференцируемая кривая спрямляема (имеет длину) и что производная переменной длины дуги $s(t)$ этой кривой

$$s'(t) = |\mathbf{r}'(t)|.$$

Пусть $S$ — длина кривой $\varGamma$. Тогда

$$S = s(b) - s(a) = \int\limits_a^b s'(t)\,dt = \int\limits_a^b |\mathbf{r}'(t)|\,dt = \\ = \int\limits_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt.$$

Если $\varGamma = \{(x, f(x))\colon a \leqslant x \leqslant b\}$ — плоская кривая, то её длина равна

$$S = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

**(V) Площадь поверхности вращения.** Пусть функция $f$ непрерывно дифференцируема и неотрицательна на отрезке $[a, b]$. Пусть $S$ — поверхность, образованная вращением вокруг оси $Ox$ кривой $\varGamma = \{(x, f(x))\colon a \leqslant x \leqslant b\}$, т. е. графика функции $f$. Площадь поверхности $S$ (определение которой будет дано ниже) обозначим символом $\operatorname{mes} S$.

Пусть $\tau = \{x_i\}_0^{i_\tau}$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i_\tau} = b$ — разбиение отрезка $[a, b]$. Построим вписанную в $\varGamma$ ломаную $\varGamma(\tau)$, соединив последовательно точки $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, \ldots, i_\tau$, кривой $\varGamma$ отрезками. Поверхность, образованную вращением ломаной $\varGamma(\tau)$ вокруг оси $Ox$, обозначим через $S(\tau)$. Эта поверхность представляет собой объединение боковых поверхностей усечённых конусов или цилиндров, площади которых известны из курса элементарной геометрии. Поэтому площадь поверхности $S(\tau)$ равна

$$\operatorname{mes} S(\tau) = \pi \sum_{i=1}^{i_\tau} (f(x_{i-1}) + f(x_i)) l_i,$$

где

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} =$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x_i}\right)^2} \, \Delta x_i = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \, \Delta x_i, \quad (2)$$

а точки $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ определяются формулой (6.1.3) конечных приращений Лагранжа.

**Определение 1.** *Площадью поверхности* $S$ называется

$$\operatorname{mes} S = \lim_{|\tau| \to 0} \operatorname{mes} S(\tau), \quad (3)$$

если этот предел существует.

Покажем, что в рассматриваемом случае площадь поверхности $S$ существует и равна

$$\operatorname{mes} S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx. \quad (4)$$

Обозначим через $\sigma_\tau(f; \xi_1, \ldots, \xi_{i_\tau})$ интегральную сумму Римана последнего интеграла, построенную по разбиению $\tau$ и по тем же самым, что и в (2), отмеченным точкам $\xi_1$, …, $\xi_{i_\tau}$. Тогда, полагая $M_1 = \max\limits_{[a,b]} |f'|$, имеем

$$|\operatorname{mes} S(\tau) - 2\pi\sigma_\tau| \leqslant 2\pi \sum_{i=1}^{i_\tau} \left[ \frac{|f(x_{i-1}) - f(\xi_i)|}{2} + \frac{|f(x_i) - f(\xi_i)|}{2} \right] \times$$

$$\times \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \, \Delta x_i \leqslant 2\pi \sum_{i=1}^{i_\tau} M_1 |\tau| \sqrt{1 + M_1^2} \, \Delta x_i =$$

$$= 2\pi M_1 \sqrt{1 + M_1^2} \, (b - a)|\tau| \to 0 \text{ при } |\tau| \to 0.$$

Следовательно, и левая часть этой цепочки неравенств стремится к нулю при $|\tau| \to 0$.

Тогда

$$\sigma_\tau \to \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx \quad \text{при} \quad |\tau| \to 0,$$

поскольку подынтегральная функция непрерывна на $[a, b]$. Следовательно, существует предел (3), и справедливо равенство (4).

## § 14.7. Несобственные интегралы

**Определение 1.** Пусть функция $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$, $b \leqslant +\infty$, интегрируема по Риману на любом отрезке $[a,b'] \subset [a,b)$.

Символ
$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$
называется *несобственным интегралом* (*Римана*) по полуинтервалу $[a,b)$. Говорят, что несобственный интеграл (1) *сходится*, и пишут
$$\int\limits_a^b f(x)\,dx := \lim_{b'\to b-0} \int\limits_a^{b'} f(x)\,dx, \tag{2}$$
если указанный предел существует, и что несобственный интеграл (1) *расходится* в противном случае (здесь и далее символ $+\infty - 0$ равнозначен символу $+\infty$).

Таким образом, в случае сходимости несобственным интегралом называют не только символ (1), но и его значение — число (2).

Сравним понятия интеграла Римана и несобственного интеграла Римана. Если $b = +\infty$, то функция $f$ задана на бесконечном промежутке, для которого интеграл Римана не определён, в то время как несобственный интеграл (2) может существовать. Если же $b < +\infty$, а функция $f$ неограничена на $[a,b)$, то интеграл Римана по $[a,b]$ не существует, в то время как несобственный интеграл (2) может существовать.

Если функция $f$ интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$, то сходится и несобственный интеграл (2) по $[a,b)$ причём эти интегралы равны. Это следует из непрерывности $\int_a^{b'} f(x)\,dx$ как функции аргумента $b'$ в силу теоремы 14.4.1.

**Упражнение 1.** Доказать, что если функция ограничена на отрезке $[a,b]$ и интегрируема по Риману на любом отрезке $[a,b'] \subset [a,b)$, то она интегрируема по Риману на $[a,b]$, и, следовательно, её интеграл Римана по $[a,b]$ и несобственный интеграл по $[a,b)$ совпадают.

Указание. Воспользоваться критерием интегрируемости функции.

Таким образом, понятие несобственного интеграла шире понятия интеграла Римана.

**Замечание 1.** Если верхний предел несобственного интеграла равен $+\infty$, то вместо символа $+\infty$ часто пишут $\infty$.

**Пример 1.** Несобственный интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

**Теорема 1** (критерий Коши сходимости несобственного интеграла). *Пусть функция $f$ интегрируема на любом отрезке $[a, b'] \subset [a, b)$. Тогда для сходимости несобственного интеграла* (1) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось* <u>*условие Коши*</u>

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, b_\varepsilon \in [a, b) \colon \forall\, b', b'' \in [b_\varepsilon, b) \quad \left| \int\limits_{b'}^{b''} f(x)\, dx \right| < \varepsilon. \qquad (3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сходимость несобственного интеграла (1) по определению равносильна существованию предела функции $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\, dt$ при $x \to b - 0$, что эквивалентно выполнению условия Коши существования конечного предела функции $F$ (см. теорему 3.5.1 и упражнение 3.6.3), совпадающему с (3).

Сходимость несобственного интеграла (1) равносильна сходимости несобственного интеграла $\int_{a^*}^b f(x)\, dx$ при каком-либо $a^* \in [a, b)$. Это сразу следует из теоремы 1, поскольку условия Коши для этих двух несобственных интегралов очевидным образом равносильны.

Ряд свойств определённого интеграла переносится на несобственные интегралы с помощью предельного перехода при $b' \to \to b - 0$.

1°. Пусть несобственный интеграл (1) сходится. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_a^{a^*} f(x)\, dx + \int\limits_{a^*}^b f(x)\, dx \quad \forall\, a^* \in [a, b).$$

2° (линейность). Пусть несобственные интегралы $\int_a^b f(x)\, dx$, $\int_a^b g(x)\, dx$ сходятся. Тогда при $\lambda$, $\mu \in \mathbb{R}$ сходится и несобственный интеграл

$$\int\limits_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx = \lambda \int\limits_a^b f(x)\, dx + \mu \int\limits_a^b g(x)\, dx.$$

3° (интегрирование неравенств). Пусть интегралы $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b g(x)\,dx$ сходятся, и пусть $f \leqslant g$ на $[a, b)$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

4° (формула Ньютона–Лейбница). Пусть функция $f$ непрерывна на $[a, b)$, $\varPhi$ — первообразная для $f$ на $[a, b)$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \varPhi(b-0) - \varPhi(a), \tag{4}$$

если конечна хотя бы одна из частей равенства (4).

5° (интегрирование по частям). Пусть функции $u$, $v$: $[a, b) \to \to \mathbb{R}$ непрерывны и кусочно-непрерывно дифференцируемы на каждом отрезке $[a, b'] \subset [a, b)$. Тогда

$$\int\limits_a^b uv'\,dx = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b u'v\,dx, \tag{5}$$

если оба слагаемых в правой части равенства (5) существуют и конечны.

6° (замена переменного). Пусть функция $f$ непрерывна на $[a, b)$, функция $\varphi$ непрерывно дифференцируема на $[\alpha, \beta)$, $\beta \leqslant +\infty$, причём $a = \varphi(a) \leqslant \varphi(t) < b = \lim\limits_{t\to\beta-0} \varphi(t)$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$$

При этом интегралы в обеих частях этой формулы сходятся или расходятся одновременно.

Покажем лишь, как из сходимости интеграла, стоящего в правой части равенства, вытекает сходимость интеграла, стоящего в левой части. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists\, \beta_\varepsilon \in [\alpha, \beta)\colon \left|\int\limits_{\beta'}^{\beta''} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\right| < \varepsilon \quad \forall\, \beta', \beta'' \in (\beta_\varepsilon, \beta).$$

Положим $b_\varepsilon := \varphi(\beta_\varepsilon)$. Тогда по теореме Коши о промежуточном значении

$$\forall\, b', b'' \in (b_\varepsilon, b) \quad \exists\, \beta', \beta'' \in (\beta_\varepsilon, \beta)\colon \varphi(\beta') = b',\ \varphi(\beta'') = b''.$$

Следовательно,

$$\left|\int\limits_{b'}^{b''} f(x)\,dx\right| = \left|\int\limits_{\beta'}^{\beta''} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\right| < \varepsilon \quad \forall\, b', b'' \in (b_\varepsilon, b).$$

По критерию Коши интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится.

Рассмотрим теперь несобственные интегралы от неотрицательных функций.

**Теорема 2.** *Пусть $f \geqslant 0$ на $[a, b)$. Для сходимости несобственного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\exists\, M \in \mathbb{R}\colon \int\limits_a^{b'} f(x)\,dx \leqslant M \quad \forall\, b' \in [a, b).$$

Доказательство. Интеграл $\int_a^{b'} f(x)\,dx$ как функция аргумента $b'$ возрастает. Поэтому сходимость интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ (т. е. существование конечного предела этой функции при $b' \to b - 0$) равносильна ограниченности интеграла $\int_a^{b'} f(x)\,dx$ как функции аргумента $b'$.

**Теорема 3** (признак сравнения). *Пусть функции $f$ и $g$ интегрируемы на любом отрезке $[a, b'] \subset [a, b)$, причём $0 \leqslant f \leqslant g$ на $[a, b)$. Тогда:*

1° *сходимость интеграла $\int_a^b g(x)\,dx$ влечёт сходимость интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$;*

2° *расходимость интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ влечёт расходимость интеграла $\int_a^b g(x)\,dx$.*

Доказательство. 1°. Пусть интеграл $\int_a^b g(x)\,dx$ сходится. Тогда по теореме 2

$$\exists\, M \in \mathbb{R}\colon \int\limits_a^{b'} f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^{b'} g(x)\,dx \leqslant M \quad \forall\, b' \in [a, b).$$

По теореме 2 интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится.

2°. Расходимость интеграла $\int_a^b g(x)\,dx$ легко доказывается от противного.

**Следствие.** *Пусть функции $f$, $g$ интегрируемы на любом отрезке $[a, b'] \subset [a, b)$, и пусть $f > 0$, $g > 0$ на $[a, b)$. Пусть также*

$$\exists \lim_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = k \in (0, +\infty).$$

*Тогда интегралы $\int_a^b f(x)\,dx$ и $\int_a^b g(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. В условиях теоремы $\exists\, a^* \in [a, b)$: $\frac{k}{2}\, g(x) \leqslant f(x) \leqslant 2kg(x) \quad \forall\, x \in [a^*, b)$. В силу свойства 2° несобственных интегралов и теоремы 3 интегралы

$$\int_{a^*}^{b} g(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_{a^*}^{b} f(x)\,dx$$

сходятся или расходятся одновременно. Теперь остаётся учесть, что сходимость последних двух интегралов не зависит от выбора $a^* \in [a, b)$.

**Упражнение 2.** Обобщить теорему 3, заменив в её условии $0 \leqslant f \leqslant g$ на $[a, b)$ условиями

$$f \geqslant 0, \quad g \geqslant 0, \quad f(x) = O(g(x)) \quad \text{при} \quad x \to b - 0.$$

**Определение 2.** Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл $\int_a^b |f(x)|\,dx$.

**Теорема 4.** *Абсолютно сходящийся интеграл сходится.*

Доказательство. Заметим, что из сходимости интеграла $\int_a^b |f(x)|\,dx$ следует, что для него выполняется условие Коши (3). Тогда условие (3) выполняется и для интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ в силу оценки

$$\left| \int_{b'}^{b''} f(x)\,dx \right| \leqslant \int_{b'}^{b''} |f(x)|\,dx \quad \text{при} \quad a \leqslant b' < b'' < b.$$

Применяя критерий Коши к интегралу $\int_a^b f(x)\,dx$, убеждаемся, что он сходится.

Из последнего неравенства следует, что в условиях теоремы 4 справедлива оценка $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$.

**Замечание 2.** Сходимость несобственного интеграла $\int_a^b |f(x)|\,dx$ не даёт права написать символ $\int_a^b f(x)\,dx$, поскольку функция $f$ может не быть интегрируемой на некотором отрезке $[a, b']$, в то время как её модуль интегрируем на этом отрезке. Пример такой функции был приведён в замечании 14.3.2.

**Замечание 3.** Сходящийся интеграл может не быть абсолютно сходящимся, как, например, $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$, который будет исследован ниже.

**Определение 3.** Пусть функция $f\colon (a, b] \to \mathbb{R}$, $-\infty \leqslant a < b < +\infty$, интегрируема по Риману на любом отрезке $[a', b] \subset (a, b]$. Символ $\int_a^b f(x)\,dx$ называется *несобственным интегралом* (*Римана*) *с особенностью в точке* $a$ (или *с особенностью на нижнем пределе*). При этом говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ *сходится*, и пишут

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx := \lim_{a' \to a+0} \int\limits_{a'}^b f(x)\,dx,$$

если этот предел существует, и что несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ *расходится* в противном случае.

**Пример 2.** Интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geqslant 1$.

**Определение 4.** Пусть функция $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, интегрируема по Риману на любом отрезке $[a', b'] \subset (a, b)$. Символ $\int_a^b f(x)\,dx$ называется *несобственным интегралом* (*Римана*) *с особенностями в точках* $a$ *и* $b$ (или *с особенностями на верхнем и нижнем пределах*).

Говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ *сходится*, если сходится каждый из интегралов

$$\int\limits_a^c f(x)\,dx, \qquad \int\limits_c^b f(x)\,dx, \tag{6}$$

где $c$ — какое-нибудь число из интервала $(a, b)$.

При этом полагают по определению, что

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx := \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx. \tag{7}$$

Если же хотя бы один из интегралов (6) расходится, говорят, что интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ *расходится*.

Сходимость интегралов (6) не зависит от выбора точки $c \in (a, b)$ (это установлено для второго из них и может быть аналогично показано для первого). Правая часть (7) также не зависит от выбора $c$, что при $a < c < c^* < b$ следует из равенств для определённых интегралов

$$\int_{a'}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{b'} f(x)\,dx =$$

$$= \int_{a'}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{c^*} f(x)\,dx + \int_{c^*}^{b'} f(x)\,dx = \int_{a'}^{c^*} f(x)\,dx + \int_{c^*}^{b'} f(x)\,dx.$$

**Замечание 4.** Равенство (7) можно записать в виде

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\substack{a' \to a+0 \\ b' \to b-0}} \int_{a'}^{b'} f(x)\,dx,$$

где предел является пределом функции двух переменных.

Дадим теперь определение несобственного интеграла с несколькими особенностями.

**Определение 5.** Пусть функция $f$ определена на интервале $(a, b)$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, с выколотыми точками $c_1, \ldots, c_{k-1}$, $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_{k-1} < c_k = b$. Пусть $f$ интегрируема по Риману на каждом отрезке из $(a, b)$, не содержащем ни одной из точек $c_i$ $(i = 1, \ldots, k-1)$. Символ $\int_a^b f(x)\,dx$ называется *несобственным интегралом с особенностями в точках* $c_0, c_1, \ldots, c_k$.

Говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ *сходится*, и при этом

$$\int_a^b f(x)\,dx := \sum_{i=1}^{k} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)\,dx,$$

если каждый из стоящих справа несобственных интегралов с особенностями в концах интервала $(c_{i-1}, c_i)$ сходится. В противном случае говорят, что интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ *расходится*.

До сих пор мы изучали свойства лишь несобственного интеграла (1). Эти свойства, как видно из определений 3, 4, 5, легко переносятся на несобственные интегралы с особенностью на нижнем пределе и на несобственные интегралы с несколькими особенностями.

**Упражнение 3.** Пусть $(a, b) \subset (-\infty, +\infty)$, и пусть сходится несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ с несколькими особенностями.

Доказать, что при $x_0 \in (a, b)$ функция $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt$ равномерно непрерывна на $(a, b)$.

Установим два признака сходимости несобственного интеграла от произведения двух функций:

$$\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx. \tag{8}$$

**Теорема 5** (признак Дирихле). *Пусть:*

1° *функция $f$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную на $[a, +\infty)$;*

2° *функция $g$ непрерывно дифференцируема и монотонна на $[a, +\infty)$;*

3° *$g(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.*

*Тогда интеграл* (8) *сходится.*

Доказательство. Пусть $F$ — первообразная для $f$. Интегрируя по частям произведение $fg$ на отрезке $[a, b]$, имеем

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b F'(x)g(x)\,dx = F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx. \tag{9}$$

Уменьшаемое в правой части стремится, очевидно, к пределу при $b \to +\infty$. Вычитаемое стремится к абсолютно сходящемуся интегралу. В самом деле, положив $M = \sup\limits_{[a,\infty)} |F| < +\infty$, имеем

$$\int_a^{+\infty} |F(x)g'(x)|\,dx \leqslant M \int_a^{+\infty} |g'(x)|\,dx = M \left| \int_a^{+\infty} g'(x)\,dx \right| = \\ = M \left| g(x)\Big|_a^{+\infty} \right| = M|g(a)|.$$

Поэтому правая часть (9), а вместе с ней и левая стремятся к пределу при $b \to +\infty$. Это означает, что интеграл (8) сходится.

**Теорема 6** (признак Абеля). *Пусть:*

1° *функция $f$ непрерывна на $[a, +\infty)$ и интеграл $\int_a^\infty f(x)\,dx$ сходится;*

2° *функция $g$ непрерывно дифференцируема, ограничена и монотонна на $[a, +\infty)$.*

*Тогда интеграл* (8) *сходится.*

Доказательство. Покажем, что признак Абеля вытекает из признака Дирихле.

Сначала заметим, что функция $f$ имеет на $[a,+\infty)$ первообразную $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, ограниченность которой следует из её непрерывности и существования конечного предела $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$.

В силу монотонности и ограниченности функции $g$ существует $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) =: c$. Тогда функция $\widetilde{g} := g-c$ непрерывно дифференцируема и монотонна на $[a,\infty)$ и $\widetilde{g}(x)\to 0$ при $x\to+\infty$. Поэтому интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)\widetilde{g}(x)\,dx + \int\limits_a^{+\infty} cf(x)\,dx$$

сходится как сумма двух сходящихся интегралов (первый из них сходится по признаку Дирихле, а второй — по условию теоремы).

**Пример 3.** Покажем, что интеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ сходится, но не абсолютно. Для доказательства его сходимости примéним признак Дирихле, положив $f(x)=\sin x$, $g(x)=1/x$. Тогда $f$ имеет ограниченную первообразную $F(x)=-\cos x$, а $g$ непрерывно дифференцируема и монотонна на $[1,+\infty)$, $g(x)\to 0$ при $x\to\infty$. Следовательно, интеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ сходится.

Установим, что он не сходится абсолютно. При $k\in\mathbb{N}$ имеем

$$\int\limits_{k\pi}^{2k\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,dx \geqslant \frac{1}{2k\pi}\int\limits_{k\pi}^{2k\pi}|\sin x|\,dx =$$

$$= \frac{1}{2k\pi}\sum_{m=0}^{k-1}\int\limits_{(k+m)\pi}^{(k+m+1)\pi}|\sin x|\,dx = \frac{k}{2k\pi}\int\limits_0^{\pi}|\sin x|\,dx = \frac{1}{\pi}.$$

Следовательно, по критерию Коши интеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{|\sin x|}{x}\,dx$ расходится.

**Замечание 5.** При доказательстве признаков Дирихле и Абеля было применено интегрирование по частям, с помощью которого доказательство сходимости одного интеграла было сведено к доказательству абсолютной сходимости другого интеграла.

Этот приём полезен и при изучении сходимости конкретных интегралов. Например,

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \cos 1 - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

Интеграл в левой части равенства сходится, но не абсолютно, в то время как интеграл в правой части сходится абсолютно. Принято говорить, что в подобных случаях интегрирование по частям «улучшает сходимость интеграла».

## § 14.8. Приближение интегрируемых функций ступенчатыми и непрерывными

**Определение 1.** Функция $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ называется *ступенчатой* (*кусочно постоянной*) на $[a,b]$, если существует разбиение $\{a_i\}_0^k$, $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = b$, такое, что $h$ постоянна на каждом интервале $(a_{i-1}, a_i)$, $i = 1, \ldots, k$.

Ступенчатые функции кусочно-непрерывны и, следовательно, интегрируемы на $[a,b]$.

**Теорема 1.** *Пусть функция $f$ интегрируема на отрезке $[a,b]$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует такая ступенчатая на $[a,b]$ функция $h = h_\varepsilon$, что*

$$\int_a^b |f(x) - h(x)|\,dx < \varepsilon. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $\tau = \{x_i\}_0^{i_\tau}$ — разбиение отрезка $[a,b]$, и пусть $\sum\limits_{i=1}^{i_\tau} f(\xi_i)\Delta x_i$ — интегральная сумма Римана. Рассмотрим ступенчатую функцию

$$h(x) = \begin{cases} f(\xi_i) & \text{при } x \in (x_{i-1}, x_i),\ i = 1, \ldots, i_\tau, \\ c_i & \text{при } x = x_i,\ i = 0, 1, \ldots, i_\tau, \end{cases}$$

где $c_i \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\int_a^b |f(x) - h(x)|\,dx = \sum_{i=1}^{i_\tau} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - f(\xi_i)|\,dx_i \leqslant \sum_{i=1}^{i_\tau} w_i(f)\Delta x_i,$$

где $w_i(f)$ — колебание функции $f$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$.

В силу критерия интегрируемости правая часть последнего неравенства меньше наперёд заданного числа $\varepsilon > 0$, если мелкость $|\tau|$ разбиения $\tau$ достаточно мала. Теорема доказана.

Левую часть неравенства (1) называют *приближением в среднем* функции $f$ ступенчатой функцией $h$. Саму теорему 1 можно переформулировать так:

*интегрируемую на отрезке функцию можно с любой точностью на этом отрезке приблизить в среднем ступенчатой функцией.*

**Теорема 2.** *Пусть функция $f$ интегрируема на $[a, b]$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует такая непрерывная на $[a, b]$ функция $\varphi$, что*

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|\, dx < \varepsilon.$$

Доказательство. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть $h$ — ступенчатая на $[a, b]$ функция, для которой выполняется (1). Построим непрерывную на $[a, b]$ кусочно линейную функцию $\varphi$, для которой

$$\int_a^b |h(x) - \varphi(x)|\, dx < \varepsilon. \tag{2}$$

Это построение можно осуществить так. Ступенчатая функция $h$ принимает постоянное значение на каждом из интервалов $(x_{i-1}, x_i)$ разбиения $\tau$: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$. Построим функции $\varphi_i$, непрерывные и кусочно линейные на $[a, b]$, следующим образом. Взяв $\eta \in \left(0, \frac{1}{2}|\tau|\right)$, положим

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} h(x) & \text{на } (x_{i-1} + \eta, x_i - \eta), \\ 0 & \text{вне } (x_{i-1}, x_i), \\ \text{линейна} & \text{на } [x_{i-1}, x_{i-1} + \eta] \text{ и на } [x_i - \eta, x_i]. \end{cases}$$

Пусть $\varphi = \sum_{i=1}^k \varphi_i$. Тогда если $|\varphi| \leqslant M$, то

$$\int_a^b |h(x) - \varphi(x)|\, dx = \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} |h(x) - \varphi_i(x)|\, dx =$$

$$= \sum_{i=1}^k \left( \int_{x_{i-1}}^{x_{i-1}+\eta} |h(x) - \varphi_i(x)|\, dx + \int_{x_i-\eta}^{x_i} |h(x) - \varphi_i(x)|\, dx \right) \leqslant M2\eta k < \varepsilon,$$

если $\eta > 0$ достаточно мaлó.

Теперь из (1) и из (2) следует

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|\,dx \leqslant \int_a^b |f(x) - h(x)|\,dx + \int_a^b |h(x) - \varphi(x)|\,dx < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

и теорема доказана.

Теоремы 1 и 2 обобщаются на случай функции $f$, интегрируемой в несобственном смысле.

**Определение 2.** Пусть $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Функция $f$ называется *абсолютно интегрируемой* на интервале $(a, b)$, если существует конечное число точек $\{c_i\}_0^k$, $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_k = b$, таких, что:

1° функция $f$ интегрируема по Риману на каждом отрезке $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, не содержащем точек $c_1, \ldots, c_{k-1}$;

2° сходится несобственный интеграл $\int_a^b |f(x)|\,dx$, понимаемый как несобственный интеграл с особенностями в точках $c_0, c_1, \ldots, c_k$.

Заметим, что в силу теоремы 14.7.4 определение 2 перейдёт в эквивалентное, если условие 1° заменить условием сходимости интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$.

**Определение 3.** Функция $f\colon (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$ называется *финитной*, если она равна нулю вне некоторого отрезка.

**Определение 4.** Функция $h\colon (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$ называется *финитной ступенчатой*, если существует такой отрезок $[a, b]$, что $h$ — ступенчатая функция на $[a, b]$, и $h = 0$ вне $[a, b]$.

**Теорема 3.** *Пусть функция $f$ абсолютно интегрируема на $(a, b)$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует финитная ступенчатая функция $h$ такая, что*

$$\int_a^b |f(x) - h(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $(a, b) = (-\infty, +\infty)$. В самом деле, если это не так, то функцию $f$ можно доопределить нулём вне интервала $(a, b)$, после чего она станет абсолютно интегрируемой на $(-\infty, +\infty)$.

Пусть несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ имеет особенности в точках $c_i$, $-\infty = c_0 < c_1 < \ldots < c_{k-1} < c_k = +\infty$, и пусть функция $f$ интегрируема по Риману на каждом отрезке, не содержащем точек $c_i$, $i = 1, \ldots, k-1$. Из сходимости интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ существуют такие числа $A$, $B$, $\eta$, где $-\infty < A < c_1$, $c_{k-1} < B < +\infty$, $\eta > 0$, что

$$\int\limits_{-\infty}^{A} |f|\,dx + \sum_{i=1}^{k-2} \int\limits_{c_i+\eta}^{c_{i+1}-\eta} |f|\,dx + \int\limits_{B}^{+\infty} |f|\,dx < \varepsilon.$$

Рассмотрим функцию

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \in (-\infty, A) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} (c_i - \eta, c_i + \eta)\right) \cup \\ & \cup (B, +\infty), \\ f(x) & \text{для остальных } x. \end{cases}$$

Тогда функция $f_\varepsilon$ интегрируема на $[A, B]$, равна 0 вне $[A, B]$ и

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - f_\varepsilon(x)|\,dx < \varepsilon. \tag{3}$$

В силу теоремы 1 существует ступенчатая на $[A, B]$ функция $h_\varepsilon$ такая, что

$$\int\limits_{A}^{B} |f_\varepsilon(x) - h_\varepsilon(x)|\,dx < \varepsilon. \tag{4}$$

Будем считать функцию $h_\varepsilon$ продолженной нулём на $(-\infty, A)$ и на $(B, +\infty)$. Тогда из (3), (4) получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - h_\varepsilon(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - f_\varepsilon(x)|\,dx + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f_\varepsilon(x) - h_\varepsilon(x)|\,dx < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Теорема доказана.

**Следствие.** *Пусть функция $f$ абсолютно интегрируема на $(a, b)$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует финитная непрерывная на $(a, b)$ функция $\varphi$ такая, что*

$$\int\limits_{a}^{b} |f(x) - \varphi(x)|\,dx < \varepsilon. \tag{5}$$

Доказательство предоставляется читателю.

**Теорема 4.** *Каждая абсолютно интегрируемая на* $(-\infty, +\infty)$ *функция является непрерывной в среднем относительно сдвига, т. е. обладает свойством*

$$\lim_{\eta \to 0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x+\eta) - f(x)|\, dx = 0. \tag{6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функция $f$ абсолютно интегрируема на $(-\infty, +\infty)$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда существует финитная непрерывная функция $\varphi$, для которой выполняется (5) при $(a, b) = (-\infty, +\infty)$. Пусть $\varphi = 0$ вне отрезка $[A, B]$. По теореме Кантора функция $\varphi$ равномерно непрерывна на отрезке $[A-1, B+1]$, а значит, и на $(-\infty, +\infty)$. Следовательно, существует $\eta_\varepsilon \in (0, 1)$ такое, что

$$|\varphi(x+\eta) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{B - A + 2} \quad \forall\, \eta \in \mathbb{R}\colon\ |\eta| \leqslant \eta_\varepsilon.$$

Отсюда и из (5) следует, что при $|\eta| \leqslant \eta_\varepsilon$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x+\eta) - f(x)|\, dx \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x+\eta) - \varphi(x+\eta)|\, dx +$$
$$+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x+\eta) - \varphi(x)|\, dx + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - \varphi(x)|\, dx < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Этим свойство (6) установлено.

**Упражнение 1.** Доказать теорему 4, опираясь на возможность приближения функции $f$ финитной ступенчатой функцией $h$ и на легко проверяемую для функции $h$ непрерывность в среднем относительно сдвига.

Глава 15

# ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

## § 15.1. Сходимость числового ряда

**Определение 1.** Символ

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots, \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \tag{1}$$

где $a_k \in \mathbb{R}$, называется *числовым рядом*, $a_k$ — его $k$*-м членом* (или его *общим членом*, если $a_k$ рассматривается как функция переменного $k$). Величина $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ называется $n$*-й частичной* (или *частной*) *суммой* этого *ряда*.

Ряд (1) называется *сходящимся* (к $S$), если последовательность $\{S_n\}_1^\infty$ его частичных сумм сходится (к $S$).

В этом случае число $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ называют *суммой ряда* и пишут

$$a_1 + a_2 + \ldots = S, \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S.$$

Таким образом, в этом случае под $a_1 + a_2 + \ldots$ $\Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\Big)$ понимают также число.

Если последовательность $\{S_n\}_1^\infty$ расходится, то ряд (1) называют *расходящимся*. Пишут также $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$, если $S_n \to +\infty$ при $n \to \infty$, и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = -\infty$, если $S_n \to -\infty$ при $n \to \infty$.

Будем говорить, что *общий член ряда* (1) *стремится к нулю*, если $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

Из определения видно, что изучение сходимости и других свойств рядов сводится к изучению или переформулировке соответствующих свойств последовательностей.

**Пример 1.** Ряд

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \ldots \tag{2}$$

сходится.

**Пример 2.** Ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

расходится.

**Теорема 1.** *Необходимым условием сходимости ряда является стремление к нулю его общего члена.*

Доказательство. Пусть ряд (1) сходится, и пусть его сумма равна $S$. Тогда

$$S_n \to S, \quad S_{n-1} \to S \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно,

$$a_n = S_n - S_{n-1} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Стремление к нулю общего члена ряда, будучи необходимым, не является достаточным условием сходимости ряда, что можно увидеть на следующем примере.

**Пример 3.** Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ (называемый *гармоническим рядом*) расходится. В самом деле,

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2n} n = \frac{1}{2} \not\to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

что противоречит сходимости ряда, в случае которой последовательности $\{S_n\}$ и $\{S_{2n}\}$ сходились бы к одному и тому же числу (сумме ряда), а их разность — к нулю.

**Теорема 2** (критерий Коши). *Для сходимости ряда* (1) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Коши:*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_\varepsilon,\ \forall\, p \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Так как

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k = S_{n+p} - S_n,$$

то теорема 2 следует из критерия Коши сходимости последовательностей.

**Упражнение 1.** Доказать теорему 1 с помощью критерия Коши.

**Упражнение 2.** Доказать расходимость гармонического ряда с помощью критерия Коши.

**Определение 2.** Числовой ряд

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

называется *остатком ряда* (1) *после $n$-го члена.*

*Сходимость ряда* (1) *равносильна сходимости какого-либо из его остатков*, что следует из критерия Коши.

**Теорема 3.** *Пусть сходятся ряды* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$. *Тогда при любых* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k)$ *и его сумма равна*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \mu \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Доказательство следует из равенства для частичных сумм

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k + \mu \sum_{k=1}^{n} b_k$$

и предельного перехода в нём при $n \to \infty$.

## § 15.2. Числовые ряды с неотрицательными членами

Будем изучать числовые ряды вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad a_k \geqslant 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

**Теорема 1.** *Для сходимости ряда* (1) *необходима и достаточна ограниченность последовательности его частичных сумм.*

Доказательство. Заметим, что последовательность частичных сумм ряда (1) возрастает, так что её ограниченность эквивалентна её сходимости.

**Теорема 2** (признак сравнения). *Пусть при некотором* $k_0 \in \mathbb{N}$ *выполняется* $0 \leqslant a_k \leqslant b_k\ \forall\, k \geqslant k_0$. *Тогда:*

$1^\circ$ *сходимость ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *влечёт сходимость ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$;

$2^\circ$ *расходимость ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *влечёт расходимость ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

Доказательство.

$1^\circ$. Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится. Тогда последовательность его частичных сумм (как сходящаяся или по теореме 1) ограничена. Следовательно, последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ограничена. По теореме 1 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

2° Если бы ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходился, то по доказанному в п. 1° сходился бы и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

**Следствие.** *Пусть $a_k > 0$, $b_k > 0\ \forall\, k \in \mathbb{N}$, и пусть $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_k}{b_k} = L \in (0, \infty)$. Тогда ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. Имеем

$$\exists\, k_0 \in \mathbb{N}\colon\ \frac{1}{2}\, Lb_k \leqslant a_k \leqslant 2Lb_k \quad \forall\, k \geqslant k_0.$$

Тогда из теоремы 15.1.3 при $\lambda = 0$ и из теоремы 2 следует, что ряды $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} b_k$ сходятся или расходятся одновременно. Остаётся учесть, что сходимость ряда равносильна сходимости какого-либо из его остатков.

**Упражнение 1.** Доказать, что если $a_k \geqslant 0$, $b_k \geqslant 0\ \forall\, k \in \mathbb{N}$, $a_k = O(b_k)$ при $k \to \infty$, то из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

**Теорема 3** (интегральный признак сходимости ряда). *Пусть функция $f$ убывает к нулю на $[1, +\infty)$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ и интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. Из неравенства

$$f(k) \geqslant \int\limits_k^{k+1} f(x)\,dx \geqslant f(k+1)$$

получаем, что

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \geqslant \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx \geqslant \sum_{k=1}^{n} f(k+1) = \sum_{k=2}^{n+1} f(k). \tag{2}$$

Поэтому (эквивалентная сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$) ограниченность последовательности частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$

эквивалентна ограниченности последовательности интегралов $\int_1^{n+1} f(x)\,dx$, которая в свою очередь эквивалентна (в силу неотрицательности $f$) ограниченности интеграла $\int_1^{b'} f(x)\,dx$ как функции аргумента $b'$, что по теореме 14.7.2 эквивалентно сходимости интеграла $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$.

Неравенства (2) имеют простой геометрический смысл. Интеграл в (2) равен площади криволинейной трапеции с боковыми сторонами $[1, n+1] \times \{0\}$ и $\{(x, y)\colon 1 \leqslant x \leqslant n+1,\ \ y = f(x)\}$ (рис. 1).

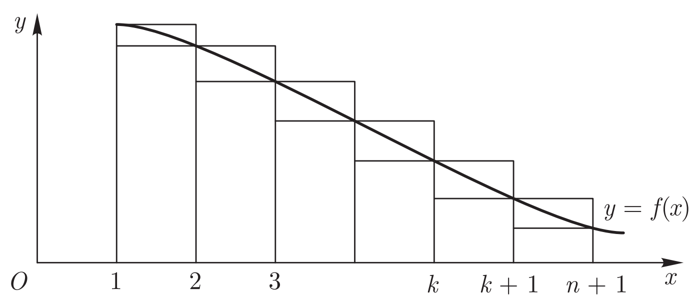



Рис. 1

Сумма в левой части (2) равна сумме площадей прямоугольников, покрывающих криволинейную трапецию, а сумма в правой части (2) — сумме площадей прямоугольников, содержащихся в этой криволинейной трапеции.

**Пример 1.** Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}$ расходится при $\alpha \leqslant 0$, так как его общий член не стремится к нулю. Ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $0 < \alpha \leqslant 1$, что в силу интегрального признака следует из сходимости интеграла $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{1}{x^\alpha}\,dx$ при $\alpha > 1$ и его расходимости при $0 < \alpha \leqslant 1$.

**Пример 2.** Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{k^\alpha}\right)$ расходится при $\alpha \leqslant 0$, так как его общий член не стремится к нулю. Этот ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $0 < \alpha \leqslant 1$. В самом деле, при $\alpha > 0$ его сходимость эквивалентна сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}$ в силу следствия из теоремы 2, так как для $\alpha > 0$ имеет место $\ln\left(1 + \dfrac{1}{k^\alpha}\right) \sim \dfrac{1}{k^\alpha}$ при $k \to \infty$. Остаётся сослаться на пример 1.

**Упражнение 2.** Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, и пусть его общий член $a_k$ убывает: $a_k \geqslant a_{k+1}$. Доказать, что

$$a_k = o\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{3}$$

У к а з а н и е. Воспользоваться оценкой снизу для разности частичных сумм ряда:

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} a_k \geqslant n a_{2n}.$$

Является ли условие (3) достаточным для сходимости ряда?

**Пример 3.** Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \tag{4}$$

сходится при $0 < q < 1$ и расходится при $q \geqslant 1$.

В самом деле, при $0 < q < 1$ имеем $q^k \leqslant \dfrac{1}{k^2}$ для всех достаточно больших $k$. Тогда в силу сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$ и теоремы 2 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ сходится.

Если же $q \geqslant 1$, то ряд (4) расходится, так как его общий член не стремится к нулю.

Заметим, что вопрос о сходимости ряда (4) можно решить, записав его частичную сумму по формуле суммы первых $n$ членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^{n+1}}{1 - q}, \quad q \neq 1.$$

**Теорема 4** (признак Д'Аламбера). *Пусть $a_k > 0 \ \forall\, k \in \mathbb{N}$. Тогда:*

1° *если существует число $q < 1$ такое, что при некотором $k_0$*

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant q < 1 \quad \forall\, k \geqslant k_0,$$

*то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;*

2° *если при некотором $k_0$*

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \geqslant 1 \quad \forall\, k \geqslant k_0,$$

*то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.*

Доказательство. 1°. При $k \geqslant k_0$ из $a_{k+1} \leqslant q a_k$ следует

$$a_k \leqslant q^{k-k_0} a_{k_0} = c_0 q^k =: b_k.$$

Тогда сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ следует из сходимости ряда (4) в силу признака сравнения (теорема 2).

2°. Из $a_{k+1} \geqslant a_k > 0$ следует, что общий член ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ не стремится к нулю. Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

**Теорема 5** (признак Д'Аламбера). *Пусть $a_k > 0$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$, и пусть*

$$\exists \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = q.$$

*Тогда:*

1° *если $q < 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;*

2° *если $q > 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится;*

3° *если $q = 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ может быть как сходящимся, так и расходящимся.*

Доказательство. 1°. Пусть $\varepsilon > 0$, $q' := q + \varepsilon < 1$. Тогда $\exists\, k_0 \in \mathbb{N}$: $a_{k+1} \leqslant q' a_k$ $\forall\, k \geqslant k_0$. По теореме 4 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

2°. Пусть $q > 1$. Тогда $\exists\, k_0 \in \mathbb{N}$: $a_k \geqslant 1$ $\forall\, k \geqslant k_0$. По теореме 4 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

3°. Для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}$, $\alpha > 0$, выполняется условие

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k^\alpha}{(k+1)^\alpha} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^\alpha} \to 1 \quad (k \to \infty).$$

Однако при $0 < \alpha \leqslant 1$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}$ расходится, а при $\alpha > 1$ — сходится.

**Пример 4.** Для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_k = \dfrac{k!}{k^k}$, имеем $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} = \left(\dfrac{k}{k+1}\right)^k = \left(1+\dfrac{1}{k}\right)^{-k} \to e^{-1} < 1$ при $k \to \infty$. Следовательно, ряд сходится.

**Теорема 6** (признак Коши). *Пусть* $a_k \geqslant 0 \ \forall\, k \in \mathbb{N}$. *Тогда:*

1° *если существует число* $q < 1$ *такое, что при некотором* $k_0 \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[k]{a_k} \leqslant q < 1 \quad \forall\, k \geqslant k_0,$$

*то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится;*

2° *если*

$$\forall\, k_0 \in \mathbb{N} \quad \exists\, k \geqslant k_0\colon\ \sqrt[k]{a_k} \geqslant 1,$$

*то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится, а его общий член не стремится к нулю.*

Доказательство. 1°. В силу сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ и оценки $a_k \leqslant q^k$ $(\forall\, k \geqslant k_0)$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится по признаку сравнения (теорема 2).

2°. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, так как его общий член не стремится к нулю.

Предельная форма признака Коши имеет следующий вид.

**Теорема 7** (признак Коши). *Пусть* $a_k \geqslant 0 \ \forall\, k \in \mathbb{N}$ *и*

$$\varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = q.$$

*Тогда:*

1° *если* $q < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится;*

2° *если* $q > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится, и при этом его общий член не стремится к нулю;*

3° *если* $q = 1$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *может быть как сходящимся, так и расходящимся.*

**Следствие.** *Утверждение теоремы 7 сохранится, если в ней условие* $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = q$ *заменить на условие*

$$\exists \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = q.$$

Доказательство теоремы 7. 1°. Пусть $q < q_0 < 1$. Тогда $\exists\, k_0 \in \mathbb{N}$: $\sqrt[k]{a_k} \leqslant q_0 < 1 \ \forall\, k \geqslant k_0$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится по теореме 6.

2°. Из определения верхнего предела последовательности следует, что $\forall\, k_0 \in \mathbb{N} \quad \exists\, k \geqslant k_0$: $\sqrt[k]{a_k} \geqslant 1$. По теореме 6 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

3°. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сходится, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1$ расходится, хотя для каждого из них $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = 1$.

**Пример 5.** Ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k$, $a_k = \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k^2}$, сходится по признаку Коши, так как $\sqrt[k]{a_k} = \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k} \to e^{-1} < 1$ при $k \to \infty$.

**Упражнение 3.** Показать, что признак Коши сильнее признака Д'Аламбера в том смысле, что если сходимость ряда можно установить с помощью признака Д'Аламбера, то это можно сделать и с помощью признака Коши.

**Замечание 1.** Признаки Д'Аламбера и Коши, как видно из их доказательств, основаны на сравнении рассматриваемого ряда с геометрической прогрессией $\{q^k\}_{k=0}^{\infty}$. Этим, в частности, можно объяснить их непригодность для выяснения сходимости рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ при $\alpha > 0$. Как признаки расходимости эти признаки показывают, что общий член ряда не стремится к нулю, т. е. являются довольно грубыми.

Кроме рассмотренных, существует много других, более тонких признаков, дающих достаточные условия сходимости числового ряда.

## § 15.3. Абсолютно сходящиеся ряды

**Определение 1.** Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

**Теорема 1.** *Абсолютно сходящийся ряд сходится.*

Доказательство. В силу сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ для него выполняется условие Коши. Поскольку

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=m}^{n} |a_k| \quad \text{при} \quad m \leqslant n,$$

то условие Коши выполняется и для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. В силу критерия Коши (теорема 15.1.2) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

**Замечание 1.** Из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ не следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Это видно из примера ряда (15.1.2).

Следующие две теоремы показывают, что абсолютно сходящиеся ряды обладают некоторыми свойствами сумм конечного числа слагаемых.

**Определение 2.** Пусть заданы ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и отображение $k \to \to n_k$, являющееся взаимно однозначным соответствием $\mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ называют *рядом с переставленными членами* (по отношению к ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$).

**Теорема 2.** *Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно, то и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^*$, полученный перестановкой членов ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, сходится абсолютно. При этом их суммы равны:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^* = \sum_{k=1}^{\infty} a_k. \tag{1}$$

Доказательство. Абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^*$, т. е. сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k^*|$, следует из ограниченности последовательности частичных сумм последнего:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k^*| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Установим равенство (1).

Пусть $S := \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $S_n^* := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^*$.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдётся, очевидно, такое $N = N(n) > n$, что все слагаемые суммы $S_n^*$ содержатся в сумме $S_N$. Тогда при $m \geqslant N$

$$|S_m - S_n^*| \leqslant |a_{n+1}^*| + |a_{n+2}^*| + \ldots =: \rho_n^*,$$

где $\rho_n^*$ — остаток после $n$-го члена ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k^*|$.

Переходя в этом неравенстве к пределу при $m \to \infty$, получаем

$$|S - S_n^*| \leqslant \rho_n^* \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

При этом $\rho_n^* \to 0$ при $n \to 0$ как остаток сходящегося ряда. Следовательно, $S_n^* \to S$ при $n \to \infty$, что равносильно равенству (1).

**Теорема 3.** *Пусть ряды* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходятся абсолютно. Тогда ряд*

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j} b_{m_j}, \tag{2}$$

*составленный из всевозможных (без повторений) попарных произведений членов исходных рядов, сходится абсолютно и его сумма*

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j} b_{m_j} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right). \tag{3}$$

Доказательство. Ряд (2) сходится абсолютно, поскольку ограничена последовательность частичных сумм ряда из абсолютных величин его членов:

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{k_j}||b_{m_j}| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|\right).$$

Установим равенство (3). Поскольку сумма ряда (2) не зависит от перестановки его членов, будем считать, что члены ряда (2) расположены в таком порядке, что

$$S_{n^2} := \sum_{j=1}^{n^2} a_{k_j} b_{m_j} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем, что подпоследовательность $\{S_{n^2}\}_{n=1}^{\infty}$ частичных сумм ряда (2) сходится к числу

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right).$$

Так как ряд (2) сходящийся, то последовательность его частичных сумм сходится к этому же числу, и (3) установлено.

## § 15.4. Сходящиеся знакопеременные ряды

**Определение 1.** Ряд, в котором имеются как положительные, так и отрицательные члены, называется *знакопеременным*.

Как было показано на примере ряда (15.1.2), сходящийся знакопеременный ряд не обязательно сходится абсолютно.

Установим некоторые признаки сходимости знакопеременных рядов.

**Теорема 1** (признак Лейбница). *Пусть $a_k \geqslant a_{k+1} > 0\ \forall\, k \in \mathbb{N}$, $a_k \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда знакочередующийся ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots \tag{1}$$

*сходится.*

*При этом остаток ряда $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ по абсолютной величине не превосходит абсолютной величины первого из его членов:*

$$|r_n| \leqslant a_{n+1}. \tag{2}$$

Доказательство. Рассмотрим подпоследовательность частичных сумм чётных порядков $\{S_{2n}\}_1^\infty$ последовательности частичных сумм ряда (1):

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}) =$$
$$= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}.$$

Ясно, что последовательность $\{S_{2n}\}_1^\infty$ возрастает и что $0 \leqslant S_{2n} \leqslant a_1$. Следовательно, последовательность $\{S_{2n}\}_1^\infty$ сходится:

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_{2n} =: S \in [0, a_1]. \tag{3}$$

Подпоследовательность $\{S_{2n-1}\}_1^\infty$ частичных сумм нечётных порядков последовательности $\{S_n\}_1^\infty$ также сходится и притом к тому же пределу $S$, поскольку $S_{2n-1} = S_{2n} - a_{2n} \to S - 0 = S$ при $n \to \infty$. Из сходимости последовательностей $\{S_{2n}\}_1^\infty$ и $\{S_{2n-1}\}_1^\infty$ к одному и тому же числу $S$ следует, как нетрудно заметить, сходимость $S_n \to S$ при $n \to \infty$, т. е. сходимость ряда (1) к $S$.

Пусть теперь $r_n$ — остаток ряда (1) после $n$-го члена:

$$(-1)^{n+1} r_n = a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \ldots$$

Этот ряд также удовлетворяет условиям доказываемой теоремы. Оценивая его сумму в соответствии с (3), получаем (2).

**Пример 1.** Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k^\alpha}$, $\alpha > 0$, сходится по признаку Лейбница.

Установим некоторые признаки сходимости рядов вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$. Рассмотрим сначала преобразование конечной суммы

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Пусть

$$B_0 \in \mathbb{R}, \quad B_k := B_0 + \sum_{j=1}^{k} b_j \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{4}$$

Тогда $b_k = B_k - B_{k-1}$ $(k = 1, \ldots, n)$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1}.$$

Заменив в последней сумме индекс суммирования $k$ на $k+1$, получаем формулу

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n B_n - a_1 B_0 - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) B_k, \tag{5}$$

называемую *преобразованием Абеля* суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k$. Формула (5) является аналогом формулы интегрирования по частям и чаще всего используется при $B_0 = 0$.

**Теорема 2** (признак Дирихле). *Пусть числовая последовательность $\{a_k\}_1^\infty$ монотонно стремится к нулю, а последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ ограничена.*

*Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится.*

Доказательство. В обозначениях (4) при $B_0 = 0$ применим преобразование Абеля (5) к частичной сумме ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$. Изучим поведение правой части равенства (5) при $n \to \infty$.

Прежде всего, $a_n B_n \to 0$ при $n \to \infty$ в силу ограниченности последовательности $\{B_n\}$ и условия $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Сумма в правой части (5) стремится к конечному пределу, поскольку является частичной суммой сходящегося (и притом абсолютно) ряда.

В самом деле, если $M := \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |B_k|$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(a_{k+1} - a_k)B_k| \leqslant M \sum_{k=1}^{\infty} |a_{k+1} - a_k| = \\ = M \left| \sum_{k=1}^{\infty} (a_{k+1} - a_k) \right| = M|a_1|.$$

Следовательно, и левая часть (5) стремится к тому же пределу при $n \to \infty$, что и означает сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$.

**Следствие.** *В условиях теоремы* 2

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \right| \leqslant |a_1| \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=1}^{n} b_k \right|.$$

**Теорема 3** (признак Абеля). *Пусть числовая последовательность $\{a_k\}_1^{\infty}$ монотонна и ограничена, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится.*

Доказательство. Пусть $a_k \to a_0$ при $k \to \infty$. Тогда $\alpha_k := a_k - a_0 \to 0$ при $k \to \infty$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k b_k + a_0 \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Первый из двух рядов правой части равенства сходится по признаку Дирихле, а второй — по условию. Следовательно, сходится и ряд, стоящий в левой части равенства.

**Замечание 1.** Признак Абеля можно сформулировать так: *ряд, получаемый почленным умножением сходящегося ряда на члены монотонной ограниченной последовательности, сходится.*

**Пример 2.** Доказать сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^{\alpha}}, \quad \alpha > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Последовательность чисел $a_k = \dfrac{1}{k^{\alpha}}$ монотонно стремится к нулю. Покажем, что последовательность сумм $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx$ ограничена.

Имеем при $x \neq 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\sin kx =$$
$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} \left[\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right],$$

так что

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

Следовательно, сходимость ряда (6) следует из признака Дирихле при $x \neq 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. Если же $x = 2m\pi$, то ряд (6) сходится, так как все его члены равны нулю.

Аналогично исследуется сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

При $x \neq 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, имеем $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} \cos kx\right| \leqslant \dfrac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$, и ряд (7) сходится по признаку Дирихле.

При $x = 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, ряд (7) превращается в ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}$, сходимость которого зависит от $\alpha$ и исследована в примере 15.2.1.

**Пример 3.** Пусть $\{a_k\}$ — монотонная ограниченная последовательность.

Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\sin kx}{k^\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

сходится по признаку Абеля, где $b_k = \dfrac{\sin kx}{k^\alpha}$.

Мы видели (теорема 15.3.2), что если ряд сходится абсолютно, то после любой перестановки его членов он останется абсолютно сходящимся и его сумма не изменится. Если же ряд сходится, но не абсолютно, то после перестановки членов он может превратиться в расходящийся ряд или в сходящийся ряд, имеющий другую сумму. Это утверждение (теорема Римана) будет доказано после некоторой подготовки.

Пусть задан ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Положим

$$a_k^+ := \begin{cases} a_k, & \text{если } a_k \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } a_k < 0, \end{cases} \quad a_k^- := \begin{cases} a_k, & \text{если } a_k < 0, \\ 0, & \text{если } a_k \geqslant 0. \end{cases}$$

Таким образом, $a_k^+ \geqslant 0$, $a_k^- \leqslant 0$, $a_k = a_k^+ + a_k^-$.

**Лемма 1.** *Пусть ряд $\sum a_k$ сходится, но не абсолютно. Тогда каждый из рядов $\sum a_k^+$, $\sum a_k^-$ расходится.*

Доказательство. Допустим противное. Пусть, например, ряд $\sum a_k^+$ сходится. Тогда сходится и ряд $\sum a_k^-$ (так как $a_k^- = a_k - a_k^+$). Следовательно, каждый из этих рядов сходится абсолютно, откуда следует абсолютная сходимость ряда $\sum a_k$, что противоречит условию.

**Теорема 4** (Римана). *Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, но не абсолютно. Тогда для любого $A \in \mathbb{R}$ можно так переставить члены этого ряда, что полученный ряд будет сходиться к $A$.*

Доказательство. Построим по ряду $\sum a_k$ ряды $\sum a_k^+$, $\sum a_k^-$. Исключим из ряда $\sum a_k^-$ равные нулю члены и обозначим полученный ряд через $\sum(-\beta_i)$. Исключим из ряда $\sum a_k^+$ те равные нулю члены, для которых $a_k < 0$, и полученный ряд обозначим через $\sum \alpha_i$. Таким образом, $\sum \alpha_i = \sum\limits_{a_k \geqslant 0} a_k$, $\sum(-\beta_i) = \sum\limits_{a_k < 0} a_k$, $\alpha_i \geqslant 0$, $\beta_i > 0 \ \ \forall\, i \in \mathbb{N}$. В силу леммы 1 ряды $\sum \alpha_i$, $\sum(-\beta_i)$ расходятся.

Теперь каждый член ряда $\sum a_k$ является членом одного из рядов $\sum \alpha_i$, $\sum(-\beta_i)$, а каждый член любого из этих рядов является членом ряда $\sum a_k$. Поэтому любой ряд, составленный из всех членов рядов $\sum \alpha_i$, $\sum(-\beta_i)$, является рядом с переставленными членами по отношению к ряду $\sum a_k$.

Зафиксируем $A \in \mathbb{R}$ и построим ряд

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_{m_1} - \beta_1 - \ldots - \beta_{n_1} + \alpha_{m_1+1} + \ldots \\ + \alpha_{m_2} - \beta_{n_1+1} - \ldots - \beta_{n_2} + \ldots, \qquad (8)$$

где $m_i,\ n_i \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant m_1 < m_2 < \ldots$, $1 \leqslant n_1 < n_2 < \ldots$ Ряд (8) строим по следующему правилу. На первом шаге переносим в него один за другим несколько первых членов ряда $\sum \alpha_i$, следя за возрастанием частичных сумм $S_n$ ряда (8) и заканчивая тем членом $\alpha_{m_1}$, при переносе которого в ряд (8) частичная сумма

$S_{m_1}$ впервые станет большей, чем $A$ ($S_{m_1} > A$). Это возможно, поскольку ряд $\sum \alpha_i$ расходится, так что его частичные суммы не ограничены.

На втором шаге переносим в ряд (8) несколько первых членов ряда $\sum(-\beta_i)$, следя за убыванием частичных сумм $S_n$ ряда (8) и заканчивая тем членом $-\beta_{n_1}$, при переносе которого частичная сумма $S_{m_1+n_1}$ впервые станет меньшей, чем $A$ ($S_{m_1+n_1} < A$).

На третьем шаге переносим в ряд (8) несколько первых из оставшихся в ряде $\sum \alpha_i$ членов, начиная с $a_{m_1+1}$, следя за возрастанием частичной суммы ряда (8) и заканчивая тем членом $\alpha_{m_2}$, при переносе которого частичная сумма $S_{n_1+m_2}$ впервые станет большей, чем $A$ ($S_{n_1+m_2} > A$).

На четвёртом шаге переносим в ряд (8) несколько первых из оставшихся членов ряда $\sum(-\beta_i)$, заканчивая тем членом $-\beta_{n_2}$, при переносе которого частичная сумма $S_{m_2+n_2}$ впервые станет меньшей, чем $A$ ($S_{m_2+n_2} < A$).

Продолжая так и далее, построим ряд (8), отличающийся от $\sum a_k$ лишь перестановкой членов.

По построению отклонение частичной суммы ряда (8) от $A$, т. е. $|A - S_n|$, оценивается для номеров $n$ второго шага построения через $\max\{\alpha_{m_1}, \beta_{n_1}\}$, для номеров $n$ третьего шага — через $\max\{\beta_{n_1}, \alpha_{m_2}\}$, четвёртого шага — через $\max\{\alpha_{m_2}, \beta_{n_2}\}$ и т. д.

Поскольку $\alpha_i \to 0$, $\beta_i \to 0$ при $i \to \infty$, то $S_n \to A$ при $n \to \infty$. Теорема доказана.

**Упражнение 1.** Доказать, что в условиях теоремы Римана можно построить ряды вида (8), для которых частичные суммы обладают любым из следующих свойств:

а) $S_n \to +\infty$ при $n \to \infty$;

б) $S_n \to -\infty$ при $n \to \infty$;

в) образуют ограниченную расходящуюся последовательность $\{S_n\}$.

## § 15.5. Последовательности и ряды с комплексными членами

**Определение 1.** Последовательность комплексных чисел $\{z_k\} = \{x_k + iy_k\}$ называется *сходящейся*, если существует комплексное число $z_0 = x_0 + iy_0$ такое, что

$$\lim_{k\to\infty} |z_k - z_0| = 0.$$

При этом число $z_0 = x_0 + iy_0$ называют *пределом последовательности* $\{z_k\}$, и пишут $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = z_0$ или $z_k \to z_0$ при $k \to \infty$.

Поскольку

$$|z_k - z_0| = \sqrt{(x_k - x_0)^2 + (y_k - y_0)^2}\,,$$

то сходимость $z_k \to z_0$ равносильна сходимости каждой из двух последовательностей действительных чисел $x_k \to x_0$ и $y_k \to y_0$ при $k \to \infty$. Это свойство (называемое также повторением выводов) даёт возможность перенести на последовательности комплексных чисел все теоремы о последовательностях действительных чисел, не связанные с отношением порядка (во множестве $\mathbb{C}$ комплексных чисел этого понятия нет).

**Определение 2.** Символ

$$z_1 + z_2 + z_3 + \ldots\,, \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{\infty} z_k, \quad z_k \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

называется *числовым рядом с комплексными членами.*

На ряд (1) переносятся все понятия ряда действительных чисел (член ряда, общий член ряда, частичная, или частная сумма ряда, остаток ряда, сходимость и сумма ряда, абсолютная сходимость ряда).

Очевидно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$, где $z_k = x_k + iy_k$, сходится (абсолютно сходится) тогда и только тогда, когда сходится (абсолютно сходится) каждый из рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$.

На ряды с комплексными членами переносятся все теоремы из § 15.1 и из § 15.3, а также признаки сходимости Дирихле и Абеля для рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$, если $a_k \in \mathbb{R}\ \forall\, k \in \mathbb{N}$.

Глава 16

# ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

## § 16.1. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов

В этой главе мы будем изучать последовательности и ряды комплекснозначных функций, определённых на подмножестве метрического пространства $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим последовательность функций

$$\{f_n\}_1^\infty, \quad f_n \colon E \to \mathbb{C}, \quad E \subset \mathbb{R}^d. \tag{1}$$

**Определение 1.** Говорят, что последовательность (1) *сходится на множестве* $E$, если числовая последовательность $\{f_n(x)\}_1^\infty$ сходится при каждом фиксированном $x \in E$.

При этом говорят также, что последовательность (1) сходится на $E$ *поточечно*.

**Определение 2.** Говорят, что последовательность (1) *сходится на $E$ равномерно к функции* $f \colon E \to \mathbb{C}$, и пишут $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$ при $n \to \infty$, если

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Здесь допускается, что конечное число членов последовательности верхних граней может быть равно $+\infty$. Для такой последовательности определение предела то же, что и для числовой последовательности.

Говорят, что последовательность (1) *сходится на множестве $E$ равномерно*, если

$$\exists\, f \colon E \to \mathbb{C} \colon f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Если последовательность (1) сходится на множестве $E$ равномерно, то, очевидно, она сходится на $E$ и поточечно, и притом к той же самой функции. Обратное неверно.

**Пример 1.** Пусть $f_n(x) = x^n$, $0 \leqslant x < 1$. Последовательность $\{f_n(x)\}_1^\infty$ сходится поточечно к нулю на $[0, 1)$. Однако она не сходится на $[0, 1)$ равномерно. В самом деле, предельной функцией может быть только $f(x) = 0\ \forall\, x \in [0, 1)$. Но

$$\sup_{x\in[0,1)} |x^n - 0| = 1 \not\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Тем не менее та же последовательность сходится на отрезке $[0, q]$, $0 < q < 1$, равномерно, так как $\sup\limits_{x\in[0,q]} |x^n - 0| = q^n \to 0$ при $n\to\infty$.

**Пример 2.** Пусть непрерывная функция $f_n\colon [0,1]\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, имеет вид (рис. 1)

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0 \text{ и при } x\in\left[\dfrac{1}{n}, 1\right], \\ 1 & \text{при } x = \dfrac{1}{2n}, \end{cases}$$

$$f_n \text{ линейна на } \left[0, \frac{1}{2n}\right] \text{ и на } \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right].$$

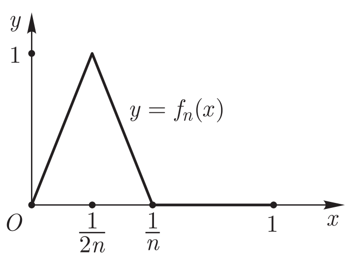



Рис. 1

Ясно, что $f_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$ $\forall\, x\in[0,1]$, но

$$\sup_{[0,1)} |f_n - 0| = 1 \not\to 0$$

при $n\to\infty$, так что на $[0,1]$ последовательность $\{f_n\}$ не сходится равномерно.

Следующее определение эквивалентно определению 2.

**Определение 2′.** Говорят, что последовательность (1) *сходится на $E$ равномерно* к функции $f\colon E\to\mathbb{C}$, если

$$\forall\,\varepsilon > 0 \ \exists\, n = n(\varepsilon)\colon |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \ \forall\, x\in E, \ \ \forall\, n \geqslant n(\varepsilon).$$

Подчеркнём, что в определении 2′ число $n = n(\varepsilon)$ не зависит от $x\in E$. Если же в этом определении заменить $n(\varepsilon)$ на $n(x,\varepsilon)$, т. е. считать $n(\varepsilon)$ зависящим ещё и от $x$, то определение 2′ превращается в определение (поточечной) сходимости на множестве $E$.

**Замечание 1.** Понятие «равномерная сходимость» может быть пояснено как «в равной степени быстрая сходимость» для разных точек множества $E$. В случае равномерной сходимости существует стремящаяся к нулю мажоранта отклонений $f_n(x)$ от $f(x)$ — это $\varepsilon_n := \sup\limits_E |f_n - f| \to 0$ $(n\to\infty)$.

Заметим ещё, что при $n\to\infty$ равномерная сходимость $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$ равносильна, очевидно, равномерной сходимости $f_n - f \underset{E}{\rightrightarrows} 0$.

**Теорема 1** (критерий Коши равномерной сходимости последовательности). *Последовательность $\{f_n\}$, $f_n\colon E \to \mathbb{C}$, сходится на $E$ равномерно тогда и только тогда, когда выполняется условие Коши:*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon\ \sup_E |f_n - f_m| < \varepsilon \quad \forall\, n, m \geqslant n_\varepsilon.$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$ при $n \to \infty$. Тогда

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon\ \sup_E |f_n - f| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad n \geqslant n_\varepsilon.$$

Отсюда следует, что для всех $n$, $m \geqslant n_\varepsilon$

$$\sup_E |f_n - f_m| \leqslant \sup_E |f_n - f| + \sup_E |f_m - f| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

*Достаточность.* Пусть выполняется условие Коши. Тогда при каждом фиксированном $x \in E$ выполняется условие

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon\, \forall\, n, m \geqslant n_\varepsilon,\ \forall\, x \in E. \quad (2)$$

Последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится $\forall\, x \in E$ в силу критерия Коши сходимости числовой последовательности. Обозначим предел числовой последовательности $\{f_n(x)\}$ через $f(x)$. Покажем, что $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$ при $n \to \infty$. Для этого в оценке (2) перейдём к пределу при $m \to \infty$. Получим, что

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \quad \forall\, n \geqslant n_\varepsilon, \quad \forall\, x \in E.$$

Переходя в предпоследнем неравенстве к верхней грани по $x \in E$, получаем, что по определению 2 $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$ при $n \to \infty$.

Рассмотрим *функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k, \quad u_k\colon E \to \mathbb{C}, \quad E \subset \mathbb{R}^d. \quad (3)$$

**Определение 3.** Говорят, что ряд (3) *сходится на множестве $E$*, если числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x), \quad x \in E, \quad (4)$$

сходится при каждом фиксированном $x \in E$.

При этом говорят также, что ряд (3) *сходится на $E$ поточечно.*

Таким образом, поточечная сходимость ряда (3) на $E$ равносильна поточечной сходимости на $E$ последовательности $S_n := = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ его *частичных сумм.*

Если ряд (3) сходится на множестве $E$, то его *суммой* называется функция $S\colon E \to \mathbb{C}$ такая, что $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)\ \forall\, x \in E$.

**Определение 4.** Говорят, что ряд (3) *сходится на $E$ равномерно*, если последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм сходится на $E$ равномерно.

Следующее определение эквивалентно, очевидно, определению 4.

**Определение 4$'$.** Говорят, что ряд (3) *сходится на $E$ равномерно*, если он сходится на $E$ и если

$$\sup_E \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \right| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

**Пример 3.** Доказать, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k+x^2}$ равномерно сходится на множестве $E = (-\infty, +\infty)$.

Для любого $x \in E$ ряд сходится по признаку Лейбница. По тому же признаку для остатка ряда справедлива оценка

$$\left| \sum_{n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+x^2} \right| \leqslant \frac{1}{n+1+x^2} \leqslant \frac{1}{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Следовательно, по определению 4$'$ ряд равномерно сходится на $(-\infty, +\infty)$.

Обратим внимание читателя на то, что этот ряд ни при каком значении $x \in (-\infty, +\infty)$ не сходится абсолютно.

**Теорема 2** (необходимое условие равномерной сходимости ряда). *Пусть ряд* (3) *равномерно сходится на $E$. Тогда его общий член*

$$u_n \underset{E}{\rightrightarrows} 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty.$$

Доказательство следует из того, что $u_n = S_n - S_{n-1}$, $S_n \underset{E}{\rightrightarrows} S$, $S_{n-1} \underset{E}{\rightrightarrows} S$ при $n \to \infty$.

Понятия сходимости ряда, сходимости ряда на множестве, равномерной сходимости ряда на множестве определяются в терминах соответствующих понятий для последовательностей частичных сумм ряда. Поэтому многие свойства функциональных рядов являются перефразировкой соответствующих свойств функциональных последовательностей и наоборот. Так, например, простым следствием теоремы 1 является

**Теорема 3** (критерий Коши равномерной сходимости ряда). *Ряд* (3) *сходится на* $E$ *равномерно тогда и только тогда, когда выполняется условие Коши:*

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\, n(\varepsilon)\in\mathbb{N}\colon\ \sup_E\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k\right|<\varepsilon\ \forall\, n\geqslant n(\varepsilon),\ \forall\, p\in\mathbb{N}.$$

**Упражнение 1.** Доказать, что если ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}v_k$ равномерно сходятся на $E$, то при $\lambda,\ \mu\in\mathbb{R}$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\lambda u_k+\mu v_k)$ равномерно сходится на $E$. Обобщить утверждение на случай, когда $\lambda,\ \mu$ — ограниченные на $E$ функции.

**Упражнение 2.** Вывести теорему 2 из теоремы 3.

**Упражнение 3.** Определение $2'$ эквивалентно определению 2, но формулируется без привлечения понятия верхней грани. Сформулировать аналогичные равносильные утверждения для условия Коши в теоремах 1, 3 и для определения $4'$.

## § 16.2. Признаки равномерной сходимости рядов

**Теорема 1** (признак сравнения). *Пусть заданы функции* $u_k\colon E\to\mathbb{C}$, $v_k\colon E\to[0,+\infty)$, $E\subset\mathbb{R}^d$, *причём*

$$|u_k(x)|\leqslant v_k(x)\quad\forall\, x\in E,\quad\forall\, k\in\mathbb{N}.$$

*Пусть ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}v_k$ *сходится на* $E$ *равномерно. Тогда ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$ *сходится на* $E$ *абсолютно и равномерно.*

Доказательство. Заметим, что при $x\in E$, $n\in\mathbb{N}$, $p\in\mathbb{N}$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\right|\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p}|u_k(x)|\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p}v_k(x).$$

В силу критерия Коши (теорема 16.1.3) из равномерной сходимости ряда $\sum v_k$ следует, что

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\, n(\varepsilon)\in\mathbb{N}\colon\ \sup_{x\in E}\sum_{k=n+1}^{n+p}v_k(x)<\varepsilon\ \forall\, n\geqslant n(\varepsilon),\ \forall\, p\in\mathbb{N}.$$

Значит, для этих же $\varepsilon$ и $n(\varepsilon)$

$$\sup_{x\in E}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \leqslant \sup_{x\in E}\sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| < \varepsilon\ \forall\, n \geqslant n(\varepsilon),\ \forall\, p\in\mathbb{N}.$$

Следовательно, в силу того же критерия Коши ряды $\sum u_k$ и $\sum |u_k|$ равномерно сходятся на $E$.

Частным случаем доказанной теоремы является

**Теорема 2** (признак Вейерштрасса). *Пусть $u_k\colon E\to\mathbb{C}$, $E\subset\subset\mathbb{R}^d$, $a_k\in\mathbb{R}\ \forall\, k\in\mathbb{N}$, причём*

$$|u_k(x)| \leqslant a_k \quad \forall\, x\in E, \quad \forall\, k\in\mathbb{N}.$$

*Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится на $E$ абсолютно и равномерно.*

**Определение 1.** Последовательность $\{f_n\}$ функций $f_n\colon E\to\to\mathbb{C}$, $E\subset\mathbb{R}^d$, называется *равномерно ограниченной на $E$*, если

$$\exists\, M\in\mathbb{R}\colon |f_n(x)| \leqslant M \quad \forall\, x\in E, \quad \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Следующие два признака относятся к рядам вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)u_k(x), \tag{1}$$

где $a_k\colon E\to\mathbb{R}$, $u_k\colon E\to\mathbb{C}$, $E\subset\mathbb{R}^d$.

**Теорема 3** (признак Дирихле). *Пусть последовательность значений действительнозначных функций $a_k(x)$ при каждом $x\in E$ монотонна, и пусть $a_k \underset{E}{\rightrightarrows} 0$ при $k\to\infty$. Пусть также частичные суммы ряда $\sum\limits_{1}^{\infty} u_k$ комплекснозначных функций $u_k$ равномерно ограничены на $E$.*

*Тогда ряд (1) равномерно сходится на $E$.*

Доказательство. Применяя преобразование Абеля (15.4.5), получаем

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)u_k(x) =$$

$$= a_{n+p}(x)\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) - \sum_{k=n+1}^{n+p-1}(a_{k+1}(x)-a_k(x))\sum_{j=n+1}^{k} u_j(x). \tag{2}$$

В силу равномерной ограниченности частичных сумм ряда $\sum u_k(x)$ при некотором $M \in \mathbb{R}$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right| \leqslant M \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \forall\, x \in E.$$

Тогда, используя монотонность последовательности $\{a_k(x)\}$ (по $k$), имеем

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)u_k(x)\right| \leqslant 2M|a_{n+p}(x)| + 2M\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |a_{k+1}(x) - a_k(x)| =$$
$$= 2M|a_{n+p}(x)| + 2M\left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_{k+1}(x) - a_k(x))\right| =$$
$$= 4M|a_{n+p}(x)| + 2M|a_{n+1}(x)|.$$

Из этого неравенства в силу $a_k \underset{E}{\rightrightarrows} 0$ при $k \to \infty$ получаем, что

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}\colon \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)u_k(x)\right| < \varepsilon$$
$$\forall\, n \geqslant n(\varepsilon), \quad \forall\, p \in \mathbb{N}, \quad \forall\, x \in E.$$

Применяя критерий Коши (теорема 16.1.3), получаем, что ряд (1) сходится на $E$ равномерно.

**Теорема 4** (признак Абеля). *Пусть последовательность $\{a_k(x)\}$ действительнозначных функций равномерно ограничена на множестве $E \subset \mathbb{R}^d$, и пусть при каждом $x \in E$ последовательность $\{a_k(x)\}$ монотонна. Пусть также ряд $\sum u_k(x)$ с комплекснозначными членами $u_k$ равномерно сходится на $E$.*

*Тогда ряд* (1) *сходится на $E$ равномерно.*

Доказательство. По определению равномерной ограниченности функциональной последовательности $\{a_k(x)\}$ при некотором $M \in \mathbb{R}$

$$|a_k(x)| \leqslant M \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \forall\, x \in E.$$

Из равномерной сходимости ряда $\sum u_k$ и критерия Коши (теорема 16.1.3) имеем

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}\colon \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon$$
$$\forall\, n \geqslant n(\varepsilon), \quad \forall\, p \in \mathbb{N}, \quad \forall\, x \in E.$$

Отсюда и из (2), используя монотонность последовательности $\{a_k(x)\}$, получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)u_k(x)\right| \leqslant M\varepsilon + \varepsilon \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |a_{k+1}(x) - a_k(x)| =$$
$$= M\varepsilon + \varepsilon \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_{k+1}(x) - a_k(x))\right| =$$
$$= M\varepsilon + \varepsilon|a_{n+p}(x) - a_{n+1}(x)| \leqslant M\varepsilon + 2M\varepsilon = 3M\varepsilon.$$

В силу критерия Коши (теорема 16.1.3) отсюда следует равномерная сходимость ряда (1) на множестве $E$.

**Пример 1.** Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin kx}{k^\alpha}$:

1° при $\alpha > 1$ равномерно сходится на отрезке $[0, 2\pi]$;

2° при $0 < \alpha \leqslant 1$ на любом отрезке $[a, b] \subset (0, 2\pi)$ сходится равномерно;

3° при $0 < \alpha \leqslant 1$ на любом отрезке $[0, \delta]$, $\delta > 0$ сходится, но не равномерно.

Покажем это. 1° При $\alpha > 1$ $\left|\dfrac{\sin kx}{k^\alpha}\right| \leqslant \dfrac{1}{k^\alpha}$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}$ сходится. По признаку Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin kx}{k^\alpha}$ равномерно сходится на $(-\infty, +\infty)$.

2° При $0 < \alpha \leqslant 1$ воспользуемся оценкой из примера 15.4.2:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|},$$

показывающей, что частичные суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin kx$ равномерно ограничены на каждом отрезке $[a, b] \subset (0, 2\pi)$. Последовательность $\left\{\dfrac{1}{k^\alpha}\right\}$ монотонно стремится к нулю. По признаку Дирихле ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin kx}{k^\alpha}$ на каждом отрезке $[a, b] \subset (0, 2\pi)$ сходится равномерно.

3° При $0 < \alpha \leqslant 1$ и при любом $n \in \mathbb{N}$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sin kx}{k^\alpha}\bigg|_{x=1/n}\right| \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sin 1}{k^\alpha} \geqslant \sin 1 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{\sin 1}{2} > 0.$$

Следовательно, на отрезке $[0, \delta]$, $\delta > 0$, не выполняется условие Коши равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin kx}{k^\alpha}$. По критерию Коши (теорема 16.1.3) на отрезке $[0, \delta]$ этот ряд не сходится равномерно.

## § 16.3. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов

**Определение 1.** Комплекснозначная функция $f\colon\ E \to \mathbb{C}$, определённая на множестве $E \subset \mathbb{R}^d$, называется *непрерывной в точке* $x^{(0)} \in E$ *по множеству* $E$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta_\varepsilon > 0\colon |f(x) - f(x^{(0)})| < \varepsilon \quad \forall\, x \in E \cap U_\delta(x^{(0)}), \tag{1}$$

и называется *непрерывной на множестве* $E$, если она непрерывна в каждой точке множества $E$ по множеству $E$.

Комплекснозначную функцию $f$ можно представить в виде $f = g + ih$, где $g$, $h$ — действительнозначные функции. Очевидно, что непрерывность функции $f$ в точке $x^{(0)} \in E$ по множеству $E$ (на $E$) равносильна непрерывности каждой из функций $g$, $h$ в точке $x^{(0)}$ по множеству $E$ (на $E$).

**Теорема 1.** *Пусть последовательность* $\{f_n\}$ *комплекснозначных функций* $f_n\colon E \to \mathbb{C}$, $E \subset \mathbb{R}^d$ *равномерно сходится на* $E$ *к функции* $f$, *т. е* $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$ *при* $n \to \infty$. *Если все функции* $f_n$ *непрерывны в точке* $x^{(0)} \in E$ *по множеству* $E$, *то и предельная функция* $f$ *непрерывна в точке* $x^{(0)}$ *по множеству* $E$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}\colon |f(x) - f_{n(\varepsilon)}(x)| < \varepsilon \quad \forall\, x \in E. \tag{2}$$

Тогда при $x \in E$

$$|f(x) - f(x^{(0)})| \leqslant |f(x) - f_{n(\varepsilon)}(x)| + |f_{n(\varepsilon)}(x) - f_{n(\varepsilon)}(x^{(0)})| + \\ + |f(x^{(0)}) - f_{n(\varepsilon)}(x^{(0)})| < 2\varepsilon + |f_{n(\varepsilon)}(x) - f_{n(\varepsilon)}(x^{(0)})|.$$

В силу непрерывности функции $f_{n(\varepsilon)}$ в точке $x^{(0)}$ по множеству $E$

$$\exists\, \delta = \delta_\varepsilon > 0\colon |f_{n(\varepsilon)}(x) - f_{n(\varepsilon)}(x^{(0)})| < \varepsilon \quad \forall\, x \in E \cap U_\delta(x^{(0)}).$$

Отсюда и из предыдущего неравенства следует, что

$$|f(x) - f(x^{(0)})| < 3\varepsilon \quad \forall\, x \in E \cap U_\delta(x^{(0)}).$$

Следовательно, функция $f$ непрерывна в точке $x^{(0)}$ по множеству $E$.

**Теорема 1′.** *Пусть функциональный ряд $\sum u_k$, где $u_k\colon E \to \mathbb{C}$, $E \subset \mathbb{R}^d$, равномерно сходится на $E$. Если все члены $u_k$ ряда непрерывны в точке $x^{(0)} \in E$ по множеству $E$, то сумма ряда $S = \sum u_k$ непрерывна в точке $x^{(0)}$ по множеству $E$.*

Доказательство. Достаточно применить теорему 1 к функциям $f_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$, $f = S$.

В следующих теоремах будем считать функции действительнозначными, а $E = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

**Теорема 2.** *Пусть функции $f_n$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ при всех $n \in \mathbb{N}$, и пусть $f_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$ при $n \to \infty$.*

*Тогда*

$$\int\limits_a^x f_n(t)\,dt \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \int\limits_a^x f(t)\,dt \text{ при } n \to \infty. \tag{3}$$

Доказательство. По теореме 1 функция $f$ непрерывна на $[a, b]$ и, следовательно, интегрируема на $[a, b]$. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда в силу равномерной сходимости последовательности $\{f_n\}$ к функции $f$

$$\exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}\colon |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall\, x \in [a, b], \quad \forall\, n \geqslant n(\varepsilon).$$

Следовательно, для всех $n \geqslant n(\varepsilon)$

$$\sup_{a \leqslant x \leqslant b} \left| \int\limits_a^x f_n(t)\,dt - \int\limits_a^x f(t)\,dt \right| \leqslant \int\limits_a^b |f_n(t) - f(t)|\,dt < \varepsilon(b - a),$$

откуда и следует утверждение теоремы.

**Следствие.** *В условиях теоремы*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^x f_n(t)\,dt = \int\limits_a^x \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt \quad \forall\, x \in [a, b]. \tag{4}$$

В связи с этим равенством теорему 2 называют *теоремой о переходе к пределу под знаком интеграла.*

**Упражнение 1.** Доказать следующее обобщение теоремы 2.

Пусть функции $f_n$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$ при всех $n\in\mathbb{N}$, и пусть $f_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$ при $n\to\infty$. Тогда функция $f$ интегрируема на $[a,b]$ и выполняются соотношения (3), (4).

**Теорема 2′** (о почленном интегрировании ряда). *Пусть функции $u_k$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ при каждом $k\in\mathbb{N}$, и пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ равномерно сходится на $[a,b]$. Тогда и ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^x u_k(t)\,dt$$

*равномерно сходится на $[a,b]$, причём*

$$\int_a^x \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty}\int_a^x u_k(t)\,dt \quad \forall\, x\in[a,b].$$

Доказательство. Положим $f_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$, $f(x)= \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$; применим теорему 2 и следствие из неё.

**Теорема 3.** *Пусть последовательность $\{f_n\}$ непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций сходится в точке $c\in[a,b]$, а последовательность их производных $\{f_n'\}$ равномерно сходится на $[a,b]$ к некоторой функции $\varphi$.*

*Тогда последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится на $[a,b]$ к некоторой непрерывно дифференцируемой на $[a,b]$ функции $f$ и $f'=\varphi$, так что $(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'$ на $[a,b]$.*

Доказательство. По теореме 1 функция $\varphi$ непрерывна на $[a,b]$. В силу формулы Ньютона–Лейбница и теоремы 2 получаем, что

$$f_n(x)-f_n(c)=\int_c^x f_n'(t)\,dt \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \int_c^x \varphi(t)\,dt \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Числовую сходящуюся последовательность $\{f_n(c)\}$ можно считать, очевидно, функциональной последовательностью, равномерно сходящейся на $[a,b]$. Тогда последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится на $[a,b]$ (см. упражнение 16.1.1) к некоторой функции $f$.

Переходя в левой части последней формулы к пределу при $n \to \infty$, получаем, что

$$f(x) - f(c) = \int\limits_c^x \varphi(t)\,dt \quad \forall\, x \in [a, b].$$

Правая часть этого равенства (как интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции) является дифференцируемой на отрезке $[a, b]$ функцией. Следовательно, таковой является и левая часть, а значит, и функция $f$. Дифференцируя равенство почленно, получаем, что $f'(x) = \varphi(x)\ \forall\, x \in [a, b]$.

Теорема доказана.

**Теорема 3′** (о почленном дифференцировании ряда). *Пусть ряд $\sum u_k$ непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций сходится в точке $c \in [a, b]$, а ряд $\sum u_k'$ равномерно сходится на $[a, b]$.*

*Тогда ряд $\sum u_k$ равномерно сходится на $[a, b]$, его сумма непрерывно дифференцируема на $[a, b]$ и*

$$\left(\sum u_k\right)' = \sum u_k' \quad \textit{на} \quad [a, b].$$

Доказательство. Положим $f_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ и применим теорему 3.

Глава 17

# СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

В этой главе мы будем рассматривать функции $f(z) = f(x + iy)$ комплексного переменного $z = x + iy$. На эти функции переносятся понятия непрерывности в точке и на множестве, сходимости в точке и равномерной сходимости функциональной последовательности и функционального ряда на множестве. Следует лишь в определениях 16.1.1, 16.1.2, 16.3.1 $E \subset \mathbb{R}^d$ заменить на $E \subset \mathbb{C}$, а $x$, $x^{(0)} \in E$ — на $z$, $z_0 \in E$. При этом сохраняются, очевидно, все теоремы § 16.1 и § 16.2 и теоремы 16.3.1, 16.3.1′.

## § 17.1. Свойства степенных рядов

**Определение 1.** Функциональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \tag{1}$$

где $a_n$ и $z_0$ — комплексные числа, а $z$ — комплексное переменное, называется *степенным рядом*.

**Определение 2.** *Радиусом сходимости* степенного ряда (1) называется

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}, \quad 0 \leqslant R \leqslant +\infty \tag{2}$$

(неотрицательное число или $+\infty$). *Кругом сходимости* ряда (1) называется круг

$$\{z \in \mathbb{C}\colon |z - z_0| < R\}. \tag{3}$$

Круг сходимости ряда является открытым множеством. При $R = +\infty$ он совпадает со всей комплексной плоскостью, а при $R = 0$ является пустым множеством.

Формула (2) называется *формулой Коши–Адамара*.

Вопросы сходимости рядов (1) достаточно изучить в случае $z_0 = 0$, т. е. для рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{4}$$

Напомним признак Коши сходимости числового ряда с неотрицательными членами.

**Признак Коши.** *Пусть* $\sum\limits_1^\infty b_n$ *— ряд с неотрицательными членами,* $q = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n}$. *Тогда:*

1° *при* $q < 1$ *ряд* $\sum\limits_1^\infty b_n$ *сходится;*

2° *при* $q > 1$ *ряд* $\sum\limits_1^\infty b_n$ *расходится, причём его общий член не стремится к нулю.*

Приме́ним признак Коши к изучению абсолютной сходимости ряда (4). Имеем

$$q = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|z|}{R},$$

где $R$ — радиус сходимости ряда (4). Сравнивая $q = |z|/R$ с единицей, получаем следующую теорему.

**Теорема 1.** *Пусть* $R$ *— радиус сходимости ряда* (4). *Тогда:*

1° *при* $|z| < R$ *ряд* (4) *сходится, причём абсолютно;*

2° *при* $|z| > R$ *ряд* (4) *расходится, причём его общий член* $a_n z^n$ *не стремится к нулю при* $n \to \infty$.

**Замечание 1.** При $|z| = R$, т. е. на границе круга сходимости, ряд (4) может как сходиться, так и расходиться.

**Замечание 2.** Теорема 1 даёт возможность находить радиус сходимости степенного ряда, не прибегая к формуле (2).

**Упражнение 1.** Доказать, что радиус сходимости (2) ряда (1) можно определить формулой

$$R = \sup\{r\colon r \geqslant 0, \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| r^n = 0\}.$$

**Пример 1.** Ряд $\sum\limits_1^\infty \dfrac{z^n}{n}$ с радиусом сходимости $R = 1$ расходится в точке $z = 1$ и сходится во всех остальных точках окружности $|z| = 1$. Его сходимость вытекает из сходимости рядов (15.4.6), (15.4.7), а в точке $z = -1$ устанавливается с помощью признака Лейбница (15.4.1).

**Пример 2.** Ряд $\sum\limits_1^\infty \dfrac{z^n}{n^2}$, $R = 1$, сходится в каждой точке границы круга сходимости.

**Пример 3.** Ряд $\sum\limits_1^\infty z^n$, $R = 1$, расходится в каждой точке границы круга сходимости.

**Теорема 2** (о равномерной сходимости степенного ряда). *Пусть* $R$ *— радиус сходимости степенного ряда* (4), $0 < r < R$. *Тогда на замкнутом круге* $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| \leqslant r\}$ *ряд* (4) *сходится равномерно.*

Доказательство. Имеем $|a_n z^n| \leqslant |a_n| r^n$ при $|z| \leqslant r$. Числовой ряд $\sum\limits_0^\infty |a_n| r^n$ сходится в силу теоремы 1. Следовательно, по признаку Вейерштрасса ряд (4) сходится равномерно на круге $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| \leqslant r\}$.

**Замечание 3.** Степенной ряд на круге сходимости может как сходиться равномерно (пример 2), так и не сходиться равномерно (примеры 1, 3).

**Теорема 3.** *Сумма степенного ряда непрерывна на круге сходимости.*

Доказательство следует из теоремы о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда с непрерывными членами, применённой к ряду (4) на множестве $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| \leqslant r\}$, где $0 < r < R$, причём $r$ может быть взято сколь угодно близким к $R$.

**Теорема 4** (Абеля). *Пусть $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $|z_1| < |z_2|$. Тогда:*

$1^\circ$ *если ряд (4) сходится в точке $z_2$ (или если его общий член в точке $z_2$ стремится к нулю), то он сходится абсолютно в точке $z_1$;*

$2^\circ$ *если ряд (4) расходится в точке $z_1$, то он расходится в точке $z_2$ и его общий член в точке $z_2$ не стремится к нулю;*

$3^\circ$ *если ряд (4) сходится в точке $z_2$ (или его общий член в точке $z_2$ стремится к нулю), то он равномерно сходится на замкнутом круге $\{z\colon |z| \leqslant r\}$ при любом $r$, $0 < r < |z_2|$.*

Доказательство. Пусть $R$ — радиус сходимости ряда (4).

$1^\circ$. $|z_2| \leqslant R$ в силу теоремы 1. Тогда $|z_1| < R$, и утверждение следует из теоремы 1.

$2^\circ$. $|z_1| \geqslant R$ в силу теоремы 1. Тогда $|z_2| > R$, и утверждение следует из теоремы 1.

$3^\circ$. $0 < r < |z_2| \leqslant R$ в силу теоремы 1, и утверждение следует из теоремы 2.

Изучим некоторые свойства вещественных степенных рядов, т. е. рядов вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \quad x_0,\ x,\ a_k \in \mathbb{R} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_0. \tag{5}$$

**Определение 3.** *Радиус сходимости* ряда (5) определяется формулой (2).

*Интервалом сходимости* этого ряда называется интервал $(x_0 - R, x_0 + R)$.

В качестве следствия из теорем 1, 2 получаем, что ряд (5) сходится абсолютно на интервале сходимости и расходится (и даже его общий член не стремится к нулю) вне замыкания интервала сходимости. Этот ряд сходится равномерно на любом отрезке из интервала сходимости.

**Лемма 1** (о сохранении радиуса сходимости при почленном дифференцировании степенного ряда). *Радиусы сходимости рядов* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ka_k(x-x_0)^{k-1}$ *совпадают.*

Доказательство. Пусть $R$ и $R'$ — радиусы сходимости указанных рядов соответственно. Очевидно, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ka_k(x-x_0)^k$ сходится там же, где и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ka_k(x-x_0)^{k-1}$, и, следовательно, имеет тот же радиус сходимости $R'$. В силу (2)

$$R' = \frac{1}{\varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|ka_k|}} = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} \cdot \varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{\varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = R.$$

**Теорема 5** (о почленном дифференцировании и интегрировании степенного ряда). *Пусть $R$ — радиус сходимости ряда*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k =: f(x), \quad |x-x_0| < R, \tag{6}$$

$a_k \in \mathbb{R} \ \ \forall\, k \in \mathbb{N}_0$, $R > 0$.

*Тогда при $|x-x_0| < R$:*

1° *$f$ имеет производные всех порядков, получаемые почленным дифференцированием ряда* (6)*;*

2° $\forall\, x \in (x_0 - R, x_0 + R)$

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(x-x_0)^{k+1}}{k+1}, \tag{7}$$

*так что по любому отрезку из интервала сходимости степенной ряд можно почленно интегрировать;*

3° *степенные ряды, полученные почленным дифференцированием или почленным интегрированием ряда* (6), *имеют тот же радиус сходимости $R$.*

Доказательство. Утверждение 3° содержится в лемме 1. Утверждения 1° и 2° в силу утверждения 3° и равномерной сходимости ряда (6) на любом отрезке из интервала сходимости (следствие из теоремы 2) вытекают из соответствующих свойств общих функциональных рядов.

## § 17.2. Аналитические функции

**Определение 1.** Говорят, что на данном множестве *функция представима рядом* (*разложена в ряд*), если на этом множестве она равна сумме этого ряда.

**Определение 2.** Функция $f$ называется *аналитической в точке* $z_0 \in \mathbb{C}$, если при некотором $\rho > 0$ функция $f$ представима рядом

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad z \in \mathbb{C}, \quad |z - z_0| < \rho. \tag{1}$$

Множество всех аналитических в точке $z_0$ функций обозначим через $A(z_0)$.

**Определение 3.** Функция $f$ называется *вещественной аналитической в точке* $x_0 \in \mathbb{R}$, если при некотором $\rho > 0$ функция $f$ представима рядом

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \quad x \in \mathbb{R}, \quad |x - x_0| < \rho \tag{2}$$

с вещественными коэффициентами $a_k$ $\forall\, k \in \mathbb{N}_0$.

Множество всех таких функций обозначим через $RA(x_0)$ ($R$ — от англ. слова Real — действительный (вещественный)).

**Определение 4.** Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, и пусть задана комплекснозначная функция

$$f(x) = g(x) + ih(x), \quad x \in U(x_0), \quad g, h \colon U(x_0) \to \mathbb{R}.$$

Тогда *$k$-я производная от комплекснозначной функции* определяется формулой

$$f^{(k)}(x_0) := g^{(k)}(x_0) + ih^{(k)}(x_0), \quad k \in \mathbb{N},$$

если производные $g^{(k)}(x_0)$, $h^{(k)}(x_0)$ существуют.

**Теорема 1** (единственности для $RA(x_0)$). *Пусть $f \in RA(x_0)$. Тогда представление функции $f$ в виде* (2) *единственно. Более того,*

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_0. \tag{3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 17.1.1 и теоремы о почленном дифференцировании функционального ряда производную $f^{(k)}(x_0)$ можно найти с помощью почленного дифференцирования ряда (2), что даёт равенство

$$f^{(k)}(x_0) = k!a_k.$$

Ряд (2) с коэффициентами вида (3) называется *рядом Тейлора* функции $f$. Теорема 1 устанавливает, что если функция $f \in RA(x_0)$ представима степенным рядом, т. е. разложена в степенной ряд (2), то этот ряд с необходимостью является её рядом Тейлора.

**Теорема 2** (единственности для $A(z_0)$). *Пусть $f \in A(z_0)$. Тогда представление функции $f$ в виде* (1) *единственно.*

Доказательство. Теорема 2 является следствием теоремы 1. Покажем, что коэффициенты разложения (1) однозначно определяются функцией $f$.

Пусть для $f$ имеется представление (1), в котором $z_0 = x_0 + iy_0$, $z = x + iy$. Рассмотрим (1) при $y = y_0$. Тогда

$$f(x+iy_0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k, \quad |x-x_0| < \rho. \tag{4}$$

Пусть $f(x+iy_0) = g(x) + ih(x)$, $a_k = b_k + ic_k$, где функции $g$, $h$ действительнозначны, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Разделяя действительную и мнимую части в равенстве (4), получаем, что при $|x-x_0| < \rho$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k, \quad h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k. \tag{5}$$

При этом учтено, что радиусы сходимости рядов (5) не меньше радиуса сходимости ряда (4), как это видно из формулы Коши–Адамара. В силу теоремы 1 коэффициенты $b_k$, $c_k$ однозначно определяются функциями $g$, $h$ соответственно. Следовательно, коэффициенты $a_k = b_k + ic_k$ однозначно определяются функцией $f$.

## § 17.3. Разложение функций в ряд Тейлора

Если функция $f\colon U(x_0) \to \mathbb{R}$ определена на некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$ и имеет в точке $x_0$ производные всех порядков (т. е. $f$ является бесконечно дифференцируемой в точке $x_0$ функцией), то степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \tag{1}$$

называется *рядом Тейлора функции $f$ в точке $x_0$.*

Будем изучать возможность представления функции $f\colon U(x_0) \to \mathbb{R}$ степенным рядом $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ на некоторой окрестности точки $x_0$. Из теоремы 17.2.1 следует, что это равносильно вопросу о представимости функции $f$ её рядом Тейлора (1) на некоторой окрестности точки $x_0$.

Бесконечная дифференцируемость функции $f$ в точке $x_0$ необходима для того, чтобы написать ряд Тейлора (1), но не достаточна для представимости функции $f$ этим рядом ни на какой окрестности точки $x_0$. Это можно подтвердить примером функции

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

При $x \neq 0$ функция $\varphi$ имеет производные всех порядков. Нетрудно убедиться, что каждая из этих производных имеет вид $P\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}$, где $P$ — некоторый многочлен, так что при любом $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi^{(n)}(x) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

Отсюда вытекает

$$\varphi^{(n)}(0) = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Покажем это сначала для $n = 1$. С помощью формулы конечных приращений Лагранжа получаем, что

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \varphi'(\theta x) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to 0, \quad \text{где} \quad 0 < \theta < 1,$$

так что $\varphi'(0) = 0$. Применяя метод математической индукции, получаем (2).

Итак, функция $\varphi$ бесконечно дифференцируема в точке $x_0 = 0$. Все коэффициенты её ряда Тейлора в точке 0, а значит, и его сумма, равны нулю. Следовательно, $\varphi(x)$ совпадает с суммой своего ряда Тейлора только при $x = 0$.

Пусть $\exists\, f^{(n)}(x_0)\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Запишем разложение функции $f$ по формуле Тейлора:

$$f(x) = S_n(x) + r_n(x), \tag{3}$$

где $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ — многочлен Тейлора, $r_n(x)$ — остаточный член формулы Тейлора. Заметим, что $S_n(x)$ является частичной суммой ряда Тейлора функции $f$. Поэтому для фиксированного $x$ эквивалентны соотношения

$$\left[f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right] \iff$$
$$\Leftrightarrow [S_n(x)\to f(x) \text{ при } n\to\infty] \Leftrightarrow [r_n(x)\to 0 \text{ при } n\to\infty].$$

Таким образом, для доказательства возможности разложения функции $f$ в степенной ряд (т. е. в ряд Тейлора) в данной точке $x$ достаточно показать, что $r_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$. Для этого нам понадобятся различные формы остаточного члена формулы Тейлора.

**Теорема 1.** *Пусть производная $f^{(n+1)}$ функции $f$ непрерывна на отрезке $[x_0,x]$ (или $[x,x_0]$). Тогда остаточный член формулы Тейлора* (3) *можно представить:*
*в интегральной форме*

$$r_n(x)=\frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt, \tag{4}$$

*в форме Лагранжа*

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad 0<\theta<1, \tag{5}$$

*и в форме Коши*

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}, \quad 0<\theta<1. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть, для определённости, $x>x_0$. Установим сначала (4), т. е. равенство

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt. \tag{7}$$

Приме́ним метод математической индукции. При $n=0$ формула (7) верна, так как совпадает с формулой Ньютона–Лейбница:

$$f(x)-f(x_0)=\int\limits_{x_0}^{x}f'(t)\,dt.$$

Предположим, что формула (7) верна при $n-1$ вместо $n$, т. е.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)\,dt. \tag{8}$$

Преобразуем интеграл в правой части (8) с помощью интегрирования по частям:

$$\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)\,dt=$$

$$=\left(-\frac{1}{n!}\,f^{(n)}(t)(x-t)^n\right)\Bigg|_{t=x_0}^{t=x}+\frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{n!}\,f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Подставляя это выражение в (8), приходим к (7).

Для доказательства (5) применим к интегралу (4) интегральную теорему о среднем (теорема 14.3.2), заметив, что множитель $(x-t)^n$ подынтегрального выражения не меняет знака. Тогда

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n dt=$$

$$=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Для доказательства (6) применим к интегралу (4) ту же интегральную теорему о среднем иначе, вынося за знак интеграла «среднее значение» всей подынтегральной функции. Тогда

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}[x-(x_0+\theta(x-x_0))]^n(x-x_0),$$

что совпадает с (6).

**Замечание 1.** Формула (5) уже была доказана раньше другим способом (теорема 6.2.2), причём при более общих предположениях относительно функции $f$. Достаточно было считать, что производная $f^{(n)}$ непрерывна на отрезке $[x_0,x]$ (или на $[x,x_0]$), а $f^{(n+1)}$ существует на интервале $(x_0,x)$ (или на $(x,x_0)$).

Перейдём к выводу разложений основных элементарных функций в ряд Тейлора (1), считая $x_0=0$ (в этом случае ряд

Тейлора называют также *рядом Маклорена*). Иначе говоря, для каждой рассматриваемой ниже функции $f$ выясним, на каком множестве $E \subset \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

**Пример 1.** $f(x) = e^x$. Покажем, что

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \quad \forall\, x \in (-\infty, +\infty). \tag{9}$$

Остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа имеет вид

$$r_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1},$$

так что для каждого фиксированного $x \in (-\infty, +\infty)$

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} e^{|x|} |x|^{n+1} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Отсюда следует (9). С помощью теоремы 17.1.1 из (9) находим радиус сходимости степенного ряда (9): $R = +\infty$.

**Пример 2.** $f(x) = \sin x$. Покажем, что

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \\ \forall\, x \in (-\infty, +\infty). \tag{10}$$

Остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа имеет вид

$$r_n(x) = \pm \frac{1}{(n+1)!} \left\{ \begin{matrix} \sin \theta x \\ \cos \theta x \end{matrix} \right\} x^{n+1},$$

так что для каждого фиксированного $x \in (-\infty, +\infty)$

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Отсюда следует (10). С помощью теоремы 17.1.1 из (10) находим радиус сходимости степенного ряда (10): $R = +\infty$.

**Пример 3.** $f(x) = \cos x$. Справедливость разложения

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \\ \forall\, x \in (-\infty, +\infty) \tag{11}$$

показывается так же, как это сделано для разложения (10). Из (11) следует, что радиус сходимости степенного ряда (11) $R = +\infty$.

**Пример 4.** $f(x) = \ln(1+x)$. Тогда при $k \in \mathbb{N}$ имеем:

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}, \qquad \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Покажем, что

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \quad \forall\, x \in (-1, +1]. \tag{12}$$

Пусть сначала $0 \leqslant x \leqslant 1$. Тогда остаточный член в форме Лагранжа имеет вид

$$r_n(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, \ |r_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Следовательно, $r_n \underset{[0,1]}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$.

Пусть теперь $-1 < x < 0$. Остаточный член в форме Коши имеет вид

$$r_n(x) = (-1)^n \frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} x^{n+1}, \qquad 0 < \theta < 1.$$

Заметив, что

$$0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} = \frac{1-\theta}{1-\theta|x|} < 1,$$

получаем

$$|r_n(x)| \leqslant \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \frac{1}{1+\theta x}|x|^{n+1} \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Этим установлено разложение (12). В точке $x = -1$ функция $\ln(1+x)$ не определена, а ряд (12) расходится. Из сходимости ряда (12) при $x \in (-1, +1]$ и расходимости его в точке $x = -1$ следует, что его радиус сходимости $R = 1$.

Из равномерной сходимости ряда (12) на отрезке $[0, 1]$ и из равномерной сходимости этого ряда на любом отрезке $[-1+\delta, 1-\delta]$, $\delta > 0$ (см. теорему 17.1.2), получаем, что ряд (12) сходится равномерно на любом отрезке $[a, 1] \subset (-1, 1]$.

**Пример 5.** $f(x) = (1+x)^\alpha$ при $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$ (так что функция $f$ не является многочленом).

Производная $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Покажем, что

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad \text{при} \quad |x| < 1. \qquad (13)$$

Заметим, что радиус сходимости ряда (13) $R = 1$, что легко установить, применяя признак Д'Аламбера для выяснения абсолютной сходимости этого ряда. Так что равенство (13) окажется справедливым на интервале сходимости ряда. При $x = 0$ разложение (13) очевидно.

Пусть $0 < |x| < 1$. Остаточный член формулы Тейлора в интегральной форме имеет вид

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt =$$
$$= \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!}\int_0^x (x-t)^n (1+t)^{\alpha-n-1} dt.$$

Отсюда

$$\frac{|r_{n+1}(x)|}{|r_n(x)|} = \frac{|\alpha-n-1|}{n+1} \frac{\left|\int_0^x |x-t|^n (1+t)^{\alpha-n-1} \frac{|x-t|}{1+t}\,dt\right|}{\left|\int_0^x |x-t|^n (1+t)^{\alpha-n-1} dt\right|}.$$

Заметим, что

$$\frac{|x-t|}{1+t} \leqslant \frac{|x|-|t|}{1-|t|} = |x| \frac{1-|t|/|x|}{1-|t|} \leqslant |x|.$$

Следовательно, при фиксированном $x$ и при достаточно малом $\varepsilon > 0$ существует такое $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что при $n \geqslant n(\varepsilon)$

$$\frac{|r_{n+1}(x)|}{|r_n(x)|} \leqslant \frac{|n+1-\alpha|}{n+1}|x| \leqslant (1+\varepsilon)|x| = q < 1.$$

Это означает, что $|r_n(x)|$ стремится к нулю при $n \to \infty$ не медленнее, чем член убывающей геометрической прогрессии. Таким образом, разложение (13) установлено.

Отметим важные частные случаи ($\alpha = -1$) формулы (13):

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad (|x| < 1).$$

**Пример 6.** Разложения

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \\ \operatorname{ch} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \end{aligned} \qquad x \in (-\infty, +\infty), \tag{14}$$

получены не вычислением коэффициентов ряда Тейлора, а почленным сложением двух сходящихся степенных рядов. Ряды в правых частях равенств являются рядами Тейлора соответственно для $\operatorname{sh} x$ и для $\operatorname{ch} x$ в силу теоремы единственности 17.2.1.

Подобные приёмы получения разложений функций в степенные ряды, основанные на использовании известных разложений (9)–(14), широко распространены. Среди таких приёмов отметим, в частности, почленные интегрирование и дифференцирование ряда. Так, например, из формулы суммы геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots, \quad |x| < 1,$$

с помощью почленного интегрирования при $|x| < 1$ получаем формулу (12):

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$$

Разложение функции $\arcsin x$ в степенной ряд можно получить почленным интегрированием разложения её производной $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$, задаваемого формулой (13) с заменой $x$ на $-x^2$.

## § 17.4. Функции $e^z$, $\sin z$, $\cos z$ комплексного переменного

**Определение 1.** Для $z \in \mathbb{C}$ положим:

$$e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots, \tag{1}$$

$$\sin z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots, \tag{2}$$

$$\cos z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots . \tag{3}$$

Функции $e^z$, $\sin z$, $\cos z$ определены равенствами (1), (2), (3) на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, поскольку ряды абсолютно сходятся для любого $z \in \mathbb{C}$, в чём можно убедиться с помощью признака Д'Аламбера. Следовательно, для каждого из рядов (1), (2), (3) радиус сходимости $R = +\infty$ (это вытекает также из сходимости на $(-\infty, +\infty)$ рядов (1), (2), (3) при $z = x + i0$, см. формулы (9), (10), (11)).

Функции $e^z$, $\sin z$, $\cos z$ при $z = x$ совпадают соответственно с $e^x$, $\sin x$, $\cos x$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Установим некоторые свойства введённых функций. Покажем, что

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2} \quad \forall\, z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}. \tag{4}$$

Поскольку абсолютно сходящиеся ряды можно перемножать почленно (теорема 15.3.3), а сумма полученного абсолютно сходящегося ряда не зависит от перестановки его членов (теорема 15.3.2), получаем, что

$$e^{z_1} e^{z_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^{n-k}}{(n-k)!} \frac{z_2^k}{k!} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} z_1^{n-k} z_2^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} = e^{z_1 + z_2}.$$

Из сравнения разложений в ряды следует, что

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{5}$$

откуда

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{6}$$

Формулы (5), (6) называются *формулами Эйлера.*

Из (6) при $z = 0 + iy$ видно, что в комплексной плоскости функции $\sin z$, $\cos z$ не являются ограниченными.

Из (6) и (4) легко получаются следующие обобщения известных тригонометрических формул:

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2, \quad z_1,\ z_2 \in \mathbb{C},$$
$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \quad z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}.$$

Из (4), (5) следует, что при $z = x + iy$

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \tag{7}$$

В частности, при $x = 0$

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y. \tag{8}$$

Отсюда, в частности, видно, что функция $e^z$ — периодическая с периодом $2\pi i$.

Всякое комплексное число $z = x + iy$ можно представить в виде (рис. 1)

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{9}$$

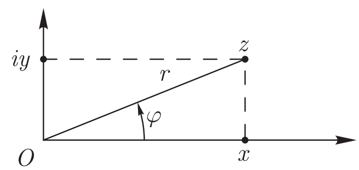



Рис. 1

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

— *модуль* $z$, а под $\varphi$ при $z \neq 0$ можно понимать отсчитываемый против часовой стрелки угол между положительным направлением действительной оси и радиус-вектором точки $z$ комплексной плоскости. При этом для $\varphi \in [0, 2\pi)$ вводится обозначение $\varphi =: \arg z$. В силу $2\pi$-периодичности функций $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ в равенстве (9) в качестве $\varphi$ можно взять $\varphi = \operatorname{Arg} z$, где

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$$

при произвольном фиксированном $k \in \mathbb{Z}$. При этом $\operatorname{Arg} z$ называется *аргументом* числа $z$, а $\arg z$ — *главным значением аргумента* числа $z$.

Формула (9) верна и при $z = 0$ с произвольным значением $\varphi$.

Формулу (9) называют *тригонометрической формой* комплексного числа $z$. С помощью (8) из неё можно получить *показательную форму* комплексного числа $z$:

$$z = re^{i\varphi}, \quad r = |z|, \quad \varphi = \operatorname{Arg} z. \tag{10}$$

Показательная и тригонометрическая формы комплексного числа удобны для нахождения произведения и частного двух комплексных чисел, возведения в степень комплексного числа и извлечения корня из комплексного числа.

Пусть $z_j = r_j e^{i\varphi_j} = r_j(\cos\varphi_j + i\sin\varphi_j)$, $j = 1, 2$. Тогда из (4), (8) следует, что

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)),$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)), \quad z_2 \neq 0.$$

При $z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $n \in \mathbb{N}$ из (4) следует *формула Муавра*

$$z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{11}$$

Получим формулу для извлечения корня степени $n \geqslant 2$ из комплексного числа $z$. Под $\sqrt[n]{z}$ понимают такое комплексное число $w$, что $w^n = z$. Если

$$z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$
$$w = \rho e^{i\psi} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi),$$

то $r = \rho^n$, $\varphi = n\psi$ согласно (11). Поэтому

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\varphi/n} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right).$$

Однако если $\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi = \varphi_0 + 2k\pi$, то значения

$$\cos\frac{\varphi}{n} = \cos\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right), \quad \sin\frac{\varphi}{n} = \sin\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)$$

различны при различных $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Поэтому для $z \neq 0$ существуют $n$ различных значений $\sqrt[n]{z}$. В комплексной плоскости $\mathbb{C}$ все эти значения располагаются на окружности радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в точке 0, деля эту окружность на равные дуги.

Глава 18

# МЕРА МНОЖЕСТВ В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbb{R}^n$

Как и в § 10.1, будем рассматривать метрическое пространство $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$, т. е. множество всевозможных упорядоченных наборов из $n$ действительных чисел $x = (x_1, \ldots, x_n)$, называемых точками (с координатами $x_1$, …, $x_n$), в котором введено расстояние

$$|x - y| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

между точками $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

## § 18.1. Определение меры по Жордану

Введём и изучим понятие меры в $\mathbb{R}^n$, обобщающее понятия длины $(n = 1)$, площади $(n = 2)$, объёма $(n = 3)$. Изложим теорию меры множеств, предложенную Жорданом.

Изо всех подмножеств в $\mathbb{R}^n$ будет выделена совокупность измеримых множеств, каждому из которых будет приписана мера. При этом будут выполняться свойства, сформулированные в теоремах 18.2.2, 18.2.3.

**Определение 1.** Множество $P$, удовлетворяющее соотношению

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i) \subset P \subset \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i \leqslant b_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, будем называть *блоком*.

В случае $n = 1$ блок $P$ представляет собой интервал, полуинтервал, отрезок, точку или пустое множество. В случае $n = 2$, $a_i < b_i$ $(i = 1, 2)$, блок $P$ — прямоугольник, содержащий произвольное множество своих граничных точек.

Меру пустого множества положим равной нулю $(\mu\varnothing = 0)$.

Меру каждого из непустых блоков (1) определим равенством

$$\mu P := \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i). \tag{2}$$

Таким образом, каждому блоку $P$ вида (1) поставлено в соответствие число — его мера $\mu P$; при этом выполняются следующие условия:

1° (неотрицательность меры) $\mu P \geqslant 0$;

2° (аддитивность меры) если $P = \bigcup\limits_{k=1}^{m} P_k$ ($P, P_k$ — блоки) и $P_i \cap P_k = \varnothing$ при $i \neq k$, то

$$\mu P = \sum_{k=1}^{m} \mu P_k.$$

**Определение 2.** Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ назовём *блочным*, если оно представимо в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся блоков.

Отметим, что множества такого типа часто называют *элементарными*.

**Лемма 1.** *Совокупность блочных множеств замкнута относительно операций объединения, пересечения и разности, т. е. объединение, пересечение и разность двух блочных множеств также являются блочными множествами.*

Доказательство. Ясно, что пересечение двух блоков является блоком. Поэтому пересечение двух блочных множеств является блочным множеством.

Разность двух блоков является, как легко проверить, блочным множеством. Отсюда следует, что разность двух блочных множеств также является блочным множеством.

Если $A$, $B$ — блочные множества, то их объединение можно представить в виде

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup B,$$

т. е. в виде объединения двух непересекающихся блочных множеств. Отсюда следует, что $A \cup B$ — блочное множество.

Определим теперь меру $\mu A$ блочного множества

$$A = \bigcup_{k=1}^{m} P_k, \quad P_i \cap P_k = \varnothing \quad \text{при} \quad i \neq k$$

(где $P_k$ — блоки) равенством

$$\mu A := \sum_{k=1}^{m} \mu P_k.$$

Покажем, что это определение корректно, т. е. что мера $\mu A$ не зависит от способа представления $A$ в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся блоков. Пусть

$$A = \bigcup_k P_k = \bigcup_j Q_j,$$

$$P_i \cap P_k = \varnothing \text{ при } i \neq k, \quad Q_j \cap Q_l = \varnothing \text{ при } j \neq l,$$

где $P_k$ и $Q_j$ — блоки. Так как пересечение двух блоков является блоком, то в силу аддитивности меры для блоков

$$\sum_k \mu P_k = \sum_{k,j} \mu(P_k \cap Q_j) = \sum_j \mu Q_j.$$

В частности, если блок $P$ из (1) представить в виде объединения $P = \bigcup\limits_{k=1}^{m} P_k$ попарно непересекающихся блоков, то его мера как блочного множества совпадёт с (2).

**Упражнение 1.** Пусть $A$ — блочное множество. Доказать, что множества $\operatorname{int} A$ и $\overline{A}$ являются блочными множествами и что

$$\mu(\operatorname{int} A) = \mu\overline{A} = \mu A.$$

**Лемма 2.** *Пусть $A$, $B$ — блочные множества. Тогда:*
1° *(неотрицательность и монотонность меры)*

$$0 \leqslant \mu A \leqslant \mu B, \quad \text{если } A \subset B; \tag{3}$$

2° *(полуаддитивность меры)*

$$\mu(A \cup B) \leqslant \mu A + \mu B; \tag{4}$$

3° *(аддитивность меры)*

$$\mu(A \cup B) = \mu A + \mu B, \quad \text{если} \quad A \cap B = \varnothing. \tag{5}$$

$$\mu(A \setminus B) = \mu A - \mu B, \quad \text{если} \quad B \subset A. \tag{6}$$

Доказательство. (3) очевидно. Установим (5). Множество $A \cup B$ блочное в силу леммы 1. Если

$$A = \bigcup_{k=1}^{m} P_k, \quad B = \bigcup_{j=1}^{r} Q_j, \quad P_k,\ Q_j \text{ — блоки},$$

$$P_i \cap P_k = \varnothing \text{ при } i \neq k, \quad Q_i \cap Q_k = \varnothing \text{ при } i \neq k,$$

то

$$A \cup B = \left(\bigcup_{k=1}^{m} P_k\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{r} Q_j\right),$$

причём $P_k \cap Q_j = \varnothing\ \forall\, k, j$.

Тогда по определению меры блочного множества имеем:

$$\mu(A \cup B) = \sum_{k=1}^{m} \mu P_k + \sum_{j=1}^{r} \mu Q_j,$$

$$\mu A = \sum_{k=1}^{m} \mu P_k, \quad \mu B = \sum_{j=1}^{r} \mu Q_j,$$

откуда следует (5). Из (5) и (3) следует (4):

$$\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus (A \cap B)) + \mu B \leqslant \mu A + \mu B.$$

Из (5) следует (6).

**Определение 3.** Пусть множество $E \subset \mathbb{R}^n$ ограничено. Числа

$$\mu_* E = \sup_{A \subset E} \mu A, \quad \mu^* E = \inf_{B \supset E} \mu B,$$

где верхняя и нижняя грани берутся по всем блочным множествам $A$, $B$ ($A \subset E$, $B \supset E$), называются соответственно *нижней* (или *внутренней*) и *верхней* (или *внешней*) *мерами Жордана* множества $E$.

**Определение 4.** Ограниченное множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *измеримым по Жордану*, если $\mu_* E = \mu^* E$, т. е. если его нижняя и верхняя меры совпадают. Их общее значение называется *мерой Жордана* множества $E$ и обозначается $\mu E$.

Таким образом, для измеримого по Жордану множества $E$

$$\mu_* E = \mu^* E = \mu E.$$

**Замечание 1.** Множество, измеримое по Жордану, в случае $n = 2$ называют также *квадрируемым*, а в случае $n = 3$ — *кубируемым*.

Очевидно, что любое блочное множество измеримо по Жордану и его мера Жордана совпадает с мерой этого множества как блочного.

**Замечание 2.** В дальнейшем вместо «измеримость по Жордану», «мера Жордана» будем говорить соответственно «измеримость», «мера», поскольку другие подходы к понятиям измеримости и меры в данном курсе не изучаются.

**Упражнение 2.** Пусть $E$ — измеримое множество. Показать, что $\mu E > 0$ тогда и только тогда, когда $E$ имеет внутренние точки.

**Пример 1.** Всякое подмножество множества меры 0 измеримо и имеет меру, равную 0.

**Пример 2.** Множество в $\mathbb{R}$, состоящее из конечного числа точек, измеримо, и его мера равна 0.

**Пример 3.** Множество $E \subset \mathbb{R}$ рациональных точек отрезка $[0, 1]$ неизмеримо, так как $\mu_* E = 0$, $\mu^* E = 1$.

**Пример 4.** Множество точек $E \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$, где $E$ то же, что и в примере 3, измеримо, и его двумерная мера равна нулю.

**Пример 5** ограниченной неизмеримой области. Пусть $\{r_j\}_1^\infty$ — каким-либо образом занумерованная последовательность рациональных точек интервала $(0, 1)$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$,

$$D = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left( r_j - \frac{\varepsilon}{2^j}, r_j + \frac{\varepsilon}{2^j} \right) \subset \mathbb{R}^1,$$

$$G = (D \times [0, 1)) \cup ((0, 1) \times (-1, 0)) \subset \mathbb{R}^2.$$

Очевидно, что $G$ является областью. Покажем, что $G$ не измерима по Жордану. Достаточно установить неизмеримость множества $G^+ = D \times (0, 1)$. Она следует из того, что

$$\mu^* G^+ = 1, \quad \mu_* G^+ \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{2^j} = 2\varepsilon < 1.$$

При оценке сверху $\mu_* G^+$ заметим, что $\mu_* E = \sup\limits_{A=\overline{A}\subset E} \mu A$ (где верхняя грань берётся по всем замкнутым блочным множествам $A = \overline{A} \subset E$), и воспользуемся леммой 10.2.4 Гейне–Бореля.

**Упражнение 3.** Доказать, что для измеримости множества $E \subset \mathbb{R}^n$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовали два таких измеримых множества $F_\varepsilon$, $G_\varepsilon$, что $F_\varepsilon \subset E \subset G_\varepsilon$, $\mu(G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$.

## § 18.2. Свойства множеств, измеримых по Жордану

**Упражнение 1.** Доказать, что если множества $E, F \subset \mathbb{R}^n$ измеримы, то:

1° измеримы множества $E \cup F$, $E \cap F$ и

$$\mu(E \cup F) + \mu(E \cap F) = \mu E + \mu F;$$

2° измеримо множество $E \setminus F$ и если $F \subset E$, то

$$\mu(E \setminus F) = \mu E - \mu F.$$

Указание. Сначала получить эти равенства для блочных множеств. Затем оценить снизу нижние и сверху верхние меры множеств из левых частей равенств через сумму (разность) мер блочных множеств, аппроксимирующих $E$ и $F$.

**Лемма 1.** *Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $x^{(0)} \in E$, $y^{(0)} \notin E$.*

*Тогда на отрезке, соединяющем точки $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$, найдётся точка $z^{(0)} \in \partial E$.*

Доказательство будем проводить последовательным делением пополам отрезка с концами в точках $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$, отбирая на каждом шаге тот отрезок, для которого один конец принадлежит $E$, а другой не принадлежит $E$. Пусть $z^{(0)}$ — общая точка для всех отрезков построенной стягивающейся системы вложенных отрезков. Тогда всякая окрестность $U(z^{(0)})$ содержит как точки из $E$, так и точки не из $E$. Следовательно, $z^{(0)} \in \partial E$.

**Лемма 2.** *Пусть ограниченное множество $E \subset \mathbb{R}^n$, блочное множество $D \subset \mathbb{R}^n$, $\partial E \subset D$.*

*Тогда $E \cup D$ — блочное множество.*

Доказательство. Пусть блок $Q \supset E \cup D$. Тогда: $Q \setminus D$ — блочное множество и

$$Q \setminus D = \left(\bigcup_{k=1}^{l} P_k\right) \bigcup \left(\bigcup_{k=l+1}^{m} P_k\right),$$

где $P_k$ $(k = 1, \ldots, m)$ — попарно непересекающиеся блоки;

$$E \cap P_k \neq \varnothing \quad \text{при} \quad 1 \leqslant k \leqslant l,$$

$$E \cap P_k = \varnothing \quad \text{при} \quad l+1 \leqslant k \leqslant m.$$

На самом деле $P_k \subset E$ при $1 \leqslant k \leqslant l$ в силу леммы 1.

Пусть $P := \bigcup\limits_{k=1}^{l} P_k$. Из $P \subset E \subset P \cup D$ следует

$$E \cup D = P \cup D,$$

а значит, и утверждение леммы.

**Теорема 1** (критерий измеримости ограниченного множества). *Для измеримости ограниченного множества $E \subset \mathbb{R}^n$ необходимо и достаточно, чтобы мера его границы была равна нулю: $\mu \partial E = 0$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть множество $E$ измеримо. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют блочные множества $A_\varepsilon$, $B_\varepsilon$ такие, что

$$A_\varepsilon \subset E \subset B_\varepsilon, \quad \mu B_\varepsilon - \mu A_\varepsilon < \varepsilon.$$

При этом множество $A_\varepsilon$ можно считать открытым, а множество $B_\varepsilon$ — замкнутым (см. упражнение 18.1.1).

Тогда $\partial E \subset B_\varepsilon \setminus A_\varepsilon$. В силу определения верхней меры и равенства (18.1.6)

$$\mu^*\partial E \leqslant \mu(B_\varepsilon \setminus A_\varepsilon) = \mu B_\varepsilon - \mu A_\varepsilon < \varepsilon.$$

Поэтому $\mu^*\partial E = 0$. Следовательно, множество $\partial E$ измеримо и $\mu\partial E = 0$.

*Достаточность*. Пусть множество $E$ ограничено и $\mu\partial E = 0$. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда существует блочное множество $D_\varepsilon$ такое, что $\partial E \subset D_\varepsilon$, $\mu D_\varepsilon < \varepsilon$. Построим множества

$$B_\varepsilon = E \cup D_\varepsilon, \quad A_\varepsilon = B_\varepsilon \setminus D_\varepsilon.$$

Эти множества блочные в силу лемм 2 и 18.1.1. Кроме того,

$$A_\varepsilon \subset E \subset B_\varepsilon,$$
$$\mu A_\varepsilon \leqslant \mu_* E \leqslant \mu^* E \leqslant \mu B_\varepsilon = \mu A_\varepsilon + \mu D_\varepsilon < \mu A_\varepsilon + \varepsilon.$$

Отсюда

$$0 \leqslant \mu^* E - \mu_* E < \varepsilon.$$

Следовательно, в силу произвольности $\varepsilon$ имеем $\mu_* E = \mu^* E$, т. е. множество $E$ измеримо.

**Теорема 2.** *Совокупность измеримых множеств замкнута относительно операций объединения, пересечения и разности, т. е. если множества $E$, $F$ измеримы, то измеримы и $E \cup F$, $E \cap F$, $E \setminus F$.*

Доказательство. Легко проверить, что

$$\partial(E \cup F) \subset \partial E \cup \partial F, \quad \partial(E \cap F) \subset \partial E \cup \partial F,$$
$$\partial(E \setminus F) \subset \partial E \cup \partial F.$$

Сделаем это лишь в первом случае. Пусть $x^{(0)} \in \partial(E \cup F)$. Тогда в каждой окрестности $U(x^{(0)})$ находятся как точки из $E \cup F$, так и не из $E \cup F$. Следовательно, в каждой окрестности $U(x^{(0)})$ имеются либо точки из $E$ (и тогда $x^{(0)} \in \partial E$), либо точки из $F$ (и тогда $x^{(0)} \in \partial F$). Поэтому $x^{(0)} \in \partial E \cup \partial F$, а значит, $\partial(E \cup F) \subset \partial E \cup \partial F$.

В силу критерия измеримости (теорема 1) $\mu\partial E = 0$, $\mu\partial F = 0$. Пусть $\varepsilon > 0$, и пусть $B_1$, $B_2$ — такие блочные множества, что $\partial E \subset B_1$, $\mu B_1 < \varepsilon$, $\partial F \subset B_2$, $\mu B_2 < \varepsilon$. Тогда $\partial(E \cup F) \subset \partial E \cup \cup \partial F \subset B_1 \cup B_2$. В силу леммы 18.1.2

$$\mu^*\partial(E \cup F) \leqslant \mu(B_1 \cup B_2) \leqslant \mu B_1 + \mu B_2 < 2\varepsilon.$$

Следовательно, $\mu\partial(E \cup F) = 0$, и в силу критерия измеримости объединение $E \cup F$ измеримо.

Аналогично устанавливается измеримость множеств $E \cap F$ и $E \setminus F$.

**Теорема 3.** *Пусть множества $E, F \subset \mathbb{R}^n$ измеримы. Тогда:*

1° *(неотрицательность и монотонность меры)*

$$0 \leqslant \mu E \leqslant \mu F, \text{ если } E \subset F; \tag{1}$$

2° *(полуаддитивность меры)*

$$\mu(E \cup F) \leqslant \mu E + \mu F; \tag{2}$$

3° *(аддитивность меры)*

$$\mu(E \cup F) = \mu E + \mu F, \text{ если } E \cap F = \varnothing. \tag{3}$$

Доказательство. Измеримость $E \cup F$ установлена в теореме 2, свойство (1) следует из леммы 18.1.2.

Установим (2). Пусть $B_1$, $B_2$ — блочные множества, $E \subset B_1$, $F \subset B_2$. Тогда

$$\mu(E \cup F) \leqslant \mu(B_1 \cup B_2) \leqslant \mu B_1 + \mu B_2.$$

Остаётся перейти к нижним граням по $B_1 \supset E$, $B_2 \supset F$.

Установим (3). Пусть $A_1$, $A_2$ — блочные множества, $A_1 \subset E$, $A_2 \subset F$. Тогда

$$A_1 \cap A_2 = \varnothing, \quad A_1 \cup A_2 \subset E \cup F.$$

В силу (18.1.5), (1), (2)

$$\mu A_1 + \mu A_2 = \mu(A_1 \cup A_2) \leqslant \mu(E \cup F) \leqslant \mu E + \mu F.$$

Переходя к верхним граням по $A_1 \subset E$, $A_2 \subset F$, получаем отсюда

$$\mu E + \mu F \leqslant \mu(E \cup F) \leqslant \mu E + \mu F,$$

откуда и следует (3).

**Теорема 4.** *Пусть множество $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо. Тогда измеримы его замыкание $\overline{E}$ и внутренность $\operatorname{int} E$, причём $\mu\overline{E} = \mu(\operatorname{int} E) = \mu E$.*

Доказательство. Из измеримости $E$ в силу критерия измеримости следует, что $\mu\partial E = 0$. Поскольку

$$\overline{E} = E \cup \partial E, \quad \operatorname{int} E = E \setminus \partial E,$$

то остаётся воспользоваться теоремами 2 и 3.

Для ряда важных применений критерия измеримости установим, что некоторые множества простого вида имеют меру 0.

**Теорема 5.** *График непрерывной на компакте функции имеет меру* 0.

Доказательство. Пусть $f\colon F \to \mathbb{R}$, где компакт $F \subset \subset \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $(x, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$. Тогда

$$E = \{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in F, \quad x_{n+1} = f(x)\}$$

— график функции $f$. Покажем, что $(n+1)$-мерная мера $\mu_{n+1}E$ множества $E$ равна нулю. Функция $f$ как непрерывная на компакте равномерно непрерывна на нём. Следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta_\varepsilon > 0\colon |f(x) - f(y)| < \varepsilon \qquad \text{при } x, y \in E,\ |x - y| < \delta.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$, и пусть $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ взято из последнего условия. Пусть блок $\widetilde{P} \subset \mathbb{R}^n$, $\widetilde{P} \supset F$. Разобьём его на попарно непересекающиеся блоки, диаметры которых меньше $\delta$, и обозначим через $P_1, \ldots, P_m$ те из них, которые пересекаются с $F$. В каждом $P_j$ возьмём какую-либо точку $x^{(j)} \in P_j$ и построим блок

$$Q_j := P_j \times [f(x^{(j)}) - \varepsilon, f(x^{(j)}) + \varepsilon] \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Очевидно, график сужения функции $f$ на $F \cap P_j$ содержится в $Q_j$. Следовательно, $E \subset \bigcup\limits_{j=1}^{m} Q_j$, и в силу монотонности верхней меры

$$\mu_{n+1}^* E \leqslant \sum_{j=1}^{m} 2\varepsilon \mu P_j \leqslant 2\varepsilon \mu \widetilde{P}.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем $\mu_{n+1}^* E = 0$, так что $\mu_{n+1}E = 0$.

**Теорема 6.** *Пусть $F \subset \mathbb{R}^n$, $\mu F = 0$. Тогда прямой цилиндр $E = F \times [a, b] \subset \mathbb{R}^{n+1}$ измерим и его мера $\mu_{n+1}E = 0$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, и пусть $B_\varepsilon$ — такое блочное множество в $\mathbb{R}^n$, что

$$F \subset B_\varepsilon, \quad \mu B_\varepsilon < \varepsilon.$$

Тогда $B_\varepsilon \times [a, b]$ — блочное множество в $\mathbb{R}^{n+1}$,

$$E \subset B_\varepsilon \times [a, b],$$
$$\mu_{n+1}^* E \leqslant \mu_{n+1}(B_\varepsilon \times [a, b]) < \varepsilon(b - a).$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем $\mu_{n+1}^* E = 0$, так что $\mu_{n+1}E = 0$.

**Пример 1.** Криволинейная трапеция

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b, \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)\},$$

где $f$ — непрерывная на $[a, b]$ функция, $f \geqslant 0$ на $[a, b]$, является измеримым (квадрируемым) множеством в силу теоремы 5.

**Лемма 3.** *Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $\mu E = 0$, и пусть*

$$U_\delta(E) := \{x \in \mathbb{R}^n : \inf_{y \in E} |x - y| < \delta\}$$

*— $\delta$-окрестность множества $E$ ($\delta > 0$).*

*Тогда $\mu^* U_\delta(E) \to 0$ при $\delta \to 0$.*

Доказательство. Пусть $\mu E = 0$, $\varepsilon > 0$, и пусть $B_\varepsilon = \bigcup\limits_{k=1}^{m} P_k$ — такое блочное множество, что

$$E \subset B_\varepsilon, \quad \mu B_\varepsilon < \varepsilon.$$

Для каждого блока $P_k$ обозначим через $\widetilde{P}_k$ блок, получающийся из $P_k$ преобразованием подобия с центром в центре блока $P_k$ и с коэффициентом подобия 2. Тогда $\mu \widetilde{P}_k = 2^n \mu P_k$, $\mu \widetilde{B}_\varepsilon < 2^n \varepsilon$, где $\widetilde{B}_\varepsilon := \bigcup\limits_{k=1}^{m} \widetilde{P}_k$. Ясно, что

$$\exists\, \delta(B_\varepsilon) > 0 \colon U_\delta(E) \subset \widetilde{B}_\varepsilon \quad \forall\, \delta \in (0, \delta(B_\varepsilon)),$$

так что $\mu^* U_\delta(E) \leqslant \mu \widetilde{B}_\varepsilon < 2^n \varepsilon$, откуда и следует утверждение леммы.

Глава 19

# КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

## § 19.1. Определение кратного интеграла и критерий интегрируемости функции

**Определение 1.** Пусть множество $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо (по Жордану). Конечная система $\tau = \{E_i\}_1^{i_\tau}$ непустых измеримых множеств $E_i$ называется *разбиением множества* $E$, если:

1° $\mu(E_i \cap E_j) = 0$ при $i \neq j$;

2° $\bigcup\limits_{i=1}^{i_\tau} E_i = E$.

Число $|\tau| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant i_\tau} \operatorname{diam}(E_i)$ называется *мелкостью разбиения* $\tau$.

Для всякого разбиения $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i_\tau}$

$$\mu E = \sum_{i=1}^{i_\tau} \mu E_i.$$

В самом деле, $\mu E \leqslant \sum\limits_{i=1}^{i_\tau} \mu E_i$, а с другой стороны,

$$\mu E \geqslant \mu \bigcup_{i=1}^{i_\tau} (\operatorname{int} E_i) = \sum_{i=1}^{i_\tau} \mu(\operatorname{int} E_i) = \sum_{i=1}^{i_\tau} \mu E_i.$$

**Определение 2.** Пусть $\tau$ и $\tau'$ — два разбиения множества $E \subset \mathbb{R}^n$. Будем говорить, что $\tau'$ *следует* за $\tau$, или является *измельчением* разбиения $\tau$, и писать $\tau' \succ \tau$, если для любого $E'_j \in \tau'$ существует $E_i \in \tau$: $E'_j \subset E_i$.

Разбиения данного множества $E$ обладают следующими свойствами:

1° если $\tau_1 \succ \tau_2$, $\tau_2 \succ \tau_3$, то $\tau_1 \succ \tau_3$;

2° для любых $\tau_1$, $\tau_2$ существует такое $\tau$, что $\tau \succ \tau_1$, $\tau \succ \tau_2$.

Первое свойство очевидно. Для доказательства второго достаточно в качестве разбиения $\tau$ взять множество всевозможных непустых пересечений $E_i^{(1)} \cap E_j^{(2)}$, где $E_i^{(1)} \in \tau_1$, $E_j^{(2)} \in \tau_2$.

**Определение 3.** Пусть на измеримом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ определена (числовая) функция $f$, и пусть $\tau = \{E_i\}_1^{i_\tau}$ — разбиение $E$. Отметим в каждом множестве $E_i$ какую-либо точку $\xi^{(i)} \in E_i$. Тогда сумма

$$S_\tau(f;\xi^{(1)},\ldots,\xi^{(i_\tau)}) := \sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi^{(i)})\mu E_i$$

называется *интегральной суммой Римана* функции $f$.

**Определение 4.** *Интегралом Римана* функции $f$ по измеримому множеству $E \subset \mathbb{R}^n$ называется такое число $I$, для которого

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon \left|\sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi^{(i)})\mu E_i - I\right| < \varepsilon$$

при любом разбиении $\tau$ множества $E$ с мелкостью $|\tau| < \delta$ и при любом выборе отмеченных точек $\xi^{(i)}$, $i = 1, \ldots, i_\tau$.

При этом функцию $f$ называют *интегрируемой по Риману* на множестве $E$.

Интеграл от функции $f$ по множеству $E$ обозначается символами

$$\int\limits_E f(x)\,dx, \quad \int\!\!\int\limits_E\!\ldots\!\int f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n.$$

Кратко можно записать

$$\int\limits_E f(x)\,dx := \lim_{|\tau|\to 0} S_\tau(f;\xi_1^{(1)},\ldots,\xi^{(i_\tau)}),$$

вкладывая в понятие предела тот смысл, который в определении 4 выражен в $(\varepsilon,\delta)$-терминах.

Интеграл $\int_E f(x)\,dx$ называется *кратным интегралом* при $n \geqslant 2$ (*двойным интегралом* при $n = 2$, *тройным интегралом* при $n = 3$).

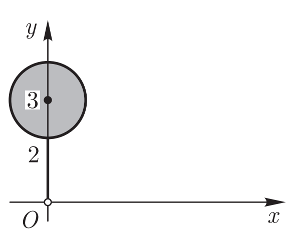


Рис. 1

Напомним, что в случае $n = 1$ необходимым условием интегрируемости функции на отрезке является ограниченность этой функции на этом отрезке. Следующий пример показывает, что при $n \geqslant 2$ условие ограниченности функции не является необходимым для интегрируемости этой функции.

**Пример 1.** При $n = 2$ рассмотрим множество $E$, имеющее вид «шарика на нитке» (рис. 1):

$$E = \overline{U_1((0,3))} \cup (\{0\} \times (0,2])$$

и функцию $f\colon E \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y} & \text{при } 0 < y \leqslant 1, \\ 0 & \text{при } y > 1. \end{cases}$$

Ясно, что $f$ неограничена на $E$, но $\exists \int\int_E f(x,y)\,dx\,dy = 0$.

Однако если функция интегрируема на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, то она заведомо ограничена на внутренности $E$ (в частности, интегрируемая на открытом множестве функция ограничена на нём). Это утверждение вытекает из свойства 2° § 19.2 и из следующей теоремы, показывающей, что для измеримых множеств с некоторым дополнительным свойством интегрируемость функции влечёт её ограниченность.

**Теорема 1.** *Пусть для множества $E$ существует такая последовательность разбиений $\{\tau_k\}_1^\infty$, $|\tau_k| \to 0$ при $k \to \infty$, для которой все элементы всех разбиений имеют положительную меру. Пусть функция $f$ интегрируема на $E$.*

*Тогда $f$ ограничена на $E$.*

Доказательство по существу такое же, как в одномерном случае для $E = [a,b]$.

**Упражнение 1.** Пусть измеримое множество $E \subset \overline{\operatorname{int} E}$. Доказать, что всякая интегрируемая на $E$ функция ограничена на $E$.

Напомним, что колебанием функции $f$ на множестве $D \subset \mathbb{R}^n$ называется число

$$\omega(f;D) = \sup_{x,y \in D} |f(x) - f(y)| = \sup_D f - \inf_D f.$$

**Теорема 2** (критерий интегрируемости функции). *Для интегрируемости функции $f$ на измеримом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta = \delta_\varepsilon > 0\colon \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant i_\tau \\ \mu E_i > 0}} \omega_i(f) \mu E_i < \varepsilon \;\; \forall\, \tau\colon |\tau| < \delta, \tag{1}$$

*где $\omega_i(f) := \omega(f; E_i)$, $\tau = \{E_i\}_1^{i_\tau}$ — разбиение множества $E$.*

Доказательство то же, что и для случая $n = 1$, $E = [a,b]$ в п. 14.2.1.

Критерий интегрируемости функции можно записать так:

$$\lim_{|\tau| \to 0} \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant i_\tau \\ \mu E_i > 0}} \omega_i(f) \mu E_i = 0, \tag{2}$$

вкладывая в понятие предела тот смысл, который в (1) выражен в $(\varepsilon, \delta)$-терминах.

**Определение 5.** Пусть функция $f$ определена на измеримом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, и пусть $\tau = \{E_i\}_1^{i_\tau}$ — разбиение $E$. Пусть также

$$m_i := \inf_{E_i} f, \quad M_i := \sup_{E_i} f.$$

Тогда суммы

$$\underline{S_\tau}(f) := \sum_{i=1}^{i_\tau} m_i \mu E_i, \quad \overline{S_\tau}(f) := \sum_{i=1}^{i_\tau} M_i \mu E_i$$

называют соответственно *нижней* и *верхней интегральными суммами Дарбу* функции $f$, отвечающими разбиению $\tau$.

Ясно, что для любой интегральной суммы Римана $S_\tau(f)$ ограниченной функции $f$

$$\underline{S_\tau}(f) \leqslant S_\tau(f) \leqslant \overline{S_\tau}(f).$$

Легко видеть, что

$$\overline{S_\tau}(f) - \underline{S_\tau}(f) = \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f) \mu E_i.$$

С помощью последнего равенства и критерия интегрируемости (1) можно сформулировать критерий интегрируемости функции в терминах сумм Дарбу.

**Теорема 3.** *Для интегрируемости на измеримом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ ограниченной функции $f$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon \overline{S_\tau}(f) - \underline{S_\tau}(f) < \varepsilon \quad \forall\, \tau\colon |\tau| < \delta.$$

**Следствие 1.** *Пусть функция $f$ интегрируема на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда*

$$\underline{S_\tau}(f) \leqslant \int_E f(x)\, dx \leqslant \overline{S_\tau}(f),$$

*причём*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon \overline{S_\tau}(f) - \underline{S_\tau}(f) < \varepsilon \quad \forall\, \tau\colon |\tau| < \delta.$$

Покажем, что *функция, интегрируемая на отрезке $[a, b]$ в смысле определения* 14.1.2, *интегрируема на этом отрезке и в смысле определения* 4 ($n = 1$, $E = [a, b]$), так что эти два определения (интегрируемости функции на отрезке) эквивалентны.

Пусть функция $f$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ в смысле определения 14.1.2. Тогда она ограничена (по теореме 14.1.1), и в силу критерия интегрируемости 14.2.1 для заданного $\varepsilon > 0$ существует разбиение $\{[x_{j-1},x_j]\}_{j=1}^k$ отрезка $[a,b]$ такое, что

$$\sum_{j=1}^{k} \omega(f;[x_{j-1},x_j])\Delta x_j < \varepsilon.$$

Пусть $\tau = \{E_i\}_1^{i_\tau}$ — произвольное разбиение отрезка $[a,b]$, $\tau_0$ — совокупность тех множеств $E_i \in \tau$, которые имеют непустое пересечение более чем с одним отрезком $[x_{j-1},x_j]$. Если $E_i \in \tau_0$, то в силу леммы 18.2.1 $E_i \subset U_{2|\tau|}(E_0)$, где $E_0 = \{x_i\}_0^k$, $\mu E_0 = 0$. Теперь, считая, что $|f| \leqslant M$ на $[a,b]$, имеем

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} \omega(f;E_i)\mu E_i = \sum_{i:E_i\in\tau\setminus\tau_0} \omega(f;E_i)\mu E_i + \sum_{i:E_i\in\tau_0} \omega(f;E_i)\mu E_i \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{k} \omega(f;[x_{j-1},x_j])\Delta x_j + 2M\mu^* U_{2|\tau|}(E_0) < \varepsilon + 2M\varepsilon,$$

причём последняя оценка имеет место для всех разбиений $\tau$ с достаточно малой мелкостью $|\tau|$ по лемме 18.2.3. В силу критерия интегрируемости (теорема 2) функция $f$ интегрируема на $[a,b]$ в смысле определения 4.

Установим условия интегрируемости непрерывных функций.

**Теорема 4.** *Пусть функция $f$ непрерывна на измеримом компакте $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда $f$ интегрируема на $E$.*

Доказательство. Функция $f$ в силу теорем Вейерштрасса и Кантора ограничена и равномерно непрерывна на компакте $E$. Тогда её модуль непрерывности на $E$ $\omega(\delta;f) \to 0$ при $\delta \to 0$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(f)\mu E_i \leqslant \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega(|\tau|;f)\mu E_i = \omega(|\tau|;f)\mu E \to 0 \quad \text{при } |\tau| \to 0.$$

В силу критерия интегрируемости функция $f$ интегрируема на $E$.

**Теорема 5.** *Функция, непрерывная и ограниченная на открытом измеримом множестве, интегрируема на нём.*

Указание. Для доказательства можно воспользоваться критерием интегрируемости функции и леммой 18.2.3; см. доказательство теоремы 14.2.4.

## § 19.2. Свойства кратного интеграла

**1.** Пусть $E$ — измеримое множество. Тогда

$$\int\limits_E dx := \int\limits_E 1\,dx = \mu E.$$

**2.** Пусть $E$ и $E^*$ — измеримые множества, $E^* \subset E$, и пусть функция $f$ интегрируема на $E$. Тогда она интегрируема и на $E^*$.

Доказательство. Пусть $\tau^* = \{E_i^*\}_1^{i_{\tau^*}}$ — разбиение множества $E^*$ мелкости $|\tau^*|$. Дополним $\tau^*$ до разбиения $\tau = \{E_i\}_1^{i_\tau}$ множества $E$ мелкости $|\tau| = |\tau^*|$. Это можно сделать, присоединив к $\{E_i^*\}_1^{i_{\tau^*}}$ все элементы какого-либо разбиения множества $E \setminus E^*$ с мелкостью разбиения, не превосходящей $|\tau^*|$. Тогда

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant i_{\tau^*}\\ \mu E_i^*>0}} \omega_i(f)\mu E_i^* \leqslant \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant i_\tau\\ \mu E_i>0}} \omega_i(f)\mu E_i.$$

Из интегрируемости функции $f$ на $E$ и критерия интегрируемости следует, что правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $|\tau| \to 0$. Поэтому и левая часть стремится к нулю при $|\tau^*| \to 0$. В силу критерия интегрируемости функция $f$ интегрируема на $E^*$.

**3** (аддитивность интеграла по множествам). Пусть множества $F,\ G \subset \mathbb{R}^n$ измеримы, причём $F \cap G = \varnothing$, $E := F \cup G$. Пусть функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ ограничена и интегрируема на $F$ и на $G$. Тогда $f$ интегрируема на $E$ и

$$\int\limits_E f(x)\,dx = \int\limits_F f(x)\,dx + \int\limits_G f(x)\,dx.$$

Доказательство. Пусть $\tau = \{E_i\}$ — разбиение множества $E$, $\tau_0$ — множество тех $E_i \in \tau$, для которых $E_i \cap F \neq \varnothing$, $E_i \cap G \neq \varnothing$,

$$\tau(F) = \{E_i \cap F\colon E_i \in \tau,\ E_i \cap F \neq \varnothing\},$$
$$\tau(G) = \{E_i \cap G\colon E_i \in \tau,\ E_i \cap G \neq \varnothing\}.$$

Пусть $S_\tau(f) = \sum f(x^{(i)})\mu E_i$ — произвольная интегральная сумма Римана функции $f$ и разбиения $\tau$ множества $E$ с отмеченными точками $x^{(i)}$, $i = 1, \ldots, i_\tau$. Пусть $S_{\tau(F)}(f)$, $S_{\tau(G)}(f)$ — интегральные суммы для сужений функции $f$ на множества $F$ и $G$ соответственно, построенные по разбиениям $\tau(F)$ и $\tau(G)$

и (по возможности) по тем же отмеченным точкам, что и $S_\tau(f)$. Тогда, считая, что $|f| \leqslant M$ на $E$, имеем

$$\left|S_\tau(f) - S_{\tau(F)}(f) - S_{\tau(G)}(f)\right| \leqslant 2M \sum_{E_i \in \tau_0} \mu E_i = 2M\mu \bigcup_{E_i \in \tau_0} E_i. \quad (1)$$

Заметим, что если $E_i \in \tau_0$, то

$$E_i \subset U_{2|\tau|}(\partial F). \quad (2)$$

В самом деле, пусть $x \in E_i \cap F$, $y \in E_i \cap G$. Тогда на отрезке, соединяющем точки $x$ и $y$, по лемме 18.2.1 найдётся точка $z \in \in \partial F$. Тогда $|x - z| \leqslant |x - y| \leqslant |\tau|$.

Поскольку $\mu \partial F = 0$ в силу критерия измеримости, то из (2) и из леммы 18.2.3 следует, что правая часть (1) стремится к нулю при $|\tau| \to 0$. Тогда и левая часть (1) стремится к нулю. Так как

$$S_{\tau(F)}(f) \to \int\limits_F f(x)\,dx, \quad S_{\tau(G)}(f) \to \int\limits_G f(x)\,dx,$$

то заключаем, что $S_\tau(f) \to \int_F f(x)\,dx + \int_G f(x)\,dx$, откуда и следует свойство 3.

**Упражнение 1.** Показать, что требование ограниченности функции $f$ на множестве $E$ в формулировке свойства 3 нельзя отбросить.

**4.** Пусть функция $f$ интегрируема и ограничена на множестве $E$. При изменении её значений на подмножестве $E_0 \subset E$ меры 0 (с сохранением ограниченности) функция $f$ остаётся интегрируемой и величина интеграла не изменяется.

Доказательство.

$$\int\limits_E f(x)\,dx = \int\limits_{E \setminus E_0} f(x)\,dx + \int\limits_{E_0} f(x)\,dx = \int\limits_{E \setminus E_0} f(x)\,dx.$$

Следовательно, интегрируемость функции $f$ и значения интеграла $\int_E f(x)\,dx$ не зависят от значений функции $f$ на $E_0$.

**Следствие 1.** *Пусть функция $f$ определена и ограничена на замыкании $\overline{E}$ измеримого множества $E$. Тогда интегралы*

$$\int\limits_E f(x)\,dx, \quad \int\limits_{\overline{E}} f(x)\,dx, \quad \int\limits_{\operatorname{int} E} f(x)\,dx$$

*существуют или не существуют одновременно и равны в случае их существования.*

**5** (линейность интеграла). Пусть функции $f$, $g$ интегрируемы на множестве $E$, и пусть $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тогда существует интеграл

$$\int_E [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx = \alpha \int_E f(x)\, dx + \beta \int_E g(x)\, dx.$$

**6.** Пусть функции $f$, $g$ интегрируемы и ограничены на $E$. Тогда их произведение $fg$, а если $\inf\limits_E |g| > 0$, то и частное $\dfrac{f}{g}$ интегрируемы на $E$.

**7.** Пусть функция $f$ интегрируема на $E$. Тогда функция $|f|$ интегрируема на $E$ и при этом

$$\left|\int_E f(x)\, dx\right| \leqslant \int_E |f(x)|\, dx.$$

**8** (интегрирование неравенств). Если функции $f$, $g$ интегрируемы на $E$ и $f \leqslant g$ на $E$, то

$$\int_E f(x)\, dx \leqslant \int_E g(x)\, dx.$$

**9** (полная, или счётная аддитивность интеграла по множествам). Пусть функция $f$ интегрируема и ограничена на множестве $E$, а $\{E_k\}_1^\infty$ — последовательность измеримых множеств $E_k \subset E$ со свойством

$$\lim_{k\to\infty} \mu E_k = \mu E.$$

Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{E_k} f(x)\, dx = \int_E f(x)\, dx$.

Доказательство следует из оценки

$$\left|\int_E f(x)\, dx - \int_{E_k} f(x)\, dx\right| = \left|\int_{E\setminus E_k} f(x)\, dx\right| \leqslant \sup_E |f| \mu(E \setminus E_k).$$

**10.** Пусть функция $f$ интегрируема и неотрицательна на открытом множестве $G$. Пусть $f$ непрерывна в точке $x^{(0)} \in G$ и $f(x^{(0)}) > 0$. Тогда $\int_G f(x)\, dx > 0$.

Доказательство. В силу непрерывности функции $f$ в точке $x^{(0)}$ существует окрестность $U_\delta(x^{(0)}) \subset G$ такая, что

$$f(x) > \frac{f(x^{(0)})}{2} \quad \forall\, x \in U_\delta(x^{(0)}).$$

Следовательно,

$$\int\limits_G f(x)\,dx = \int\limits_{G\setminus U_\delta(x^{(0)})} f(x)\,dx + \int\limits_{U_\delta(x^{(0)})} f(x)\,dx \geqslant \frac{f(x^{(0)})}{2}\mu U_\delta(x^{(0)}) > 0.$$

**11** (теорема о среднем). Пусть функции $f$, $g$ интегрируемы и ограничены на множестве $E$. Пусть функция $g$ не меняет знака на $E$. Если $m \leqslant f \leqslant M$ на $E$, то существует такое число $\lambda \in \in [m, M]$, что

$$\int\limits_E f(x)g(x)\,dx = \lambda \int\limits_E g(x)\,dx.$$

Если при этом $E$ — область, а функция $f$ непрерывна на $E$, то

$$\exists\, c \in E\colon \int\limits_E f(x)g(x)\,dx = f(c)\int\limits_E g(x)\,dx.$$

В частности, при $g \equiv 1$

$$\int\limits_E f(x)\,dx = f(c)\mu E.$$

Доказательство основано на использовании свойства 8 и теоремы 10.5.4 (Коши о промежуточных значениях).

## § 19.3. Сведение кратного интеграла к повторному

**Теорема 1.** *Пусть функция $f$ интегрируема по прямоугольнику $P = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ и интеграл $F(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx$ существует для каждого $y \in [c, d]$.*

*Тогда функция $F$ интегрируема по отрезку $[c, d]$ и справедливо равенство*

$$\iint\limits_P f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x, y)\,dx\right) dy. \tag{1}$$

Правая часть равенства (1) называется *повторным интегралом*.

Доказательство. Пусть $a = x_0 < x_1 < \ldots < < x_k = b$, $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d$, $\tau_1 = \{[x_{i-1}, x_i]\}_1^k$, $\tau_2 = \{[y_{j-1}, y_j]\}_1^m$ — разбиения отрезков $[a, b]$ и $[c, d]$ соответственно на отрезки. Тогда $\tau = \{[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\}_{\substack{1\leqslant i\leqslant k\\ 1\leqslant j\leqslant m}}$ — разбиение прямоугольника $P$ на прямоугольники.

Введём обозначения

$$m_{ij} = \inf_{[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]} f, \quad M_{ij} = \sup_{[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]} f.$$

Тогда при $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$

$$\sum_{j=1}^{m} F(\eta_j)\Delta y_j = \sum_{j=1}^{m} \int\limits_a^b f(x,\eta_j)\,dx\Delta y_j = \\ = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{k} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x,\eta_j)\,dx\Delta y_j,$$

откуда

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{k} m_{ij}\Delta x_i\Delta y_j \leqslant \sum_{j=1}^{m} F(\eta_j)\Delta y_j \leqslant \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{k} M_{ij}\Delta x_i\Delta y_j. \tag{2}$$

Левая и правая части неравенств (2) представляют собой соответственно нижнюю $\underline{S_\tau}(f)$ и верхнюю $\overline{S_\tau}(f)$ интегральные суммы Дарбу функции $f$. При $|\tau| \to 0$ каждая из них стремится к $\int\int_P f(x,y)\,dx\,dy$ (см. следствие из теоремы 19.1.3). Следовательно, средняя часть неравенств (2), представляющая собой интегральную сумму Римана $S_{\tau_2}(F)$, имеет предел при $|\tau_2| \to 0$, являющийся по определению интегралом $\int_c^d F(y)\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)\,dy$. Предельным переходом в неравенствах (2) получаем (1).

**Замечание 1.** Заменой обозначения переменных в теореме 1 получаем следующее утверждение.

**Теорема 1′.** *Пусть функция $f$ интегрируема по прямоугольнику $P = [a,b]\times[c,d] \subset \mathbb{R}^2$ и интеграл $F(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$ существует для каждого $x \in [a,b]$.*

*Тогда функция $F$ интегрируема по отрезку $[a,b]$ и справедливо равенство*

$$\iint\limits_P f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right)\,dx. \tag{3}$$

Если выполняются условия как теоремы 1, так и теоремы 1′, то

$$\iint\limits_P f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d\int\limits_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\,dx.$$

Последняя формула справедлива, в частности, если функция $f$ непрерывна на $P$.

Распространим результаты теорем 1, 1′, полученные для прямоугольника $P$, на множества, которые назовём элементарными.

**Определение 1.** Множество

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon a \leqslant x \leqslant b, \quad \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\}, \tag{4}$$

где функции $\varphi$, $\psi$ непрерывны на $[a, b]$ и $\varphi \leqslant \psi$ на $[a, b]$, назовём *элементарным относительно оси $Oy$*. Заметим, что $\Omega$ — измеримое замкнутое множество.

**Теорема 2.** *Пусть множество $\Omega$ элементарно относительно оси $Oy$, функция $f$ интегрируема и ограничена на $\Omega$ и при каждом $x \in [a, b]$ существует интеграл $\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy$.*

*Тогда*

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy\,dx. \tag{5}$$

Доказательство. Положим

$$c = \min_{[a,b]} \varphi, \quad d = \max_{[a,b]} \psi$$

(рис. 1). Тогда $\Omega \subset P = [a, b] \times [c, d]$.

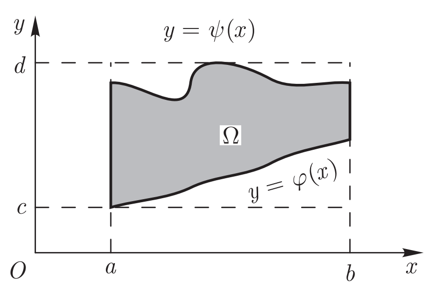



Рис. 1

Рассмотрим функцию $\widetilde{f} \colon P \to \mathbb{R}$:

$$\widetilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{при } (x, y) \in \Omega, \\ 0 & \text{при } (x, y) \in P \setminus \Omega. \end{cases}$$

Так как функция $f$ интегрируема и ограничена на $\Omega$, то функция $\widetilde{f}$, интегрируемая на $\Omega$ и на $P \setminus \Omega$, интегрируема на $P$, причём $\int\int_P \widetilde{f}(x, y)\,dx\,dy = \int\int_\Omega f(x, y)\,dx\,dy$.

Аналогично для каждого $x \in [a, b]$ обосновывается существование интеграла $\int_c^d \widetilde{f}(x, y)\, dy = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy$.

По теореме $1'$

$$\iint\limits_P \widetilde{f}(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_a^b \int\limits_c^d \widetilde{f}(x, y)\, dy\, dx,$$

что совпадает с (5).

**Следствие.** *Пусть функция $f$ непрерывна на элементарном относительно оси $Oy$ множестве $\Omega$ вида (4). Тогда справедливо равенство (5).*

**Замечание 2.** Пусть множество $\Omega$ вида (4) является элементарным не только относительно оси $Oy$, но и относительно оси $Ox$, т. е. наряду с описанием (4) имеет место описание

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leqslant y \leqslant d, \quad \alpha(y) \leqslant x \leqslant \beta(y)\}.$$

Тогда для непрерывной на $\Omega$ функции $f$ справедливо равенство

$$\int\limits_a^b \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int\limits_c^d \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\, dx\, dy, \tag{6}$$

выражающее собой правило перемены порядка интегрирования в повторных интегралах.

Теорема 2 и следствие из неё могут быть распространены на $n$-кратные интегралы.

**Определение 2.** Множество

$$\Omega = \{x = (x_1, \ldots, x_n) = (x', x_n) : \ x' \in E, \qquad \varphi(x') \leqslant x_n \leqslant \psi(x')\},$$

где измеримое замкнутое множество $E \subset \mathbb{R}^{n-1}$, а функции $\varphi$, $\psi$ непрерывны на $E$, называется *элементарным относительно оси $Ox_n$*.

**Теорема 3.** *Пусть функция $f$ непрерывна на элементарном относительно оси $Ox_n$ множестве $\Omega$. Тогда*

$$\int\limits_\Omega f(x)\, dx = \int\limits_E \int\limits_{\varphi(x')}^{\psi(x')} f(x', x_n)\, dx_n\, dx'.$$

## § 19.4. Геометрический смысл модуля якобиана отображения

В этом параграфе изучается отображение

$$\mathcal{F} = \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v) \end{cases} \tag{1}$$

открытого множества $G$ двумерного евклидова пространства $\mathbb{R}^2_{uv}$ на открытое множество $G^*$ евклидова пространства $\mathbb{R}^2_{xy}$:

$$\mathbb{R}^2_{uv} \supset \underset{\text{откр}}{G} \overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows} \underset{\text{откр}}{G^*} \subset \mathbb{R}^2_{xy}.$$

Отображение $\mathcal{F}$ обладает следующими свойствами:

1° $\mathcal{F}$ отображает $G$ на $G^*$ взаимно однозначно;
2° $\mathcal{F}$ непрерывно дифференцируемо на $G$;
3° $J(u, v) := \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$ на $G$.

**Лемма 1.** [1]) *Пусть $E$ — отрезок с концами в точках $(u_1, v_1)$, $(u_2, v_2)$; $E \subset G$,*

$$\max_E \max\{|x'_u|,\ |x'_v|,\ |y'_u|,\ |y'_v|\} \leqslant \varkappa.$$

*Тогда*

$$|\mathcal{F}(u_2, v_2) - \mathcal{F}(u_1, v_1)| \leqslant 2\varkappa|(u_2, v_2) - (u_1, v_1)| = \\ = 2\varkappa\sqrt{(u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2}\,. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $(x_i, y_i) = \mathcal{F}(u_i, v_i)$, $i = 1, 2$. Тогда в силу теоремы Лагранжа о конечных приращениях

$$|x_2 - x_1| = \Big|x\ (u_1 + t(u_2 - u_1),\ v_1 + t(v_2 - v_1))\big|_{t=0}^{t=1}\Big| = \\ = \Big|x'_u(\widetilde{u}, \widetilde{v})(u_2 - u_1) + x'_v(\widetilde{u}, \widetilde{v})(v_2 - v_1)\Big| \leqslant \\ \leqslant \sqrt{2}\,\varkappa\sqrt{(u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2}\,.$$

Аналогично

$$|y_2 - y_1| \leqslant \sqrt{2}\,\varkappa\sqrt{(u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2}\,.$$

Из последних двух оценок следует (2).

---

[1]) Используется лишь при доказательстве необязательной теоремы 19.5.2.

**Лемма 2.** *Пусть ограниченное множество* $E \subset \overline{E} \subset G$, *и пусть*

$$Q := \{(u, v)\colon u_0 \leqslant u \leqslant u_0 + h, \quad v_0 \leqslant v \leqslant v_0 + h\} \subset G.$$

*Тогда:*

$1^\circ$ $\partial\mathcal{F}(E) = \mathcal{F}(\partial E)$, $\mathcal{F}(\overline{E})$ *— замкнутое множество;*

$2^\circ$ $\mathcal{F}(Q)$ *— замкнутое измеримое множество;*

$3^\circ$ *если* $\mu E = 0$, *то* $\mu\mathcal{F}(E) = 0$;

$4^\circ$ *если* $E$ *измеримо, то* $\mathcal{F}(E)$ *измеримо.*

Доказательство. В силу теоремы о локальном взаимно однозначном соответствии для точек $(\overline{u}, \overline{v}) \in G$ и $(\overline{x}, \overline{y}) = \mathcal{F}(\overline{u}, \overline{v})$ существуют их окрестности, взаимно однозначно соответствующие друг другу, причём эти окрестности можно брать сколь угодно малыми по диаметру. Следовательно, для $E$ и для $\mathcal{F}(E)$ точки $(\overline{u}, \overline{v})$ и $(\overline{x}, \overline{y})$ соответственно могут являться внутренними, либо граничными, либо предельными точками лишь одновременно. Отсюда следуют утверждение $1^\circ$ леммы и утверждение о замкнутости множества $\mathcal{F}(Q)$. Ограниченность множества $\mathcal{F}(Q)$ следует из теоремы Вейерштрасса (об ограниченности непрерывной на компакте функции), применённой к $x(u, v)$, $y(u, v)$. Заметим, что $\partial\mathcal{F}(Q) = \mathcal{F}(\partial Q)$ состоит из четырёх гладких кривых. Поэтому $\mu\partial\mathcal{F}(Q) = 0$. В силу критерия измеримости множество $\mathcal{F}(Q)$ измеримо, и свойство $2^\circ$ установлено.

Установим [1] свойство $3^\circ$. Покажем, что $\mu\mathcal{F}(E) = 0$.

Пусть число $\rho > 0$ таково, что $\overline{U_\rho(E)} \subset G$. В качестве $\rho$ можно взять $\rho = 1$, если $G = \mathbb{R}^2$, или $\rho = \dfrac{1}{2}\operatorname{dist}(\overline{E}, \mathbb{R}^2 \setminus G)$, если $G \neq \mathbb{R}^2$. В последнем случае $\rho > 0$ в силу положительности расстояния между двумя замкнутыми непересекающимися множествами $\overline{E}$ и $\mathbb{R}^2 \setminus G$.

Пусть $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon = \bigcup_1^m P_k$ — блочное множество (составленное из конечного числа попарно непересекающихся блоков $P_k$), $B_\varepsilon \supset E$, $\mu B_\varepsilon < \varepsilon$. Блок $P$ будем называть *регулярным*, если $(a, b) \times (c, d) \subset P \subset [a, b] \times [c, d]$ и

$$\frac{1}{2}(b - a) \leqslant d - c \leqslant 2(b - a).$$

Можно считать, что в представлении $B_\varepsilon = \bigcup_1^m P_k$ все блоки $P_k$ регулярны и $\operatorname{diam} P_k \leqslant \rho$ (если это не так с самого начала, то

[1] Свойства $3^\circ$ и $4^\circ$ будут использованы лишь при доказательстве теоремы 19.5.2.

каждый из $P_k$ можно разбить на регулярные блоки с диаметром, не превосходящим $\rho$, и отбросить те из них, которые не пересекаются с $E$). Тогда

$$B_\varepsilon \subset \overline{U_\rho(E)} \subset G.$$

Пусть $\varkappa = \max\limits_{\overline{U_\rho(E)}} \max \{|x'_u|, |x'_v|, |y'_u|, |y'_v|\}$.

В силу (2) образ каждого из блоков $P_k$ с длиной меньшей стороны $h_k$ содержится в некотором замкнутом квадрате (блоке) $R_k$ с длиной стороны $2\sqrt{5}\,\varkappa h_k$, так что

$$\mathcal{F}(P_k) \subset R_k, \quad \mu R_k \leqslant 20\varkappa^2 \mu P_k.$$

Отсюда и из полуаддитивности меры следует, что

$$\mu^* \mathcal{F}(E) \leqslant \mu \bigcup_{k=1}^{m} R_k \leqslant \sum_{k=1}^{m} \mu R_k \leqslant 20\varkappa^2 \sum_{k=1}^{m} \mu P_k = \\ = 20\varkappa^2 \mu B_\varepsilon < 20\varkappa^2 \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то получаем

$$\mu \mathcal{F}(E) = \mu^* \mathcal{F}(E) = 0.$$

Свойство 4° следует из ограниченности множества $\mathcal{F}(E) \subset \subset \mathcal{F}(\overline{E})$, вытекающей из теоремы Вейерштрасса, свойств 1°, 3° и критерия измеримости.

**Теорема 1** (геометрический смысл модуля якобиана отображения). *Пусть* $(u_0, v_0) \in G$, $h_0 > 0$,

$$G \supset Q_h := \\ := \{(u, v) : u_h \leqslant u \leqslant u_h + h,\ v_h \leqslant v \leqslant v_h + h\} \ni (u_0, v_0)$$

*при всех* $h \in (0, h_0]$.

*Тогда*

$$\lim_{h \to 0+0} \frac{\mu \mathcal{F}(Q_h)}{\mu Q_h} = |J(u_0, v_0)|. \tag{3}$$

Доказательство будет дано ниже в виде следствия из теоремы 19.5.1 о замене переменных в интеграле. В конце § 19.5 будет приведено обобщение теоремы 1 на $n$-мерный случай. Частично геометрический смысл модуля якобиана отображения поясняет

**Лемма 3.** *В условиях теоремы* 1 *при* $h \to 0$

$$\mu \mathcal{F}(Q_h) \leqslant |J(u_0, v_0)| \mu Q_h + o(h^2). \tag{4}$$

Доказательство. Подчеркнём необязательность условия, что точка $(u_0, v_0)$ является центром квадрата $Q_h$. Отображение $\mathcal{F}$ дифференцируемо, поэтому

$$\mathcal{F}\colon \begin{cases} x = x_0 + a_{11}(u-u_0) + a_{12}(v-v_0) + \\ \qquad\qquad + \varepsilon_1(u-u_0,\ v-v_0)\sqrt{(u-u_0)^2+(v-v_0)^2}\,, \\ y = y_0 + a_{21}(u-u_0) + a_{22}(v-v_0) + \\ \qquad\qquad + \varepsilon_2(u-u_0,\ v-v_0)\sqrt{(u-u_0)^2+(v-v_0)^2}\,, \end{cases}$$

где $a_{11} = x'_u(u_0,v_0)$, $a_{12} = x'_v(u_0,v_0)$, $a_{21} = y'_u(u_0,v_0)$, $a_{22} = y'_v(u_0,v_0)$, $\varepsilon_i(u-u_0, v-v_0) \to 0$ при $(u,v) \to (u_0,v_0)$.

Сравним отображение $\mathcal{F}$ с линейным отображением

$$\widehat{\mathcal{F}}\colon \begin{cases} x = \widehat{x}(u,v) = x_0 + a_{11}(u-u_0) + a_{12}(v-v_0), \\ y = \widehat{y}(u,v) = y_0 + a_{21}(u-u_0) + a_{22}(v-v_0). \end{cases}$$

Из курса аналитической геометрии известно, что

$$\frac{\mu\widehat{\mathcal{F}}(Q_h)}{\mu Q_h} = \left|\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\right| = |J(u_0,v_0)|.$$

Сравним параллелограмм $\widehat{\mathcal{F}}(Q_h)$ и искривлённый параллелограмм $\mathcal{F}(Q_h)$ (рис. 1). Положим

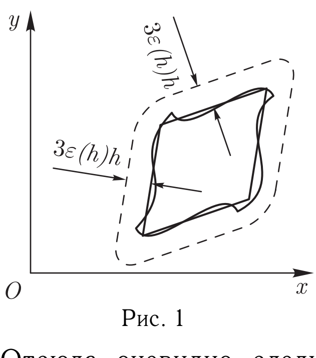



Рис. 1

$$\varepsilon(h) := \sup_{\substack{|u-u_0|\leqslant h \\ |v-v_0|\leqslant h}} \max\{|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|\},$$

$$\varepsilon(h) \to 0 \text{ при } h \to 0.$$

Тогда для $(u,v) \in Q_h$ справедливы оценки

$$|x(u,v) - \widehat{x}(u,v)| \leqslant \varepsilon(h)\sqrt{2}\,h,$$
$$|y(u,v) - \widehat{y}(u,v)| \leqslant \varepsilon(h)\sqrt{2}\,h.$$

Отсюда, очевидно, следует, что

$$\mathcal{F}(Q_h) \subset U_{3\varepsilon(h)h}\left(\widehat{\mathcal{F}}(Q_h)\right). \tag{5}$$

Поэтому

$$\mu\mathcal{F}(Q_h) \leqslant \mu^* U_{3\varepsilon(h)h}\left(\widehat{\mathcal{F}}(Q_h)\right) \leqslant \mu\widehat{\mathcal{F}}(Q_h) + o(h^2) = \\ = |J(u_0,v_0)|h^2 + o(h^2),$$

и (4) установлено.

**Замечание 1.** Оценка (4) и её доказательство сохраняются и при $J(u_0, v_0) = 0$, если в левой части (4) вместо $\mu\mathcal{F}(Q_h)$ написать $\mu^*\mathcal{F}(Q_h)$.

## § 19.5. Замена переменных в кратном интеграле

**Теорема 1.** *Пусть*

$$\mathcal{F} = \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

*— отображение открытого измеримого множества* $G \subset \mathbb{R}^2_{uv}$ *на открытое измеримое множество* $G^* \subset \mathbb{R}^2_{xy}$*:*

$$\mathbb{R}^2_{u,v} \supset \underset{\substack{\text{откр.}\\ \text{измер.}}}{G} \overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows} \underset{\substack{\text{откр.}\\ \text{измер.}}}{G^*} \subset \mathbb{R}^2_{x,y},$$

*причём:*

1° $\mathcal{F}$ *отображает* $G$ *на* $G^*$ *взаимно однозначно;*
2° $\mathcal{F}$ *непрерывно дифференцируемо на* $G$*;*
3° $J(u, v) = \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$ *на* $G$.

*Пусть:*

4° *функция* $f$ *непрерывна и ограничена на* $G^*$*;*
5° *произведение* $f(\mathcal{F})J$ *ограничено на* $G$, *где*

$$f(\mathcal{F})(u, v) := f(x(u, v), y(u, v)).$$

*Тогда*

$$\iint\limits_{G^*} f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{G} f(x(u, v),\ y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv. \qquad (1)$$

Доказательство. Обе части равенства (1) существуют в силу непрерывности и ограниченности подынтегральных выражений на открытых измеримых множествах интегрирования (см. теорему 19.1.5).

Шаг 1. До конца доказательства будем считать, что $f > 0$ на $G^*$. Это ограничение не снижает общности. В самом деле, если

$$M > \sup_{G^*} |f|, \quad f(x) = f_1(x) - f_2(x),$$

где

$$f_1(x) = f(x) + M > 0, \quad f_2(x) = M > 0,$$

и если равенство (1) установлено для функций $f_1$ и $f_2$, то оно оказывается верным и для $f = f_1 - f_2$.

Шаг 2. Покажем, что

$$\iint\limits_{Q} f(x(u,v), y(u,v))|J(u,v)|\,du\,dv \geqslant \iint\limits_{\mathcal{F}(Q)} f(x,y)\,dx\,dy, \qquad (2)$$

где $Q = \{(u,v)\colon\, u_1 \leqslant u \leqslant u_1 + h,\ v_1 \leqslant v \leqslant v_1 + h\} \subset G$. Рассуждая от противного, предположим, что равенство (2) нарушено, т. е. при некотором $\varepsilon_0 > 0$

$$(1+\varepsilon_0)\iint\limits_{Q} f(x(u,v), y(u,v))\,|J(u,v)|\,du\,dv \leqslant \leqslant \iint\limits_{\mathcal{F}(Q)} f(x,y)\,dx\,dy. \qquad (3)$$

Разобьём $Q$ на четыре равных замкнутых квадрата. Обозначим через $Q^{(1)}$ тот из них, для которого (при $k = 1$)

$$(1+\varepsilon_0)\iint\limits_{Q^{(k)}} f(x(u,v), y(u,v))\,|J(u,v)|\,du\,dv \leqslant \leqslant \iint\limits_{\mathcal{F}(Q^{(k)})} f(x,y)\,dx\,dy. \qquad (4)$$

Такой квадрат $Q^{(1)}$ существует: предположив противное и сложив четыре неравенства, противоположных неравенству (4) и аналогичным ему при $k = 1$, входим в противоречие с (3). Разобьём $Q^{(1)}$ на четыре равных замкнутых квадрата и обозначим через $Q^{(2)}$ тот из них, для которого выполняется (с $k = 2$) неравенство (4). Продолжая деление, получим систему вложенных квадратов $\{Q^{(k)}\}_1^\infty$ со свойством (4). В силу теоремы 1.3.1 о вложенных отрезках (таковыми являются проекции $Q^{(k)}$ на координатные оси) существует точка $(u_0, v_0) \in Q^{(k)}$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Из (4), в силу теоремы о среднем для интеграла, имеем

$$(1+\varepsilon_0) f(x(\overline{u}_k, \overline{v}_k),\ y(\overline{u}_k, \overline{v}_k))|J(\overline{u}_k, \overline{v}_k)|\mu Q^{(k)} \leqslant \leqslant f(\widetilde{x}_k, \widetilde{y}_k)\mu\mathcal{F}(Q^{(k)})$$

при некоторых $(\widetilde{x}_k, \widetilde{y}_k) \in \mathcal{F}(Q^{(k)})$, $(\overline{u}_k, \overline{v}_k) \in Q^{(k)}$.

Оценивая $\mu\mathcal{F}(Q^{(k)})$ с помощью леммы 19.4.3, при $k \to \infty$ имеем

$$(1+\varepsilon_0)[f(x_0,y_0) + o(1)][|J(u_0,v_0)| + o(1)] \leqslant [f(x_0,y_0) + o(1)]\,[|J(u_0,v_0)| + o(1)]\,,$$

что неверно при $f > 0$, $|J| > 0$. Таким образом, неравенство (2) установлено.

Шаг 3. Пусть $A$ — блочное множество, составленное из попарно не пересекающихся квадратных блоков (см. определение 18.1.2), $\overline{A} \subset G$. В силу аддитивности интеграла по множествам интегрирования, почленным сложением нескольких неравенств вида (2) получаем, что

$$\iint\limits_G f(x(u,v), y(u,v))|J(u,v)|\,du\,dv \geqslant$$
$$\geqslant \iint\limits_A f(x(u,v),\ y(u,v))|J(u,v)|\,du\,dv \geqslant \iint\limits_{\mathcal{F}(A)} f(x,y)\,dx\,dy. \tag{5}$$

Шаг 4. Пусть $A^*$ — блочное множество, причём $A^* \subset \overline{A^*} \subset \subset G^*$. Покажем, что

$$\iint\limits_G f(x(u,v), y(u,v))|J(u,v)|\,du\,dv \geqslant \iint\limits_{A^*} f(x,y)\,dx\,dy. \tag{6}$$

В силу (5) достаточно установить, что найдётся такое составленное из квадратных блоков блочное множество $A \subset \overline{A} \subset G$, что

$$\mathcal{F}(A) \supset \overline{A^*}, \quad \text{т. е.} \quad \mathcal{F}^{-1}(\overline{A^*}) \subset A \subset G. \tag{7}$$

Покажем это. Множество $\mathcal{F}^{-1}(\overline{A^*})$ замкнуто по лемме 19.4.2. Следовательно,

$$\operatorname{dist}(\mathcal{F}^{-1}(\overline{A^*}),\ \mathbb{R}^2_{u,v} \setminus G) = \rho > 0.$$

Построим множество $A$ следующим образом. Разобьём плоскость $\mathbb{R}^2_{u,v}$ с помощью координатной сетки на квадраты (блоки) с диагональю, не превосходящей $\frac{\rho}{2}$, и в качестве $A$ возьмём объединение всех таких блоков, имеющих непустое пересечение с $\mathcal{F}^{-1}(\overline{A^*})$. Соотношение (7), очевидно, выполняется.

Шаг 5. Установим неравенство

$$\iint\limits_G f(x(u,v),\ y(u,v))|J(u,v)|\,du\,dv \geqslant \iint\limits_{G^*} f(x,y)\,dx\,dy. \tag{8}$$

Для любого $k \in \mathbb{N}$ можно построить блочное множество $A^*_k$ со свойствами

$$A^*_k \subset \overline{A^*_k} \subset G^*, \quad \mu(G^* \setminus A^*_k) < \frac{1}{k}.$$

Поскольку $0 < f \leqslant M$ на $G^*$, то

$$\iint\limits_{G^*} f(x,y)\,dx\,dy - \iint\limits_{A_k^*} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{G^*\setminus A_k^*} f(x,y)\,dx\,dy \leqslant$$
$$\leqslant M\frac{1}{k} \to 0 \text{ при } k\to\infty. \quad (9)$$

Подставив в (6) $A_k^*$ вместо $A^*$ и переходя к пределу при $k\to\infty$, получаем с учётом (9) оценку (8).

Шаг 6. Установим равенство (1). Применим доказанное неравенство (8) к обратному отображению $\mathcal{F}^{-1}$ (якобиан которого $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \left(\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^{-1} = \dfrac{1}{J(u,v)}$ непрерывен на $\mathcal{F}(G)$) и к функции $g(u,v) := f(x(u,v),\, y(u,v))|J(u,v)|$. Получим

$$\iint\limits_{G^*} f(x,y)\,dx\,dy \geqslant \iint\limits_{G} f(x(u,v),\, y(u,v))|J(u,v)|\,du\,dv. \quad (10)$$

Неравенство (10) противоположно неравенству (8). Из него и из (8) следует (1). Теорема доказана.

**Следствие.** *В условиях теоремы* 19.4.1

$$\mu G^* = \iint\limits_{G^*} 1\,dx\,dy = \iint\limits_{G}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\,du\,dv. \quad (11)$$

Доказательство теоремы 19.4.1. Применим (11) к $\operatorname{int} Q_h$. По теореме о среднем для интеграла имеем

$$\mu\mathcal{F}(Q_h) = |J(\widetilde{u}_h,\widetilde{v}_h)|\,\mu Q_h,$$
$$Q_h \ni (\widetilde{u}_h,\widetilde{v}_h) \to (u_0,v_0) \text{ при } h\to 0.$$

Отсюда следует утверждение теоремы 19.4.1.

**Теорема 2.** *Пусть выполняются условия* $1^\circ$, $2^\circ$, $3^\circ$ *теоремы* 1 *и, кроме того, функция $f$ ограничена на $G^*$, а произведение $f(x(u,v),\, y(u,v))J(u,v)$ ограничено на $G$.*

*Тогда если в* (1) *существует один из интегралов, то существует и другой, и справедливо равенство* (1).

Доказательство. Рассмотрим для определённости лишь случай, когда существует интеграл из правой части равенства (1).

Будем считать, что $f \geqslant 0$ на $G^*$, так как общий случай функции $f$ произвольного знака немедленно сводится к этому с помощью представления $f = f_+ - f_-$, где $f_+ = \dfrac{1}{2}(|f| + f) \geqslant 0$

и $f_- = \frac{1}{2}(|f| - f) \geqslant 0$. Пусть $Q$ — тот же квадрат, что и в (2). Покажем, что существует интеграл из правой части неравенства (2) и что справедливо (2). Из ограниченности $|J|^{-1}$ на $Q$ и существования интеграла в левой части (2) следует существование интеграла $\int\int_Q \widetilde{f}(u,v)\,du\,dv$, где

$$\widetilde{f}(u,v) := f(x(u,v),\ y(u,v)) = \widetilde{f}|J| \cdot \frac{1}{|J|}.$$

Пусть $Q^* = \mathcal{F}(Q)$, и пусть

$$\tau = \tau(Q) = \{E_i\}_1^{i_\tau},\ \tau^* = \tau^*(Q^*) = \{E_i^*\}_1^{i_\tau} = \{\mathcal{F}(E_i)\}_{i=1}^{i_\tau} \qquad (12)$$

— разбиения множеств $Q$ и $Q^*$ соответственно. Из леммы 19.4.1, применённой к отображению $\mathcal{F}^{-1}$, получаем, что $\operatorname{diam} E_i \leqslant K \operatorname{diam} E_i^*$ при некоторой постоянной $K$, откуда

$$|\tau| \leqslant K|\tau^*|. \qquad (13)$$

Пусть $\omega(\widetilde{f}; E_i)$, $\omega(f; E_i^*)$ — колебания функций $\widetilde{f}$, $f$ на $E_i$, $E_i^*$ соответственно. Тогда

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} \omega(f; E_i^*)\mu E_i^* = \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega(\widetilde{f}; E_i) \iint\limits_{E_i} |J(u,v)|\,du\,dv \leqslant$$
$$\leqslant \max_Q |J| \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega(\widetilde{f}; E_i)\mu E_i \to 0 \quad \text{при} \quad |\tau^*| \to 0,$$

поскольку при этом (см. (13)) $|\tau| \to 0$.

В силу критерия интегрируемости функции существует интеграл в правой части (2). Установим теперь неравенство (2). Воспользуемся разбиениями (12), в которых множества $E_i$ будем считать замкнутыми. Пусть в точке $(u_i, v_i)$ достигается $\max\limits_{E_i} |J| = |J(u_i, v_i)|$, и пусть $x_i = x(u_i, v_i)$, $y_i = y(u_i, v_i)$.

Тогда

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} f(x_i, y_i)\mu E_i^* = \sum_{i=1}^{i_\tau} f(x_i, y_i) \iint\limits_{E_i} |J(u,v)|\,du\,dv \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{i_\tau} f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i))|J(u_i, v_i)|\mu E_i.$$

Переходя в этом неравенстве для сумм Римана к пределу при $|\tau| \to 0$ (а значит, и при $|\tau^*| \to 0$), приходим к неравенству (2).

Оставшаяся часть доказательства теоремы 2 повторяет соответствующую часть доказательства теоремы 1, если использовать свойство полной аддитивности интеграла по множествам в более общей форме, чем в свойстве 9 из § 19.2. Сформулируем это свойство в виде леммы.

**Лемма 1.** *Пусть $G$, $G_i$ — измеримые множества $n$-мерного евклидова пространства, $G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G$, $\mu(G \setminus G_i) \to 0$ при $i \to \infty$. Пусть функция $f$ ограничена на $G$ и интегрируема на любом $G_i$.*

*Тогда $f$ интегрируема на $G$ и*

$$\lim_{i\to\infty} \int\limits_{G_i} f\,dx = \int\limits_{G} f\,dx.$$

Доказательство леммы предоставляется читателю.

Приведём обобщения теорем 19.4.1, 1, 2 на $n$-мерный случай.

Через $\mathcal{F}$ $(x = x(t))$ обозначим отображение

$$\mathbb{R}^n_t \supset \underset{\text{откр}}{G} \overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows} \underset{\text{откр}}{G^*} \subset \mathbb{R}^n_x$$

открытого множества $G$ пространства $\mathbb{R}^n_t$ на открытое множество $G^* \subset \mathbb{R}^n_x$ со свойствами:

1° $\mathcal{F}$ отображает $G$ на $G^*$ взаимно однозначно;

2° $\mathcal{F}$ непрерывно дифференцируемо на $G$;

3° $J(t) = \dfrac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(t_1, \ldots, t_n)} \neq 0$ на $G$.

**Теорема 3.** *Пусть выполняются условия 1°, 2°, 3°, и пусть $t^{(0)} \in G$, $G \supset Q_h = \{t\colon t_i^{(h)} \leqslant t_i \leqslant t_i^{(h)} + h,\ i = 1, \ldots, n\} \ni t^{(0)}$ при всех $h \in (0, h_0]$.*

*Тогда*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mu\mathcal{F}(Q_h)}{\mu Q_h} = |J(t^{(0)})|.$$

**Теорема 4.** *Пусть выполняются условия 1°, 2°, 3°. Пусть множества $G$, $G^*$ — открытые измеримые, функция $f$ непрерывна и ограничена на $G^*$, произведение $f(x(t))J(t)$ ограничено на $G$.*

*Тогда*

$$\int\limits_{G^*} f(x)\,dx = \int\limits_{G} f(x(t))|J(t)|\,dt.$$

**Следствие.** *Пусть выполняются условия 1°, 2°, 3°. Пусть множества $G$, $G^*$ — открытые измеримые, якобиан $J$ ограничен на $G$. Тогда*

$$\mu G^* = \int\limits_{G^*} dx = \int\limits_{G} |J(t)|\,dt.$$

**Теорема 5.** *Пусть выполняются условия* $1^\circ$, $2^\circ$, $3^\circ$, *множества* $G$, $G^*$ — *открытые измеримые, функция* $f$ *ограничена на* $G$, *произведение* $f(x(t))J(t)$ *ограничено на* $G$.

*Тогда*
$$\int\limits_{G^*} f(x)\,dx = \int\limits_G f(x(t))|J(t)|\,dt,$$
*если хотя бы один из этих интегралов существует.*

Доказательства теорем 3–5 аналогичны приведённым выше для случая $n = 2$.

Глава 20

# КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Будем считать, что в трёхмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ фиксирована прямоугольная система координат.

## § 20.1. Криволинейные интегралы первого рода

Пусть в трёхмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ задана гладкая кривая

$$\Gamma = \{\mathbf{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant b\} = \{(x(t), y(t), z(t))\colon a \leqslant t \leqslant b\}, \tag{1}$$

т. е. непрерывно дифференцируемая кривая без особых точек (последнее условие означает, что $|\mathbf{r}'(t)|^2 = x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) > 0$ $\forall\, t \in [a, b]$).

**Определение 1.** Пусть числовая функция $F$ определена на множестве $\Gamma$. Тогда *криволинейным интегралом первого рода* от функции $F$ по кривой $\Gamma$ называется число

$$\int\limits_{\Gamma} F(x, y, z)\, ds := \int\limits_a^b F(x(t), y(t), z(t))|\mathbf{r}'(t)|\, dt. \tag{2}$$

С помощью криволинейных интегралов первого рода можно по линейной плотности материальной кривой найти её массу, координаты центра тяжести, моменты инерции.

**Свойства криволинейного интеграла первого рода.**

**1.** Для существования интеграла $\int_\Gamma F(x, y, z)\, ds$ необходимо и достаточно, чтобы функция $F(x(t), y(t), z(t))$ (как функция переменного $t$) была интегрируемой на отрезке $[a, b]$. В частности, если $F$ непрерывна на $\Gamma$ (см. определение 10.5.2), то интеграл $\int_\Gamma F(x, y, z)\, ds$ существует.

Доказательство очевидно.

**2.** Криволинейный интеграл первого рода не зависит от параметризации гладкой кривой $\Gamma$.

Доказательство. Пусть $t = t(\tau)$ — допустимая замена параметра на $\Gamma$ (см. § 8.2), т. е. $t$: $[\alpha, \beta] \leftrightarrow [a, b]$, функция $t$ непрерывно дифференцируема на $[\alpha, \beta]$, $t' \neq 0$ на $[\alpha, \beta]$ ($t(\alpha) = a$, $t(\beta) = b$ при $t' > 0$; $t(\alpha) = b$, $t(\beta) = a$ при $t' < 0$), $\boldsymbol{\rho}(\tau) = \mathbf{r}(t(\tau))$. Тогда

$$\Gamma = \{\boldsymbol{\rho}(\tau)\colon \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta\}.$$

С помощью замены переменного получаем

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} F(x(t(\tau)), y(t(\tau)), z(t(\tau)))|\boldsymbol{\rho}'(\tau)|\, d\tau =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} F(x(t(\tau)), y(t(\tau)), z(t(\tau))) \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t(\tau))\right| |t'(\tau)|\, d\tau =$$

$$= \operatorname{sgn} t' \cdot \int\limits_{\alpha}^{\beta} F(x(t(\tau)), y(t(\tau)), z(t(\tau))) \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t(\tau))\right| t'(\tau)\, d\tau =$$

$$= \operatorname{sgn} t' \cdot \int\limits_{t(\alpha)}^{t(\beta)} F(x(t), y(t), z(t))|\mathbf{r}'(t)|\, dt =$$

$$= \int\limits_{a}^{b} F(x(t), y(t), z(t))|\mathbf{r}'(t)|\, dt.$$

**Замечание 1.** Последняя замена переменного ранее была обоснована лишь для непрерывной функции $F$ (теорема 14.5.1). Для обоснования этой замены переменного в случае интегрируемой функции $F(x(t), y(t), z(t))$ достаточно сослаться на следующее обобщение специального случая теоремы 14.5.1.

**Теорема 1.** *Пусть функция $\varphi'$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$, $\varphi' \neq 0$ на $[\alpha, \beta]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.*

*Тогда из существования интеграла в одной из частей равенства*

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt \tag{3}$$

*следуют существование интеграла в другой его части и само равенство* (3).

Доказательство можно получить непосредственно в виде упрощённого аналога доказательства теоремы 19.5.2, в которой эта теорема формально содержится.

**Следствие.** *Криволинейный интеграл первого рода не зависит от ориентации кривой.*

В самом деле, если кривая $\Gamma$ из (1) не только гладкая, но и ориентированная (её ориентация определяется возрастанием параметра $t$), то замена параметра $t = t(\tau) = -\tau$ $(-b \leqslant \tau \leqslant -a)$ меняет её ориентацию на противоположную. В силу свойства 2 значение криволинейного интеграла, вычисленного с помощью параметра $\tau$, то же, что и для вычисленного с помощью исходного параметра $t$.

Заметим, что гладкая кривая спрямляема и что в качестве допустимого параметра можно взять переменную длину её дуги $S$, отсчитываемую от $\widehat{r}(a)$. Тогда кривая $\Gamma$ задаётся следующим образом:

$$\Gamma = \{\mathbf{r}(s)\colon 0 \leqslant s \leqslant S\} = \{(x(s), y(s), z(s))\colon 0 \leqslant s \leqslant S\},$$

где $S$ — длина кривой, а интеграл (2) принимает вид

$$\int\limits_{\Gamma} F(x, y, z)\, ds = \int\limits_{0}^{S} F(x(s), y(s), z(s))\, ds. \tag{4}$$

**3.** $\int_{\Gamma} ds = S$, где $S$ — длина дуги $\Gamma$.

Доказательство получается применением формулы (4) при $F = 1$.

**4.** $\int_{\Gamma} F(x, y, z)\, ds = \lim\limits_{|\tau|\to 0} \sum_{i=1}^{i_\tau} F(x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i))\Delta s_i$, где $\tau = \{s_i\}_{i=0}^{i_\tau}$ — разбиение отрезка $[0, S]$, $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$ — длина дуги кривой $\Gamma$ от точки $\widehat{r}(s_{i-1})$ до точки $\widehat{r}(s_i)$, $s_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant s_i$.

Доказательство. Заметим, что под знаком предела стоит интегральная сумма Римана интеграла из правой части (4), так что по определению определённого интеграла этот предел равен интегралу из правой части (4).

**5.** Криволинейный интеграл первого рода обладает свойством аддитивности относительно кривой интегрирования (см. пояснение к свойству 6 криволинейного интеграла второго рода в § 20.2).

**Замечание 2.** Часто криволинейный интеграл первого рода определяют формулой (4). В этом случае от кривой $\Gamma$ требуется лишь быть спрямляемой.

## § 20.2. Криволинейные интегралы второго рода

Пусть

$$\Gamma = \{\mathbf{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant b\} = \{(x(t), y(t), z(t))\colon a \leqslant t \leqslant b\} \tag{1}$$

— гладкая ориентированная кривая в трёхмерном пространстве, $A = \widehat{r}(a)$ — её начало, $B = \widehat{r}(b)$ — её конец. Часто такую кривую обозначают символом $\overset{\frown}{AB}$. Единичный вектор её касательной

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) \tag{2}$$

(направленный в сторону возрастания параметра на кривой) непрерывно зависит от параметра $t$.

**Определение 1.** Пусть в $\mathbb{R}^3$ фиксирована декартова прямоугольная система координат и на множестве $\varGamma$ задано векторное поле (т. е. вектор-функция) $\mathbf{a} = (P, Q, R)$. Тогда

$$\int\limits_{\varGamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz :=$$

$$:= \int\limits_a^b [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) +$$

$$+ R(x(t), y(t), z(t))z'(t)]\,dt = \int\limits_a^b (\mathbf{a}, \mathbf{r}')\,dt \tag{3}$$

называется *криволинейным интегралом второго рода* от векторного поля $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ по кривой $\varGamma$. Интеграл (3) часто обозначают также символом $\int_{\varGamma}(\mathbf{a}, d\mathbf{r})$.

В частности, когда лишь одна компонента векторного поля $\mathbf{a}$ отлична от нуля, получаем следующие криволинейные интегралы второго рода от функций $P$, $Q$, $R$ соответственно:

$$\int\limits_{\varGamma} P\,dx := \int\limits_a^b P(x(t), y(t), z(t))x'(t)\,dt, \tag{4}$$

$$\int\limits_{\varGamma} Q\,dy := \int\limits_a^b Q(x(t), y(t), z(t))y'(t)\,dt, \tag{5}$$

$$\int\limits_{\varGamma} R\,dz := \int\limits_a^b R(x(t), y(t), z(t))z'(t)\,dt. \tag{6}$$

С помощью криволинейных интегралов второго рода можно вычислить работу силы при движении точки по кривой в силовом поле.

**Свойства криволинейного интеграла второго рода.**

**1.** Для существования интеграла (3) достаточно, чтобы функции $P(x(t), y(t), z(t))$, $Q(x(t), y(t), z(t))$, $R(x(t), y(t), z(t))$ (как функции переменного $t$) были интегрируемы на отрезке $[a, b]$.

В частности, если поле $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ непрерывно на $\Gamma$, то $\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ существует.

**2** (выражение криволинейного интеграла второго рода через криволинейный интеграл первого рода).

$$\int\limits_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_\Gamma [P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma]\,ds. \tag{7}$$

Доказательство. Достаточно в (3) заменить $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ на равные им величины:

$$x' = \frac{dx}{ds}|\mathbf{r}'| = \cos\alpha|\mathbf{r}'|,$$
$$y' = \frac{dy}{ds}|\mathbf{r}'| = \cos\beta|\mathbf{r}'|,$$
$$z' = \frac{dz}{ds}|\mathbf{r}'| = \cos\gamma|\mathbf{r}'|,$$

где штрих означает дифференцирование по $t$, и сравнить полученный интеграл с криволинейным интегралом (20.1.2).

**3.** Криволинейный интеграл второго рода не зависит от параметризации гладкой кривой с фиксированной ориентацией.

Доказательство такое же, как для криволинейного интеграла первого рода. Следует лишь учесть дополнительное требование $t'(\tau) > 0$ на допустимую замену параметра $t = t(\tau)$, означающее сохранение ориентации кривой вида (1) при переходе к её параметрическому заданию с помощью параметра $\tau$.

**4.** При изменении ориентации кривой $\Gamma$ криволинейный интеграл второго рода меняет знак.

Доказательство. Воспользуемся равенством (7). Напомним, что интеграл первого рода не меняется при изменении ориентации кривой. В то же время в (7) множители $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, а значит, и всё подынтегральное выражение меняют знак на противоположный.

Следовательно, и интеграл в правой части (7) меняет знак на противоположный.

**5.** Если $A = (x(a), y(a), z(a))$, $B = (x(b), y(b), z(b))$, то

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} dx = x(b) - x(a), \quad \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} dy = y(b) - y(a), \quad \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} dz = z(b) - z(a).$$

**6.** Криволинейные интегралы как первого, так и второго рода обладают свойством аддитивности относительно кривой интегрирования.

Поясним это свойство на примере криволинейного интеграла второго рода. Пусть $\varGamma$ — кривая (1), $a < c < b$,

$$\varGamma_1 = \{\mathbf{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant c\}, \quad \varGamma_2 = \{\mathbf{r}(t)\colon c \leqslant t \leqslant b\}.$$

Тогда

$$\int\limits_{\varGamma} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int\limits_{\varGamma_1} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) + \int\limits_{\varGamma_2} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}),$$

если интеграл в левой части или оба интеграла в правой части существуют.

Свойство 6 следует из выражения (3) криволинейного интеграла второго рода через определённый интеграл и из аддитивности определённого интеграла относительно отрезков интегрирования.

Обобщим понятие криволинейных интегралов первого и второго рода на случай интегрирования по кусочно-гладким кривым.

**Определение 2.** Пусть $\varGamma = \{\mathbf{r}(t)\colon\ a \leqslant t \leqslant b\}$ — кусочно-гладкая (ориентированная) кривая, $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = b$, $\varGamma_i = \{\mathbf{r}(t)\colon\ a_{i-1} \leqslant t \leqslant a_i\}$ $(i = 1,\ \ldots,\ k)$ — гладкие (ориентированные) кривые.

Тогда обозначим:

$$\int\limits_{\varGamma} F\,ds := \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{\varGamma_i} F\,ds,$$

$$\int\limits_{\varGamma} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) := \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{\varGamma_i} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}),$$

если каждый из интегралов в правых частях равенств существует.

Пусть в $\mathbb{R}^3$ задана ориентированная кривая $\varGamma = \{\mathbf{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant b\}$, $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i_\tau}$ — разбиение отрезка $[a, b]$, $|\tau| = \max(t_i - t_{i-1})$ — мелкость разбиения. Пусть $\varLambda_\tau$ — ломаная с вершинами в точках $\widehat{r}(t_i)$, последовательно соединённых её звеньями. Такая ломаная называется *вписанной в кривую* $\varGamma$. Ломаную $\varLambda_\tau$ также будем считать ориентированной (при движении по ней вершины ломаной проходятся в порядке возрастания чисел $i = 1,\ \ldots,\ i_\tau$; $\widehat{r}(a)$ — начало ломаной, $\widehat{r}(b)$ — её конец).

**Лемма 1** (об аппроксимации криволинейного интеграла). *Пусть $\varGamma = \{\mathbf{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant b\}$ — гладкая ориентированная кривая в $\mathbb{R}^3$, $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i_\tau}$ — разбиение отрезка $[a, b]$, $\varLambda_\tau$ — вписанная в $\varGamma$ ломаная.*

*Пусть $E$ — компакт (т. е. ограниченное замкнутое множество) в $\mathbb{R}^3$, содержащий $\varGamma$ и $\varLambda_\tau$ при всех достаточно малых $|\tau|$.*

*Пусть на $E$ заданы непрерывные функции $P$, $Q$, $R$. Тогда*

$$\lim_{|\tau|\to 0} \int\limits_{\Lambda_\tau} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Доказательство проведём лишь для случая $Q \equiv R \equiv 0$. Положим $A_i = \widehat{r}(t_i)$, $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i} = \{\mathbf{r}(t)\colon t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i\}$, через $\overline{A_{i-1}A_i}$ обозначим звено вписанной ломаной с началом в $A_{i-1}$ и с концом в $A_i$. Пусть $\varepsilon > 0$. В силу равномерной непрерывности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ на $[a, b]$, существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при произвольном разбиении $\tau$, $|\tau| < \delta$, $\Lambda_\tau \subset E$,

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_i)| < \varepsilon \quad \forall\, t \in [t_{i-1}, t_i], \quad \forall\, i = 1, \ldots, i_\tau, \tag{8}$$

так что кривые $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ и хорды $\overline{A_{i-1}A_i}$ лежат в $E \cap U_\varepsilon(A_{i-1})$.

Зададим произвольное $\eta > 0$. В силу непрерывности, а значит, и равномерной непрерывности $P$ на $E$, существует $\varepsilon = \varepsilon(\eta) > 0$ такое, что

$$|P(M) - P(A_i)| < \eta, \quad \text{если} \quad M \in E \cap U_\varepsilon(A_{i-1}), \quad i = 1, \ldots, i_\tau. \tag{9}$$

Будем считать, что $|\tau| < \delta$, где $\delta = \delta(\varepsilon)$ выбрано по $\varepsilon = \varepsilon(\eta)$, так что выполняются оценки (8), (9). Оценим разность интегралов

$$\Delta_i := \int\limits_{\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}} P\,dx - \int\limits_{\overline{A_{i-1}A_i}} P\,dx = \int\limits_{\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}\overline{A_iA_{i-1}}} P\,dx =$$

$$= \int\limits_{\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}\overline{A_iA_{i-1}}} (P(x,y,z) - P(A_i))\,dx + \int\limits_{\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}\overline{A_iA_{i-1}}} P(A_i)\,dx,$$

где $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}\,\overline{A_iA_{i-1}}$ означает контур, составленный из дуги $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ и её хорды.

Последний интеграл равен 0 в силу свойства 5 криволинейных интегралов второго рода.

Из (9), (7) и из свойства 3 (§ 20.1) следует, что

$$|\Delta_i| < \eta \cdot 2(s(t_i) - s(t_{i-1})),$$

где $s(t)$ — переменная длина дуги $\Gamma$, отсчитываемая от её начала. Следовательно,

$$\left|\int\limits_{\Lambda_\tau} P\,dx - \int\limits_{\Gamma} P\,dx\right| = \left|\sum_{i=1}^{i_\tau} \Delta_i\right| < 2\eta S,$$

где $S$ — длина дуги $\Gamma$.

В силу произвольности $\eta > 0$ приходим к утверждению леммы.

## § 20.3. Формула Грина

При изучении криволинейных интегралов рассматривались интегралы по кривой, лежащей в трёхмерном пространстве $\mathbb{R}^3$. В частности, кривая может лежать в плоскости (такая кривая называется плоской кривой). В этом случае удобно считать эту плоскость координатной, имеющей уравнение $z = 0$. Тогда кривая $\Gamma$ имеет в этой плоскости описание

$$\Gamma = \{(x(t),\ y(t))\colon a \leqslant t \leqslant b\},$$

а криволинейный интеграл первого рода записывается в виде $\int_\Gamma F(x,y)\,ds$.

Если на ориентированной кривой $\Gamma$ задано векторное поле $\mathbf{a}(x,y) = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$, то криволинейный интеграл второго рода имеет вид

$$\int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\Gamma} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}).$$

Все рассмотренные свойства криволинейных интегралов верны, разумеется, и в плоском случае.

Пусть $D$ — область в плоскости $Oxy$, и пусть $\Gamma$ — простой кусочно-гладкий ориентированный контур, $\Gamma \subset \partial D$. Контур $\Gamma$ будем называть *положительно ориентированным относительно области* $D$ и обозначать символом $\Gamma^+$, если при движении по нему в направлении заданной ориентации примыкающая к нему часть области $D$ остаётся слева. В противном случае контур $\Gamma$ будем называть *отрицательно ориентированным относительно области* $D$ и обозначать символом $\Gamma^-$.

Если граница $\partial D$ области $D$ состоит из конечного числа попарно непересекающихся простых кусочно-гладких контуров $\Gamma_i$ ($\partial D = \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i$), каждый из которых ориентирован положительно относительно $D$ (рис. 1), то $\partial D$ будем обозначать символом $\partial D^+$ ($\partial D^+ = \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i^+$).

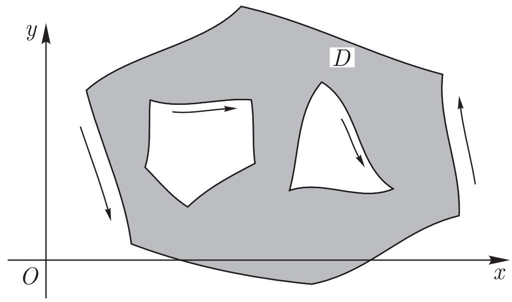



Рис. 1

**Определение 1.** Плоскую область $D$ назовём *простой относительно оси* $Oy$, если

$$D = \{(x, y) \colon a < x < b,\ \varphi(x) < y < \psi(x)\}, \tag{1}$$

где функции $\varphi$, $\psi$ непрерывны и кусочно-непрерывно дифференцируемы на $[a, b]$, причём $\varphi < \psi$ на $(a, b)$.

Плоскую область $D$ назовём *простой относительно оси* $Ox$, если

$$D = \{(x, y) \colon \varphi(y) < x < \psi(y),\ c < y < d\}, \tag{2}$$

где функции $\varphi$, $\psi$ непрерывны и кусочно-непрерывно дифференцируемы на $[c, d]$, причём $\varphi < \psi$ на $(c, d)$.

Плоскую область $D$ назовём *простой*, если она является простой относительно хотя бы одной из координатных осей.

Будем говорить, что ограниченная плоская область $D$ *разрезана на конечное число простых областей* $\{D_i\}_{i=1}^{I}$, если:

1° $\bigcup_{i=1}^{I} D_i \subset D$;

2° $D_i \cap D_j = \varnothing$ при $i \neq j$;

3° $\bigcup_{i=1}^{I} \overline{D}_i = \overline{D}$;

4° $(\partial D_i \cap \partial D_j) \cap D$ при $i \neq j$ является либо пустым множеством, либо точкой, либо промежутком (т. е. отрезком, интервалом или полуинтервалом).

В этом параграфе будут рассматриваться лишь такие плоские области, которые можно разрезать на конечное число простых.

**Теорема 1** (формула Грина). *Пусть $D$ — ограниченная плоская область, граница $\partial D$ которой состоит из конечного числа попарно непересекающихся простых кусочно-гладких контуров $\Gamma_i$ ($\partial D = \bigcup_{i=1}^{k} \Gamma_i$), положительно ориентированных относительно области $D$ ($\partial D^+ = \bigcup_{i=1}^{k} \Gamma_i^+$).*

*Пусть на замкнутой области* $\overline{D}$ *задано векторное поле* $\mathbf{a}(x,y) = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$, *причём функции* $P$, $Q$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ *непрерывны на* $\overline{D}$ *(подразумевается, что* $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ *непрерывны на* $D$ *и непрерывно продолжены на* $\overline{D}$*).*

*Тогда справедлива формула Грина*

$$\iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_{\partial D^+} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\partial D^+} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}). \qquad (3)$$

Доказательство. Мы докажем эту теорему сначала при *дополнительном предположении*, что область $D$ может быть разрезана на конечное число простых областей. Затем это предположение снимем (см. ниже лемму 1).

Достаточно установить (3) при $Q \equiv 0$, т. е. в виде

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int\limits_{\partial D^+} P\,dx, \qquad (4)$$

так как случай $P \equiv 0$ рассматривается аналогично, и вместе оба случая приводят к формуле (3) общего вида.

Шаг 1. Установим (4) в случае, когда область $D$ простая относительно оси $Oy$, т. е. имеет вид (1) (рис. 2). Сводя

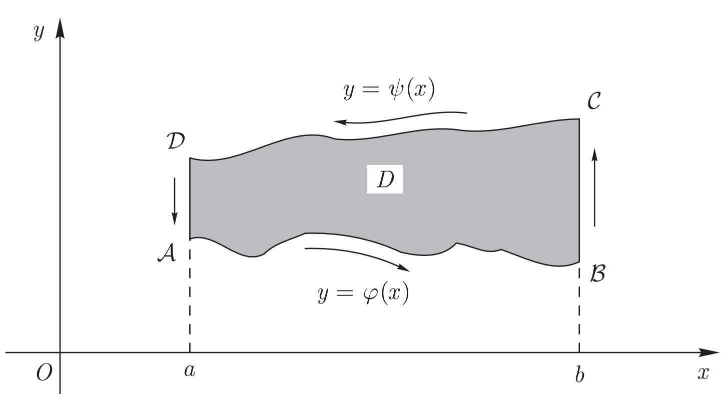



Рис. 2

двойной интеграл к повторному и используя формулу Ньютона–Лейбница, имеем

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int\limits_a^b \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\,dx = \int\limits_a^b [P(x,\psi(x)) - P(x,\varphi(x))]\,dx =$$
$$= \int\limits_{\overset{\frown}{\mathcal{DC}}} P(x,y)\,dx - \int\limits_{\overset{\frown}{\mathcal{AB}}} P(x,y)\,dx =$$
$$= -\int\limits_{\overset{\frown}{\mathcal{CD}}} P\,dx - \int\limits_{\overset{\frown}{\mathcal{AB}}} P\,dx = -\int\limits_{\partial D^+} P\,dx,$$

т. е. равенство (4).

При получении последнего равенства были добавлены равные нулю слагаемые $\int_{\overset{\frown}{\mathcal{BC}}} P\,dx = 0$, $\int_{\overset{\frown}{\mathcal{DA}}} P\,dx = 0$.

Ш а г 2. Установим (4) в случае, когда область $D$ простая относительно оси $Ox$, т. е. имеет вид (2), причём кривые

$$\begin{aligned} \varGamma_1 &= \{(\varphi(y), y)\colon c \leqslant y \leqslant d\}, \\ \varGamma_2 &= \{(\psi(y), y)\colon c \leqslant y \leqslant d\} \end{aligned} \tag{5}$$

являются ломаными. Тогда при некотором разбиении $\{c_i\}_{i=0}^k$ отрезка $[c,d]$ функции $\varphi$, $\psi$ линейны на каждом отрезке $[c_{i-1}, c_i]$. При этом замкнутая область $\overline{D}$ представляется в виде $\overline{D} = \bigcup_{i=1}^k \overline{D}_i$, где

$$D_i := \{(x,y)\colon \varphi(y) < x < \psi(y),\ c_{i-1} < y < c_i\}$$

— трапеции, каждая из которых является простой областью относительно оси $Ox$ (рис. 3).

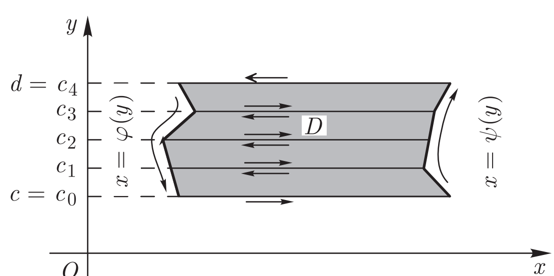



Рис. 3

По доказанному на шаге 1

$$\iint\limits_{D_i} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int\limits_{\partial D_i^+} P\,dx, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Сложим полученные равенства почленно. Из аддитивности двойного интеграла относительно областей интегрирования, в левой части получим

$$\sum_{i=1}^{k} \iint\limits_{D_i} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \iint\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy.$$

В правой же части получим

$$\sum_{i=1}^{k} \left( -\int\limits_{\partial D_i^+} P\, dx \right) = -\int\limits_{\partial D^+} P\, dx,$$

поскольку при сложении криволинейных интегралов по кривым $\partial D_i^+$ и $\partial D_{i+1}^+$ их части по отрезку

$$\{(x, y) \colon \varphi(c_i) \leqslant x \leqslant \psi(c_i),\ y = c_i\}$$

взаимно уничтожаются как криволинейные интегралы второго рода, отличающиеся лишь ориентацией кривой. Таким образом, формула (4) доказана.

Шаг 3. Установим (4) в случае, когда область $D$ простая относительно оси $Ox$, т. е. имеющая вид (2), причём $\psi - \varphi \geqslant 3h_0$ на $[c, d]$ при некотором $h_0 > 0$.

Пусть $0 < h < h_0$,

$$D_h := \{(x, y) \colon \varphi(y) + h < x < \psi(y) - h,\ c < y < d\} \subset D,$$
$$\Gamma_{1h} = \{(\varphi(y) + h, y) \colon c \leqslant y \leqslant d\},$$
$$\Gamma_{2h} = \{(\psi(y) - h, y) \colon c \leqslant y \leqslant d\}.$$

Кроме того, пусть

$$\Lambda_{1h\tau} = \{(\varphi_\tau(y) + h, y) \colon c \leqslant y \leqslant d\},$$
$$\Lambda_{2h\tau} = \{(\psi_\tau(y) - h, y) \colon c \leqslant y \leqslant d\}$$

— ломаные, вписанные соответственно в кривые $\Gamma_{1h}$, $\Gamma_{2h}$ и построенные с помощью разбиения $\tau$ отрезка $[c, d]$ изменения параметра $y$ (см. § 8.3). Мелкость $|\tau|$ разбиения $\tau$ будем считать достаточно малой. Пусть

$$D_{h,\tau} := \{(x, y) \colon \varphi_\tau(y) + h < x < \psi_\tau(y) - h,\ c < y < d\} \subset D.$$

В силу результата шага 2

$$\iint\limits_{D_{h,\tau}} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = -\int\limits_{\partial D_{h,\tau}^+} P\, dx.$$

Устремляя $|\tau|$ к нулю, приходим к формуле

$$\iint\limits_{D_h} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int\limits_{\partial D_h^+} P\,dx. \tag{6}$$

В самом деле, при $M = \max\{\max\limits_{[c,d]}|\varphi'|,\ \max\limits_{[c,d]}|\psi'|\}$ мера криволинейной трапеции с основаниями $y = c$ и $y = d$ и боковыми сторонами $x = \varphi(y) + h - M|\tau|$ и $x = \varphi(y) + h + M|\tau|$ ($x = \psi(y) - h - M|\tau|$ и $x = \psi(y) - h + M|\tau|$) равна $2M|\tau|(d-c)$. Следовательно,

$$\left|\iint\limits_{D_h} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy - \iint\limits_{D_{h,\tau}} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy\right| \leqslant \iint\limits_{(D_h\setminus D_{h,\tau})\cup(D_{h,\tau}\setminus D_h)} \left|\frac{\partial P}{\partial y}\right|\,dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\overline{D}}\left|\frac{\partial P}{\partial y}\right| 4M|\tau|(d-c) \to 0 \quad (|\tau| \to 0).$$

$$\int\limits_{\varLambda_{ih\tau}} P\,dx - \int\limits_{\varGamma_{ih}} P\,dx \to 0 \quad (|\tau| \to 0,\ i = 1,2)$$

по лемме 20.2.1.

При $h \to 0$ левая часть (6) стремится к $\iint\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$, так как

$$\left|\iint\limits_{D\setminus D_h} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy\right| \leqslant \max_{\overline{D}}\left|\frac{\partial P}{\partial y}\right| \mu(D\setminus D_h) = \max_{\overline{D}}\left|\frac{\partial P}{\partial y}\right| h(d-c).$$

Остаётся показать, что правая часть (6) стремится к $\int_{\partial D^+} P\,dx$ при $h \to 0$, и перейти к пределу в (6). Для этого достаточно установить, что

$$\int\limits_{\varGamma_{ih}} P\,dx \to \int\limits_{\varGamma_i} P\,dx \quad \text{при} \quad h \to 0 \quad (i = 1,2), \tag{7}$$

поскольку очевидно, что при $h \to 0$

$$\left(\int\limits_{\varphi(c)}^{\varphi(c)+h} + \int\limits_{\psi(c)-h}^{\psi(c)}\right)|P(x,c)|\,dx +$$

$$+\left(\int\limits_{\varphi(d)}^{\varphi(d)+h} + \int\limits_{\psi(d)-h}^{\psi(d)}\right)|P(x,d)|\,dx \to 0.$$

Для доказательства (7) при $i = 1$ выберем $y$ в качестве параметра на $\Gamma_1$ и на $\Gamma_{1h}$. Тогда, используя модуль непрерывности функции $P$ на $\overline{D}$, имеем

$$\left| \int\limits_{\Gamma_1} P\,dx - \int\limits_{\Gamma_{1h}} P\,dx \right| \leqslant \int\limits_c^d |P(\varphi(y), y) - P(\varphi(y) + h, y)|\,|\varphi'(y)|\,dy \leqslant$$
$$\leqslant \omega(h; P; \overline{D}) \max_{[c,d]} |\varphi'|(d - c) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Аналогично устанавливается (7) при $i = 2$.

Утверждение шага 3 доказано.

Шаг 4. Установим (4) для области $D$, простой относительно оси $Ox$, т. е. имеющей вид (2) с кусочно-гладкими кривыми (5). Здесь не исключаются случаи, когда $\varphi(c) = \psi(c)$ и (или) $\varphi(d) = \psi(d)$. Пусть $\varepsilon > 0$,

$$D_\varepsilon := \{(x, y)\colon \varphi(y) < x < \psi(y),\ c + \varepsilon < y < d - \varepsilon\}.$$

Формула (4) верна для области $D_\varepsilon$ в силу результата шага 3. Остаётся в (4) перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$.

Шаг 5. Установим (4) в условиях теоремы 1 при дополнительном предположении, что область $D$ может быть разрезана на конечное число простых областей $\{D_i\}_{i=1}^I$.

Напишем формулу (4) для каждой простой области $D_i$:

$$\iint\limits_{D_i} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int\limits_{\partial D_i^+} P\,dx \quad (i = 1, \ldots, I) \tag{8}$$

и сложим почленно эти равенства. Из аддитивности двойного интеграла относительно областей интегрирования и из равенства нулю интеграла по множеству нулевой меры получаем

$$\sum_{i=1}^I \iint\limits_{D_i} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \iint\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy. \tag{9}$$

При сложении правых частей (8) учтём, что

$$\partial D_i^+ = \partial' D_i^+ \cup \partial'' D_i^+,$$

где $\partial' D_i = \overline{D \cap \partial D_i}$, $\partial'' D_i = \partial D \cap \partial D_i$ — соответственно «внутренняя» и «внешняя» части границы $\partial D_i$. Ясно, что $\bigcup_{i=1}^I \partial'' D_i = \partial D$.

Пусть при $j \neq i$ множество $E_{ij} := \partial' D_i \cap \partial' D_j$ содержит более одной точки. Тогда оно представляет собой промежуток, наделённый противоположными ориентациями (положительной относительно $D_i$ и положительной относительно $D_j$). Поэтому при сложении правых частей (8) «части» криволинейных интегралов по $\partial D_i^+$ и по $\partial D_j^+$ (интегралы по промежуткам $E_{ij}$) взаимно уничтожатся. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{I} \int\limits_{\partial D_i^+} P\,dx = \sum_{i=1}^{I} \int\limits_{\partial'' D_i^+} P\,dx = \int\limits_{\partial D^+} P\,dx. \tag{10}$$

Из (9) и из (10) следует (4).

Итак, теорема 1 (формула (3)) установлена при дополнительном предположении, что область $D$ можно разрезать на конечное число простых областей.

Примерами таких областей являются, очевидно, круг и кольцо.

Ш а г 6. Для доказательства теоремы 1 в приведённой формулировке достаточно воспользоваться следующей леммой.

**Лемма 1.** *Ограниченная плоская область $D$ с границей $\partial D$, состоящей из конечного числа попарно не пересекающихся простых кусочно-гладких контуров $\mathit{\Gamma}_i$ ($\partial D = \bigcup_{i=1}^{I} \mathit{\Gamma}_i$), может быть разрезана на конечное число простых областей.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Идея состоит в том, чтобы покрыть область $D$ некоторым семейством замкнутых прямоугольников с попарно не пересекающимися внутренностями и получить требуемые простые области в качестве пересечения внутренности каждого из этих прямоугольников с $D$ либо в качестве такого пересечения с одним дополнительным разрезом.

До конца доказательства под прямоугольниками будем понимать замкнутые прямоугольники со сторонами, параллельными координатным осям.

Ш а г 1. Сначала построим покрытие границы $\partial D = \bigcup_{i=1}^{I} \mathit{\Gamma}_i$. Будем брать только прямоугольники, по диаметру меньшие достаточно малого числа $\delta > 0$. Тогда покрытия различных кривых $\mathit{\Gamma}_i$, $\mathit{\Gamma}_j$ ($i \neq j$) не пересекаются.

Точку границы $\partial D$ назовём *угловой*, если единичный вектор касательной к контуру $\mathit{\Gamma}_i$, проходящему через эту точку, не является в ней непрерывным. Граница $\partial D$ может либо не содержать угловых точек, либо иметь конечное число их. При наличии угловых точек покроем каждую из них прямоугольником (квадратом по форме) с центром в ней. Мы получим покрытие $\bigcup_{i=1}^{l} Q_i$ множества угловых точек. Без ограничения общности будем считать, что $\operatorname{dist}(Q_i, Q_j) > \delta$ при $i \neq j$. Прямоугольники $Q_i$ построенного покрытия $\bigcup_{i=1}^{l} Q_i$ назовём *угловыми*. Вблизи центра прямоугольника $Q_i$ граница $\partial D$ представляет собой кривую, составленную из двух простых дуг, имеющих в центре $Q_i$ односторонние касательные и отклоняющихся от этих касательных на величину, бесконечно малую по сравнению с расстоянием до центра. Будем считать $Q_i$ столь малыми по диаметру, что каждая из этих дуг пересекает под ненулевым углом ту же сторону $Q_i$, что и односторонняя касательная к ней в центре $Q_i$, и что

$$D_i = D \cap \operatorname{int} Q_i \quad (1 \leqslant i \leqslant l),$$

либо является простой областью, либо может быть разрезана (удалением интервала с концом в центре $Q_i$) на две простые области.

Шаг 2. Часть границы $\partial' D := \partial D \setminus \operatorname{int} \bigcup_{i=1}^{l} Q_i$ представляет собой конечное множество простых гладких кривых или простых гладких контуров. Для построения покрытия множества $\partial' D$ построим покрытие каждой кривой или контура в отдельности и объединим эти покрытия. Пусть, например, сначала

$$\varGamma = \{\mathbf{r}(t)\colon a \leqslant t \leqslant b\} \tag{11}$$

— простой гладкий контур и $\boldsymbol{\tau} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ — единичный вектор его касательной, где $\alpha = \alpha(t)$ — угол между $\boldsymbol{\tau}$ и положительным направлением оси $Ox$. Координаты $\boldsymbol{\tau}$, т. е. $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, непрерывно зависят от $t$.

Разобьём отрезок $[a, b]$ точками $\{t_j\}_{j=0}^{j^*}$ на конечное число отрезков так, чтобы для каждой дуги

$$\varGamma^{(j)} := \{\mathbf{r}(t)\colon t_{j-1} \leqslant t \leqslant t_j\}, \quad j = 1, \ldots, j^* \tag{12}$$

выполнялось либо неравенство

$$|\operatorname{tg}\alpha| < 2 \quad \text{на} \quad [t_{j-1}, t_j]$$

(такую дугу будем называть *дугой горизонтального типа*), либо неравенство

$$|\operatorname{ctg}\alpha| < 2 \quad \text{на} \quad [t_{j-1}, t_j]$$

(такую дугу будем называть *дугой вертикального типа*).

Такое разбиение отрезка $[a, b]$ нетрудно построить, используя равномерную непрерывность $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$.

Заметим, что в качестве параметра на дуге горизонтального типа можно взять координату $x$, а на дуге вертикального типа — координату $y$ точки.

Дополнительно будем считать, что дуги горизонтального и вертикального типов чередуются (если изначально это не так, то придём к этому, объединяя соседние дуги совпадающих типов). За счёт сдвига параметра можем считать, что первая и последняя дуги в (12) имеют разные типы.

Так, например, окружность $\{(\cos\theta, \sin\theta)\colon 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$ разбивается на пять дуг. При другой её параметризации

$$\left\{(\cos\theta, \sin\theta)\colon \frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant 2\pi + \frac{\pi}{4}\right\}$$

будет выполняться и последнее требование.

Точки $\widehat{r}(t_j)$, $(0 \leqslant j \leqslant j^* - 1)$, каждая из которых принадлежит двум дугам разных типов, будем называть *переходными* точками. Так, например, для рассмотренной окружности в качестве переходных можно взять четыре точки с параметрами $\theta = \frac{1}{4}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$.

Точки $\widehat{r}(t_{j-1})$, $\widehat{r}(t_j)$ дуги $\Gamma^{(j)}$ из (12) будем называть *концевыми*, а прямоугольник, граница которого содержит концевую точку, — *концевым*.

Построим для каждой дуги $\Gamma^{(j)}$ из (12) покрытие семейством замкнутых прямоугольников $\{P_{ji}\}_{i=1}^{i_j}$ со свойствами:

1° $\bigcup_{i=1}^{i_j} P_{ji} \supset \Gamma^{(j)}$;

2° $P_{ji} \cap \operatorname{int} P_{jk} = \varnothing$ при $i \neq k$;

3° пересечение $D_{ji} := D \cap \operatorname{int} P_{ji}$ $(1 \leqslant i \leqslant i_j)$ является простой областью;

4° каждая из концевых точек дуги $\Gamma^{(j)}$ находится в вершине (единственного) концевого прямоугольника этого семейства.

Покажем, как осуществить это построение, например, в случае, когда $\Gamma^{(j)}$ из (12) — дуга горизонтального типа. Переходя к параметру $x$, запишем $\Gamma^{(j)}$ в виде

$$\Gamma^{(j)} = \{(x, \psi(x))\colon x_* \leqslant x \leqslant x^*\}, \quad |\psi'| \leqslant 2 \quad \text{на} \quad [x_*, x^*].$$

Пусть $\tau^* = \{x_i\}_0^{i_j}$ — разбиение отрезка $[x_*, x^*]$ на равные отрезки $[x_{i-1}, x_i]$. Пусть $P_{ji}$ — прямоугольник, проекция которого на $Ox$ есть $[x_{i-1}, x_i]$, центр находится в точке $\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}, \psi\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)\right)$, а вертикальная сторона вдвое больше горизонтальной. При этом мелкость $|\tau^*|$ разбиения $\tau^*$, а значит, и $\operatorname{diam} P_{ji}$ мы можем взять сколь угодно малыми.

Выполнение свойств 1°, 2°, 3° очевидно. Если для построенного покрытия свойство 4° в точке $\widehat{r}(t_{j-1})$ $(\widehat{r}(t_j))$ не выполняется, то прямоугольник $P_{j1}$ $(P_{ji_j})$ можно сдвинуть параллельно оси $Oy$, чтобы добиться выполнения этого свойства.

Такая возможность основана на том, что в переходных точках $1/2 \leqslant |\operatorname{tg}\alpha| \leqslant 2$, так что на $[x_0, x_1]$ и на $[x_{i_j-1}, x_{i_j}]$ выполняется оценка $1/4 \leqslant |\psi'| \leqslant 4$.

Пусть теперь кривая (11) не является контуром. Это означает, что её начало и конец лежат на сторонах угловых прямоугольников (различных или одного и того же). Рассуждая так же, как в случае, когда кривая является контуром, построим для каждой её дуги из (12) покрытие семейством прямоугольников $\{P_{ji}\}_{i=1}^{i_j}$ со свойствами 1°, 2°, 3° и 4°°, 5°, где последние два свойства формулируются следующим образом:

4°° каждая из концевых точек $\widehat{r}(t_{j-1})$, $\widehat{r}(t_j)$ совпадает с вершиной одного из концевых прямоугольников, если касательная $\Gamma^{(j)}$ в ней не параллельна ни одной из осей координат, либо с серединой стороны одного из концевых прямоугольников, если касательная в ней параллельна одной из координатных осей;

5° $\operatorname{int} P_{ji}$ не пересекается ни с одним из угловых прямоугольников $Q_k$.

Перенумеровав заново все построенные прямоугольники $P_{ji}$ для всех простых гладких дуг из $\partial' D$, получим семейство $\{P_j\}_{j=1}^m$ прямоугольников, попарно не имеющих общих внутренних точек и таких, что

$$\left(\bigcup_{i=1}^{l} Q_i\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} P_j\right) \supset \partial D.$$

Проведём прямые, содержащие все стороны всех прямоугольников $Q_i$ и $P_j$. Из образовавшихся таким образом (замкнутых) прямоугольников занумеруем и обозначим через $R_k$ $(1 \leqslant k \leqslant r)$ те, которые пересекаются с $D$, но не имеют общих внутренних точек ни с одним из прямоугольников $Q_i$ и $P_j$. Тогда $R_k \subset \overline{D}$. В самом деле, допустив, что в $R_k$ имеются точки из $D$ и из $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$, на соединяющем их отрезке получим точку $(x^*, y^*) \in (\partial D) \cap \operatorname{int} R_k$. Следовательно, $R_k$ имеет общую внутреннюю точку с тем прямоугольником $Q_i$ или $P_j$, который содержит точку $(x^*, y^*)$, а это противоречит построению $R_k$. Следовательно, $D \cap \operatorname{int} R_k = \operatorname{int} R_k$ есть простая область.

Итак, показано, что

$$D \subset \left(\bigcup_{i=1}^{l} Q_i\right) \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{m} P_j\right) \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{r} R_k\right),$$

где $(l + m + r)$ прямоугольников попарно не имеют общих внутренних точек, пересечения $D \cap \operatorname{int} P_j$ и $D \cap \operatorname{int} R_k$ являются простыми областями, а пересечение $D \cap \operatorname{int} Q_i$ либо является простой областью, либо может быть разрезано на две простые области.

Лемма доказана.

Заметим, что формула Грина имеет определённую аналогию с формулой Ньютона–Лейбница: интеграл от производных по области интегрирования выражается через значения функции на границе этой области.

Формулу Грина можно использовать для вычисления площади области с помощью криволинейного интеграла по её границе. Для этого в качестве $(P(x,y), Q(x,y))$ возьмём $(0,x)$, либо $\left(-\frac{y}{2}, \frac{x}{2}\right)$, либо $(-y, 0)$.

Тогда $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ и по формуле Грина

$$\mu D = \int\limits_{\partial D^+} x\,dy = \frac{1}{2} \int\limits_{\partial D^+} -y\,dx + x\,dy = -\int\limits_{\partial D^+} y\,dx. \tag{13}$$

## § 20.4. Геометрический смысл знака якобиана плоского отображения

Изложим два подхода к выяснению геометрического смысла знака якобиана плоского отображения.

**Первый подход.** Для двух векторов

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + 0\mathbf{k},$$
$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

из формулы

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} (\mathbf{i} \times \mathbf{j})$$

видно, что знак определителя

$$\operatorname{sgn} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

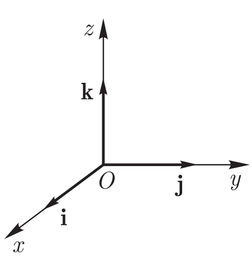


Рис. 1

показывает направление кратчайшего поворота от вектора $\mathbf{a}$ к вектору $\mathbf{b}$. Именно, при

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} > 0 \quad (< 0)$$

кратчайший поворот от $\mathbf{a}$ к $\mathbf{b}$ производится в плоскости $Oxy$ против (по) часовой стрелки (рис. 1).

Пусть задано взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое отображение

$$\mathcal{F}\colon \begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

области $G$ плоскости $Ouv$, содержащей две пересекающиеся гладкие ориентированные кривые, на область в плоскости $Oxy$ (рис. 2):

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \{(u,v)\colon u = u_1(t), v = v_1(t)\}, \\ \gamma_2 &= \{(u,v)\colon u = u_2(t), v = v_2(t)\}, \\ \mathcal{F}\gamma_1 &= \{(x,y)\colon x = x_1(t), y = y_1(t)\}, \\ \mathcal{F}\gamma_2 &= \{(x,y)\colon x = x_2(t), y = y_2(t)\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} x_1(t) &:= x(u_1(t), v_1(t)), \quad & y_1(t) &:= y(u_1(t), v_1(t)), \\ x_2(t) &:= x(u_2(t), v_2(t)), \quad & y_2(t) &:= y(u_2(t), v_2(t)). \end{aligned}$$

Рассмотрим направление кратчайшего поворота от касательного вектора к кривой $\gamma_1$ до касательного вектора к кривой $\gamma_2$ в точке пересечения кривых и сравним его с соответствующим

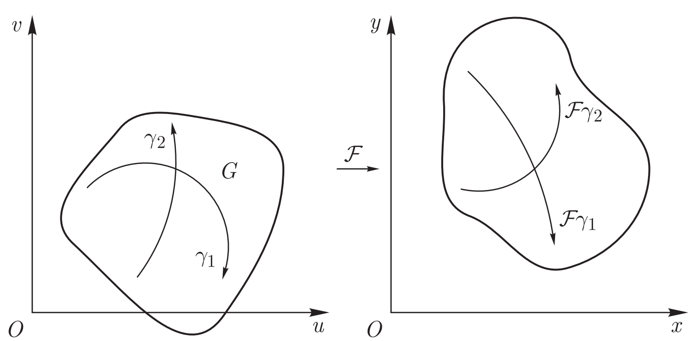



Рис. 2

направлением для их образов $\mathcal{F}\gamma_1$, $\mathcal{F}\gamma_2$. Как мы видели, для этого достаточно сравнить знаки определителей, составленных из координат соответствующих касательных векторов. Имеем

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} & \dfrac{dx_2}{dt} \\ \dfrac{dy_1}{dt} & \dfrac{dy_2}{dt} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'_u u'_1 + x'_v v'_1 & x'_u u'_2 + x'_v v'_2 \\ y'_u u'_1 + y'_v v'_1 & y'_u u'_2 + y'_v v'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u'_1 & u'_2 \\ v'_1 & v'_2 \end{vmatrix} = \\ = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \begin{vmatrix} u'_1 & u'_2 \\ v'_1 & v'_2 \end{vmatrix}.$$

В столбцах определителей в левой части последнего равенства стоят координаты касательных векторов к $\gamma_1$, $\gamma_2$ (правый определитель) и к $\mathcal{F}\gamma_1$, $\mathcal{F}\gamma_2$ (левый определитель). Сравнивая знаки этих определителей, приходим к выводу, что при $J(u,v) := \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} > 0$ $(< 0)$ направление кратчайшего поворота от первого касательного вектора ко второму после отображения *сохраняется* (*меняется на противоположное*).

Пусть теперь гладкая кривая $\gamma_1$ является частью границы некоторой области $D$, замыкание которой содержится в $G$. Пусть $\gamma_1$ ориентирована положительно относительно $D$. Сравним ориентацию кривой $\gamma_1$ относительно $D$ и ориентацию кривой $\Gamma_1 = \mathcal{F}(\gamma_1)$ относительно $\mathcal{F}(D)$. Возьмём пересекающуюся с $\gamma_1$ кривую $\gamma_2$ с касательным вектором в точке пересечения, направленным по нормали к $\gamma_1$ внутрь области $D$. Из предыдущего видно, что возможны различные случаи, показанные на рис. 3 ($\Gamma_2 = \mathcal{F}(\gamma_2)$).

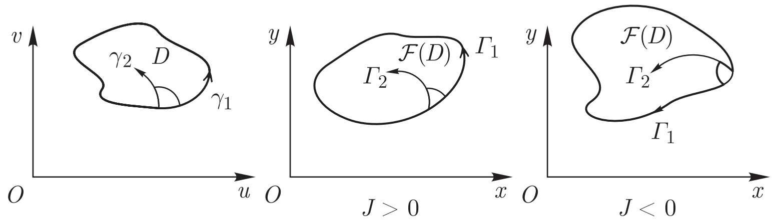



Рис. 3

Таким образом, приходим к окончательной формулировке геометрического смысла знака якобиана плоского отображения.

*Отображение с положительным якобианом сохраняет направление кратчайшего поворота от одной из пересекающихся кривых до другой, а также ориентацию кривой, являющейся частью границы области $D$, относительно $D$.*

*При отрицательном якобиане указанные направления кратчайшего поворота и ориентация относительно области меняются на противоположные.*

**Второй подход** основан на использовании формулы Грина. Пусть снова

$$\mathcal{F} = \begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

— взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое отображение некоторой области $G$ плоскости $Ouv$.

Пусть ограниченная область $D \subset \overline{D} \subset G$, и пусть якобиан

$$J(u,v) := \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0 \quad \text{на} \quad G.$$

Тогда $J(u,v)$ сохраняет знак на $G$, т. е. является на $G$ либо положительным, либо отрицательным (см. теорему 10.5.4). Следовательно, $D^* := \mathcal{F}(D)$ также является ограниченной областью плоскости $Oxy$ (теорема 12.3.4).

Пусть $\varGamma := \partial D$ является простым кусочно-гладким контуром. Тогда

$$\varGamma^* := \mathcal{F}(\varGamma) = \mathcal{F}(\partial D) = \partial D^*$$

(доказательство последнего равенства совпадает с доказательством утверждения 1° леммы 19.4.2) также является простым кусочно-гладким контуром. В самом деле, пусть

$$\varGamma_i = \{(u(t), v(t))\colon a_{i-1} \leqslant t \leqslant a_i\}$$

— гладкая кривая, $\bigcup_{i=1}^{k} \varGamma_i = \varGamma$. Тогда по теореме о дифференцируемости сложной функции

$$\varGamma_i^* := \mathcal{F}(\varGamma_i) = \{(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)))\colon a_{i-1} \leqslant t \leqslant a_i\}$$

является непрерывно дифференцируемой кривой. Кроме того,

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_u \dfrac{du}{dt} + x'_v \dfrac{dv}{dt} \\ y'_u \dfrac{du}{dt} + y'_v \dfrac{dv}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{du}{dt} \\ \dfrac{dv}{dt} \end{pmatrix},$$

причём определитель этой системы уравнений $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$. Поэтому из неравенства $\left(\dfrac{du}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dv}{dt}\right)^2 > 0$ следует, что $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 > 0$, т. е. что кривая $\varGamma_i^*$ не имеет особых точек и, значит, является гладкой. Предполагая для определённости, что ориентация контура $\varGamma := \{(u(t), v(t))\colon a \leqslant t \leqslant b\}$, определяемая возрастанием параметра $t$, положительна относительно области $D$, обозначим ориентированный таким образом контур $\varGamma$ через $\varGamma^+$. При этом ориентация контура $\varGamma^*$, порождаемая ориентацией контура $\varGamma^+$, может оказаться как положительной, так и отрицательной относительно области $D^*$. Контур $\varGamma^*$ с такой ориентацией относительно области $D^*$ обозначим через $\varGamma^{*\pm}$. В силу (20.3.13) имеем

$$\mu D^* = \pm \int\limits_{\varGamma^{*\pm}} x\,dy = \pm \int\limits_a^b x y'_t\,dt = \pm \int\limits_a^b x \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right) dt =$$

$$= \pm \int\limits_{\varGamma^{\pm}} x\frac{\partial y}{\partial u}\,du + x\frac{\partial y}{\partial v}\,dv.$$

Положим $x\dfrac{\partial y}{\partial u} = P$, $x\dfrac{\partial y}{\partial v} = Q$. Тогда

$$\frac{\partial Q}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + x\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}, \quad \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} + x\frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u}.$$

Дополнительно предположим, что на области $G$ непрерывны, а следовательно, и равны производные $\dfrac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}$, $\dfrac{\partial^2 y}{\partial v \partial u}$. Применяя к последнему интегралу формулу Грина (3), получаем, что в зависимости от ориентации контура $\Gamma^*$

$$\mu D^* = \pm \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}\right) du\, dv = \pm \iint\limits_D \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\, du\, dv. \qquad (1)$$

В силу положительности левой части этой цепочки равенств положительна и правая часть, так что в области $G$

$$\pm\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| > 0.$$

Рассматривая отдельно случаи различной ориентации контура $\Gamma^*$ (т. е. $\Gamma^{*+}$ и $\Gamma^{*-}$) и соответственно этому беря знаки в (1), приходим к следующему выводу.

*Ориентация граничного контура относительно области в случае положительного якобиана отображения сохраняется, а в случае отрицательного якобиана меняется на противоположную.*

Отметим ещё, что равенство (1) можно переписать в виде $\mu D^* = \iint\limits_D \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\, dv$. Таким образом, при иных (сделанных здесь) предположениях получено новое доказательство формулы (19.5.11), из которой с помощью теоремы о среднем вытекает и формула (19.4.3) (геометрический смысл модуля якобиана отображения).

## § 20.5. Потенциальные векторные поля

**Определение 1.** Векторное поле $\mathbf{a} = (P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$, заданное на области $G \subset \mathbb{R}^3$, называется *потенциальным* на области $G$, если существует непрерывно дифференцируемая функция $U\colon G \to \mathbb{R}$ такая, что

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial U}{\partial z} \quad \text{на} \quad G. \qquad (1)$$

Функцию $U$ называют при этом *потенциальной функцией* поля $\mathbf{a}$, или *потенциалом* поля $\mathbf{a}$.

Если функция $U$ является потенциалом поля $\mathbf{a}$, то функция $U + C$, где $C$ — произвольная постоянная, также является потенциалом поля $\mathbf{a}$.

**Упражнение 1.** Показать, что верно и обратное (это будет ясно и из дальнейшего): если $U$, $V$ — два потенциала поля $\mathbf{a}$ в области $G$, то $V = U + C$ на $G$, где $C$ — некоторая постоянная.

Равенства (1) можно иначе записать так:

$$\mathbf{a} = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k} = \operatorname{grad} U = \nabla U, \tag{2}$$

или

$$dU = P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

где $\nabla$ (*набла*) — символический вектор

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Интеграл $\int_\Gamma (\mathbf{a}, d\mathbf{r})$ по контуру $\Gamma$ называют *циркуляцией векторного поля* $\mathbf{a}$ по контуру $\Gamma$.

**Теорема 1.** *Пусть $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ — непрерывное поле в области $G$. Тогда следующие условия эквивалентны.*

I. *Поле $\mathbf{a}$ потенциально в области $G$.*

II$'$. *Для любого кусочно-гладкого контура $\Gamma \subset G$*

$$\int_\Gamma (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = 0.$$

II$''$. *Для любых двух фиксированных точек $A$, $B \in G$ значение интеграла*

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}),$$

*где $\overset{\frown}{AB}$ — произвольная кусочно-гладкая кривая, лежащая в области $G$ и соединяющая точки $A$ и $B$, не зависит от кривой.*

Доказательство. Установим сначала, что II$' \Leftrightarrow$ II$''$. Пусть выполняется II$'$, и пусть $\Gamma_1^+$, $\Gamma_2^+$ — две кривые, лежащие в $G$, начала которых находятся в точке $A$, а концы — в точке $B$. Тогда $\Gamma_1^+ \cup \Gamma_2^-$ является ориентированным контуром и в силу II$'$

$$\int_{\Gamma_1^+} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) + \int_{\Gamma_2^-} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = 0.$$

Заменив во втором интеграле ориентацию кривой $\Gamma_2^-$ на противоположную, получаем

$$\int\limits_{\Gamma_1^+} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) - \int\limits_{\Gamma_2^+} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = 0,$$

т. е. утверждение II$''$.

Пусть выполняется II$''$, и пусть произвольный кусочно-гладкий контур $\Gamma^+ \subset G$. Пусть $A, B \in \Gamma$ и кривые $\Gamma_1^+ := \overset{\frown}{AB}$, $\Gamma_2^+ := \overset{\frown}{BA}$ являются дугами контура $\Gamma^+$, причём ориентация каждой из них совпадает с ориентацией контура $\Gamma^+$.

Тогда $\Gamma_1^+$ и $\Gamma_2^-$ — две кусочно-гладкие кривые с началами в $A$ и концами в $B$. В силу II$''$

$$\int\limits_{\Gamma^+} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int\limits_{\Gamma_1^+} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) + \int\limits_{\Gamma_2^+} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int\limits_{\Gamma_1^+} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) - \int\limits_{\Gamma_2^-} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = 0,$$

т. е. выполняется II$'$.

Покажем, что I $\Rightarrow$ II$''$. Пусть $U$ — потенциал, $\overset{\frown}{AB} = \{(x(t), y(t), z(t))\colon \ a \leqslant t \leqslant b\}$ — кусочно-гладкая кривая, лежащая в области $G$. Тогда

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_a^b [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) +$$
$$+ Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)]\,dt =$$
$$= \int\limits_a^b \frac{d}{dt}\, U(x(t), y(t), z(t))\,dt = U(x(t), y(t), z(t))\Big|_a^b =$$
$$= U(B) - U(A).$$

Покажем, наконец, что II$''$ $\Rightarrow$ I. Пусть $A_0$ — фиксированная, а $B(x, y, z)$ — произвольная точки области $G$. Рассмотрим функцию

$$U(B) = U(x, y, z) := \int\limits_{\overset{\frown}{A_0B}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz, \tag{3}$$

где $\overset{\frown}{A_0B}$ — кусочно-гладкая кривая, лежащая в $G$. Такое определение функции $U$ корректно, так как в силу II$''$ правая часть (3) зависит лишь от $B(x, y, z)$, т. е. от переменных $x$, $y$, $z$. Поэтому правую часть (3) нередко записывают в виде

$\int_{A_0}^{B} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$. Покажем, что $U$ является потенциалом поля $\mathbf{a}$, т. е. что выполняются равенства (1), из которых докажем лишь первое.

Пусть $B_0 = B_0(x_0, y_0, z_0) \in G$. Установим равенство

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = P(x_0, y_0, z_0) \tag{4}$$

непосредственным вычислением производной $\dfrac{\partial U}{\partial x}$. Пусть $U(x_0, y_0, z_0)$ и $U(x_0 + \Delta x, y_0, z_0)$ представлены в виде (3) соответственно с помощью кривых $\overset{\frown}{A_0B_0}$ и $\overset{\frown}{A_0B} := \overset{\frown}{A_0B_0} \cup \overline{B_0B}$, где $\overline{B_0B}$ — отрезок, соединяющий точки $B_0$ и $B$. Тогда

$$\Delta U := U(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - U(x_0, y_0, z_0) =$$
$$= \int\limits_{\overline{BB_0}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} P(x, y_0, z_0)\,dx.$$

При получении последнего равенства использовано определение криволинейного интеграла через определённый интеграл по параметру, в качестве которого выбран $x$ (так что $x'_x = 1$, $y'_x = 0$, $z'_x = 0$). Тогда

$$\left|\frac{\Delta U}{\Delta x}(x_0, y_0, z_0) - P(x_0, y_0, z_0)\right| =$$
$$= \left|\frac{1}{\Delta x}\int\limits_0^{\Delta x} [P(x_0 + \xi, y_0, z_0) - P(x_0, y_0, z_0)]\,d\xi\right| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{|\xi| \leqslant |\Delta x|} |P(x_0 + \xi, y_0, z_0) - P(x_0, y_0, z_0)| \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0,$$

поскольку функция $P$ непрерывна в точке $(x_0, y_0, z_0)$.

Таким образом, равенство (4) установлено и теорема доказана.

**Замечание 1.** При доказательстве потенциальности поля $\mathbf{a}$ в условиях II$''$ мы не только доказали существование потенциала, но и выразили его через координаты вектора $\mathbf{a}$ в виде формулы (3).

Представляет интерес найти простые (в отличие от II$'$ или II$''$) условия потенциальности поля $\mathbf{a}$. Введём в рассмотрение *ротор*, или *вихрь* поля $\mathbf{a}$:

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} := \nabla\times\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}. \quad (5)$$

**Определение 2.** Определённое на области $G$ векторное поле $\mathbf{a}$ называется *безвихревым*, если $\operatorname{rot}\mathbf{a} = \mathbf{0}$ на $G$.

**Теорема 2.** *Пусть* $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ — *непрерывно дифференцируемое в области* $G \subset \mathbb{R}^3$ *векторное поле. Тогда:*

$1^\circ$ *если поле* $\mathbf{a}$ *потенциально, то* $\operatorname{rot}\mathbf{a} = \mathbf{0}$*;*

$2^\circ$ *если область* $G$ *поверхностно односвязна*[1]*, а в плоском случае* ($G \subset \mathbb{R}^2$, $R \equiv 0$, $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$) *односвязна, и* $\operatorname{rot}\mathbf{a} = \mathbf{0}$ *на области* $G$*, то поле* $\mathbf{a}$ *потенциально.*

Доказательство. Докажем $1^\circ$, т. е. равенства

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0. \quad (6)$$

Перепишем последнее равенство в виде

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = 0.$$

Для его обоснования достаточно сослаться на теорему о независимости второй смешанной производной от порядка дифференцирования, если каждая из вторых производных непрерывна.

Аналогично устанавливаются и два других равенства в (6).

Доказательство утверждения $2^\circ$ (после разъяснения встречающихся в нём понятий) для плоского случая будет приведено в теореме 3, а для трёхмерного случая будет получено позднее (§ 23.3) как следствие из формулы Стокса.

Следующий пример показывает, что без каких-либо предположений о геометрических свойствах области $G$ безвихревое поле не обязательно является потенциальным.

**Пример 1.** Пусть поле

$$\mathbf{a} = (P(x, y), Q(x, y)) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right)$$

задано во всех точках плоскости, кроме начала координат. Тогда

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{при} \quad (x, y) \neq (0, 0),$$

[1] Понятие поверхностной односвязности содержится в определении 23.4.2.

так что $\operatorname{rot} \mathbf{a} = \mathbf{0}$. Однако поле $\mathbf{a}$ не является потенциальным, так как отлична от нуля его циркуляция по окружности

$$C_R = \{(R\cos\theta, R\sin\theta)\colon 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}:$$

$$\int\limits_{C_R} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int\limits_0^{2\pi} \left[-\frac{R\sin\theta}{R^2} R(-\sin\theta) + \frac{R\cos\theta}{R^2} R\cos\theta\right] d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

**Определение 3.** Плоская область $G$ называется *односвязной*, если для всякой ограниченной плоской области $D$, границей $\partial D$ которой является простой кусочно-гладкий контур, из условия $\partial D \subset G$ следует $D \subset G$.

Односвязность $G$ означает, грубо говоря, что область $G$ не имеет «дыр».

**Теорема 3.** *Пусть на плоской односвязной области $G$ задано непрерывно дифференцируемое векторное поле $\mathbf{a} = (P, Q)$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$ на $G$.*

*Тогда на $G$ поле $\mathbf{a}$ потенциально.*

Доказательство. Достаточно (в силу теоремы 1 и леммы 20.2.1) показать, что $\int_\Gamma (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = 0$ для любого простого контура $\Gamma \subset G$. Пусть такой контур $\Gamma$ является границей ограниченной области $D$ ($\partial D = \Gamma$). По формуле Грина

$$\int\limits_{\partial D^+} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = 0.$$

Теорема доказана.

**Замечание 2.** Везде в этом параграфе вместо кусочно-гладких кривых можно было бы брать ломаные. В силу леммы 20.2.1 об аппроксимации криволинейного интеграла все определения и полученные при этом утверждения оказались бы эквивалентными приведённым.

Глава 21

# ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

## § 21.1. Гладкие поверхности

Для описания и изучения поверхностей будем пользоваться вектор-функциями двух переменных. В соответствии с общим определением функции (отображения) будем говорить, что на множестве $E \subset \mathbb{R}^2$ задана вектор-функция $\mathbf{r}$: $E \to \mathbb{R}^3$, если каждой точке $(u, v) \in E$ поставлен в соответствие трёхмерный вектор

$$\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbb{R}^3. \tag{1}$$

Здесь $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ — евклидовы пространства. Числовые функции $x$, $y$, $z$ называют *координатными функциями*.

Аналогично соответствующим понятиям вектор-функции одного переменного и числовой функции двух переменных вводятся понятия предела, непрерывности, дифференцируемости и др. для вектор-функции двух переменных.

Вектор $\mathbf{a}$ называется *пределом* вектор-функции $\mathbf{r}$ вида (1) при $(u, v) \to (u_0, v_0)$ по множеству $E$, если $(u_0, v_0)$ — предельная точка множества $E$ и

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon |\mathbf{r}(u, v) - \mathbf{a}| < \varepsilon \qquad \forall\, (u, v) \in E \cap \mathring{U}_\delta(u_0, v_0).$$

При этом пишут

$$\lim_{E \ni (u,v) \to (u_0, v_0)} \mathbf{r}(u, v) = \mathbf{a},$$

а если при этом $\mathring{U}_\delta(u_0, v_0) \subset E$ при некотором $\delta > 0$, то пишут

$$\lim_{(u,v) \to (u_0, v_0)} \mathbf{r}(u, v) = \mathbf{a}.$$

Вектор-функцию $\mathbf{r}$ называют *непрерывной в предельной точке* $(u_0, v_0) \in E$, если

$$\lim_{E \ni (u,v) \to (u_0, v_0)} \mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}(u_0, v_0).$$

*Частная производная* $\mathbf{r}'_u(u_0, v_0)$ в точке $(u_0, v_0)$ определяется равенством

$$\mathbf{r}'_u(u_0, v_0) \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0) = \left.\frac{d\mathbf{r}(u, v_0)}{du}\right|_{u = u_0}.$$

Аналогично определяются частная производная $\mathbf{r}'_v \equiv \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ и частные производные высших порядков.

Понятия предела, непрерывности, дифференцируемости и др. можно сформулировать эквивалентным образом в терминах координатных функций (ср. § 8.1).

Часто в качестве области определения $E \subset \mathbb{R}^2$ вектор-функции (1) будем брать замкнутую область (т. е. замыкание области). В этом случае будем говорить, что производная $\mathbf{r}'_u$ непрерывна на замыкании $\overline{D}$ области $D$, если она непрерывна на области $D$ и функция $\mathbf{r}'_u$ после подходящего доопределения на границе $\partial D$ становится непрерывной на $\overline{D}$. То же относится и к другим производным вектор-функции $\mathbf{r}$.

**Определение 1.** Множество точек $S \subset \mathbb{R}^3$ вместе с его конкретным описанием

$$S = \{(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\colon (u,v) \in \overline{D}\}, \tag{2}$$

где замкнутая область $\overline{D} \subset \mathbb{R}^2$, а функции $x$, $y$, $z$ непрерывно дифференцируемы на $\overline{D}$ и

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix} = 2 \text{ на } \overline{D}, \tag{3}$$

будем называть (*параметрически заданной*) *гладкой поверхностью* [1]).

Переменные $u$, $v$ называются *параметрами* поверхности (2), или её *координатами*.

Ту же поверхность можно задать в виде

$$S = \{\mathbf{r}(u,v)\colon (u,v) \in \overline{D}\} \quad \text{или} \quad S = \{\widehat{r}(u,v)\colon (u,v) \in \overline{D}\},$$

где $\mathbf{r}(u,v) := (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. Пару $\{(u,v),\ \widehat{r}(u,v)\}$ называют *точкой поверхности* $S$, а $u, v$ — *координатами* этой *точки*. Часто ради краткости точку $\widehat{r}(u,v) \in \mathbb{R}^3$ также называют *точкой поверхности* $S$.

В определении 1 не исключается, что через некоторую точку $M \in \mathbb{R}^3$ поверхность «проходит» не один раз, т. е. что при некоторых $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \overline{D}$

$$\widehat{r}(u_1, v_1) = \widehat{r}(u_2, v_2) = M.$$

[1]) С общей точки зрения естественнее было бы (2) называть (*параметрически заданным*) *куском поверхности*, оставив термин «(параметрически заданная) поверхность» за множеством, формально отличающимся от (2) лишь заменой замкнутой области $\overline{D}$ на область $D$. Мы будем придерживаться предложенной терминологии ради простоты записи.

Поверхность $S$ вида (2) называется *простой*, если отображение $\widehat{r}(u,v)\colon \overline{D} \to S$ является взаимно однозначным.

Пусть

$$S = \{\mathbf{r}(u,v)\colon (u,v) \in \overline{D}\} \tag{4}$$

— гладкая поверхность, $(u_0, v_0) \in \overline{D}$. Заметим, что пересечение $\overline{D}$ с прямой $v = v_0$ содержит, во всяком случае при $(u_0, v_0) \in D$, некоторый интервал, которому принадлежит точка $(u_0, v_0)$.

Множество

$$\{\mathbf{r}(u,v_0)\colon (u,v_0) \in \overline{D}\}$$

называется *координатной линией* $v = v_0$. Вектор $\mathbf{r}'_u = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (x'_u, y'_u, z'_u)$ является её *касательным вектором*. Аналогично определяется *координатная линия* $u = u_0$:

$$\{\mathbf{r}(u_0,v)\colon (u_0,v) \in \overline{D}\}$$

с касательным вектором

$$\mathbf{r}'_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (x'_v, y'_v, z'_v).$$

**Замечание 1.** Поскольку

$$\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}, \tag{5}$$

где

$$A = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \quad B = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \quad C = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},$$

то условие (3) можно записать в виде $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ или в виде $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v \neq \mathbf{0}$.

**Пример 1.** Поверхность

$$S_\varepsilon = \{(R\cos\varphi\cos\psi, R\sin\varphi\cos\psi, R\sin\psi)\colon$$
$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon\},\ R > 0,\ 0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2},$$

(сферический пояс) является гладкой параметрически заданной поверхностью.

Далее мы будем рассматривать гладкие параметрически заданные поверхности или поверхности, составленные из конечного числа таких поверхностей.

## § 21.2. Касательная плоскость и нормальная прямая

**Определение 1.** Плоскость, проходящая через точку $\{(u_0, v_0), \widehat{r}(u_0, v_0)\}$ гладкой поверхности (21.1.4) параллельно векторам $\mathbf{r}'_u(u_0, v_0)$, $\mathbf{r}'_v(u_0, v_0)$, называется *касательной плоскостью* к поверхности в этой точке.

Пусть гладкая кривая $\{(u(t), v(t))\colon a \leqslant t \leqslant b\} \subset D$, $(u_0, v_0) \in \in D$, $u(t_0) = u_0$, $v(t_0) = v_0$ при некотором $t_0$, $a < t_0 < b$. Тогда

$$\{\mathbf{r}(u(t), v(t))\colon a \leqslant t \leqslant b\} \tag{1}$$

— гладкая кривая, лежащая на поверхности и проходящая через данную точку $\{(u_0, v_0),\ \widehat{r}(u_0, v_0)\}$ поверхности. Касательный вектор этой кривой в точке $\{t_0,\ \widehat{r}(u_0, v_0)\}$ имеет вид

$$\mathbf{r}'_t(t_0) = \mathbf{r}'_u(u_0, v_0)u'_t(t_0) + \mathbf{r}'_v(u_0, v_0)v'_t(t_0),$$

т. е. является линейной комбинацией векторов $\mathbf{r}'_u$, $\mathbf{r}'_v$, а значит, параллелен касательной плоскости.

Следовательно, касательные по всем кривым (1) в точке $\{t_0,\ \widehat{r}(u_0, v_0)\}$ лежат в касательной плоскости к поверхности в точке $\{(u_0, v_0),\ \widehat{r}(u_0, v_0)\}$.

Исходя из определения, можно написать уравнение касательной плоскости к поверхности в векторной форме, используя смешанное произведение векторов:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v) = 0. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ — радиус-вектор точки касания, $\mathbf{r} = (x, y, z)$ — текущий радиус-вектор точки на касательной плоскости. В координатной форме уравнение (2) принимает вид

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

где $\mathbf{r}'_u = (x'_u, y'_u, z'_u)$, $\mathbf{r}'_v = (x'_v, y'_v, z'_v)$.

**Определение 2.** Прямая, проходящая через точку касания поверхности с касательной плоскостью и перпендикулярная касательной плоскости, называется *нормальной прямой* к поверхности в указанной точке.

**Определение 3.** Всякий ненулевой вектор, коллинеарный нормальной прямой, проходящей через данную точку поверхности, называется *нормалью* к поверхности в этой точке.

Нормалью к гладкой поверхности (21.1.4) в данной точке является, например, вектор $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v \neq \mathbf{0}$ (см. (21.1.5)).

Поэтому уравнения нормальной прямой имеют вид

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C},$$

или в подробной записи

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}}, \tag{4}$$

где $x_0=x(u_0,v_0)$, $y_0=y(u_0,v_0)$, $z_0=z(u_0,v_0)$, а производные $x'_u$, $x'_v$, $y'_u$, $y'_v$, $z'_u$, $z'_v$ берутся в точке $(u_0,v_0)$.

Поверхность

$$S=\{(x,y,f(x,y))\colon (x,y)\in\overline{D}\}, \tag{5}$$

где функция $f$ непрерывно дифференцируема на замкнутой области $\overline{D}$, называется *явно заданной гладкой поверхностью*. Это важный частный случай параметрически заданной гладкой поверхности (21.1.2).

Гладкая явно заданная поверхность является, очевидно, простой.

Для $\mathbf{r}(x,y)=(x,y,f(x,y))$ имеем:

$$\mathbf{r}'_x=(1,0,f'_x),\quad \mathbf{r}'_y=(0,1,f'_y),$$

$$\mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_y=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix}=-f'_x\mathbf{i}-f'_y\mathbf{j}+\mathbf{k}\neq\mathbf{0}. \tag{6}$$

Уравнение (3) касательной плоскости в точке $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ принимает вид

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ 1 & 0 & f'_x(x_0,y_0) \\ 0 & 1 & f'_y(x_0,y_0) \end{vmatrix}=0,$$

или иначе

$$z-z_0=(x-x_0)f'_x(x_0,y_0)+(y-y_0)f'_y(x_0,y_0), \tag{7}$$

а уравнения нормальной прямой в точке $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ имеют вид

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=-(z-z_0). \tag{8}$$

Определение явно заданной гладкой поверхности очевидным образом распространяется на случай, когда параметрами поверхности служат $y$ и $z$ или $z$ и $x$.

## § 21.3. Преобразование параметров гладкой поверхности

Изучим вопрос о преобразовании (замене) параметров на гладкой поверхности. Пусть $D$ — плоская область,

$$S = \{\mathbf{r}(u, v)\colon (u, v) \in \overline{D}\} \tag{1}$$

— параметрически заданная гладкая поверхность, так что вектор-функция $\mathbf{r}$ непрерывно дифференцируема на $\overline{D}$ и $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v \neq \mathbf{0}$.

Рассмотрим отображение (замену параметров)

$$\mathcal{F} = \begin{cases} u = \varphi(u_1, v_1), \\ v = \psi(u_1, v_1) \end{cases} : \overline{D}_1 \to \overline{D}, \tag{2}$$

где $D_1$ — область, и параметрически заданную поверхность

$$\widetilde{S} = \{\boldsymbol{\rho}(u_1, v_1)\colon (u_1, v_1) \in \overline{D}_1\},$$

где $\boldsymbol{\rho}(u_1, v_1) = \mathbf{r}(\varphi(u_1, v_1), \psi(u_1, v_1))$.

Будем считать поверхность $\widetilde{S}$ той же, что и $S$, но иначе параметризованной, если замена параметров (2) является *допустимой*, т. е. обладает свойствами:

1° $\mathcal{F}$ устанавливает взаимно однозначные отображения $\overline{D}_1 \leftrightarrow \overline{D}$, $D_1 \leftrightarrow D$ ($\Rightarrow \partial D_1 \leftrightarrow \partial D$);

2° $\mathcal{F}$ непрерывно дифференцируемо на $\overline{D}_1$ (т. е. функции $\varphi$, $\psi$ непрерывно дифференцируемы на $\overline{D}_1$), обратное отображение $\mathcal{F}^{-1}$ непрерывно дифференцируемо на $\overline{D}$;

3° $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(u_1, v_1)} \neq 0$ на $D_1$ ($\Rightarrow \dfrac{\partial(u_1, v_1)}{\partial(u, v)} \neq 0$ на $D$).

Замечая, что

$$\boldsymbol{\rho}'_{u_1} = \mathbf{r}'_u \varphi'_{u_1} + \mathbf{r}'_v \psi'_{u_1}, \quad \boldsymbol{\rho}'_{v_1} = \mathbf{r}'_u \varphi'_{v_1} + \mathbf{r}'_v \psi'_{v_1},$$

имеем

$$\boldsymbol{\rho}'_{u_1} \times \boldsymbol{\rho}'_{v_1} = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v \frac{\partial(u, v)}{\partial(u_1, v_1)}. \tag{3}$$

Поскольку каждый из якобианов в 3° ограничен и их произведение $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(u_1, v_1)} \cdot \dfrac{\partial(u_1, v_1)}{\partial(u, v)} = 1$ (см. (12.3.5)), то якобиан $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(u_1, v_1)} \neq 0$ на $\overline{D}_1$. Ясно, что отображение, обратное допустимому, также является допустимым. Из (3) следует, что при допустимом преобразовании параметров:

а) параметрически заданная гладкая поверхность переходит в параметрически заданную гладкую поверхность,

б) нормальная прямая и касательная плоскость к поверхности сохраняются.

Заметим, что не всякую гладкую параметрически заданную поверхность (1) можно представить в виде явно заданной гладкой поверхности с помощью замены параметров $u, v$ на $x, y$, или на $y, z$, или на $z, x$. Это невозможно сделать, в частности, для поверхности $S_\varepsilon$ из примера 21.1.1, которая не проектируется взаимно однозначно ни на одну из координатных плоскостей.

Однако *локально* такое преобразование параметров можно осуществить. В самом деле, поскольку на $D$

$$|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|^2 = A^2 + B^2 + C^2 = \\ = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2 > 0,$$

то в произвольной точке $(u_0, v_0) \in D$ один из трёх якобианов отличен от нуля. Пусть, например, $\left.\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)} \neq 0$. Тогда по теореме 12.3.3 о локальной обратимости отображения найдутся две окрестности $U(u_0, v_0)$ и $U(x_0, y_0)$ (где $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$) такие, что отображение $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v) \end{cases}$ является взаимно однозначным отображением $U(u_0, v_0) \leftrightarrow U(x_0, y_0)$, причём на $\overline{U}(x_0, y_0)$ обратное отображение $\begin{cases} u = u(x,y), \\ v = v(x,y) \end{cases}$ непрерывно дифференцируемо и его якобиан $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$. Сужая при необходимости указанные окрестности, можем каждую из них считать областью (см. теорему 12.3.4). Тогда часть

$$S^{(0)} = \{(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\colon (u,v) \in \overline{U}(u_0, v_0)\}$$

поверхности (1) после замены параметров $(u, v)$ на $(x, y)$ имеет представление

$$S^{(0)} = \{(x, y, f(x,y))\colon (x,y) \in \overline{U}(x_0, y_0)\},$$

где $f(x,y) = z(u(x,y), v(x,y))$.

## § 21.4. Ориентация гладкой поверхности

Пусть $S$ — гладкая параметрически заданная поверхность (21.3.1). Тогда единичный нормальный вектор

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|} \tag{1}$$

является непрерывной функцией на $\overline{D}$, равно как и вектор $-\mathbf{n} := (-1)\mathbf{n}$.

Вектор-функцию $\mathbf{n}$ (и $-\mathbf{n}$) называют непрерывным *полем единичных нормалей* поверхности $S$.

**Определение 1.** Всякое непрерывное поле единичных нормалей гладкой поверхности $S$ называется *ориентацией* (или *стороной*) *поверхности* $S$.

Поверхность $S$ (21.3.1), как имеющая две различные ориентации (стороны) $\mathbf{n}$ и $-\mathbf{n}$, называется *двусторонней* поверхностью.

Одна из этих двух ориентаций называется *положительной*, а другая — *отрицательной*. Для определённости за положительную ориентацию гладкой поверхности (21.3.1) (если не оговорено противное) примем поле нормалей (1).

Поверхность $S$ (21.3.1), у которой фиксирована одна из её ориентаций, называется *ориентированной* поверхностью. Ориентированную поверхность $S$ (21.3.1) с положительной ориентацией будем обозначать через $S^+$, а с отрицательной ориентацией — через $S^-$.

При замене параметров гладкой ориентированной поверхности в понятие допустимой замены параметров наряду с требованиями 1°, 2°, 3° (см. § 21.3) включим ещё требование

4° $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(u_1,v_1)} > 0$ на $D_1$.

Тогда, как видно из (21.3.3), при замене параметров гладкой поверхности выполняются не только свойства а), б), но ещё и свойство

в) сохраняется ориентация поверхности (т. е. положительно (отрицательно) ориентированная поверхность при её новом представлении остаётся положительно (отрицательно) ориентированной).

## § 21.5. Первая квадратичная форма гладкой поверхности

Пусть
$$S = \{\mathbf{r}(u,v)\colon (u,v) \in \overline{D}\}$$
— гладкая параметрически заданная поверхность. Это означает по определению, что $\mathbf{r}'_u$, $\mathbf{r}'_v$ непрерывны на замкнутой области $\overline{D}$ и $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v \neq \mathbf{0}$ на $\overline{D}$.

Рассмотрим дифференциал вектор-функции $\mathbf{r}$:
$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'_u\,du + \mathbf{r}'_v\,dv.$$

Тогда

$$|d\mathbf{r}|^2 = |\mathbf{r}'_u\,du + \mathbf{r}'_v\,dv|^2 = |\mathbf{r}'_u|^2du^2 + 2(\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v)\,du\,dv + |\mathbf{r}'_v|^2dv^2.$$

В обозначениях

$$E = |\mathbf{r}'_u|^2, \quad F = (\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v), \quad G = |\mathbf{r}'_v|^2 \tag{1}$$

получаем

$$|d\mathbf{r}|^2 = |\mathbf{r}'_u\,du + \mathbf{r}'_v\,dv|^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2. \tag{2}$$

**Определение 1.** Квадратичная форма $E du^2 + 2F\,du\,dv + G dv^2$ называется *первой квадратичной формой поверхности*, а $E$, $F$, $G$ — её *коэффициентами*.

Первая квадратичная форма поверхности положительно определённа, так как $|d\mathbf{r}|^2 = 0$ только при $du = 0$, $dv = 0$. Следовательно, дискриминант формы положителен: $EG - F^2 > 0$.

Кроме того, $E > 0$, $G > 0$.

Заметим, что

$$EG - F^2 = |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|^2, \tag{3}$$

так как если $\omega$ — угол между $\mathbf{r}'_u$ и $\mathbf{r}'_v$, то

$$EG - F^2 = |\mathbf{r}'_u|^2|\mathbf{r}'_v|^2 - |\mathbf{r}'_u|^2|\mathbf{r}'_v|^2\cos^2\omega = \\ = |\mathbf{r}'_u|^2|\mathbf{r}'_v|^2\sin^2\omega = |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|^2.$$

С помощью коэффициентов квадратичной формы поверхности можно вычислять площадь поверхности, длины кривых на поверхности и углы между такими кривыми.

## § 21.6. Неявно заданные гладкие поверхности

Пусть область $G \subset \mathbb{R}^3$, и пусть на $G$ функция $F\colon G \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема, причём $F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2 > 0$. Тогда множество точек

$$S = \{(x, y, z)\colon (x, y, z) \in G,\ F(x, y, z) = 0\}$$

будем называть *неявно заданной гладкой поверхностью*.

**Пример 1.** Неявно заданной гладкой поверхностью является сфера, определяемая уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $R > 0$.

Поверхность $S$ можно представить локально как явно заданную гладкую поверхность. В самом деле, пусть, например, $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ и $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Тогда по теореме о неявной функции на некоторой окрестности $U((x_0, y_0)) \times U(z_0)$ уравнение $F(x, y, z) = 0$ эквивалентно уравнению

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in U((x_0, y_0)),$$

где $f$ — непрерывно дифференцируемая на $U((x_0, y_0))$ функция,

$$f'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad f'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

В качестве нормали (см. (21.2.6)) удобно взять вектор

$$\operatorname{grad} F = F'_x \mathbf{i} + F'_y \mathbf{j} + F'_z \mathbf{k}.$$

Уравнение касательной плоскости в точке $(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$(x - x_0)F'_x(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)F'_y(x_0, y_0, z_0) + \\ + (z - z_0)F'_z(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

а уравнения нормальной прямой записываются в виде

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

Если рассмотреть *поверхность уровня* функции $F$, т. е. поверхность, определяемую уравнением $F(x, y, z) = c$, то из предшествующего следует, что $\operatorname{grad} F$ ортогонален поверхности уровня. Последнее свойство согласуется, конечно, с тем, что $\operatorname{grad} F$ указывает направление быстрейшего роста функции $F$.

## § 21.7. Кусочно-гладкие поверхности

В дальнейшем будет использовано понятие кусочно-гладкой поверхности, приводимое здесь для простейшего случая.

**Определение 1.** Гладкую параметрически заданную поверхность

$$S = \{\mathbf{r}(u, v)\colon (u, v) \in \overline{D}\} \tag{1}$$

назовём *элементарным гладким куском* поверхности (сокращённо — *гладким куском*, или *куском* поверхности), если граница $\partial D$ представляет собой простой кусочно-гладкий контур.

*Краем* $\partial S$ куска поверхности $S$ вида (1) назовём множество

$$\partial S := \{\mathbf{r}(u, v)\colon (u, v) \in \partial D\}. \tag{2}$$

Можно показать, что край $\partial S$ куска поверхности представляет собой кусочно-гладкий контур в $\mathbb{R}^3$, если параметризация края порождена параметризацией контура $\partial D$. Это очевидно, если вектор-функция $\mathbf{r}(u, v)$ непрерывно дифференцируема на некоторой окрестности $\overline{D}$.

Два куска поверхности

$$S_i = \{\mathbf{r}_i(u, v)\colon (u, v) \in \overline{D}_i\}, \quad i = 1, 2,$$

назовём *соседними*, если пересечение их краев $\partial S_1 \cap \partial S_2 = S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$ представляет собой объединение конечного числа кусочно-гладких кривых и, быть может, конечного числа точек.

**Определение 2.** Объединение $S = \bigcup\limits_{i=1}^{I} S_i$ кусков поверхности $S_i$ $(1 \leqslant i \leqslant I)$ называется *кусочно-гладкой поверхностью* при выполнении следующих условий:

$1^\circ$ для любых двух кусков поверхности $S_i$ и $S_j$ существует такой набор кусков поверхности $S_i = S_{i_1}$, $S_{i_2}$, ..., $S_{i_j} = S_j$, что любые два стоящие в нём рядом куска поверхности являются соседними;

$2^\circ$ если при $i \neq j$ пересечение $\partial S_i \cap \partial S_j$ содержит более чем конечное множество точек, то куски поверхности $S_i$ и $S_j$ являются соседними;

$3^\circ$ пересечение краёв $\partial S_i \cap \partial S_j \cap \partial S_k$ любых трёх различных кусков поверхности состоит из не более чем конечного числа точек.

Обозначим через $\partial^{(\mathrm{i})} S_j$ часть края $\partial S_j$ куска $S_j$ кусочно-гладкой поверхности $S$, состоящую из объединения всех кусочно-гладких кривых из $\bigcup\limits_{k \neq j} (\partial S_k \cap \partial S_j)$. Назовём $\partial^{(\mathrm{i})} S_j$ *внутренней частью края* $\partial S_j$, а $\partial^{(\mathrm{e})} S_j := \overline{\partial S_j \setminus \partial^{(\mathrm{i})} S_j}$ — *внешней частью края* $\partial S_j$.

*Краем* кусочно-гладкой поверхности $S$ назовём множество $\partial S := \bigcup\limits_{i=1}^{I} \partial^{(\mathrm{e})} S_i$. Край $\partial S$ является либо пустым множеством (в этом случае $S$ называется *поверхностью без края*), либо состоит из конечного числа кусочно-гладких контуров (в этом случае $S$ называется *поверхностью с краем*).

Так, например, край боковой поверхности пирамиды совпадает с краем её основания, а поверхность куба является кусочно-гладкой поверхностью без края.

**Замечание 1.** Понятия кусочно-гладкой поверхности $S$ и края $\partial S$ кусочно-гладкой поверхности можно было бы обобщить, если считать, что соседние куски $S_i$ и $S_j$ поверхности «склеиваются» не по всем кривым из $\partial S_i \cap \partial S_j$ (как в нашем случае), а лишь по некоторым избранным (при этом они не называются соседними, если в $\partial S_i \cap \partial S_j$ нет кривых «склейки»). При таком подходе краем $\partial S$ лежащего в плоскости $z = 0$ кольца с разрезом по радиусу можно считать объединение двух окружностей и этого разреза, а у последнего различать два «берега». Однако для наших дальнейших целей достаточно приведённых выше менее сложных определений соседних кусков поверхностей и края кусочно-гладкой поверхности.

Рассмотрим пример другой поверхности, называемой *листом Мёбиуса*. Он получится, если, взяв полоску бумаги прямоугольной формы, повернуть один из её концов вокруг средней линии на $180°$ и склеить оба конца. На листе Мёбиуса нельзя задать непрерывное поле нормалей. Такая поверхность называется *неориентируемой*, или *односторонней*. Разрезав же лист Мёбиуса по месту склейки концов, можно представить его как *ориентируемый*, т. е. *двусторонний*, кусок поверхности.

Установим связь между ориентацией гладкого куска поверхности $S$ вида (1) и ориентацией его края $\partial S$.

**Определение 3.** Пусть контур $\partial D$ ориентирован положительно относительно плоской области $D$. Тогда его ориентация индуцирует *ориентацию края* $\partial S$ поверхности $S$ (который как образ $\partial D$ является кусочно-гладким контуром в $\mathbb{R}^3$). Эта ориентация края $\partial S$ называется *согласованной с ориентацией* $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|}$ *гладкого куска поверхности*. Противоположная же ориентация края $\partial S$ называется *согласованной с ориентацией* $-\mathbf{n}$ гладкого куска поверхности $S$.

Выясним геометрический смысл понятия согласованности ориентаций. Пусть $S$ — явно заданный кусок поверхности вида (21.2.5), причём $D$ — круг малого радиуса, $\partial D$ — окружность, $f$ — непрерывно дифференцируемая на $\overline{D}$ функция. При положительной ориентации контура (окружности) $\partial D$ относительно $D$ эта окружность проходится против часовой стрелки.

Край $\partial S$ лежит на боковой поверхности кругового цилиндра с осью, параллельной оси $Oz$, и проекцией $\partial S$ на плоскость $z = 0$ является $\partial D$. Ориентация края $\partial S$ определяется тем, что при движении точки по $\partial S$ в направлении, задаваемом этой ориентацией, проекция этой точки движется по $\partial D$ против часовой стрелки.

В то же время нормаль $\mathbf{n} = \dfrac{-f'_x\mathbf{i} - f'_y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}}$ составляет острый угол с положительным направлением оси $Oz$.

Таким образом, ориентация $\mathbf{n}$ куска поверхности $S$ согласована с ориентацией $\partial S$ по *правилу штопора* (штопор движется в направлении $\mathbf{n}$, если его ручку вращать в соответствии с ориентацией $\partial S$).

Это же согласование ориентаций можно выразить иначе: если мы движемся по контуру $\partial S$ в направлении его ориентации так, что нормаль $\mathbf{n}$ пронизывает нас от ног к голове, то ближайшая часть куска поверхности $S$ остаётся слева. Последняя формулировка носит более общий характер, так как применима к произвольному явно заданному куску поверхности, а значит, и к произвольному параметрически заданному куску поверхности, в силу того, что каждый такой кусок поверхности можно локально представить в виде явно заданного куска поверхности — см. нижеследующую лемму.

**Лемма 1.** *Пусть $S$ — ориентированный гладкий кусок поверхности* (1)*. Тогда ориентация края $\partial S$, согласованная с ориентацией куска поверхности $S$, согласована и по правилу штопора.*

Доказательство. Для явно заданного гладкого куска поверхности утверждение леммы только что установлено. Общий случай рассмотрим лишь в предположении, что вектор-функция $\mathbf{r}(u,v)$ в (1) непрерывно дифференцируема на некоторой окрестности множества $\overline{D}$. Пусть ориентация куска $S$ задана нормалью $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|}$. Вопрос согласованности ориентаций достаточно решить локально, т. е. в сколь угодно малой окрестности произвольной точки $\widehat{r}(u_0,v_0) \in \partial S$ $((u_0,v_0) \in \partial D)$.

Для определённости будем считать, что $(\mathbf{n}(u_0,v_0), \mathbf{k}(u_0,v_0)) = \left.\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)} > 0$ (другие случаи рассматриваются аналогично). Привлекая теорему 12.3.3 о локальной обратимости непрерывно дифференцируемого отображения, можно показать, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$:

1° отображение $\mathcal{F} = \begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v) \end{cases}$ является взаимно однозначным отображением $\overline{D_\varepsilon} := \overline{D} \cap \overline{U_\varepsilon(u_0,v_0)} \leftrightarrow \overline{D^*_\varepsilon}$, $\partial D_\varepsilon \leftrightarrow \partial D^*_\varepsilon$, где $D^*_\varepsilon$ — область в плоскости $\mathbb{R}^2_{x,y}$ с кусочно-гладкой границей $\partial D^*_\varepsilon$;

2° $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} > 0$ на $\overline{D^*_\varepsilon}$, поскольку $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} > 0$ на $\overline{D_\varepsilon}$.

Рассмотрим гладкий кусок поверхности

$$S_\varepsilon := \{\mathbf{r}(u,v)\colon (u,v) \in \overline{D_\varepsilon}\} \subset S.$$

Замена параметров $u, v$ на параметры $x, y$ допустима для $S_\varepsilon$ (см. § 21.3), и $S_\varepsilon$ можно представить в виде

$$S_\varepsilon = \{(x,y,f(x,y))\colon (x,y) \in \overline{D^*_\varepsilon}\}, \tag{3}$$

где $(x,y,f(x,y)) = \widehat{r}(u(x,y),v(x,y)) = \widehat{\rho}(x,y)$.

Нормаль к куску поверхности $S_\varepsilon$, найденная по формуле (21.2.6), совпадает по направлению с исходной единичной нормалью $\mathbf{n}$ в силу (21.3.3) и 2°.

Ориентация $\partial D^*_\varepsilon$, порождённая ориентацией $\partial D_\varepsilon$, положительна относительно $D^*_\varepsilon$ в силу 2° и геометрического смысла знака якобиана отображения $\mathcal{F}$: $D_\varepsilon \leftrightarrow D^*_\varepsilon$ (см. окончание § 20.4).

Таким образом, утверждение о согласованности ориентаций поверхности $S$ и её края $\partial S$ по правилу штопора сведено к случаю явно заданной поверхности, в котором оно уже установлено.

Задание ориентации куска поверхности $S$ вида (1) равносильно заданию (согласованной с ней) ориентации его края $\partial S$ (являющегося кусочно-гладким контуром). Поэтому ориентацию края $\partial S$ также будем называть *ориентацией* куска поверхности $S$.

Пусть теперь $S_1^{\boldsymbol{\nu}_1}$ и $S_2^{\boldsymbol{\nu}_2}$ — два соседних куска поверхности, каждый из которых ориентирован каким-либо способом (одним из двух). Рассматриваемые *ориентации* $\boldsymbol{\nu}_1$, $\boldsymbol{\nu}_2$ будем называть *согласованными*, если каждая из них на любой кусочно-гладкой кривой из $\partial S_1 \cap \partial S_2$ порождает противоположные ориентации.

**Определение 4.** Кусочно-гладкая поверхность $S = \bigcup_{i=1}^{I} S_i$ называется *ориентируемой*, если существуют такие ориентации $\boldsymbol{\nu}_1, \ldots, \boldsymbol{\nu}_I$ соответственно кусков поверхности $S_1, \ldots, S_I$, что ориентации $\boldsymbol{\nu}_i$ и $\boldsymbol{\nu}_j$ любых двух соседних кусков поверхности $S_i$ и $S_j$ согласованы.

Совокупность $\boldsymbol{\nu} = \{\boldsymbol{\nu}_i\}$ таких ориентаций кусков поверхности $S_i$ $(i = 1, \ldots, I)$, если они существуют, называется *ориентацией* $\boldsymbol{\nu}$ *поверхности* $S$. Совокупность противоположных ориентаций $(-\boldsymbol{\nu}_i)$ кусков $S_i$ $(i = 1, \ldots, I)$ называется при этом *противоположной ориентацией* поверхности $S$.

Ориентируемая кусочно-гладкая поверхность $S$, у которой фиксирована одна из двух её ориентаций $\boldsymbol{\nu}$, называется *ориентированной*; обозначим её через $S^{\boldsymbol{\nu}}$.

Край $\partial S$ ориентированной кусочно-гладкой поверхности $S$ (с краем) состоит из конечного числа контуров. Любой из этих контуров представляет собой объединение конечного числа кривых, каждая из которых является частью одного из ориентированных контуров $\partial S_i$ (его ориентация согласована с ориентацией $S_i$) и потому сама имеет ориентацию.

Совокупность ориентаций всех таких кривых определяет ориентацию всех контуров края $\partial S$. Совокупность этих ориентаций контуров из $\partial S$ называется *ориентацией края* $\partial S$, *порождённой* заданной *ориентацией поверхности* $S^{\boldsymbol{\nu}}$.

Глава 22

# ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

## § 22.1. Поверхностные интегралы первого рода

Пусть в трёхмерном евклидовом пространстве задана гладкая поверхность
$$S = \{\mathbf{r}(u,v)\colon (u,v) \in \overline{D}\}, \tag{1}$$
где $D$ — плоская измеримая область, так что на $\overline{D}$ вектор-функции $\mathbf{r}'_u$, $\mathbf{r}'_v$ непрерывны и $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v \neq \mathbf{0}$.

В определение допустимой замены параметров $u$, $v$ поверхности (1) ($u = u(u_1, v_1)$, $v = v(u_1, v_1)$, $(u_1, v_1) \in \overline{D}_1$) теперь будем включать ещё дополнительное требование измеримости области $D_1$.

**Определение 1.** Пусть на $S$ определена числовая функция $F\colon S \to \mathbb{R}$. Тогда интеграл
$$\iint\limits_S F(x,y,z)\,dS := \\ := \iint\limits_D F(x(u,v), y(u,v), z(u,v))|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|\,du\,dv \tag{2}$$
называется *поверхностным интегралом первого рода* от функции $F$ по поверхности $S$.

Установим некоторые свойства поверхностного интеграла (2).

1.° Для существования интеграла $\iint_S F(z,y,z)\,dS$ необходимо и достаточно, чтобы функция $F(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$ (как функция переменных $u$, $v$) была интегрируемой на $D$.

В частности, если $F$ непрерывна на $S$ (см. определение 10.5.2), то интеграл $\iint_S F(z,y,z)\,dS$ существует.

2.° Поверхностный интеграл первого рода (2) не зависит от параметризации гладкой поверхности (1) (при которой область изменения параметров измерима).

Пусть гладкая поверхность $S$ вида (1) имеет и другое представление:
$$S = \{\boldsymbol{\rho}(u_1,v_1)\colon (u_1,v_1) \in \overline{D}_1\},$$
где $D_1$ — измеримая область,
$$\boldsymbol{\rho}(u_1,v_1) = \mathbf{r}(u(u_1,v_1), v(u_1,v_1)) = \\ = (\varphi(u_1,v_1), \psi(u_1,v_1), \chi(u_1,v_1)),$$

$\begin{cases} u = u(u_1, v_1), \\ v = v(u_1, v_1) \end{cases}$ — допустимая замена параметров на $S$. Тогда с помощью формулы (21.3.3) и теоремы 19.5.2 получаем, что

$$\iint\limits_{D_1} F(\varphi(u_1, v_1), \psi(u_1, v_1), \chi(u_1, v_1))|\boldsymbol{\rho}'_{u_1} \times \boldsymbol{\rho}'_{v_1}|\, du_1\, dv_1 =$$

$$= \iint\limits_{D_1} F(\varphi(u_1, v_1), \psi(u_1, v_1), \chi(u_1, v_1)) \times$$

$$\times |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(u_1, v_1)} \right| du_1 dv_1 =$$

$$= \iint\limits_{D} F(x(u, v), y(u, v), z(u, v))|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|\, du\, dv.$$

**Определение 2.** *Площадью гладкой поверхности* $S$ вида (1) называется число

$$\mu S := \iint\limits_{S} dS = \iint\limits_{D} |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|\, du\, dv. \tag{3}$$

В силу свойств 1° и 2° площадь гладкой поверхности $S$ существует и не зависит от параметризации поверхности (при допустимой замене параметров).

Приведём соображения в пользу естественности определения площади поверхности формулой (3). Рассмотрим разбиение плоскости $Ouv$ на квадраты ранга $m \in \mathbb{N}$:

$$Q_{j,k}^{(m)} = \left\{(u, v)\colon \frac{j-1}{2^m} \leqslant u \leqslant \frac{j}{2^m},\ \frac{k-1}{2^m} \leqslant v \leqslant \frac{k}{2^m}\right\}, \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

Перенумеруем непустые пересечения $D \cap Q_{j,k}^{(m)}$ и обозначим их через $E_i$, $i = 1, \ldots, i_m$. Получим разбиение $\tau_m = \{E_i\}_{i=1}^{i_m}$ области $D$. Пусть $m$ достаточно велико, и пусть $\overline{E}_i \subset D$. Тогда $E_i$ представляет собой квадрат (рис. 1):

$$E_i = \{(u, v)\colon u_i \leqslant u \leqslant u_i + h,\ v_i \leqslant v \leqslant v_i + h\} \subset D.$$

При переходе от вершины $(u_i, v_i)$ к соседним вершинам квадрата $E_i$ радиус-вектор $\mathbf{r}(u, v)$ получит приращения

$$\mathbf{r}(u_i + h, v_i) - \mathbf{r}(u_i, v_i) = \mathbf{r}'_u(u_i, v_i)h + \mathbf{o}(h),$$
$$\mathbf{r}(u_i, v_i + h) - \mathbf{r}(u_i, v_i) = \mathbf{r}'_v(u_i, v_i)h + \mathbf{o}(h).$$

Заменим образ квадрата $E_i$ «близким» ему параллелограммом, лежащим в касательной плоскости к поверхности $S$ в точке

$\widehat{r}(u_i, v_i)$, построенным на векторах $\mathbf{r}'_u(u_i, v_i)h$, $\mathbf{r}'_v(u_i, v_i)h$ и имеющим площадь $|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|_{(u_i,v_i)}\mu E_i$ (рис. 2).

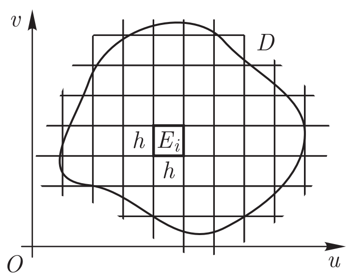



Рис. 1

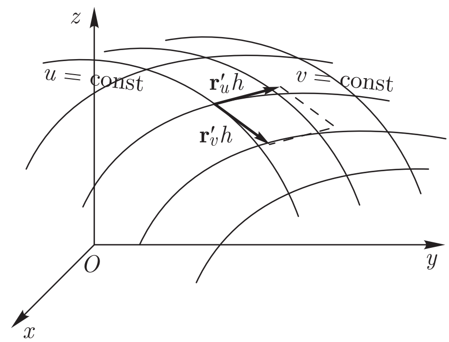



Рис. 2

Если же $\overline{E}_i \cap \partial D \neq \varnothing$, то $E_i \subset U_{2^{-m+1}}(\partial D)$, и через $(u_i, v_i)$ обозначим произвольную точку из $E_i$. Поскольку $\mu^* U_{2^{-m+1}}(\partial D) \to 0$ при $m \to \infty$ (лемма 18.2.3), то в силу сходимости сумм Римана к интегралу получаем, что при $m \to \infty$

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant i_m \\ E_i \not\subset U_{2^{-m+1}}(\partial G)}} |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|_{(u_i,v_i)}\mu E_i \to \iint\limits_D |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|\,du\,dv.$$

Выражение $|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|\,du\,dv$ часто называют *элементом площади* и обозначают символом $dS$. Учитывая формулы (21.15), (21.5.3), получаем различные виды записи $dS$:

$$dS = |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|\,du\,dv = \\ = \sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}\,du\,dv = \\ = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv,$$

где $E$, $F$, $G$ — коэффициенты первой квадратичной формы.

Поверхностный интеграл первого рода по кусочно-гладкой поверхности $S = \bigcup_{i=1}^{I} S_i$ (см. § 21.7) определяется как сумма поверхностных интегралов по каждому из кусков $S_i$ $(1 \leqslant i \leqslant I)$.

Аналогично площадь кусочно-гладкой поверхности $S = \bigcup_{i=1}^{I} S_i$ определяется как сумма $\sum\limits_{i=1}^{I} \mu S_i$ площадей каждого из кусков.

## § 22.2. Поверхностные интегралы второго рода

Пусть в $\mathbb{R}^3$ задана гладкая поверхность

$$S = \{\mathbf{r}(u, v)\colon (u, v) \in \overline{D}\}, \tag{1}$$

где $D$ — измеримая область.

По определению, на $\overline{D}$ вектор-функции $\mathbf{r}'_u$, $\mathbf{r}'_v$ непрерывны, причём $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v \neq \mathbf{0}$.

Пусть

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma). \tag{2}$$

Сориентируем поверхность $S$ с помощью выбора непрерывного векторного поля единичных нормалей $\boldsymbol{\nu} = \pm\mathbf{n}$ и обозначим получившуюся ориентированную поверхность через $S^{\boldsymbol{\nu}}$.

В случае $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{n}$ поверхность $S^{\mathbf{n}}$ будем называть *ориентированной положительно* и обозначать также через $S^+$, в случае же $\boldsymbol{\nu} = -\mathbf{n}$ поверхность $S^{-\mathbf{n}}$ будем называть *ориентированной отрицательно* и обозначать также через $S^-$.

Пусть на поверхности $S$ задано векторное поле

$$\mathbf{a}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}.$$

**Определение 1.** *Потоком вектор-функции* $\mathbf{a}$ через гладкую ориентированную поверхность $S^{\boldsymbol{\nu}}$ (иначе: через поверхность $S$ в направлении нормали $\boldsymbol{\nu}$) называется поверхностный интеграл первого рода

$$\iint\limits_S (\mathbf{a}, \boldsymbol{\nu})\, dS. \tag{3}$$

В силу свойств поверхностных интегралов первого рода этот интеграл существует, если функции $P(x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v))$, $Q(x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v))$, $R(x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v))$ как функции переменных $u$, $v$ интегрируемы на $D$, в частности, если $P$, $Q$, $R$ непрерывны на $S$.

Интеграл (3) меняет знак при замене ориентации $\boldsymbol{\nu}$ на $-\boldsymbol{\nu}$, т. е. на противоположную.

Интеграл (3), вычисляемый через двойной интеграл по области $D$ изменения параметров, *не зависит* от допустимой замены параметров, сохраняющей ориентацию поверхности.

**Определение 2.** Интеграл (3) называют *поверхностным интегралом второго рода* от вектор-функции $\mathbf{a}$ по ориентированной поверхности $S^{\boldsymbol{\nu}}$.

В случае положительно ориентированной поверхности $S^+$ $(\boldsymbol{\nu} = \mathbf{n})$ поверхностный интеграл второго рода по $S^+$ обозначается символом

$$\iint\limits_{S^+} P(x,y,z)\,dy\,dz + Q(x,y,z)\,dz\,dx + R(x,y,z)\,dx\,dy := \\ := \iint\limits_{S} (\mathbf{a}, \mathbf{n})\,dS. \quad (4)$$

Из определения 22.1.1 поверхностного интеграла первого рода и из (2) имеем

$$\iint\limits_{S^+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \\ = \iint\limits_{S} [P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]\,dS = \\ = \iint\limits_{D} \Big[P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + \\ + Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + \\ + R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Big]\,du\,dv. \quad (5)$$

Поверхностный интеграл второго рода по ориентированной кусочно-гладкой поверхности определяется как сумма поверхностных интегралов по соответственно ориентированным гладким кускам этой поверхности.

Глава 23

# СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

## § 23.1. Основные скалярные и векторные поля

Будем рассматривать числовые или векторные функции, определённые на двумерных или трёхмерных областях. При этом будем говорить, что на данной области задано *скалярное* или *векторное поле* соответственно. Если рассматриваемые функции непрерывны, дифференцируемы и т. п., будем говорить, что скалярное или векторное поле соответственно непрерывно, дифференцируемо и т. п.

Введём в рассмотрение символический вектор, называемый *оператором Гамильтона*, или оператором *набла*:

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Тогда *градиент* числовой функции (скалярного поля) $u$ можно записать в виде

$$\operatorname{grad} u = \nabla u,$$

если правую часть равенства (имеющую вид «произведения» вектора набла на числовую функцию $u$) понимать как применение оператора $\nabla$ к функции $u$.

Пусть задано векторное поле $\mathbf{a}\colon G \to \mathbb{R}^3$, $G \subset \mathbb{R}^3$.

Его *производной по направлению* $\mathbf{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ в точке $(x_0, y_0, z_0) \in G$ называется

$$\frac{\partial \mathbf{a}(x_0, y_0, z_0)}{\partial \mathbf{e}} := \frac{d}{dt}\,\mathbf{a}(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma)\Big|_{t=0},$$

если производная в правой части существует.

По правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{e}} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z}\cos\gamma = (\mathbf{e}, \nabla)\mathbf{a},$$

где скалярное произведение

$$(\mathbf{e}, \nabla) = \cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}.$$

Если $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ — произвольный фиксированный вектор, то вектор

$$(\mathbf{b}, \nabla)\mathbf{a} := b_x \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} + b_y \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} + b_z \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z}$$

называется *градиентом поля* $\mathbf{a}$ *по вектору* $\mathbf{b}$.

Если векторное поле $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ дифференцируемо в некоторой точке, то число

$$\operatorname{div} \mathbf{a} := \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

называется *дивергенцией*, или *расходимостью* векторного поля $\mathbf{a}$ в этой точке.

Символически можно записать

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = (\nabla, \mathbf{a}).$$

*Ротором*, или *вихрем* векторного поля $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ в данной точке называется вектор

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} := \nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} :=$$

$$:= \mathbf{i}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right).$$

Пусть $\varGamma$ — кусочно-гладкий контур в области $G \subset \mathbb{R}^3$. Интеграл

$$\int\limits_{\varGamma} a_x\, dx + a_y\, dy + a_z\, dz =: \int\limits_{\varGamma} (\mathbf{a}, d\mathbf{r})$$

называется *циркуляцией* векторного поля $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ по контуру $\varGamma$.

Ни градиент скалярного поля, ни дивергенция, ни ротор векторного поля не зависят от сдвига и от поворота прямоугольной системы координат. Это утверждение можно доказать как непосредственными вычислениями, так и на основе геометрических соображений. Например, градиент функции, как известно, направлен в сторону быстрейшего роста функции и по модулю равен производной по этому направлению. Обсуждаемая независимость дивергенции и ротора векторного поля от сдвига или поворота системы координат будет получена в качестве следствий из теоремы Гаусса–Остроградского и из теоремы Стокса соответственно.

Оператор $\nabla$, применяемый к скалярному или к векторному полю, действует, с одной стороны, как оператор дифференцирования, а с другой — как обычный вектор. Выработаны формальные правила преобразований выражений, содержащих $\nabla$, основанные на разделении этих ролей. Приведём пример таких преобразований, разъяснения к которому будут даны вслед за ним:

$$\operatorname{rot}(f\mathbf{a}) = \nabla \times (f\mathbf{a}) =$$
$$= \overset{\uparrow}{\nabla} \times (\overset{\downarrow}{f}\,\mathbf{a}) + \overset{\uparrow}{\nabla} \times (f\,\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}) = (\overset{\uparrow}{\nabla}\,\overset{\downarrow}{f}) \times \mathbf{a} + f(\overset{\uparrow}{\nabla} \times \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}) =$$
$$= (\nabla f) \times \mathbf{a} + f(\nabla \times \mathbf{a}) = \operatorname{grad} f \times \mathbf{a} + f \operatorname{rot} \mathbf{a}.$$

Здесь $f$ — скалярная, $\mathbf{a}$ — векторная функции. Стрелка $\uparrow$ означает, что мы «снимаем» операцию дифференцирования с $\nabla$, перенося её (что показывается стрелкой $\downarrow$) на объект действия оператора $\nabla$, т. е. на произведение $f\mathbf{a}$. Дифференцирование $\downarrow$ произведения проводится по формуле Лейбница. Применяем правила действия с обычными векторами (перенос числового множителя $\overset{\downarrow}{f}$ или $f$), стараясь сблизить $\overset{\uparrow}{\nabla}$ с множителем, снабжённым стрелкой $\downarrow$. Снимаем все стрелки.

Обоснование этих преобразований можно получить на следующем пути. Представим $\nabla$ в виде $\nabla = \nabla_1 + \nabla_2 + \nabla_3$, где $\nabla_1 = \mathbf{i}\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\nabla_2 = \mathbf{j}\dfrac{\partial}{\partial y}$, $\nabla_3 = \mathbf{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$. Такое представление означает, что результат действия $\nabla$ на числовую или на векторную функцию равен сумме результатов действий $\nabla_1$, $\nabla_2$ и $\nabla_3$ на эту функцию. Приведённые же формальные операции, если заменить в них $\nabla$ на $\nabla_1$, или на $\nabla_2$, или на $\nabla_3$, превращаются в хорошо известные. Остаётся провести их и записать результат в желаемой форме.

## § 23.2. Формула Гаусса–Остроградского

Нам понадобится выражение потока векторного поля через гладкую поверхность, которая имеет явное описание более общего вида, чем данное в определении 21.7.1. Для этого потребуется

**Определение 1.** Поверхность

$$S = \{(x, y, f(x, y)) \colon (x, y) \in \overline{D}\}, \tag{1}$$

где $D$ — ограниченная плоская область, $\partial D$ — простой кусочно-гладкий контур, назовём *явно заданным почти гладким куском поверхности*, если функция $f$ непрерывна на $\overline{D}$ и непрерывно дифференцируема на $D$.

Почти гладкий кусок поверхности является гладким куском поверхности (определение 21.7.1), если $f$ непрерывно дифференцируема не только на $D$, но и на $\overline{D}$.

Примером почти гладкого куска поверхности является полусфера
$$\{(x, y, z)\colon x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geqslant 0\}.$$

**Определение 2.** *Потоком* непрерывного *векторного поля* $\mathbf{a}(x, y, z) = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ через почти гладкий кусок поверхности (1) в направлении нормали $-f'_x\mathbf{i} - f'_y\mathbf{j} + \mathbf{k}$ называется интеграл
$$\iint\limits_D R(x, y, f(x, y))\, dx\, dy. \tag{2}$$

Это определение обобщает определение потока данного векторного поля, введённое в случае явно заданного гладкого куска поверхности (см. (22.2.5) при $P \equiv Q \equiv 0$, $(u, v) = (x, y)$).

Довод в пользу естественности обобщения (2) состоит в следующем. Пусть $S_\varepsilon$ — часть поверхности (1):
$$S_\varepsilon = \{(x, y, f(x, y))\colon (x, y) \in \overline{D}_\varepsilon\},$$
где $\varepsilon > 0$, $D_\varepsilon = \{(x, y) \in D\colon \operatorname{dist}((x, y), \partial D) > \varepsilon\}$ — область в $\mathbb{R}^2$.

Тогда $S_\varepsilon$ — гладкий кусок поверхности, и поток вектора $R\mathbf{k}$ через $S_\varepsilon$ в направлении той же нормали (согласно определению 22.2.1) равен
$$\iint\limits_{D_\varepsilon} R(x, y, f(x, y))\, dx\, dy.$$

При $\varepsilon \to 0$ этот интеграл стремится к (2) вследствие непрерывности поля $R(x, y, f(x, y))$ на $\overline{D}$ и в силу $\mu(D \setminus D_\varepsilon) \to 0$.

Наряду с определениями 1, 2 будем использовать аналогичные определения почти гладкого куска поверхности, заданного в явном виде формулой $x = g(y, z)$ или $y = h(z, x)$, и потока непрерывных векторных полей $P(x, y, z)\mathbf{i}$ или $Q(x, y, z)\mathbf{j}$ соответственно.

**Определение 3.** Расширим понятие кусочно-гладкой поверхности, понимая под *куском поверхности* в определении 21.7.2 либо гладкий кусок, либо явно заданный почти гладкий кусок.

**Определение 4.** Область $G \subset \mathbb{R}^3$ вида
$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\colon \varphi(x, y) < z < \psi(x, y),\ (x, y) \in D\} \tag{3}$$
назовём *простой относительно оси $Oz$* (короче: *$Oz$-простой*), если $D$ — ограниченная плоская область, $\partial D$ — простой кусочно-

гладкий контур, функции $\varphi$, $\psi$ непрерывны на $\overline{D}$ и непрерывно дифференцируемы на $D$, $\varphi < \psi$ на $D$.

Будем использовать также аналогичные определения *$Ox$-простой* и *$Oy$-простой области*.

Как видим, граница $\partial G = S_1 \cup S_2 \cup S_0$ $Oz$-простой области $G$ состоит из нижней $S_1$, верхней $S_2$ и боковой $S_0$ частей, причём нижняя и верхняя части являются явно заданными почти гладкими кусками поверхности, а боковая часть — частью цилиндрической поверхности с образующей, параллельной оси $Oz$, и направляющей $\partial D$. Боковую часть $S_0$ можно представить как объединение конечного числа гладких поверхностей, явно заданных с помощью параметров $y, z$ или $z, x$.

Пусть в $\mathbb{R}^3$ задана измеримая область $G$, граница $\partial G$ которой состоит из конечного числа попарно непересекающихся кусочно-гладких поверхностей, и пусть $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial G$.

Пусть на замыкании $\overline{G}$ области $G$ задано непрерывное векторное поле $\mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, для которого $\dfrac{\partial P}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$, $\dfrac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны на $\overline{G}$.

**Теорема 1** (Гаусса–Остроградского). *Пусть для замкнутой области $\overline{G}$ существуют три разбиения: $\tau_x = \{\overline{G}_{x,m}\}_{m=1}^{m_x}$, $\tau_y = \{\overline{G}_{y,m}\}_{m=1}^{m_y}$, $\tau_z = \{\overline{G}_{z,m}\}_{m=1}^{m_z}$, где $G_{x,m}$, $G_{y,m}$, $G_{z,m}$ — $Ox$-простые, $Oy$-простые и $Oz$-простые области соответственно.*

*Пусть $\mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ — непрерывное векторное поле на $\overline{G}$, функции $\dfrac{\partial P}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$, $\dfrac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны на $\overline{G}$, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial G$.*

*Тогда справедлива формула*

$$\iiint\limits_G \operatorname{div} \mathbf{a}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\partial G} (\mathbf{a}, \mathbf{n})\, dS. \tag{4}$$

Это соотношение называется *формулой Гаусса–Остроградского*.

Доказательство. Будем изучать лишь поле вида $\mathbf{a} = R\mathbf{k}$, так как случаи полей $P\mathbf{i}$, $Q\mathbf{j}$ рассматриваются аналогично, а из доказательства формулы (4) утверждение теоремы следует во всех трёх случаях.

Шаг 1. Пусть область $G$ является $Oz$-простой (см. определение 4). Тогда, сводя тройной интеграл к повторному и используя формулу Ньютона–Лейбница, получаем

$$\iiint\limits_G \operatorname{div} \mathbf{a}\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_G \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz =$$
$$= \iint\limits_D \left( \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz \right) dx\, dy =$$
$$= \iint\limits_D R(x, y, \psi(x, y))\, dx\, dy - \iint\limits_D R(x, y, \varphi(x, y))\, dx\, dy.$$

Пусть $S_1$ — нижняя, $S_2$ — верхняя, $S_0$ — боковая стороны поверхности $\partial G$. Ориентируем их с помощью единичного вектора $\mathbf{n}$ внешней (по отношению к $G$) нормали.

Из последней цепочки равенств получаем, что

$$\iiint\limits_G \operatorname{div} \mathbf{a}\, dx\, dy\, dz =$$
$$= \iint\limits_{S_2^{\mathbf{n}}} R(x, y, z)\, dx\, dy + \iint\limits_{S_1^{\mathbf{n}}} R(x, y, z)\, dx\, dy =$$
$$= \iint\limits_{S_2} (\mathbf{a}, \mathbf{n})\, dS + \iint\limits_{S_1} (\mathbf{a}, \mathbf{n})\, dS + \iint\limits_{S_0} (\mathbf{a}, \mathbf{n})\, dS,$$

поскольку последнее слагаемое равно нулю, так как $(\mathbf{a}, \mathbf{n}) = 0$ на $S_0$. Следовательно, в условиях шага 1 формула (4) справедлива.

Шаг 2. Пусть условия теоремы выполняются при $\mathbf{a} = R\mathbf{k}$, и пусть $\tau_z = \{\overline{G}_{z,m}\}_{m=1}^{m_z}$ — разбиение $\overline{G}$ из условия теоремы. Тогда, используя результат шага 1 , имеем

$$\iiint\limits_G \operatorname{div} \mathbf{a}\, dx\, dy\, dz = \sum_{m=1}^{m_z} \iiint\limits_{G_{z,m}} \operatorname{div} \mathbf{a}\, dx\, dy\, dz =$$
$$= \sum_{m=1}^{m_z} \iint\limits_{\partial G_{z,m}} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^{(m)})\, dS = \iint\limits_{\partial G} (\mathbf{a}, \mathbf{n})\, dS.$$

Здесь $\mathbf{n}^{(m)}$ — единичный вектор внешней нормали к границе $\partial G_{z,m}$ области $G_{z,m}$. При получении последнего равенства учтено, что на общей части $\partial G_{z,m} \cap \partial G_{z,p}$ границ двух $Oz$-простых областей $G_{z,m}$ и $G_{z,p}$ $(m \neq p)$ внешние нормали $\mathbf{n}^{(m)}$ и $\mathbf{n}^{(p)}$ противоположны. Поэтому сумма потоков вектора $\mathbf{a}$ через эту общую часть границы в направлениях $\mathbf{n}^{(m)}$ и $\mathbf{n}^{(p)}$ равна нулю.

Следовательно, в последней сумме интегралы по $\partial G_{z,m}$ можно заменить интегралами по $\partial G \cap \partial G_{z,m}$. Поскольку $\bigcup_{m=1}^{m_z} (\partial G \cap \cap G_{z,m}) = \partial G$, мы приходим к последнему равенству в последней формуле.

Таким образом, утверждение теоремы для поля $\mathbf{a} = R\mathbf{k}$, а вместе с ним и для общего случая векторного поля $\mathbf{a}$, установлено.

**Следствие.** *Пусть на некоторой окрестности $U(M)$ точки $M \in \mathbb{R}^3$ векторное поле $\mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ непрерывно вместе с производными $P'_x$, $Q'_y$, $R'_z$. Пусть $B_\varepsilon$ — шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке $M$, $\partial B_\varepsilon$ — поверхность шара (сфера), $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial B_\varepsilon$. Тогда при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$*

$$\iiint\limits_{B_\varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{a}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\partial B_\varepsilon} (\mathbf{a}, \mathbf{n})\, dS.$$

Доказательство. В силу теоремы о среднем для некоторой точки $M_\varepsilon \in B_\varepsilon$

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M_\varepsilon) = \frac{1}{\mu B_\varepsilon} \iint\limits_{\partial B_\varepsilon} (\mathbf{a}, \mathbf{n})\, dS,$$

а в силу непрерывности $\operatorname{div} \mathbf{a}$

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\mu B_\varepsilon} \iint\limits_{\partial B_\varepsilon} (\mathbf{a}, \mathbf{n})\, dS. \tag{5}$$

Интеграл в правой части (5) не зависит от выбора прямоугольной системы координат в $\mathbb{R}^3$, так что и дивергенция векторного поля не зависит от выбора декартовой прямоугольной системы координат. Формула (5) может служить определением дивергенции. Такое определение дивергенции называют *геометрическим*.

**Упражнение 1.** Выразить меру области $G \subset \mathbb{R}^3$ через поверхностные интегралы, применив формулу Гаусса–Остроградского к каждому из следующих векторных полей: $\mathbf{a} = x\mathbf{i}$, $\mathbf{a} = y\mathbf{j}$, $\mathbf{a} = z\mathbf{k}$, $\mathbf{a} = \frac{1}{3}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$.

**Определение 5.** Ограниченную область $D \subset \mathbb{R}^3$, удовлетворяющую условиям теоремы Гаусса–Остроградского, будем называть *допустимой*.

**Определение 6.** Кусочно-гладкую поверхность $S$ будем называть *допустимой*, если она является границей некоторой допустимой области $D \subset \mathbb{R}^3$. При этом под внешней нормалью к $S$ будем понимать нормаль к $S$, внешнюю относительно области $D$.

**Определение 7.** Непрерывно дифференцируемое в области $G \subset \mathbb{R}^3$ векторное поле $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$ называется *соленоидальным*, если равен нулю его поток через любую допустимую поверхность $S \subset G$ в направлении внешней нормали к $S$.

**Определение 8.** Область $G \subset \mathbb{R}^3$ называется *объёмно односвязной*, если для любой допустимой области $D \subset \mathbb{R}^3$ из условия $\partial D \subset G$ следует $D \subset G$.

Наглядно это означает, что объёмно односвязная область не имеет «дыр», «пустот».

**Теорема 2.** *Для того чтобы непрерывно дифференцируемое в области $G$ векторное поле было соленоидальным, необходимо, а в случае объёмно односвязной области $G$ и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = 0 \quad \text{на} \quad G.$$

Доказательство необходимости следует из формулы (5), а достаточности — из формулы Гаусса–Остроградского (4).

## § 23.3. Формула Стокса

Пусть задан дважды непрерывно дифференцируемый (элементарный гладкий) кусок поверхности

$$S = \{\mathbf{r}(u, v) \colon (u, v) \in \overline{D}\} \subset G \subset \mathbb{R}^3,$$

где $G$ — область в $\mathbb{R}^3$, $D$ — плоская ограниченная область с границей

$$\partial D = \{(u(t), v(t)) \colon a \leqslant t \leqslant b\}, \tag{1}$$

представляющей собой простой кусочно-гладкий контур, и пусть

$$\partial S = \Gamma = \{\mathbf{r}(u(t), v(t)) \colon a \leqslant t \leqslant b\}. \tag{2}$$

Говорят, что контур $\Gamma$ *ограничивает* поверхность $S$, а также, что поверхность $S$ *натянута* на контур $\Gamma$.

Будем считать контур $\partial D$ ориентированным положительно относительно области $D$.

Пусть

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

— ориентация поверхности $S$. При этом ориентации поверхности $S$ и контура $\partial S$ оказываются согласованными по правилу штопора (см. определение 21.7.3 и лемму 21.7.1).

**Теорема 1** (Стокса). *Пусть на области $G$ задано непрерывно дифференцируемое векторное поле $\mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, и пусть поверхность описанного типа $S \subset G$.*

*Тогда если ориентации поверхности $S$ и контура $\Gamma$ согласованы, то*

$$\iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{a}, \mathbf{n})\, dS = \int_\Gamma (\mathbf{a}, d\mathbf{r}), \tag{3}$$

*т. е. поток вихря векторного поля через поверхность $S$ равен циркуляции векторного поля по контуру, ограничивающему эту поверхность.*

Формула (3) называется *формулой Стокса.*

В координатной форме формула (3) имеет вид

$$\iint\limits_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS = \iint\limits_S \Big[\Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\Big)\cos\alpha + \\ + \Big(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\Big)\cos\beta + \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\cos\gamma\Big] dS = \\ = \int\limits_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz. \qquad (4)$$

Доказательство. Рассмотрим лишь случай векторного поля $\mathbf{a} = P\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$, так как случаи полей $Q\mathbf{j}$ и $R\mathbf{k}$ рассматриваются аналогично и все вместе приводят к формуле (4) общего вида. Итак,

$$\int\limits_\Gamma P(x,y,z)dx = \int\limits_a^b P\big(x(u(t),v(t)), y(u(t),v(t)), z(u(t),v(t))\big)\times \\ \times [x'_u(u(t),v(t))u'_t + x'_v(u(t),v(t))v'_t]\,dt = \\ = \int\limits_{\partial D} P\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)[x'_u(u,v)\,du + x'_v(u,v)\,dv].$$

Применив формулу Грина к последнему интегралу, получаем, что

$$\int\limits_\Gamma P\,dx = \iint\limits_D \Big[\frac{\partial}{\partial u}\Big(P\frac{\partial x}{\partial v}\Big) - \frac{\partial}{\partial v}\Big(P\frac{\partial x}{\partial u}\Big)\Big]\,du\,dv = \\ = \iint\limits_D \Big[\Big(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\Big)\frac{\partial x}{\partial v} + P\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} - \\ - \Big(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\Big)\frac{\partial x}{\partial u} - P\frac{\partial^2 x}{\partial v\partial u}\Big]\,du\,dv = \\ = \iint\limits_D \Big[\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Big]\,du\,dv = \\ = \iint\limits_S \Big(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\Big)\,dS,$$

что и требовалось доказать.

**Замечание 1.** Справедливость теоремы (формулы) Стокса сохранится, если в её условиях требования к поверхности $S$ ослабить, сняв условие непрерывности вторых производных (которое является лишь «техническим», т. е. нужным только для приведённого доказательства).

Таким образом, теорема Стокса остаётся верной, если под $S$ понимать произвольный параметрически заданный элементарный гладкий кусок поверхности (терминологию см. в § 21.5). План доказательства такого обобщения теоремы Стокса может быть основан на: аппроксимации гладкого куска поверхности гладким дважды непрерывно дифференцируемым куском; применении к последнему доказанной теоремы Стокса; предельном переходе по последовательности аппроксимирующих гладких дважды непрерывно дифференцируемых кусков.

Не приводя самого доказательства, будем считать, что теорема (формула) Стокса верна в указанной более общей формулировке.

Формула Стокса (3) остаётся справедливой и при одновременной замене ориентаций куска поверхности $S$ и его края $\partial S = \varGamma$ на противоположные, так как при этом обе части равенства (3) поменяют знаки на противоположные. Ориентации поверхности $S$ и её контура $\partial S = \varGamma$ после смены на противоположные также окажутся взаимно согласованными (по правилу штопора).

Теорему Стокса можно обобщить на случай ориентированной кусочно-гладкой поверхности $S$.

**Теорема 2** (Стокса). *Пусть $S = \bigcup_{i=1}^{I} S_i$ — ориентированная полем $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^{I}$ единичных нормалей кусочно-гладкая поверхность, лежащая в области $G \subset \mathbb{R}^3$, $\partial S$ — её край с ориентацией, порождённой заданной ориентацией поверхности $S$. Тогда для непрерывно дифференцируемого в области $G$ векторного поля* $\mathbf{a}$ *справедлива формула Стокса*

$$\iint\limits_{S} (\operatorname{rot}\mathbf{a}, \mathbf{v})\, dS = \sum_{i=1}^{I} \iint\limits_{S_i} (\operatorname{rot}\mathbf{a}, \mathbf{v}_i)\, dS = \int\limits_{\partial S} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}).$$

Доказательство состоит в применении формулы Стокса (3) к каждому куску $S_i$ поверхности и в сложении полученных равенств. При этом части контурных интегралов по общей части $\partial S_i \cap \partial S_j$ $(i \neq j)$ соседних кусков $S_i$ и $S_j$ взаимно уничтожаются, поскольку отличаются лишь ориентацией кривых, входящих в $\partial S_i \cap \partial S_j$.

Теорема Стокса даёт возможность подойти к понятию вихря поля с геометрической точки зрения. Пусть $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$ — непрерывно дифференцируемое в окрестности точки $(x_0, y_0, z_0)$ векторное поле, $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор, $D_\varepsilon$ — круг радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке $(x_0, y_0, z_0)$, лежащий в плоскости, ортогональной $\boldsymbol{\nu}$. Тогда по формуле Стокса и по теореме о среднем

$$\int\limits_{\partial D_\varepsilon} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \iint\limits_{D_\varepsilon} (\operatorname{rot} \mathbf{a}, \boldsymbol{\nu})\, dS = (\operatorname{rot} \mathbf{a}, \boldsymbol{\nu})\Big|_{(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon)} \mu D_\varepsilon,$$

где ориентация окружности $\partial D_\varepsilon$ согласована с $\boldsymbol{\nu}$ по правилу штопора; $(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon) \in D_\varepsilon$. Отсюда

$$(\operatorname{rot} \mathbf{a}, \boldsymbol{\nu})\Big|_{(x_0, y_0, z_0)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\mu D_\varepsilon} \int\limits_{\partial D_\varepsilon} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}). \tag{5}$$

Поскольку криволинейный интеграл второго рода не зависит от сдвига и от поворота прямоугольной системы координат, то и $(\operatorname{rot} \mathbf{a}, \boldsymbol{\nu})$ не зависит от сдвига и от поворота этой системы координат. То же относится, следовательно, и к $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ в силу произвольности вектора $\boldsymbol{\nu}$.

Правая часть (5) может быть принята за определение проекции $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ на $\boldsymbol{\nu}$.

## § 23.4. Потенциальные векторные поля (продолжение)

Напомним определение 20.5.1 потенциального поля.

**Определение 1.** Непрерывное на области $G \subset \mathbb{R}^3$ векторное поле $\mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ называется *потенциальным на области* $G$, если существует непрерывно дифференцируемая функция (*потенциал*) $U\colon G \to \mathbb{R}$ такая, что

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial U}{\partial z} \qquad \text{на} \quad G. \tag{1}$$

В силу теоремы 20.5.1 необходимым и достаточным условием потенциальности *непрерывного* на области $G$ векторного поля $\mathbf{a}$ является равенство нулю его циркуляции:

$$\int\limits_{\Gamma} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = 0 \tag{2}$$

по любому кусочно-гладкому контуру $\Gamma \subset G$.

Выясним связь между потенциальностью непрерывно дифференцируемого векторного поля $\mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ и условием

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \\ = (R'_y - Q'_z)\mathbf{i} + (P'_z - R'_x)\mathbf{j} + (Q'_x - P'_y)\mathbf{k} = \mathbf{0}, \qquad (3)$$

при выполнении которого векторное поле $\mathbf{a}$ называется *безвихревым*.

**Теорема 1.** *Пусть непрерывно дифференцируемое векторное поле в области $G \subset \mathbb{R}^3$ потенциально.*

*Тогда в этой области оно является безвихревым.*

Эта теорема содержится как часть в теореме 20.5.2.

Условие (3), являясь необходимым условием потенциальности непрерывно дифференцируемого векторного поля $\mathbf{a}$, не является достаточным в случае произвольной области $G \subset \mathbb{R}^3$.

**Пример 1.** Пусть $G = \mathbb{R}^3 \setminus Oz$, $\mathbf{a} = -\dfrac{y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \dfrac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$, $(x, y, z) \in G$.

Тогда $\operatorname{rot}\mathbf{a} = \mathbf{0}$ в области $G$. Однако поле $\mathbf{a}$ не является потенциальным, в чём можно убедиться, вспомнив, что его циркуляция по окружности $C_R = \{(R\cos\theta, R\sin\theta, 0)\colon\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$ радиуса $R$ равна

$$\int\limits_{C_R} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = 2\pi \neq 0$$

(см. пример 20.5.1).

Условие (3) оказывается необходимым и достаточным условием (критерием) потенциальности поля для области $G \subset \mathbb{R}^3$ с некоторым геометрическим свойством, называемым поверхностной односвязностью.

**Определение 2.** Область $G \subset \mathbb{R}^3$ называется *поверхностно односвязной*, если для любой простой замкнутой ломаной $\Lambda \subset G$ существует поверхность $S \subset G$, удовлетворяющая условиям теоремы Стокса и натянутая на $\Lambda$.

**Определение 3.** Область $G \subset \mathbb{R}^3$ называется *выпуклой*, если вместе с любыми двумя своими точками она содержит отрезок с концами в этих точках.

**Пример 2.** Выпуклая область является поверхностно односвязной. В самом деле, пусть задана простая замкнутая ломаная $\Lambda \subset G$. Покажем, что на неё можно натянуть лежащую в области $G$ поверхность $S$, удовлетворяющую условиям теоремы Стокса. Пусть

$$\Lambda = \{\boldsymbol{\rho}(u)\colon 0 \leqslant u \leqslant 2\pi\},$$

$0 = u_0 < u_1 < \ldots < u_I = 2\pi$, $A_i = \widehat{\rho}(u_i)$ — последовательно занумерованные вершины ($A_I = A_0$) ломаной $\Lambda$. Выберем произвольную точку $B \in G$, не лежащую ни на одной прямой, соединяющей точки $A_{i-1}$ и $A_i$ ($i = 1, \ldots, I$). Рассмотрим кусочно-гладкую поверхность $S = \bigcup_{i=1}^{I} S_i$, гладкие куски $S_i$ которой являются треугольниками с вершинами $A_{i-1}$, $A_i$, $B$. Очевидно, что $S$ и является искомой поверхностью.

**Пример 3.** Область $G$ из примера 1 не является поверхностно односвязной, так как, например, на замкнутую ломаную $\Lambda$, лежащую в плоскости $z = 0$ и «охватывающую» ось $Oz$, нельзя натянуть требуемую поверхность $S$, лежащую в области $G$, т. е. не пересекающую ось $Oz$. В качестве такой ломаной $\Lambda$ можно взять, например, ломаную, вписанную в окружность $C_R$ из примера 1, в частности, равносторонний треугольник в плоскости $z = 0$ с центром в точке $(0, 0, 0)$.

**Пример 4.** Область, образованная вращением вокруг оси $Oz$ не пересекающего ее открытого круга в плоскости $Oxz$ и называемая *тором*, не является поверхностно односвязной.

**Теорема 2.** *Пусть на поверхностно односвязной области задано непрерывно дифференцируемое векторное поле.*

*Тогда для его потенциальности необходимо и достаточно, чтобы оно было безвихревым.*

Доказательство. *Необходимость* установлена в теореме 20.5.2.

*Достаточность.* Пусть $G$ — поверхностно односвязная область, и пусть $\mathbf{a}$ — непрерывно дифференцируемое векторное поле на $G$. Покажем, что для произвольного кусочно-гладкого контура $\Gamma \subset G$ выполняется условие (2). В силу леммы 20.3.1 об аппроксимации криволинейного интеграла второго рода достаточно убедиться в выполнении условия

$$\int\limits_{\Lambda} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = 0 \tag{4}$$

для любой замкнутой ломаной $\Lambda \subset G$. Достаточно установить (4) для любой простой замкнутой ломаной $\Lambda$. Натянем на $\Lambda$ поверхность $S \subset G$, удовлетворяющую условиям теоремы Стокса, что можно сделать в силу поверхностной односвязности области $G$. Тогда по теореме Стокса

$$\int\limits_{\Lambda}(\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \iint\limits_{S}(\operatorname{rot}\mathbf{a}, \boldsymbol{\nu})\, dS = \iint\limits_{S}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\nu})\, dS = 0.$$

Следовательно, условие (4) выполняется, и теорема доказана.

**Замечание 1.** Сравним характер условий (1), (2), (3) потенциальности непрерывно дифференцируемого поля $\mathbf{a}$.

Условие (3) является *локальным* (для его проверки в данной точке достаточно знать поведение поля $\mathbf{a}$ на сколь угодно малой окрестности этой точки). Условия (1), (2) называют *интегральными* (для их проверки требуется знание поведения поля $\mathbf{a}$ «в целом»). Мы видели (теорема 1), что для произвольной области $G$ из интегрального условия вытекает локальное (для доказательства привлекаются свойства поля $\mathbf{a}$ в принадлежащем области малом шаре с центром в данной точке).

Интегральные условия (1) или (2) вытекают из локального условия (3) лишь при некотором специальном геометрическом условии (поверхностная односвязность) на область (см. теорему 2 и пример 1).

Глава 24

# ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ ФУРЬЕ

## § 24.1. Определение ряда Фурье и принцип локализации

**Определение 1.** Ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad (a_k,\ b_k \in \mathbb{R})$$

называется *тригонометрическим рядом*.

Множество функций

$$\left\{\frac{1}{2},\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cos 3x,\ \sin 3x, \ldots\right\}$$

называется *тригонометрической системой*.

Тригонометрическая система функций является *ортогональной* системой в том смысле, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx \, dx = 0, \quad k, m \in \mathbb{N}_0, \quad k \neq m;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin mx \, dx = 0, \quad k, m \in \mathbb{N}, \quad k \neq m;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin mx \, dx = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Кроме того,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx \, dx = \pi, \quad k \in \mathbb{N}.$$

**Лемма 1.** *Пусть*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \tag{1}$$

*и этот ряд сходится равномерно на* $\mathbb{R}$.

*Тогда:*

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx;$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \quad k\in\mathbb{N}; \tag{2}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Доказательство. Функция $f$ непрерывна на $[-\pi,\pi]$ как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций. Умножим равенство (1) почленно на $\cos nx$ или на $\sin nx$ $(n\in\mathbb{N})$. Полученные ряды также будут сходиться равномерно на $[-\pi,\pi]$, и их почленное интегрирование с использованием свойства ортогональности функций системы даёт равенства

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_n\cos^2 nx\,dx = \pi a_n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} b_n\sin^2 nx\,dx = \pi b_n,$$

откуда получаем вторую и третью формулы из (2). Первая из формул (2) получается почленным интегрированием ряда (1).

Заметим, что члены тригонометрического ряда являются $2\pi$-периодическими функциями, определёнными на действительной оси. Поэтому и сумма тригонометрического ряда (если этот ряд сходится) также является $2\pi$-периодической функцией.

**Определение 2.** Пусть $f$ — $2\pi$-периодическая функция, абсолютно интегрируемая на отрезке $[-\pi,\pi]$. Тригонометрический ряд с коэффициентами $a_k$, $b_k$, определёнными по формулам (2), называется *тригонометрическим рядом Фурье* функции $f$, а коэффициенты $a_k$, $b_k$ — *коэффициентами Фурье* функции $f$.

В этом случае пишут

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx + b_k\sin kx, \tag{3}$$

понимая под такой записью, что функции $f$ поставлен в соответствие её ряд Фурье.

Лемму 1 можно переформулировать так: *равномерно сходящийся тригонометрический ряд является рядом Фурье своей суммы.*

**Упражнение 1.** Показать, что тригонометрический ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin kx}{k^{1+\varepsilon}}$, $\varepsilon > 0$, является рядом Фурье.

Заметим, что если $2\pi$-периодическая функция $f$ абсолютно интегрируема на каком-либо отрезке $[a, a+2\pi]$ длины $2\pi$, то она будет абсолютно интегрируемой и на любом отрезке $[b, b+2\pi]$, и при этом

$$\int\limits_{b}^{b+2\pi} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{a+2\pi} f(x)\,dx.$$

Это свойство, очевидное с геометрической точки зрения, без труда можно доказать аналитически. В частности, коэффициенты Фурье $2\pi$-периодической функции $f$ можно вычислять, заменив в формулах (2) интеграл по отрезку $[-\pi, \pi]$ на интеграл по любому отрезку $[a, a+2\pi]$.

С другой стороны, каждую заданную на $[a-\pi, a+\pi]$ абсолютно интегрируемую функцию можно (изменив при необходимости её значение в точке $a-\pi$ или/и в точке $a+\pi$) продолжить до определённой на всей оси $2\pi$-периодической функции. При этом изменение её значения в одной или в двух точках не изменит коэффициентов Фурье (2) её $2\pi$-периодического продолжения, а значит, и ряда Фурье (3). Поэтому сходимость и другие свойства ряда Фурье можно изучать, считая, что функция $f$ задана лишь на отрезке длины $2\pi$, например, на $[-\pi, \pi]$.

В первую очередь мы будем исследовать вопросы сходимости ряда Фурье в данной точке и на отрезке, равномерной сходимости на всей числовой оси и т. п. Наибольший интерес представляет случай, когда ряд Фурье функции $f$ сходится к функции $f$ в том или ином смысле. В этом случае говорят, что функция $f$ *разложена в ряд Фурье.*

**Теорема 1** (Римана об осцилляции). *Пусть функция $f$ абсолютно интегрируема на конечном или бесконечном интервале $(a, b)$.*

*Тогда*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)\cos\lambda x\,dx = \lim_{\lambda\to\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)\sin\lambda x\,dx = 0.$$

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $(a, b) = (-\infty, +\infty)$. Если это не так, то функцию $f$ можно доопределить нулём на $(-\infty, +\infty)\setminus(a, b)$. По теореме 14.8.4 функция $f$ непрерывна в среднем, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - f(x)|\, dx \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0. \tag{4}$$

Заменив в следующем интеграле переменное $x$ на $x + \dfrac{\pi}{\lambda}$, получаем

$$I(\lambda) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \lambda x\, dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) \cos \lambda x\, dx =$$
$$= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[f\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) - f(x)\right] \cos \lambda x\, dx.$$

В силу (4)

$$|I(\lambda)| \leqslant \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) - f(x)\right| dx \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty.$$

Для интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \lambda x\, dx$ доказательство аналогично.

**Следствие.** *Коэффициенты Фурье $a_k$ и $b_k$ (2) абсолютно интегрируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции стремятся к нулю при $k \to \infty$.*

Пусть $2\pi$-периодическая функция $f$ абсолютно интегрируема на $[-\pi, \pi]$. Частичная сумма ряда Фурье

$$S_n(x; f) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

называется *суммой Фурье порядка* $n \in \mathbb{N}$ функции $f$. Приведём её к компактному виду, удобному для дальнейших исследований.

Назовём *ядром Дирихле* функцию

$$D_n(x) := \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x}{2 \sin \frac{x}{2}}. \tag{5}$$

Последнее равенство (при $x = 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, правая часть понимается как предел частного при $x \to 2m\pi$) устанавливается следующим образом. При $x \neq 2m\pi$

$$D_n(x) = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \left( \sin\frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\cos kx \right) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \left\{ \sin\frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[ \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x \right] \right\} =$$

$$= \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Ядро Дирихле (5) является, очевидно, $2\pi$-периодической чётной непрерывной функцией. Кроме того,

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |D_n(x)| = D_n(0) = n + \frac{1}{2},$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,dx = 1. \tag{6}$$

Преобразуем сумму Фурье $S_n(x;f)$, подставив в неё вместо коэффициентов Фурье их выражения (2). Получим

$$S_n(x;f) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos kt\cos kx + \sin kt\sin kx)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x)f(t)\,dt. \tag{7}$$

Произведя в последнем интеграле (называемом *интегралом Дирихле*) замену переменного $t$ на $t+x$ и сдвиг отрезка интегрирования, получим

$$S_n(x;f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)f(x+t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} + \int_0^{\pi}\right) D_n(t)f(x+t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(t)[f(x+t)+f(x-t)]\,dt. \tag{8}$$

При произвольном $\delta \in (0, \pi)$ представим последний интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$S_n(x; f) = \frac{1}{\pi} \left( \int\limits_0^\delta + \int\limits_\delta^\pi \right) \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) t \right) dt.$$

Во втором из этих интегралов знаменатель дроби $2 \sin \frac{t}{2} \geqslant 2 \sin \frac{\delta}{2} > 0$, поэтому сама дробь абсолютно интегрируема как функция переменного $t$.

Следовательно, по теореме Римана об осцилляции второй интеграл стремится к нулю при $n \to \infty$. Мы приходим, таким образом, к следующему утверждению.

**Теорема 2.** *Пусть $2\pi$-периодическая функция $f$ абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $0 < \delta < \pi$. Тогда пределы*

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x_0; f), \tag{9}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\delta \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) t \right) dt \tag{10}$$

*существуют или не существуют одновременно и совпадают в случае их существования.*

**Следствие** (принцип локализации). *Сходимость ряда Фурье функции $f$ в точке $x_0$ и значение его суммы в случае сходимости определяются поведением функции $f$ на интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, т. е. в сколь угодно малой окрестности точки $x_0$.*

## § 24.2. Сходимость ряда Фурье

Пусть $x_0$ — точка разрыва первого рода функции $f$. Введём следующие обобщения односторонних производных:

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0+0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0+0)}{h},$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0+0} \frac{f(x_0-h) - f(x_0-0)}{-h}.$$

**Определение 1.** Точку $x_0$ назовём *почти регулярной* точкой функции $f$, если существуют $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$, $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$. Если при этом $f(x_0) = \dfrac{f(x_0-0) + f(x_0+0)}{2}$, то $x_0$ назовём *регулярной* точкой функции $f$.

Если в почти регулярной точке функция $f$ непрерывна справа (слева), то она имеет в этой точке правую (левую) производную.

Если функция $f$ непрерывна в точке $x_0$ и имеет в ней правую и левую производные, то $x_0$ — регулярная точка функции $f$.

**Теорема 1.** *Пусть $2\pi$-периодическая функция $f$ абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, и пусть $x_0$ — её почти регулярная точка.*

*Тогда ряд Фурье функции $f$ сходится в точке $x_0$ к $\dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$. Если же при этом $x_0$ — регулярная точка функции $f$, то ряд Фурье в точке $x_0$ сходится к $f(x_0)$.*

Доказательство. Пусть $x_0$ — почти регулярная точка функции $f$. Из формулы (24.1.8) с помощью (24.1.6) получаем

$$S_n(x_0; f) - \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\,dt - \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}\,\frac{2}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left[\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t} + \frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{t}\right]\frac{t}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt. \quad (1)$$

Дробь $\dfrac{t}{2\sin\frac{t}{2}}$, доопределённая единицей при $t = 0$, является непрерывной функцией на отрезке $[0, \pi]$. Дробь $\dfrac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}$ является абсолютно интегрируемой на $[0, \pi]$ функцией, поскольку таковой является её числитель, а при $t \to 0+0$ она имеет конечный предел. То же утверждение справедливо и для второй дроби в квадратных скобках. Следовательно, в подынтегральном выражении последнего интеграла множитель при $\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t$ представляет собой абсолютно интегрируемую на $[0, \pi]$ функцию. По теореме Римана об осцилляции последний интеграл стремится к нулю при $n \to \infty$, т. е.

$$S_n(x_0; f) \to \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2} \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

**Следствие.** *Пусть $2\pi$-периодическая функция $f$ абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, и пусть существует $f'(x_0)$. Тогда ряд Фурье функции $f$ сходится в точке $x_0$ к $f(x_0)$.*

**Замечание 1.** В условии теоремы требование существования $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ можно заменить (как это видно из доказательства) более слабым требованием, например, требованием выполнения неравенств

$$\begin{aligned} |f(x_0+h) - f(x_0+0)| &\leqslant Mh^\alpha \quad \forall\, h \in (0, \delta), \\ |f(x_0-h) - f(x_0-0)| &\leqslant Mh^\alpha \quad \forall\, h \in (0, \delta) \end{aligned} \tag{2}$$

при некоторых $\alpha \in (0, 1]$, $\delta > 0$, $M > 0$. Условия (2) называются *односторонними условиями Гёльдера степени* $\alpha$, а при $\alpha = 1$ ещё и *односторонними условиями Липшица*.

**Замечание 2.** Непрерывность $2\pi$-периодической функции на $\mathbb{R}$ не является достаточным условием сходимости её ряда Фурье в данной точке $x_0$. Существуют примеры $2\pi$-периодических непрерывных на $\mathbb{R}$ функций, ряды Фурье которых расходятся в каждой рациональной точке.

В теореме 1, в следствии и в замечании 1 приводятся достаточные условия сходимости ряда Фурье в данной точке. Имеются и значительно более общие достаточные условия такой сходимости, например, признак Дини, который рекомендуется доказать в качестве упражнения.

**Признак Дини.** Пусть $2\pi$-периодическая функция $f$ абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, и пусть для некоторой точки $x_0$ и для некоторого числа $A$ сходится интеграл

$$\int\limits_0^\pi |f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2A| \, \frac{dt}{t}.$$

Тогда ряд Фурье функции $f$ в точке $x_0$ сходится к $A$.

**Замечание 3.** Пусть функция $f$ задана и абсолютно интегрируема на отрезке длины $2\pi$, например, на $[-\pi, \pi]$. Для выяснения сходимости её ряда Фурье в концах отрезка можно применить теорему 1, продолжив предварительно функцию $f$ до $2\pi$-периодической функции (изменив при необходимости её значения в одном или в обоих концах отрезка). После такого продолжения точка $x_0 = -\pi$ будет почти регулярной тогда и только тогда, когда существуют $f'_+(-\pi)$, $f'_-(\pi)$. В этом случае ряд Фурье функции $f$ сходится в точке $x_0 = -\pi$ к $\dfrac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}$.

Аналогично решается вопрос о сходимости ряда Фурье в точке $x_0 = \pi$.

**Пример 1.** Найдём ряд Фурье функции $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$, $x \in [0, 2\pi]$.

Пусть $\widetilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — $2\pi$-периодическая функция, $\widetilde{f}(x) = f(x)$ при $0 < x < 2\pi$, $\widetilde{f}(0) = 0$. Как мы знаем, коэффициенты Фурье функции $\widetilde{f}$ можно вычислить по формулам (24.1.2) либо по формулам, отличающимся от них сдвигом отрезка интегрирования. В силу нечётности функции $\widetilde{f}$ имеем $a_k = 0\ \forall\, k \in \mathbb{N}_0$. Интегрируя по частям, получаем

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin kx\, dx = \\ = -\frac{\pi - x}{2\pi} \cdot \frac{\cos kx}{k}\Bigg|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi k}\int_0^{2\pi} \cos kx\, dx = \frac{1}{k}.$$

Заметим, что всякая точка $x \in \mathbb{R}$ является регулярной точкой функции $\widetilde{f}$. Следовательно,

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Итак, сумма ряда Фурье $\widetilde{f}$ функции $f$ совпадает с $f$ на интервале $(0, 2\pi)$ и отличается от $f$ в концах интервала.

**Определение 2.** Функцию $f$ называют *непрерывной и кусочно-непрерывно дифференцируемой* на отрезке $[a, b]$, если $f$ непрерывна на $[a, b]$ и существует такое разбиение $\{a_i\}_{i=0}^{m}$ отрезка $[a, b]$ $(a = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = b)$, что производная $f'$ непрерывна на каждом отрезке $[a_{i-1}, a_i]$, если в его концах производную понимать как одностороннюю.

Будем называть $2\pi$-периодическую функцию *непрерывной* (*кусочно-непрерывной*, *непрерывной и кусочно-непрерывно дифференцируемой*), если она непрерывна на $\mathbb{R}$ (кусочно-непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$, непрерывна на $\mathbb{R}$ и кусочно-непрерывно дифференцируема на отрезке $[-\pi, \pi]$).

**Теорема 2.** *Пусть $f$ — $2\pi$-периодическая непрерывная и кусочно-непрерывно дифференцируемая функция.*

*Тогда ряд Фурье функции $f$ сходится к $f$ равномерно на $\mathbb{R}$ и*

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |S_n(x; f) - f(x)| \leqslant C\frac{\ln n}{n} \quad \textit{при} \quad n \geqslant 2,$$

*где $C$ не зависит от $n$.*

Доказательство. Пусть $0 < \delta = \delta_n < \pi$. Перепишем формулу (1) в виде

$$S_n(x; f) - f(x) = \\ = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_0^\delta + \int\limits_\delta^\pi\right) g_x(t) \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) dt = I_n + J_n, \qquad (4)$$

$$g_x(t) := \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

Пусть $M_1 = \max\limits_{\mathbb{R}} |f'|$. С помощью теоремы Лагранжа о конечных приращениях получаем, что при $0 < t \leqslant \pi$

$$|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| \leqslant 2M_1 t.$$

При $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ имеют место неравенства $\dfrac{2}{\pi}t < \sin t < t$ (левое неравенство получается при сравнении графиков функций $y = \dfrac{2}{\pi}t$ и $y = \sin t$).

Следовательно, при $0 < t \leqslant \pi$

$$|g_x(t)| \leqslant \frac{2M_1 t}{2\sin\frac{t}{2}} \leqslant \pi M_1$$

и (за исключением, быть может, конечного числа значений $t$)

$$\left|\frac{d}{dt} g_x(t)\right| \leqslant |f'(x+t) - f'(x-t)| \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} + \\ + |f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| \frac{\cos\frac{t}{2}}{4\sin^2\frac{t}{2}} \leqslant \\ \leqslant \frac{\pi M_1}{t} + \frac{\pi M_1}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}} \leqslant \frac{2\pi M_1}{t}.$$

Очевидно, что $|I_n| \leqslant \delta M_1$.

С помощью интегрирования по частям имеем

$$J_n = -\frac{1}{\pi} g_x(t) \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{n+\frac{1}{2}}\Bigg|_\delta^\pi + \frac{1}{\pi}\int\limits_\delta^\pi \left(\frac{d}{dt} g_x(t)\right) \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{n+\frac{1}{2}}\, dt.$$

Отсюда

$$|J_n| \leqslant \frac{M_1}{n+\frac{1}{2}} + \frac{2M_1 \ln \frac{1}{\delta}}{n+\frac{1}{2}} = \left(1 + 2\ln\frac{1}{\delta}\right) M_1 \frac{1}{n+\frac{1}{2}}.$$

Полагая $\delta = \delta_n = 1/n$, получаем, что при $n \geqslant 2$

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |S_n(x; f) - f(x)| \leqslant |I_n| + |J_n| \leqslant \frac{C \ln n}{n},$$

где $C$ не зависит от $n$. Теорема доказана.

Другое доказательство теоремы 2 совпадает с доказательством случая $\alpha = 1$ теоремы 3.

Подчеркнём, что теорема 2 не только устанавливает равномерную сходимость ряда Фурье, но и даёт оценку скорости стремления к нулю остатка этого ряда.

Равномерная сходимость ряда Фурье периодической функции может быть установлена и при более общих условиях, чем в теореме 2, например, для функций, удовлетворяющих условию Гёльдера.

**Определение 3.** Пусть $E = \mathbb{R}$ или $E = [a, b]$, $0 < \alpha \leqslant 1$. Говорят, что функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ удовлетворяет *условию Гёльдера степени* $\alpha$ (а также *условию Липшица* в случае $\alpha = 1$), если $\exists\, M_\alpha > 0$:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M_\alpha |x - y|^\alpha \quad \forall\, x, y \in E.$$

Заметим, что функции, удовлетворяющие условию Гёльдера, непрерывны и что класс функций, удовлетворяющих условию Гёльдера степени $\alpha$, сужается при увеличении $\alpha$.

Если функция $f$ непрерывна и кусочно-непрерывно дифференцируема на $[a, b]$, то она удовлетворяет условию Липшица на $[a, b]$.

Следующая теорема обобщает теорему 2.

**Теорема 3.** *Пусть $2\pi$-периодическая функция $f$ удовлетворяет на $\mathbb{R}$ условию Гёльдера степени $\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$.*

*Тогда ряд Фурье функции $f$ сходится к $f$ равномерно на $\mathbb{R}$ и*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |S_n(x; f) - f(x)| \leqslant C_\alpha \frac{\ln n}{n^\alpha} \quad \forall\, n \geqslant 2,$$

*где $C_\alpha$ не зависит от $n$.*

Доказательство. Воспользуемся формулой (4) в виде

$$S_n(x; f) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x)}{2\sin\frac{t}{2}} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right) dt.$$

Положим

$$h_x(t) := \frac{f(x+t) - f(x)}{2\sin\frac{t}{2}}, \quad \lambda = \lambda_n = n + \frac{1}{2}, \quad \frac{2\pi}{\lambda} \leqslant \delta < \pi.$$

Так же, как при доказательстве теоремы Римана об осцилляции, получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} h_x(t)\sin\lambda t\,dt = -\int_{-\pi-\pi/\lambda}^{\pi-\pi/\lambda} h_x\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\sin\lambda t\,dt =$$

$$= -\int_{-\pi}^{\pi} h_x\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\sin\lambda t\,dt + \left(\int_{\pi-\pi/\lambda}^{\pi} - \int_{-\pi-\pi/\lambda}^{-\pi}\right) h_x\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\sin\lambda t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[h_x(t) - h_x\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\right]\sin\lambda t\,dt + K_n,$$

причём $|K_n| \leqslant \dfrac{\pi M_\alpha\left(\pi+\frac{\pi}{\lambda}\right)^\alpha}{\lambda\cdot 2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2\lambda}\right)}$. Следовательно,

$$|S_n(x;f) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|h_x\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right) - h_x(t)\right|dt + |K_n| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\ldots\,dt + \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right)\ldots\,dt + |K_n| =$$

$$= I_{\delta,n}(x) + J_{\delta,n}(x) + |K_n|. \qquad (5)$$

При $|t| \leqslant 2\delta$

$$|h_x(t)| \leqslant \frac{\pi M_\alpha |t|^\alpha}{2|t|} = \frac{\pi}{2} M_\alpha |t|^{\alpha-1},$$

так что

$$I_{\delta,n}(x) \leqslant M_\alpha \int_0^{2\delta} t^{\alpha-1}\,dt = \frac{1}{\alpha} M_\alpha 2^\alpha \delta^\alpha. \qquad (6)$$

Для оценки $J_{\delta,n}(x)$ при $\dfrac{2\pi}{\lambda} \leqslant \delta < |t| < \pi$ воспользуемся равенством

$$h_x(t+\pi/\lambda)-h_x(t)=\frac{f(x+t+\pi/\lambda)-f(x)}{2\sin\dfrac{t+\pi/\lambda}{2}}-\frac{f(x+t)-f(x)}{2\sin\dfrac{t}{2}}=$$
$$=\frac{f(x+t+\pi/\lambda)-f(x+t)}{2\sin\dfrac{t+\pi/\lambda}{2}}+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin\dfrac{t+\pi/\lambda}{2}}-\frac{1}{\sin\dfrac{t}{2}}\right)(f(x+t)-f(x)),$$

так что

$$|h_x(t+\pi/\lambda)-h_x(t)|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{C_1\,|f(x+t+\pi/\lambda)-f(x+t)|}{|t|}+\frac{C_2|f(x+t)-f(x)|}{t^2\lambda}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{C_1M_\alpha(\pi/\lambda)^\alpha}{|t|}+\frac{C_2M_\alpha|t|^\alpha}{t^2\lambda}\leqslant\frac{CM_\alpha}{|t|\lambda^\alpha},\qquad(7)$$

$$J_{\delta,n}(x)\leqslant\frac{1}{\pi}\int\limits_\delta^\pi\frac{CM_\alpha}{\lambda^\alpha}\frac{dt}{t}\leqslant\frac{CM_\alpha}{\pi\lambda^\alpha}\ln\frac{\pi}{\delta}.\qquad(8)$$

Полагая $\delta=7/n$ и сводя вместе все оценки, приходим к утверждению теоремы.

Часть теоремы 2, касающаяся равномерной сходимости ряда Фурье, допускает следующее обобщение.

**Теорема 4.** *Пусть $2\pi$-периодическая функция $f$ абсолютно интегрируема на $[-\pi,\pi]$. Пусть на некотором отрезке $[a',b']$ функция $f$ непрерывна и кусочно-непрерывно дифференцируема.*

*Тогда ряд Фурье функции $f$ на любом отрезке $[a,b]\subset(a',b')$ равномерно сходится к $f$.*

Доказательство. Пусть $\lambda=\lambda_n=n+\frac{1}{2}$, $\frac{2\pi}{\lambda}\leqslant\delta$, $[a-2\delta,b+2\delta]\subset[a',b']$, $x\in[a,b]$. Воспользуемся оценкой (5). В силу (6) при $\alpha=1$

$$I_{\delta,n}(x)\leqslant2\delta\max_{[a',b']}|f'|.\qquad(9)$$

Для получения оценки $J_{\delta,n}$ используем первую из оценок (7). Тогда

$$J_{\delta,n}(x)\leqslant\frac{C_1}{\pi\delta}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(u+\pi/\lambda)-f(u)|\,du+$$
$$+\frac{C_2}{2\pi\delta^2\lambda}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(u)|\,du+2\pi\max_{[a,b]}|f|\right).$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ столь малым, что $\sup\limits_{[a,b]} I_{\delta,n} < \frac{\varepsilon}{2}$ при $n \geqslant \frac{2\pi}{\delta}$. При выбранном $\delta$

$$\exists\, n_\delta \in \mathbb{N}\colon\ \sup_{[a,b]} J_{\delta,n} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, n \geqslant n_\delta. \tag{10}$$

Тогда из оценок (5), (9), (10) следует, что

$$\sup_{x\in[a,b]} |S_n(x;f) - f(x)| \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

и теорема доказана.

Отметим, что теорема 4 обобщает сформулированный ранее принцип локализации, показывая, что для утверждения о равномерной сходимости ряда Фурье функции $f$ на отрезке $[a,b]$ достаточно знать поведение этой функции лишь на $\varepsilon$-окрестности $(a-\varepsilon, b+\varepsilon)$ этого отрезка при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$.

Из теоремы 4 следует, например, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ из примера 24.2.1 равномерно сходится к функции $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ на любом отрезке $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$.

Теорему 4 можно обобщить, заменив условие кусочно-непрерывной дифференцируемости функции на $[a', b']$ на условие Гёльдера степени $\alpha > 0$ на $[a', b']$.

## § 24.3. Приближение непрерывных функций многочленами

**Определение 1.** Функция вида

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos kx + B_k \sin kx \quad (A_n^2 + B_n^2 > 0)$$

называется *тригонометрическим многочленом* (*тригонометрическим полиномом*) степени $n$.

**Теорема 1** (Вейерштрасса). *Пусть $f$ — $2\pi$-периодическая непрерывная функция.*

*Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой тригонометрический многочлен $T$, что*

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - T(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$. Пусть $\tau = \{x_j\}_{j=0}^{J}$ — разбиение отрезка $[-\pi, \pi]$, $x_j = -\pi + j\dfrac{2\pi}{J}$. Построим ломаную (вписанную в график функции $f$), соединив последовательно точки $(x_j, f(x_j))$ графика функции $f$ отрезками. Обозначим через $\Lambda_J$ $2\pi$-периодическую непрерывную функцию, график которой совпадает на $[-\pi, \pi]$ с построенной ломаной. Очевидно, $\Lambda_J$ — кусочно линейная на $[-\pi, \pi]$ функция, а значит, и непрерывная кусочно-непрерывно дифференцируемая функция.

Непрерывная на отрезке функция $f$ является равномерно непрерывной. Поэтому

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{при} \quad |x' - x''| \leqslant \frac{2\pi}{J},$$

если $J = J(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ достаточно велико. Тогда

$$\max_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x) - \Lambda_J(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Функция $\Lambda_J$ удовлетворяет условиям теоремы 24.2.1, поэтому её ряд Фурье сходится к $\Lambda_J$ равномерно на $\mathbb{R}$. Следовательно, существует такое $n = n(\varepsilon)$, что

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |\Lambda_J(x) - S_n(x; \Lambda_J)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из последних двух неравенств получаем, что

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - S_n(x; \Lambda_J)| < \varepsilon,$$

т. е. утверждение теоремы при

$$T(x) = S_n(x; \Lambda_J).$$

Теорему 1 в эквивалентной форме можно сформулировать следующим образом.

**Теорема 1′** (Вейерштрасса). *Пусть функция $f$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$, и пусть $f(-\pi) = f(\pi)$.*

*Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой тригонометрический многочлен $T$, что*

$$\max_{-\pi \leqslant x \leqslant \pi} |f(x) - T(x)| < \varepsilon.$$

**Упражнение 1.** Показать, что последняя теорема перестаёт быть верной, если отбросить условие $f(-\pi) = f(\pi)$.

Заметим, что в теореме 1 в качестве тригонометрического многочлена $T$ нельзя (вообще говоря) взять частичную сумму

$S_n(x; f)$ ряда Фурье функции $f$, поскольку ряд Фурье непрерывной функции $f$ не обязан равномерно сходиться (не обязан даже и поточечно сходиться) к функции $f$. Однако в качестве $T$ можно взять *сумму Фейера* $\sigma_n(x; f)$ функции $f$ при достаточно большом $n$, где

$$\sigma_n(x; f) = \frac{S_0(x; f) + S_1(x; f) + \ldots + S_n(x; f)}{n+1}$$

— среднее арифметическое сумм Фурье, как это следует из теоремы Фейера.

**Теорема 2** (Фейера). *Пусть $f$ — $2\pi$-периодическая непрерывная функция.*

*Тогда*
$$\sigma_n(x; f) \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f(x) \quad \textit{при} \quad n \to \infty.$$

Оставим эту теорему без доказательства.

Факт сходимости последовательности сумм Фейера в теореме Фейера выражают ещё и следующим образом.

*Ряд Фурье $2\pi$-периодической непрерывной функции $f$ суммируется к $f(x)$ методом средних арифметических.*

Метод суммирования ряда средними арифметическими даёт возможность для некоторых расходящихся рядов определить понятие их суммы как предела последовательности средних арифметических их частичных сумм. Для сходящегося ряда это понятие совпадает с понятием суммы ряда.

**Пример 1.** Расходящийся ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ суммируем методом средних арифметических к числу $\frac{1}{2}$.

С помощью теоремы 1 (Вейерштрасса) доказывается возможность приближения с любой точностью непрерывной на отрезке функции подходящим алгебраическим многочленом $P$.

**Теорема 3** (Вейерштрасса). *Пусть функция $f$ непрерывна на отрезке $[a, b]$.*

*Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой алгебраический многочлен $P$, что*
$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отрезок $[0, \pi]$ отобразим линейно на отрезок $[a, b]$:
$$x = a + \frac{b-a}{\pi} t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

и положим $f^*(t) = f\left(a + \dfrac{b-a}{\pi}t\right)$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$. Продолжим $f^*$ чётным образом на отрезок $[-\pi, 0]$, а затем на всю ось с периодом $2\pi$, сохранив обозначение $f^*$. Полученная функция $f^*\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является $2\pi$-периодической и непрерывной на $\mathbb{R}$. По теореме 1 для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся такой тригонометрический многочлен $T$, что

$$\max_{0\leqslant t\leqslant \pi} |f^*(t) - T(t)| \leqslant \max_{t\in\mathbb{R}} |f^*(t) - T(t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Функции $\cos kt$, $\sin kt$ (а значит, и $T(t)$) разлагаются в степенные ряды с радиусом сходимости $R = +\infty$. Следовательно, эти ряды равномерно сходятся на каждом отрезке. Поэтому существует такой номер $n = n(\varepsilon)$, что

$$\max_{0\leqslant t\leqslant \pi} |T(t) - P_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

где $P_n$ — многочлен Тейлора функции $T$.

Из последних двух неравенств получаем, что

$$\max_{0\leqslant t\leqslant \pi} |f^*(t) - P_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

или (возвращаясь к переменному $x$)

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b} \left| f(x) - P_n\left(\pi\frac{x-a}{b-a}\right)\right| < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Теорему 3 можно переформулировать следующим образом.

*Всякая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция является пределом некоторой равномерно сходящейся последовательности алгебраических многочленов.*

## § 24.4. Почленное дифференцирование и интегрирование; убывание коэффициентов и остатка ряда Фурье

**Лемма 1.** *Пусть $f$ — $2\pi$-периодическая и кусочно-непрерывная функция, $a_k$, $b_k$ — её коэффициенты Фурье.*

*Тогда справедливо неравенство Бесселя*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть сначала $f$ является $2\pi$-периодической непрерывной и кусочно-непрерывно дифференцируемой функцией. По теореме 24.2.2 она разлагается в равномерно сходящийся на $\mathbb{R}$ ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx. \tag{2}$$

Умножим обе части равенства (2) на $f(x)$ и проинтегрируем полученный ряд (также равномерно сходящийся на $\mathbb{R}$) почленно. В силу формул (24.1.2), определяющих коэффициенты Фурье, получим *равенство Парсеваля*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx, \tag{3}$$

следствием которого является (1).

Пусть теперь функция $f$ удовлетворяет условиям леммы, и пусть $\Lambda_J\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — $2\pi$-периодическая непрерывная кусочно линейная на $[-\pi, \pi]$ функция, построенная при доказательстве теоремы Вейерштрасса 24.3.1 (график функции $\Lambda_J$ представляет собой вписанную в график функции $f$ ломаную). Обозначим через $a_k(f)$, $b_k(f)$ коэффициенты Фурье функции $f$.

Используя неравенство (1) для уже доказанного случая, получаем

$$\frac{a_0^2(\Lambda_J)}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2(\Lambda_J) + b_k^2(\Lambda_J)) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Lambda_J^2(x)\, dx \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$ фиксировано, и пусть $J \to \infty$. Тогда, как легко видеть,

$$a_k(\Lambda_J) \to a_k(f), \quad b_k(\Lambda_J) \to b_k(f),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Lambda_J^2(x)\, dx \to \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx.$$

Переходя в неравенстве (4) к пределу при $J \to \infty$, имеем

$$\frac{a_0^2(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2(f) + b_k^2(f)) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем утверждение леммы.

**Замечание 1.** Равенство Парсеваля (3) и (следовательно) неравенство Бесселя (1) будут распространены в § 25.4 на абсолютно интегрируемые на $(-\pi, \pi)$ функции со сходящимися интегралами в правых частях (3), (1).

**Теорема 1** (о почленном дифференцировании ряда Фурье). *Пусть $2\pi$-периодическая функция $f$ непрерывна и кусочно-непрерывно дифференцируема, и пусть*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

*— её разложение в ряд Фурье.*

*Тогда*

$$f'(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} -ka_k \sin kx + kb_k \cos kx,$$

*т. е. ряд Фурье производной получается из ряда Фурье функции почленным дифференцированием.*

Доказательство. Пусть

$$f'(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx.$$

Тогда

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, dx = \frac{1}{\pi}[f(\pi) - f(-\pi)] = 0.$$

С помощью интегрирования по частям получим:

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos kx\, dx = \\ = \frac{1}{\pi} f(x) \cos kx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx = kb_k,$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin kx\, dx = \\ = \frac{1}{\pi} f(x) \sin kx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx = -ka_k.$$

**Лемма 2.** *Пусть $2\pi$-периодическая функция $f$ имеет непрерывные производные до порядка $m-1$ включительно и кусочно-непрерывную производную порядка $m \in \mathbb{N}$.*

*Тогда для коэффициентов Фурье функции $f$ выполняется оценка*

$$|a_k| + |b_k| = o\left(\frac{1}{k^m}\right) \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $m \in \mathbb{N}$, и пусть

$$f^{(m)}(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx.$$

Применяя $m$ раз теорему 1, получаем, что

$$|\alpha_k| + |\beta_k| = k^m(|a_k| + |b_k|), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Поскольку коэффициенты Фурье $\alpha_k$, $\beta_k \to 0$ при $k \to \infty$, то из последнего равенства получаем (5).

Лемма 2 показывает, что коэффициенты Фурье функции $f$ тем быстрее стремятся к нулю, чем лучше дифференциальные свойства функции $f$.

Утверждение леммы 2 можно несколько усилить, если применить неравенство Бесселя (1) к производной $f^{(m)}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2m}(a_k^2 + b_k^2) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f^{(m)}(x))^2 dx < \infty.$$

Установим оценки скорости приближения функции её суммами Фурье. Эти оценки зависят от дифференциальных свойств функции. Нам придётся изучить характер сходимости ряда, *сопряжённого с рядом Фурье* $2\pi$-периодической непрерывной и кусочно-непрерывно дифференцируемой функции $f$, т. е. ряда

$$\widetilde{S}(x; f) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx - b_k \cos kx, \tag{6}$$

где $a_k$, $b_k$ — коэффициенты Фурье функции $f$.

*Сопряжённым ядром Дирихле* называется функция

$$\widetilde{D}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) x}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

Последнее равенство устанавливается так же, как (24.1.5). Аналогично выводу (24.1.8) показывается, что частичную сумму

$$\widetilde{S}_n(x; f) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx - b_k \cos kx$$

ряда (6) можно представить в виде

$$\widetilde{S}_n(x; f) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \widetilde{D}_n(t)[f(x+t) - f(x-t)]\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} h_x(t)\cos\left(n + \frac{1}{2}\right) t\,dt + \widetilde{f}(x),$$

где

$$h_x(t) := \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2\sin\frac{t}{2}},$$

$$\widetilde{f}(x) := -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt.$$

**Лемма 3.** *Пусть $2\pi$-периодическая функция $f$ непрерывна и кусочно-непрерывно дифференцируема, и пусть $a_k$, $b_k$ — её коэффициенты Фурье.*

*Тогда ряд* (6) *сходится равномерно на $\mathbb{R}$, причём для некоторого $C > 0$ при всех $n \geqslant 2$*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\sum_{n+1}^{\infty} a_k \sin kx - b_k \cos kx\right| \leqslant C\frac{\ln n}{n}. \qquad (7)$$

Доказательство. Положим $M_1 := \max\limits_{\mathbb{R}} |f'|$. С помощью формулы конечных приращений Лагранжа получаем

$$|f(x+t) - f(x-t)| \leqslant 2M_1 t, \quad 0 < t \leqslant \pi,$$

откуда следует, в частности, что для каждого $x$ существует $\widetilde{f}(x)$ (как интеграл от непрерывной и ограниченной на $(0, \pi]$ функции) и что ряд (6) сходится. При $2 \leqslant n < p$ оценим

$$\widetilde{S}_p(x; f) - \widetilde{S}_n(x; f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} h_x(t)\cos\left(p + \frac{1}{2}\right) t\,dt -$$

$$- \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} h_x(t)\cos\left(n + \frac{1}{2}\right) t\,dt,$$

используя оценки:

$$|h_x(t)| \leqslant \pi M_1,$$

$$\left|\frac{d}{dt}h_x(t)\right| \leqslant |f'(x+t)+f'(x-t)|\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}+$$
$$+|f(x+h)-f(x-h)|\frac{\cos\frac{t}{2}}{4\sin^2\frac{t}{2}} \leqslant \frac{\pi M_1}{t}+\frac{\pi M_1}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}} \leqslant \frac{2\pi M_1}{t}.$$

Так же, как при доказательстве теоремы 24.1.2, получаем оценку

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|\widetilde{S}_p(x;f)-\widetilde{S}_n(x;f)| \leqslant C\frac{\ln n}{n}+C\frac{\ln p}{p} \quad \text{при} \quad 2\leqslant n<p,$$

которая при $p\to\infty$ влечёт (7).

Напомним, что в теореме 15.4.2 (признак Дирихле сходимости числового ряда) установлена сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ и получена оценка его суммы

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k\right| \leqslant |a_1|\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| \tag{8}$$

при выполнении условий:

1° последовательность $\{a_k\}$ монотонно стремится к нулю;

2° правая часть (8) конечна (т. е. последовательность $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\right\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена).

**Теорема 2.** *Пусть $m\in\mathbb{N}$, и пусть $2\pi$-периодическая функция $f$ имеет непрерывные производные до порядка $m-1$ включительно и кусочно-непрерывную производную $f^{(m)}$.*

*Тогда ряд Фурье функции $f$ сходится к $f$ равномерно на $\mathbb{R}$ и при любом $\varepsilon>0$*

$$\max_{x\in\mathbb{R}}|f(x)-S_n(x;f)| = O\left(\frac{\ln n}{n^m}\right) = o\left(\frac{1}{n^{m-\varepsilon}}\right) \ \text{при } n\to\infty. \tag{9}$$

Доказательство. Случай $m=1$ совпадает с теоремой 24.2.2. Пусть $\varphi := f^{(m-1)}$, и пусть $\alpha_k$, $\beta_k$ — коэффициенты Фурье функции $\varphi$. По теореме 24.2.2

$$\max_{x\in\mathbb{R}}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx\right| \leqslant C\frac{\ln n}{n} \quad \forall\, n\geqslant 2. \tag{10}$$

Пусть $a_k$, $b_k$ — коэффициенты Фурье функции $f$. Пусть сначала $m$ нечётно. Тогда в силу теоремы 1, применённой $(m-1)$ раз, при $x \in \mathbb{R}$ имеем

$$|r_n(x; f)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \right| = \\ = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{m-1}} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \right|.$$

Из (8), (10) следует, что

$$|r_n(x; f)| \leqslant C \frac{\ln n}{n} \frac{1}{(n+1)^{m-1}} \leqslant C \frac{\ln n}{n^m},$$

и (9) в этом случае установлено.

Пусть теперь $m$ чётно. Тогда

$$|r_n(x; f)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \right| = \\ = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{m-1}} (\alpha_k \sin kx - \beta_k \cos kx) \right|.$$

Ряд $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k \sin kx - \beta_k \cos kx$ сходится по лемме 3. В силу (7), (8)

$$|r_n(x; f)| \leqslant C \frac{\ln n}{n} \frac{1}{(n+1)^{m-1}} \leqslant C \frac{\ln n}{n^m},$$

и теорема доказана.

Теорема 2 показывает, что чем больше производных имеет функция $f$, тем с большей скоростью сходится её ряд Фурье.

**Замечание 2.** Лемму 2 и теорему 2 можно переформулировать для функции $f$, заданной лишь на отрезке $[-\pi, \pi]$, добавив для концов отрезка условия, гарантирующие для её $2\pi$-периодического продолжения выполнение условий леммы 2 и теоремы 2 соответственно. Именно, для функции $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ следует считать выполняющимися следующие дополнительные условия на односторонние производные:

$$f_+{}^{(j)}(-\pi) = f_-{}^{(j)}(\pi) \quad \text{при} \quad j = 0, 1, \ldots, m-1.$$

При соответствующей переформулировке теоремы 24.2.2 и теоремы 1 следует считать для функции $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ выполняющимся равенство $f(-\pi) = f(\pi)$.

Наряду с теоремой 2 докажем теорему 2′, хотя и менее сильную, но также устанавливающую связь между дифференциальными свойствами $2\pi$-периодической функции и скоростью сходимости её ряда Фурье.

Доказательство теоремы 2′ в отличие от доказательства теоремы 2 опирается не на анализ сходимости ряда, сопряжённого с рядом Фурье, а на неравенство Бесселя (1).

**Теорема 2′.** *Пусть $m \in \mathbb{N}$, и пусть $2\pi$-периодическая функция $f$ имеет непрерывные производные до порядка $m-1$ включительно и кусочно-непрерывную производную $f^{(m)}$.*

*Тогда ряд Фурье функции $f$ сходится к $f$ равномерно на $\mathbb{R}$ и*

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - S_n(x;f)| = o\left(\frac{1}{n^{m-1/2}}\right) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{11}$$

Доказательство. Равномерная сходимость к функции $f$ её ряда Фурье установлена в теореме 24.2.2. Оценим остаток ряда Фурье функции $f$:

$$|r_n(x;f)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} (|\alpha_k| + |\beta_k|)\frac{1}{k^m},$$

где $\alpha_k$, $\beta_k$ — коэффициенты Фурье функции $f^{(m)}$, а последнее неравенство получено $m$-кратным применением теоремы 1. В силу неравенства Коши–Буняковского (10.1.2)

$$\sum_{k=n+1}^{N} (|\alpha_k| + |\beta_k|)\frac{1}{k^m} \leqslant \sqrt{\sum_{k=n+1}^{N} (|\alpha_k| + |\beta_k|)^2}\,\sqrt{\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^{2m}}}\,.$$

Предельный переход в последнем неравенстве при $N \to \infty$ показывает, что неравенство остаётся верным, если в нём заменить $N$ на $\infty$.

Используя получившееся неравенство, имеем

$$|r_n(x;f)| \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{2\sum_{k=n+1}^{\infty} (\alpha_k^2 + \beta_k^2)}\,\sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}}} = \varepsilon_n \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}}}\,, \tag{12}$$

причём $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$ в силу сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^2 + \beta_k^2)$, вытекающей из неравенства Бесселя для функции $f^{(m)}$. Заметим, что

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \int\limits_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^{2m}} = \int\limits_{n}^{\infty} \frac{dx}{x^{2m}} = \frac{1}{(2m-1)n^{2m-1}}.$$

Отсюда и из (12) следует (11).

**Теорема 3** (о почленном интегрировании ряда Фурье). *Пусть $f$ — кусочно-непрерывная на отрезке $[-\pi, \pi]$ функция и*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

*— её ряд Фурье.*

*Тогда*

$$\int\limits_0^x f(t)\,dt = \int\limits_0^x \frac{a_0\,dt}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_0^x (a_k \cos kt + b_k \sin kt)\,dt =$$
$$= \frac{a_0 x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} \sin kx + \frac{b_k}{k}(1 - \cos kx), \qquad (13)$$

*причём ряд в правой части последнего равенства сходится равномерно на $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Положим

$$F(x) = \int\limits_0^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2}\right] dt.$$

Функция $F$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$, и

$$F(\pi) - F(-\pi) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt - \pi a_0 = 0.$$

Кроме того, её производная $F'(t) = f(t) - \frac{a_0}{2}$ кусочно-непрерывна на $[-\pi, \pi]$. В силу теоремы 24.2.2 ряд Фурье функции $F$ сходится к функции $F$ равномерно на $[-\pi, \pi]$:

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos kx + B_k \sin kx. \qquad (14)$$

Найдём связь между коэффициентами Фурье $A_k$, $B_k$ функции $F$ и коэффициентами Фурье функции $f$.

С помощью интегрирования по частям получаем

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos kx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}F(x)\frac{\sin kx}{k}\bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[f(x) - \frac{a_0}{2}\right]\sin kx\,dx = -\frac{b_k}{k},\ \ k\in\mathbb{N}.$$

Аналогично $B_k = \dfrac{a_k}{k}$, $k\in\mathbb{N}$.

Для нахождения $A_0$ в (14) положим $x = 0$. Получим

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k = 0, \quad \text{откуда} \quad \frac{A_0}{2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k}.$$

Следовательно,

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{k}\sin kx + \frac{b_k}{k}(1-\cos kx),$$

что совпадает с (13).

## § 24.5. Ряды Фурье $2l$-периодических функций. Комплексная форма рядов Фурье

Пусть $l > 0$, и пусть $f$ — $2l$-периодическая функция, абсолютно интегрируемая на отрезке $[-l, l]$. Положим $f_l(x) = f\left(\dfrac{lx}{\pi}\right)$. Тогда $f_l$ — $2\pi$-периодическая функция, абсолютно интегрируемая на отрезке $[-\pi,\pi]$. Построив для $f_l$ ряд Фурье и произведя обратную замену переменного $x$ на $\pi x/l$, для функции $f$ получаем ряд

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\sin\frac{k\pi x}{l},$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx,$$

$$a_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx, \quad b_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx,$$

который называется *тригонометрическим рядом Фурье функции $f$ периода $2l$.*

Подобным же образом на случай $2l$-периодических функций переносится вся теория тригонометрических рядов Фурье.

Вместо такого способа построения теории рядов Фурье для $2l$-периодических функций можно было бы с самого начала рассмотреть ортогональную на $[-l, l]$ систему тригонометрических функций

$$\frac{1}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{l}x, \quad \sin\frac{\pi}{l}x, \quad \cos\frac{2\pi}{l}x, \quad \sin\frac{2\pi}{l}x, \quad \ldots$$

и на её основе построить теорию тригонометрических рядов Фурье, повторяющую при $l = \pi$ все полученные результаты и выкладки.

Оба указанных подхода приводят к одним и тем же результатам.

Для рядов Фурье существует комплексная форма записи.

Пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Заменим в членах этого ряда $\cos kx$, $\sin kx$, воспользовавшись формулами Эйлера:

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \quad \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}.$$

Получим

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2}(a_k - b_k i)e^{ikx} + \frac{1}{2}(a_k + b_k i)e^{-ikx}\right].$$

Полагая

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{1}{2}(a_k - b_k i), \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + b_k i),$$

имеем

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

При этом *частичной суммой* последнего ряда называется $S_n(x; f) = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$, а ряд называется *сходящимся*, если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x; f)$, который называется *суммой ряда.*

Заметим, что мы пришли бы к тому же ряду $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$, если бы, исходя из системы $\{e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{\infty}$, ортогональной в том смысле, что

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\overline{e^{isx}}\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}e^{-isx}\,dx = 0 \quad \text{при} \quad k \neq s,$$

начали строить такую же теорию рядов Фурье, как для тригонометрической системы.

Глава 25

# МЕТРИЧЕСКИЕ, НОРМИРОВАННЫЕ И ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

## § 25.1. Метрические и нормированные пространства

**Определение 1.** Множество $R$ называется *метрическим пространством*, если каждой паре его элементов $x$, $y$ поставлено в соответствие действительное неотрицательное число $\rho(x, y) \geqslant 0$, называемое *расстоянием* (или *метрикой*) между элементами $x$ и $y$ и удовлетворяющее следующим *аксиомам расстояния*:

1° $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$;

2° $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (*аксиома симметрии*);

3° $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (*аксиома треугольника*).

Последнюю аксиому называют также *неравенством треугольника*.

Элементы метрического пространства называют также *точками*.

Приведем примеры метрических пространств.

**Пример 1.** Пространство $\mathbb{R}^n$ элементов $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ с расстоянием

$$\rho(x, y) = |x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\,,$$

см. § 10.1.

**Пример 2.** Множество $C([a, b])$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с расстоянием

$$\rho(f, g) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |f(t) - g(t)|.$$

С помощью расстояния можно ввести понятия сходящейся последовательности точек метрического пространства, фундаментальной последовательности, полноты метрического пространства, $\varepsilon$-окрестности точки, открытого и замкнутого множества, замыкания множества и др. С этими понятиями мы познакомимся на примере линейных нормированных пространств, входящих в класс метрических пространств. Перенос этих понятий и установленных на их основе свойств множеств на случай произвольного метрического пространства не составляет труда.

**Определение 2.** Множество $R$ называется *действительным* (или *вещественным*) *линейным* (или *векторным*) *пространством*, если для каждых двух его элементов $x, y \in R$ определена их *сумма* $x + y \in R$ и для каждого элемента $x \in R$ и для любого вещественного числа $\lambda$ определено *произведение* $\lambda x \in R$, удовлетворяющие следующим аксиомам:

1° $x + y = y + x \quad \forall\, x, y \in R$;

2° $(x + y) + z = x + (y + z) \quad \forall\, x, y, z \in R$;

3° в $R$ существует такой элемент $\mathbf{0}$, что $x + \mathbf{0} = \mathbf{x} \quad \forall\, x \in R$;

4° для каждого $x \in R$ в $R$ существует противоположный элемент $-x$ такой, что $x + (-x) = \mathbf{0}$;

5° $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x) \quad \forall\, x \in R,\ \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

6° $1x = x \quad \forall\, x \in R$;

7° $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x \quad \forall\, x \in R,\ \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

8° $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y \quad \forall\, x, y \in R,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$.

*Вычитанием* называется операция, обратная сложению. Под *разностью* $x - y$ понимают $x - y := x + (-y)$.

Если в этом определении множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел заменить на множество $\mathbb{C}$ комплексных чисел $(\lambda, \mu \in \mathbb{C})$, то получим определение *комплексного линейного* (*векторного*) *пространства*.

Элементы линейного (векторного) пространства называют также *векторами*.

**Определение 3.** Если в линейном пространстве можно найти $n$ линейно независимых векторов, а любые $n + 1$ векторов этого пространства линейно зависимы, то говорят, что линейное пространство имеет *размерность* $n$.

Если же в линейном пространстве можно указать систему из произвольного конечного числа линейно независимых векторов, то говорят, что линейное пространство *бесконечномерно*.

Бесконечная система элементов линейного пространства называется *линейно независимой*, если любая её конечная подсистема линейно независима.

**Определение 4.** Линейное пространство $R$ называется *нормированным пространством*, если каждому элементу $x \in R$ поставлено в соответствие действительное неотрицательное число $\|x\| \geqslant 0$, называемое *нормой* элемента $x$ и удовлетворяющее следующим аксиомам:

1° $\|x\| = 0 \iff x = \mathbf{0}$;

2° $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \ \forall\, x \in R,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$;

3° $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \ \forall\, x, y \in R$ (*аксиома треугольника*).

Последнюю аксиому называют также *неравенством треугольника*.

Всякое нормированное пространство является метрическим пространством с расстоянием

$$\rho(x, y) := \|x - y\|.$$

Обратное неверно уже потому, что произвольное метрическое пространство не обязательно линейно (в нём не обязательно введены понятия суммы элементов и произведения элемента на число). Даже в линейном метрическом пространстве $R$ число $\rho(x, 0)$ не обязательно является нормой элемента $x \in R$. В последнем можно убедиться на примере линейного метрического пространства числовых последовательностей

$$x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}, \quad \xi_i \in \mathbb{R},$$

в котором для $x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$, $y = \{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$x + y := \{\xi_i + \eta_i\}_{i=1}^{\infty}, \quad \lambda x := \{\lambda \xi_i\}_{i=1}^{\infty},$$

$$\rho(x, y) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i - \eta_i|}{1 + |\xi_i - \eta_i|}.$$

Приведём примеры нормированных пространств.

**Пример 3.** Пространства $\mathbb{R}$ (действительных чисел), $\mathbb{C}$ (комплексных чисел) с нормой

$$\|x\| = |x|.$$

**Пример 4.** Пространство $\mathbb{R}^n$ (см. § 10.1) с нормой

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \quad (x = (x_1, \ldots, x_n)),$$

или

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

или

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|.$$

Говоря о линейных пространствах функций, определённых на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, всегда будем предполагать, что операции сложения и умножения на число введены в них естественным образом, т. е.

$$(x + y)(t) := x(t) + y(t) \quad \forall\, t \in E,$$
$$(\lambda x)(t) := \lambda x(t) \quad \forall\, t \in E.$$

**Пример 5.** $C([a,b])$ — линейное пространство непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций с нормой

$$\|x\| = \|x\|_{C([a,b])} := \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|.$$

В примерах 3–5 все аксиомы нормы проверяются элементарно.

Изучим некоторые понятия и свойства нормированных пространств, связанные с понятием расстояния. Они обобщают известные читателю понятия и свойства числовых последовательностей и множеств. До конца параграфа символом $R$ будем обозначать нормированное пространство. Его элементы будем называть также *точками*.

Для $\varepsilon > 0$ назовем *$\varepsilon$-окрестностью* точки $x_0 \in R$ в нормированном пространстве $R$ множество

$$U_\varepsilon(x_0) := \{x \colon x \in R, \quad \|x - x_0\| < \varepsilon\}.$$

Точка $x_0$ называется *центром* этой окрестности, а $\varepsilon$ — её *радиусом*.

Множество $E \subset R$ называется *ограниченным*, если $\exists\, M > 0$: $E \subset U_M(\mathbf{0})$.

Точка $a \in R$ называется *предельной* точкой множества $E \subset R$, если любая $\varepsilon$-окрестность точки $a$ содержит бесконечно много точек множества $E$.

Предельная точка множества $E$ может принадлежать, а может и не принадлежать множеству $E$.

Объединение множества $E \subset R$ и множества всех предельных точек множества $E$ называется *замыканием* множества $E$ и обозначается символом $\overline{E}$.

*Операцией замыкания* (*замыканием*) множества $E \subset R$ называется переход от множества $E$ к его замыканию $\overline{E}$.

Множество $E \subset R$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки, т. е. если $\overline{E} = E$.

Замыкание $\overline{E}$ множества $E \subset R$ является замкнутым множеством (доказательство то же, что и в случае $R = \mathbb{R}^n$).

Пересечение любого числа и объединение конечного числа замкнутых множеств суть замкнутые множества (доказательство то же, что и в случае $R = \mathbb{R}^n$).

Точка $x$ называется *внутренней* точкой множества $E \subset R$, если существует $\varepsilon$-окрестность $U_\varepsilon(x)$ этой точки, содержащаяся в $E$.

Множество, все точки которого внутренние, называется *открытым*.

Объединение любого числа и пересечение конечного числа открытых множеств суть открытые множества (доказательство то же, что и в случае $R = \mathbb{R}^n$).

Для того чтобы множество $E$ было открытым, необходимо и достаточно, чтобы его дополнение $R \setminus E$ до всего пространства $R$ было замкнутым (предлагается доказать в качестве упражнения).

**Определение 5.** Говорят, что последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ точек из $R$ *сходится* к точке $x_0 \in R$, если

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x_0\| = 0.$$

При этом точку $x_0$ называют *пределом* последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ и пишут $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$.

Такую сходимость часто называют *сходимостью по норме*.

Это определение можно сформулировать ещё и следующим образом: последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к $x_0$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon x_n \in U_\varepsilon(x_0)\ (\text{т. е. } \|x_n - x_0\| < \varepsilon)\ \forall\, n \geqslant n_\varepsilon.$$

Из определения предела следует, что никакая последовательность не может иметь двух различных пределов и что если последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к точке $x_0$, то и всякая её подпоследовательность сходится к $x_0$.

Используя понятие предела последовательности, можно дать эквивалентное определение предельной точки множества: точка $a \in R$ называется предельной точкой множества $E \subset R$, если существует последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $x_k \in E$, $x_k \neq a \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$, сходящаяся к $a$ (доказать в качестве упражнения).

**Определение 6.** Последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ точек из $R$ называется *фундаментальной*, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon \|x_j - x_k\| < \varepsilon \quad \forall\, j, k \geqslant n_\varepsilon.$$

Всякая сходящаяся последовательность является, очевидно, фундаментальной, но не наоборот.

**Определение 7.** Нормированное пространство $R$ называется *полным*, если всякая фундаментальная последовательность его точек является сходящейся в $R$, т. е. имеет в $R$ предел.

Ранее было установлено (критерий Коши), что линейные нормированные пространства $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ из примеров 3, 4 являются полными.

Из теоремы 16.1.1 и теоремы 16.3.1 следует, что пространство $C([a, b])$ из примера 5 является полным.

Полное нормированное пространство называется *банаховым пространством*.

Примеры неполных пространств будут даны в § 25.2.

**Определение 8.** Пусть $A \subset B \subset R$. Множество $A$ называется *плотным* в $B$, если $\overline{A} \supset B$.

Теорему 24.3.3 (Вейерштрасса) можно переформулировать следующим образом: множество всех алгебраических многочленов плотно в пространстве $C([a, b])$.

Если пространство $R$ неполно, то его всегда можно *пополнить*, т. е. «экономно» включить некоторым (и, по существу, единственным) способом в некоторое полное пространство.

**Определение 9.** Пусть $R$ — нормированное пространство. Полное нормированное пространство $R^*$ называется *пополнением* пространства $R$, если:

1° $R$ является подпространством пространства $R^*$, т. е. $R \subset \subset R^*$ и определения суммы, произведения элемента на число и нормы в пространствах $R$ и $R^*$ совпадают для элементов из $R$;

2° $\overline{R} = R^*$, т. е. $R$ плотно в $R^*$.

Определение пополнения метрического пространства аналогично; при этом вместо 1° требуется, чтобы $R \subset R^*$ и чтобы расстояния в $R$ и в $R^*$ совпадали.

**Теорема 1.** *Каждое метрическое пространство и каждое нормированное пространство имеют пополнения.*

Не приводя доказательства, укажем лишь его идею на примере метрического пространства $R$ с расстоянием $\rho(x, y)$.

Задача состоит прежде всего в том, чтобы «экономно» присоединить к $R$ некоторые новые («идеальные») элементы и распространить на полученное расширенное множество понятие расстояния. Рассмотрим всевозможные фундаментальные последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, не являющиеся сходящимися в $R$. Расстоянием между последовательностями $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ назовём число

$$\rho(\{x_k\}, \{y_k\}) := \lim_{k\to\infty} \rho(x_k, y_k).$$

Последний предел существует в силу фундаментальности числовой последовательности $\{\rho(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ и полноты $\mathbb{R}$.

Расстоянием между последовательностью $\{x_k\}$ и элементом $x_0 \in R$ назовём

$$\rho(\{x_k\}, x_0) = \lim_{k\to\infty} \rho(x_k, x_0).$$

Две не сходящиеся в $R$ фундаментальные последовательности $\{x_k\}$, $\{y_k\}$ назовём эквивалентными, если $\rho(\{x_k\}, \{y_k\}) = 0$.

Все фундаментальные последовательности, не сходящиеся в $R$, разбиваются на классы эквивалентных последовательностей. Каждый такой класс назовём «идеальным» элементом. Расстояние между двумя «идеальными» элементами определим как расстояние между какими-либо двумя представителями соответствующих классов эквивалентных последовательностей. Аналогично введём понятие расстояния между «идеальным» элементом и элементом $x_0 \in R$.

Объединение пространства $R$ и множества полученных «идеальных» элементов обозначим через $R^*$. Наделённое введённым расстоянием, оно является искомым пополнением метрического пространства $R$.

**Определение 10.** Пусть $R$ — нормированное пространство, $x, x_k \in R \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ *сходится* к $x$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k = x$, где предел понимается в смысле сходимости по норме, т. е. если

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| = 0.$$

## § 25.2. Пространства $CL_1$, $CL_2$, $RL_1$, $RL_2$, $L_1$, $L_2$

Если в аксиомах нормы из определения 25.1.4 снять требование $\|x\| = 0 \Rightarrow x = \mathbf{0}$, то число $\|x\|$ будет называться *полунормой* элемента $x$, а определение нормированного пространства превратится в определение *полунормированного* пространства. На полунормированные пространства дословно переносятся понятия предельного перехода, замыкания множества, плотности множества, полноты пространства и др.

Рассмотрим примеры нормированных и полунормированных пространств, норма (полунорма) которых задаётся с помощью интегралов.

**Пример 1.** $CL([a, b]) = CL_1([a, b])$ — линейное пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с нормой

$$\|x\| = \|x\|_{L([a,b])} := \int_a^b |x(t)|\, dt.$$

**Пример 2.** $CL_2([a,b])$ — линейное пространство непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций с нормой

$$\|x\| = \|x\|_{L_2([a,b])} := \sqrt{\int\limits_a^b |x(t)|^2\,dt}\,.$$

В примерах 1, 2 все аксиомы нормы проверяются элементарно, за исключением неравенства треугольника в примере 2. Последнее будет выведено ниже из свойств скалярного произведения.

**Определение 1.** Пусть $(a,b) \subset (-\infty,\infty)$. Функция $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ называется *финитной на* $(a,b)$, если $f = 0$ вне некоторого отрезка $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$.

**Пример 3.** Пусть $p \in \{1,2\}$. Тогда $C_0L_p((a,b))$ — линейное пространство непрерывных и финитных на $(a,b)$ функций с нормой

$$\|x\| = \|x\|_{L_p((a,b))} := \left(\int\limits_a^b |x(t)|^p dt\right)^{1/p}.$$

**Пример 4.** $RL((a,b)) = RL_1((a,b))$ — полунормированное пространство абсолютно интегрируемых на интервале $(a,b) \subset (-\infty,\infty)$ функций $x\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, т. е. функций со сходящимся интегралом $\int_a^b |x(t)|\,dt$, понимаемым как несобственный с конечным числом особенностей, и интегрируемых по Риману на каждом отрезке из интервала $(a,b)$, не содержащем особенностей (см. определение 14.8.2). При этом полунорма

$$\|x\| = \|x\|_{L_1((a,b))} := \int\limits_a^b |x(t)|\,dt \tag{1}$$

не является нормой на линейном пространстве $RL_1((a,b))$, так как из равенства $\|\theta\| = \int_a^b |\theta(t)|\,dt = 0$ не следует, что $\theta = 0$ (нулевым элементом рассматриваемого линейного пространства является тождественно равная нулю функция). В самом деле, равенство $\|\theta\| = 0$ выполняется, например, и для всякой функции $\theta$, принимающей ненулевые значения лишь в конечном множестве точек.

**Замечание 1.** Отметим без доказательства следующие два свойства интегрируемой по Риману функции:

1° ограниченная функция $\theta\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману на $[\alpha,\beta]$ тогда и только тогда, когда множество её точек разрыва имеет лебегову меру нуль, т. е. может быть покрыто объединением счётного числа интервалов сколь угодно малой суммарной длины;

$2^\circ$ для интегрируемой по Риману на $[\alpha, \beta]$ функции $\theta$ условие $\int_\alpha^\beta |\theta(t)|\,dt = 0$ эквивалентно тому, что $\theta(t) = 0$ в каждой точке $t$ непрерывности функции $\theta$.

Для множества функций $RL_1((a,b))$ с помощью интеграла из (1) можно построить другое линейное пространство $\widetilde{RL_1}((a,b))$, которое уже окажется нормированным.

Две функции $x, y \in RL_1((a,b))$ назовём *эквивалентными*, если $\int_a^b |x(t) - y(t)|\,dt = 0$. Таким образом, линейное пространство $RL_1((a,b))$ разбивается на классы эквивалентных функций. В силу замечания 1 две эквивалентные функции «мало» отличаются друг от друга: их значения могут быть различны лишь на множестве точек нулевой лебеговой меры.

Совокупность всех таких классов обозначим через $\widetilde{RL_1}((a,b))$. Превратим ее в линейное пространство, введя следующим образом операции сложения и умножения на действительное число. Пусть $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$ — два класса из $\widetilde{RL_1}((a,b))$, а $x$ $(\in \widetilde{x})$, $y$ $(\in \widetilde{y})$ — два каких-либо их представителя. *Суммой* $\widetilde{x} + \widetilde{y}$ назовём тот класс $\widetilde{z}$, который содержит $x + y$, а *произведением* $\lambda\widetilde{x}$ — тот класс, который содержит $\lambda x$. Легко проверить независимость суммы и произведения от выбора представителей, а также выполнение для $\widetilde{RL_1}((a,b))$ всех аксиом линейного пространства. Линейное пространство $\widetilde{RL_1}((a,b))$ называется *фактор-пространством* пространства $RL_1((a,b))$.

*Нулевым элементом* $\mathbf{0}$ пространства $\widetilde{RL_1}((a,b))$ является множество абсолютно интегрируемых на $(a,b)$ функций $\theta$, для которых $\int_a^b |\theta(t)|\,dt = 0$.

Положим

$$\|\widetilde{x}\|_{\widetilde{L}_1((a,b))} := \|x\|_{L_1((a,b))} = \int\limits_a^b |x(t)|\,dt,$$

где $x$ — произвольная функция из $\widetilde{x}$. Нетрудно проверить, что $\|\widetilde{x}\|_{\widetilde{L}_1((a,b))}$ является нормой в $\widetilde{RL_1}((a,b))$.

**Пример 5.** $RL_2((a,b))$ — полунормированное пространство функций $x\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, определённых на интервале $(a,b) \subset \subset (-\infty, +\infty)$, со сходящимся интегралом $\int_a^b |x(t)|^2 dt$, понимаемым как несобственный с конечным числом особенностей, и интегрируемых по Риману на каждом отрезке из $(a,b)$, не содержащем особенностей. При этом

$$\|x\| = \|x\|_{L_2((a,b))} := \sqrt{\int\limits_a^b |x(t)|^2 dt}\,. \tag{2}$$

Аналогично примеру 4 можно построить фактор-пространство $\widetilde{RL_2}((a,b))$ пространства $RL_2((a,b))$, состоящее из классов функций, причём две функции $x$, $y$ входят в один и тот же класс (называются *эквивалентными*, *отождествляются*, *не различаются*), если

$$\int\limits_a^b |x(t) - y(t)|^2 dt = 0.$$

Операции сложения и умножения на число $\lambda \in \mathbb{R}$ вводятся в $\widetilde{RL_2}((a,b))$ так же, как в примере 4. Построенное фактор-пространство является линейным нормированным пространством с нормой

$$\|\widetilde{x}\|_{\widetilde{L}_2((a,b))} := \|x\|_{L_2((a,b))} = \sqrt{\int\limits_a^b |x(t)|^2 dt}\,,$$

где $x$ — произвольная функция из класса $\widetilde{x}$ ($x \in \widetilde{x}$). Нулевым элементом $\mathbf{0}$ пространства $\widetilde{RL_2}((a,b))$ является множество функций $\theta \in RL_2((a,b))$, для которых $\int_a^b |\theta(t)|^2 dt = 0$.

Пространства $CL_p([a,b])$, $C_0L_p((a,b))$, $p = 1, 2$, из примеров 1–3 не являются полными. Покажем это на примере пространства $CL_1([-1,1])$. Рассмотрим последовательность непрерывных на $[-1,1]$ функций

$$f_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } -1 \leqslant t < 0, \\ kt & \text{при } 0 \leqslant t < \dfrac{1}{k}, \\ 1 & \text{при } \dfrac{1}{k} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Последовательность $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ является фундаментальной в $CL_1([-1,1])$, так как

$$\|f_m - f_k\|_{L_1([-1,1])} \leqslant \int\limits_0^{\max\{1/m, 1/k\}} dt = \max\left\{\frac{1}{m}, \frac{1}{k}\right\}.$$

Однако в $CL_1([-1,1])$ не существует функции, являющейся пределом этой последовательности по норме $CL_1([-1,1])$. В самом деле, предполагая противное, обозначим предельную функцию через $\varphi$. Она непрерывна на $[-1,1]$ как функция из $CL_1([-1,1])$, и

$$\int_{-1}^{1} |\varphi(t) - f_k(t)|\,dt \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Тогда при $k \to \infty$

$$\int_{-1}^{0} |\varphi(t) - f_k(t)|\,dt = \int_{-1}^{0} |\varphi(t)|\,dt \to 0,$$

так что

$$\int_{-1}^{0} |\varphi(t)|\,dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = 0 \text{ при } -1 \leqslant t \leqslant 0.$$

Аналогично устанавливается, что

$$\varphi(t) = 1 \quad \text{при} \quad 0 < \delta \leqslant t \leqslant 1 \quad \forall\,\delta \in (0,1).$$

Как видим, функция $\varphi$ разрывна в точке $t = 0$, что противоречит предположению о существовании в $CL_1([-1,1])$ предела последовательности $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$. Следовательно, пространство $CL_1([a,b])$ не полно.

**Лемма 1.** *Множество $C_0((a,b))$ непрерывных и финитных на $(a,b)$ функций плотно как в $RL_1((a,b))$, так и в $RL_2((a,b))$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое утверждение леммы представляет собой переформулировку следствия из теоремы 14.8.3. Установим второе утверждение. Пусть $f \in RL_2((a,b))$, $\varepsilon > 0$. Тогда существует функция $f_\varepsilon \in RL_2((a,b))$ такая, что $f_\varepsilon = 0$ вне некоторого отрезка $[A,B] \subset (a,b)$, $f_\varepsilon$ интегрируема по Риману на $[A,B]$,

$$\|f - f_\varepsilon\|_{L_2((a,b))} < \varepsilon.$$

Функция $f_\varepsilon$ строится так же, как при доказательстве теоремы 14.8.3.

Пусть $M := \sup\limits_{(a,b)} |f_\varepsilon|$. В силу следствия из теоремы 14.8.3 существует функция $\varphi \in C_0((a,b))$ такая, что

$$\int_a^b |f_\varepsilon(x) - \varphi(x)|\,dx < \frac{\varepsilon^2}{2M}.$$

При этом, как видно из построения, можно считать, что $|\varphi| \leqslant M$ на $(a, b)$.

Тогда:

$$\int_a^b |f_\varepsilon(x) - \varphi(x)|^2 dx \leqslant 2M \int_a^b |f_\varepsilon(x) - \varphi(x)|\, dx < \varepsilon^2,$$

$$\|f - \varphi\|_{L_2((a,b))} \leqslant \|f - f_\varepsilon\|_{L_2((a,b))} + \|f_\varepsilon - \varphi\|_{L_2((a,b))} < 2\varepsilon.$$

Можно показать, что пространства $RL_1((a,b))$, $RL_2((a,b))$ не являются полными (см., например, § 19.7 в: *Никольский С. М.* Курс математического анализа. Т. 2. — 4-е изд. — М.: Наука. Физматлит, 2001. — С. 474–476). Мы не приводим доказательства, поскольку оно требует привлечения теории интеграла Лебега. Укажем лишь последовательность $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ функций, фундаментальную в $RL_1((0,1))$, но не имеющую предела в $RL_1((0,1))$.

Перенумеруем все рациональные точки интервала $(0,1)$ и покроем $k$-ю из них интервалом $I_k \subset (0,1)$ с центром в этой точке и длиной $\mu I_k < \varepsilon 2^{-k}$ $(0 < \varepsilon < 1,\ k \in \mathbb{N})$. Пусть

$$f_k(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in \bigcup\limits_{j=1}^{k} I_j, \\ 0, & \text{если } t \in (0,1) \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{k} I_j. \end{cases}$$

Очевидно, что последовательность $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ фундаментальна в $RL_1((0,1))$. Однако можно показать, что она не имеет предела в $RL_1((0,1))$.

**Упражнение 1.** Показать, что в пространствах $RL_1((a,b))$, $RL_2((a,b))$ счётное множество финитных ступенчатых функций с рациональными параметрами (начало и конец ступени, высота ступени) плотно.

У к а з а н и е. Использовать теорему 14.8.3.

Для описания пополнений пространств $RL_1((a,b))$, $RL_2((a,b))$ необходимо ввести понятия меры и интеграла Лебега. Мы лишь коснёмся этих понятий, избегая точных определений. Понятие измеримости множества по Лебегу шире понятия измеримости множества по Жордану: всякое множество, измеримое по Жордану, измеримо по Лебегу, и его мера Лебега совпадает с мерой Жордана.

Множество всех рациональных точек отрезка $[0,1]$ измеримо по Лебегу (и имеет лебегову меру 0, т. е. может быть покрыто счётной системой интервалов сколь угодно малой суммарной длины), но не измеримо по Жордану.

Рассмотрим определённую на отрезке $[a,b]$ функцию $f$ со значениями, лежащими на отрезке $[A,B]$. Эту функцию будем считать *измеримой по Лебегу*, т. е. такой, что множество $\{x \in [a,b]\colon f(x) \leqslant \alpha\}$ измеримо по Лебегу $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$.

Поделим отрезок $[A,B]$ на $k$ равных частей точками $A = y_0 < < y_1 < \ldots < y_k = B$ и составим *интегральную сумму Лебега*

$$\sum_{j=1}^{k} y_j \operatorname{mes} e_j, \quad e_j = \{x\colon a \leqslant x \leqslant b,\ y_{j-1} < f(x) \leqslant y_j\}, \tag{3}$$

где $\operatorname{mes} e_k$ — мера Лебега множества $e_k$.

Тогда число

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} y_j \operatorname{mes} e_j$$

называется *интегралом Лебега* функции $f$ по отрезку $[a,b]$.

Как видим, при построении интегральной суммы (3) в качестве «представителя» функции $f$ на множестве $e_j$ выступает число $y_j$, близкое к значениям функции $f$ в любой точке из $e_j$. В то же время при построении интегральной суммы Римана

$$\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i],$$

представителем функции $f$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ выступает число $f(\xi_i)$ — значение функции $f$ в одной из точек отрезка. Такой представитель может считаться удачным, если $f$ мало меняется на отрезке разбиения (например, если $f$ непрерывна на $[a,b]$).

В общем же случае число $f(\xi_i)$ не обязательно является удачным представителем значений функции $f$ на $[x_{i-1}, x_i]$.

Естественно ожидать (и легко показывается), что функция, интегрируемая по Риману на отрезке, интегрируема и по Лебегу на этом отрезке, причём её интегралы Римана и Лебега совпадают.

С другой стороны, функция Дирихле $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально;} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально} \end{cases}$$

интегрируема по Лебегу (и её интеграл Лебега равен нулю), но не интегрируема по Риману. Таким образом, понятие интеграла Лебега шире понятия интеграла Римана.

**Пример 6.** Обозначим через $L((a,b)) = L_1((a,b))$ полунормированное пространство интегрируемых по Лебегу на $(a,b) \subset (-\infty, +\infty)$ функций с полунормой (1), где интеграл понимается как интеграл Лебега. Тогда можно показать, что пространство $L_1((a,b))$ является полным и что $RL_1((a,b))$, а значит (в силу леммы 1), и $C_0L_1((a,b))$ плотны в нём. Согласно определению пополнения, пространство $L_1((a,b))$ является пополнением как пространства $RL_1((a,b))$, так и пространства $C_0L_1((a,b))$.

**Пример 7.** Обозначим через $L_2((a,b))$ полунормированное пространство измеримых по Лебегу на $(a,b) \subset (-\infty,+\infty)$ функций, квадрат которых интегрируем по Лебегу. Полунорму в нём зададим равенством (2), где интеграл понимается как интеграл Лебега. Можно показать, что пространство $L_2((a,b))$ является полным и что подпространства $RL_2((a,b))$, а значит (в силу леммы 1), и $C_0L_2((a,b))$ плотны в нём. Согласно определению пополнения, пространство $L_2((a,b))$ является пополнением как пространства $RL_2((a,b))$, так и пространства $C_0L_2((a,b))$.

**Замечание 2.** В случае конечных $a$, $b$ вместо $L_p((a,b))$ можно писать $L_p([a,b])$, $p=1,\ 2$.

**Замечание 3.** Часто, допуская некоторую вольность, пространства $L_1((a,b))$, $L_2((a,b))$ называют нормированными пространствами функций, в которых отождествлены функции, различающиеся лишь на множестве лебеговой меры 0.

Придерживаясь точных формулировок, следовало бы говорить о нормированных пространствах $\widetilde{L}_1((a,b))$ и $\widetilde{L}_2((a,b))$, элементами которых являются классы эквивалентных (т. е. попарно отличающихся лишь на множестве лебеговой меры 0) функций с соответственно введёнными операциями сложения и умножения на число и нормой (ср. пространства $\widetilde{RL}_1$, $\widetilde{RL}_2$ из примеров 4, 5).

## § 25.3. Евклидовы и гильбертовы пространства

**Определение 1.** *Скалярным произведением* в действительном линейном пространстве $R$ называется вещественная функция $(x,y)$, определённая для каждой пары элементов $x, y \in R$ и удовлетворяющая условиям:

1° $(x,x) \geqslant 0$; $(x,x) = 0 \iff x = \mathbf{0}$;
2° $(x,y) = (y,x)$;
3° $(x_1+x_2,y) = (x_1,y) + (x_2,y)$;
4° $(\lambda x,y) = \lambda(x,y) \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$.

**Определение 2.** Действительное линейное пространство с фиксированным скалярным произведением называется *евклидовым* пространством.

В евклидовом пространстве можно ввести норму

$$\|x\| := \sqrt{(x,x)}\,. \tag{1}$$

Выполнение для $\|x\|$ всех аксиом нормы очевидно, за исключением неравенства треугольника. Установим его, доказав предварительно *неравенство Коши–Буняковского*

$$|(x,y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|. \tag{2}$$

Считая $\|x\| > 0$, рассмотрим квадратный трёхчлен

$$(tx+y, tx+y) = (x,x)t^2 + 2(x,y)t + (y,y) = \\ = \|x\|^2t^2 + 2(x,y)t + \|y\|^2.$$

Так как он неотрицателен (по свойству 1° скалярного произведения), то его дискриминант $4(x,y)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leqslant 0$, откуда и следует (2).

Теперь с помощью (2) получаем

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = \|x\|^2 + 2(x,y) + \|y\|^2 \leqslant \\ \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

что равносильно неравенству треугольника

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

Приведём примеры евклидовых пространств.

**Пример 1.** Действительное $n$-мерное арифметическое евклидово пространство $\mathbb{R}^n$. Так называется линейное пространство $\mathbb{R}^n$ точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$ с вещественными координатами, скалярное произведение в котором определено формулой

$$(x,y) := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad \text{где } x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n).$$

**Пример 2.** $CL_2([a,b])$ — линейное пространство непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций со скалярным произведением $(f,g) := \int_a^b f(t)g(t)\,dt$, где $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

Вводя норму

$$\|f\| = \|f\|_{L_2([a,b])} = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt}\,,$$

получаем, что $CL_2([a,b])$ совпадает с линейным нормированным пространством $CL_2([a,b])$ из примера 25.2.2.

**Пример 3.** $RL_2((a,b))$ — линейное пространство из примера 25.2.5. Введём скалярное произведение

$$(f,g) := \int_a^b f(t)g(t)\,dt, \quad f,g \in RL_2((a,b)).$$

Для вещественной функции $(f,g)$ выполняются все свойства скалярного произведения, за исключением свойства $(f,f) = 0 \Rightarrow \Rightarrow f = \mathbf{0}$ (т. е. $f(t) = 0 \ \forall\, t \in (a,b)$). Такую функцию $(f,g)$ называют *полускалярным произведением*. Полунорма определяется как

$$\|f\|_{L_2((a,b))} = \sqrt{(f,f)}\,.$$

**Замечание 1.** В евклидовом пространстве для нормы (1) выполняется, как нетрудно проверить, *тождество параллелограмма*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \tag{3}$$

выражающее следующее свойство: *сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин всех его сторон.*

Свойство (3) является не только необходимым, но и достаточным для того, чтобы нормированное пространство было евклидовым.

**Упражнение 1.** Убедиться с помощью (3), что нормы в пространствах $C([a,b])$, $CL_1([a,b])$ из примеров 25.1.5, 25.2.1 нельзя задать с помощью какого бы то ни было скалярного произведения.

Наряду с евклидовым пространством рассматривают и комплексное линейное пространство со скалярным произведением, называемое *унитарным пространством* (*комплексным евклидовым пространством*). При этом *скалярным произведением* называется комплекснозначная функция $(x,y)$ с условиями:

$1^\circ$ $(x,x) \geqslant 0$, $(x,x) = 0 \iff x = \mathbf{0}$,

$2^\circ$ $(x,y) = \overline{(y,x)}$,

$3^\circ$ $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$,

$4^\circ$ $(\lambda x, y) = \lambda(x,y) \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}$.

Норма в комплексном евклидовом пространстве определяется, как и в действительном, формулой (1).

Приведём примеры комплексных евклидовых пространств.

**Пример 4.** $\mathbb{C}^n$ — линейное пространство, представляющее собой множество всевозможных упорядоченных наборов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ из $n$ комплексных чисел с операциями сложения и умножения на комплексное число, определёнными по тем же правилам, что и для пространства $\mathbb{R}^n$, и со скалярным произведением

$$(x, y) := \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, \ldots, y_n).$$

**Пример 5.** $CL_2([a, b])$ — комплексное линейное пространство комплекснозначных непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ со скалярным произведением

$$(f, g) := \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\, dt.$$

**Определение 3.** Бесконечномерное евклидово (унитарное) пространство называется *предгильбертовым*.

Полное бесконечномерное евклидово (унитарное) пространство (т. е. полное предгильбертово пространство) называется *гильбертовым*.

Всякое предгильбертово пространство, будучи пополненным по его норме, превращается в гильбертово, если скалярное произведение распространить по непрерывности на это пополнение. В связи с этим важна

**Лемма 1.** *Скалярное произведение $(x, y)$ в предгильбертовом пространстве непрерывно зависит от $x$, $y$, т. е. $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \to (x_0, y_0)$ при $\|\Delta x\| + \|\Delta y\| \to 0$.*

Доказательство. Пусть $\|\Delta x\| < \delta < 1$, $\|\Delta y\| < \delta < 1$. Тогда с помощью неравенства Коши–Буняковского (2) имеем

$$\begin{aligned}|(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - (x_0, y_0)| &= \\ &= |(\Delta x, y_0) + (x_0, \Delta y) + (\Delta x, \Delta y)| \leqslant \\ &\leqslant \|\Delta x\|\,\|y_0\| + \|\Delta y\|\,\|x_0\| + \|\Delta x\|\,\|\Delta y\| \leqslant \\ &\leqslant \delta(\|y_0\| + \|x_0\| + \delta) \leqslant \delta(\|x_0\| + \|y_0\| + 1).\end{aligned}$$

**Следствие.** *Пусть $R$ — предгильбертово пространство, $x_k$, $x$, $a \in R$. Тогда:*

1° $x_k \to x \Rightarrow (x_k, a) \to (x, a)$ *при* $k \to \infty$;

2° $\sum_{j=1}^{\infty} x_j = x \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} (x_j, a) = (x, a)$.

Мы будем рассматривать лишь *сепарабельные* предгильбертовы и гильбертовы пространства, т. е. такие, в которых существует счётное плотное множество.

**Пример 6.** Пространство $l_2$ элементов

$$x = (x_1, x_2, \ldots), \quad \text{где } x_i \in \mathbb{R} \quad \forall\, i \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty,$$

со скалярным произведением

$$(x, y) := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

является сепарабельным гильбертовым.

Сходимость (даже абсолютная) последнего ряда следует из оценки

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leqslant \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 + \sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 \right).$$

Аксиомы гильбертова пространства проверяются непосредственно. Плотным в $l_2$ является счётное множество его элементов $x$ с рациональными координатами $x_i$.

**Пример 7.** Пространство $CL_2([a, b])$ из примера 2 является сепарабельным предгильбертовым пространством.

**Упражнение 2.** Доказать, что счётное множество многочленов с рациональными коэффициентами плотно в $CL_2([a, b])$.

У к а з а н и е. Можно воспользоваться теоремой Вейерштрасса о приближении непрерывной функции многочленами.

**Пример 8.** Пространство $L_2((a, b))$, $(a, b) \subset (-\infty, +\infty)$, из примера 25.2.7 является гильбертовым, если под элементами $L_2((a, b))$ понимать функции, отождествляя две функции, различающиеся лишь на множестве лебеговой меры 0 (см. замечание 25.2.3).

Множество финитных ступенчатых функций с рациональными параметрами является счётным плотным множеством в $L_2((a, b))$.

## § 25.4. Ортогональные системы и ряды Фурье по ним

В этом параграфе $R$ будет обозначать предгильбертово пространство.

**Определение 1.** Элементы $x, y \in R$ называют *ортогональными* (друг другу), если $(x, y) = 0$.

Последовательность ненулевых элементов $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ пространства $R$ называют *ортогональной системой*, или *ортогональной последовательностью*, если

$$(e_j, e_k) = 0 \quad \forall\, j, k \in \mathbb{N}, \quad j \neq k.$$

Если при этом $\|e_j\| = 1 \quad \forall\, j \in \mathbb{N}$, то ортогональная система (последовательность) называется *ортонормированной*. Поделив каждый элемент ортогональной системы на его норму, получим ортонормированную систему.

Если $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ — ортогональная система, то $\|e_j\| > 0 \ \forall\, j \in \mathbb{N}$ (согласно определению), и при любом $k \in \mathbb{N}$ векторы $e_1, \ldots, e_k$ линейно независимы.

Установим последнее. Допустив противное, получаем при некотором $k \in \mathbb{N}$ и при некоторых $\lambda_j \in \mathbb{R}$, причём не все из них равны нулю, что

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j e_j = \mathbf{0}.$$

Если при этом $\lambda_s \neq 0$, то, умножая последнее равенство скалярно на $e_s$ и пользуясь ортогональностью системы, получаем, что $\lambda_s \|e_s\|^2 = 0$. Отсюда $e_s = \mathbf{0}$, что противоречит принадлежности $e_s$ ортогональной последовательности элементов.

Приведём примеры ортогональных систем.

**Пример 1.** Последовательность $\{1/2,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots\}$ ортогональна относительно скалярного произведения

$$(f, g) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, dx.$$

**Пример 2.** Последовательность комплекснозначных функций $\{e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ ортогональна относительно скалярного произведения

$$(f, g) = \int\limits_{0}^{2\pi} f(x) \overline{g}(x)\, dx.$$

**Пример 3.** Многочлены

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

называются *многочленами (полиномами) Лежандра*. Последовательность $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ многочленов Лежандра ортогональна относительно скалярного произведения

$$(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} f(x) g(x)\, dx.$$

Покажем, что полином Лежандра $P_n$ ортогонален любому многочлену $Q_m$ степени $m < n$.

Учитывая, что производная $((x^2-1)^n)^{(k)}$ при $0 \leqslant k \leqslant n-1$ обращается в нуль в точках $x = \pm 1$, с помощью интегрирования по частям получаем

$$\int\limits_{-1}^{1} Q_m(x)\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\,dx = -\int\limits_{-1}^{1} Q'_m(x)\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\,dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} Q''_m(x)\frac{d^{n-2}(x^2-1)^n}{dx^{n-2}}\,dx = \ldots =$$

$$= (-1)^m Q_m^{(m)}(x)\frac{d^{n-m-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-m-1}}\bigg|_{-1}^{1} = 0. \quad (1)$$

В частности, $\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = 0$ при $0 \leqslant m < n$.

Вычислим норму многочлена Лежандра

$$P_n(x) = \frac{(2n-1)!!}{n!}x^n + Q_{n-1}(x),$$

где $Q_{n-1}$ — многочлен степени не выше $n-1$ [1]. Используя (1) и интегрируя несколько раз по частям, получаем

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{(2n-1)!!}{n!}\int\limits_{-1}^{1} P_n(x)x^n\,dx =$$

$$= \frac{(2n-1)!!}{n!(2n)!!}\int\limits_{-1}^{1} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}x^n\,dx = \ldots =$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\int\limits_{-1}^{1} ((x^2-1)^n)'x\,dx =$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!}\int\limits_{-1}^{1} (x^2-1)^{n-1}x^2 dx =$$

$$= (-1)^{n-2}\frac{(2n-1)!!}{(2n-4)!!3}\int\limits_{-1}^{1} (x^2-1)^{n-2}x^4\,dx = \ldots = \int\limits_{-1}^{1} x^{2n}dx = \frac{2}{2n+1}.$$

[1] Символом $n!!$ обозначается произведение всех натуральных чисел до $n$ включительно, имеющих ту же чётность, что и $n$.

Следовательно, $\|P_n\| = \sqrt{2/(2n+1)}$.

Ниже через $R$ мы обозначаем предгильбертово пространство, через $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ — норму его элемента $x$, через $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ — ортогональную последовательность в $R$. Напомним, что по определению $\|e_j\| > 0 \ \forall\, j \in \mathbb{N}$.

**Теорема 1.** *Пусть* $x \in R$, $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$.

*Тогда*

$$\alpha_k = \frac{(x, e_k)}{\|e_k\|^2}. \tag{2}$$

Доказательство. В силу следствия из леммы 25.3.1 сходящийся в $R$ ряд можно почленно умножать скалярно. Используя свойство ортогональности, имеем

$$(x, e_s) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (e_k, e_s) = \alpha_s (e_s, e_s),$$

откуда и следует (2).

**Определение 2.** Пусть $x \in R$, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортогональная последовательность в $R$.

Тогда числа $\alpha_k = \dfrac{(x, e_k)}{\|e_k\|^2}$ называются *коэффициентами Фурье* элемента $x$ по системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ — *рядом Фурье* элемента $x$ по системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, $S_n = S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ — (*частичной*) *суммой Фурье порядка* $n$ элемента $x$ по системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Таким образом, каждому элементу $x \in R$ ставится в соответствие его ряд Фурье:

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k. \tag{3}$$

Говорят, что элемент *$x$ разложен в ряд Фурье*, и пишут $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$, если ряд в (3) сходится к $x$ в $R$, т. е.

$$\|x - S_n(x)\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Очевидны следующие свойства частичных сумм ряда Фурье:

$$S_n(e_k) = e_k \quad \text{при} \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

откуда

$$S_n(T_n) = T_n, \quad \text{если} \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k; \tag{4}$$

$$(x - S_n(x), e_k) = 0 \quad \text{при} \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

**Лемма 1** (об ортогональном разложении). *Всякий элемент $x \in R$ может быть представлен в виде суммы двух ортогональных друг другу слагаемых:*

$$x = S_n(x) + (x - S_n(x)), \quad (S_n(x), x - S_n(x)) = 0. \tag{5}$$

**Лемма 2** (аналог теоремы Пифагора).

$$\|x\|^2 = \|x - S_n(x)\|^2 + \|S_n(x)\|^2. \tag{6}$$

Доказательство. Используя (5), имеем

$$\|x\|^2 = \|(x - S_n) + S_n\|^2 = ((x - S_n) + S_n, (x - S_n) + S_n) = \\ = \|x - S_n(x)\|^2 + \|S_n(x)\|^2.$$

**Теорема 2** (минимальное свойство коэффициентов Фурье).

$$\min_{c_1,\ldots,c_n} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \right\| = \|x - S_n(x)\|.$$

Доказательство. Пусть $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k$. С помощью леммы 2 и (4) получаем, что

$$\|x - T_n\|^2 = \|(x - T_n) - S_n(x - T_n)\|^2 + \|S_n(x - T_n)\|^2 = \\ = \|x - S_n(x)\|^2 + \|S_n(x) - T_n\|^2 \geqslant \|x - S_n(x)\|^2.$$

**Следствие.**

$$\|x - S_n(x)\| \leqslant \|x - S_m(x)\| \quad \textit{при} \quad n \geqslant m.$$

**Теорема 3** (неравенство Бесселя). *Пусть $x \in R$, $\alpha_k$ — коэффициенты Фурье элемента $x$ по ортогональной системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда справедливо неравенство Бесселя*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \|e_k\|^2 \leqslant \|x\|^2. \tag{7}$$

Доказательство. Используя ортогональность системы $\{e_k\}$ и равенство (6), получаем

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \|e_k\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|^2 = \|S_n\|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

**Следствие.** *Коэффициенты Фурье обладают свойством*

$$\alpha_k \|e_k\| \to 0 \quad \textit{при} \quad k \to \infty,$$

*а если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированная система, то*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty, \quad \alpha_k \to 0 \quad \textit{при} \quad k \to \infty.$$

**Теорема 4.** *Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортогональная последовательность в $R$.*

*Тогда для каждого элемента $x \in R$ следующие утверждения эквивалентны ($\alpha_k$ — коэффициенты Фурье элемента $x$):*

$1^\circ$ *для любого $\varepsilon > 0$ существует полином $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k$ по системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, для которого*

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \right\| < \varepsilon,$$

$2^\circ$ $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$,

$3^\circ$ *справедливо равенство Парсеваля:*

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \|e_k\|^2. \tag{8}$$

Доказательство. Покажем, что $1^\circ \iff 2^\circ$. В силу минимального свойства коэффициентов Фурье, $1^\circ$ эквивалентно утверждению

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \colon \|x - S_{n_\varepsilon}(x)\| < \varepsilon,$$

а значит, в силу следствия из теоремы 2, тому, что

$$\|x - S_n(x)\| < \varepsilon \quad \forall\, n \geqslant n_\varepsilon.$$

Последнее эквивалентно $2^\circ$.

Эквивалентность $2^\circ \iff 3^\circ$ становится очевидной, если переписать (6) в виде

$$\|x\|^2 = \|x - S_n(x)\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \|e_k\|^2.$$

**Замечание 1.** Равенство Парсеваля (8) является бесконечномерным аналогом теоремы Пифагора.

**Упражнение 1.** В условиях теоремы 4 доказать, что $2^\circ \Rightarrow 3^\circ$, используя почленное скалярное умножение ряда из $2^\circ$ на $x$.

**Определение 3.** Система $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ элементов предгильбертова (или линейного нормированного) пространства $R$ называется *полной* в $R$, если множество (конечных) линейных комбинаций её элементов плотно в $R$.

**Теорема 5** (критерий полноты ортогональной последовательности). *Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортогональная последовательность в $R$. Тогда следующие три утверждения эквивалентны:*

$1^\circ$ *$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — полная в $R$ последовательность,*

$2^\circ$ $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \quad \forall\, x \in R,$

$3^\circ$ $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \|e_k\|^2 \quad \forall\, x \in R$

*($\alpha_k$ — коэффициенты Фурье элемента $x$).*

Доказательство. Достаточно воспользоваться теоремой 4 для каждого $x \in R$.

**Теорема 6** (Рисса–Фишера). *Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортогональная система в гильбертовом пространстве $H$, и пусть действительные числа $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, … таковы, что ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \|e_k\|^2 \tag{9}$$

*сходится.*

*Тогда в $H$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ сходится к некоторому элементу $x \in H$:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k = x.$$

Доказательство. В силу сходимости ряда (9) $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$:

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k^2 \|e_k\|^2 < \varepsilon \quad \forall\, n \geqslant n_\varepsilon, \quad \forall\, p \in \mathbb{N},$$

см. теорему 15.1.2 (критерий Коши сходимости числового ряда). Это значит, что в $H$ последовательность $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right\}_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной, а значит, и сходящейся (в силу полноты $H$) к некоторому элементу $x \in H$. Тогда в $H$ по определению суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k = x$.

**Лемма 3.** *Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортогональная система в гильбертовом пространстве $H$.*

*Тогда для любого $x \in H$ его ряд Фурье по этой системе сходится в $H$:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x, e_k)}{\|e_k\|^2} e_k = x_0,$$

*причём $(x - x_0, e_j) = 0 \quad \forall\, j \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \|e_k\|^2$ сходится в силу неравенства Бесселя (7). Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ сходится по теореме 6 (Рисса–Фишера). Имеем далее при $j \in \mathbb{N}$

$$(x - x_0, e_j) = (x, e_j) - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (e_k, e_j) =$$
$$= (x, e_j) - \alpha_j \|e_j\|^2 = (x, e_j) - (x, e_j) = 0.$$

**Определение 4.** Ортогональная последовательность $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ в предгильбертовом пространстве $R$ называется *замкнутой*, если для любого $x \in R$

$$(x, e_j) = 0 \quad \forall\, j \in \mathbb{N} \Rightarrow x = \mathbf{0},$$

т. е. если не существует ненулевого элемента $x \in R$, ортогонального всем элементам системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$.

**Теорема 7.** *В гильбертовом пространстве $H$ ортогональная система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна тогда и только тогда, когда она замкнута.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна в $H$, и пусть $x \in H$. Тогда в силу равенства Парсеваля

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \|e_k\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x, e_k)^2}{\|e_k\|^2}.$$

Поэтому если $(x, e_k) = 0 \ \forall\, k \in \mathbb{N}$, то $\|x\| = 0$, т. е. $x = \mathbf{0}$.

Следовательно, система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ замкнута.

*Достаточность*. Пусть система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ замкнута в $H$, $x \in H$ и $\alpha_k$ — коэффициенты Фурье элемента $x$. Тогда по лемме 3 ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x, e_k)}{\|e_k\|^2} e_k = x_0 \in H$$

сходится к некоторому элементу $x_0 \in H$, причём

$$(x - x_0, e_k) = 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

В силу замкнутости системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ отсюда следует, что $x - x_0 = 0$, т. е. что $x = x_0 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$.

Из теоремы 5 следует, что система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна.

Обратимся к конкретным примерам.

**Пример 4.** Последовательность одночленов $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ полна в нормированном функциональном пространстве

$$C([a,b]) = \{f\colon f \text{ — непрерывная на } [a,b] \text{ функция}, \quad \|f\| = \max_{[a,b]} |f|\}$$

в силу теоремы 24.3.3 Вейерштрасса о приближении непрерывной функции алгебраическими многочленами.

**Пример 5.** Тригонометрическая система

$$\left\{\frac{1}{2},\ \cos t,\ \sin t,\ \cos 2t,\ \sin 2t,\ \cos 3t,\ \sin 3t, \ldots\right\} \tag{10}$$

полна в нормированном функциональном пространстве

$$C_{\text{per}} := \{f\colon f \text{ — } 2\pi\text{-периодическая непрерывная функция}, \quad \|f\| = \max_{(-\infty,+\infty)} |f|\}$$

в силу теоремы 24.3.1 Вейерштрасса о приближении непрерывных периодических функций тригонометрическими многочленами.

**Пример 6.** Тригонометрическая система (10) полна в нормированном функциональном пространстве

$$C^*([-\pi,\pi]) := \{f\colon f \text{ — непрерывная на } [-\pi,\pi] \text{ функция}, \quad f(-\pi) = f(\pi), \quad \|f\| = \max_{(-\infty,+\infty)} |f|\}$$

в силу теоремы 24.3.1′ Вейерштрасса.

**Пример 7.** Тригонометрическая система (10) не является полной в пространстве $C([-\pi,\pi])$. Например, никакую непрерывную на $[-\pi,\pi]$ функцию $f$ при $f(-\pi) \neq f(\pi)$ нельзя приблизить с высокой точностью никаким тригонометрическим многочленом, так как для всякого тригонометрического многочлена $T_n$ выполняется условие $T_n(-\pi) = T_n(\pi)$.

**Пример 8.** Последовательность одночленов $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ полна в пространствах $CL_1([a,b])$, $CL_2([a,b])$, $RL_1([a,b])$, $RL_2([a,b])$, $L_1([a,b])$, $L_2([a,b])$ в силу примера 4, а также плотности в указанных пространствах множества непрерывных на $[a,b]$ функций (см. лемму 25.2.1 и примеры 25.2.6, 25.2.7).

**Пример 9.** Тригонометрическая система функций (10) полна в пространствах $CL_1([-\pi,\pi])$, $CL_2([-\pi,\pi])$, $RL_1((-\pi,\pi))$, $RL_2((-\pi,\pi))$, $L_1([-\pi,\pi])$, $L_2([-\pi,\pi])$ в силу примера 6, а также плотности в указанных пространствах множества

$$C_0([-\pi,\pi]) := \{f\colon f \text{ — непрерывная на } [-\pi,\pi] \text{ функция}, \\ f(-\pi) = f(\pi) = 0\}.$$

**Упражнение 2.** Показать, что система (10) не полна в $RL_1((-\pi, \pi+\delta))$ при $\delta > 0$.

**Пример 10.** Пусть $f \in L_2([-\pi,\pi])$. Тогда $f$ разлагается в тригонометрический ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

(сходящийся к $f$ по норме пространства $L_2([-\pi,\pi])$, т. е. в смысле среднего квадратичного), и справедливо равенство Парсеваля

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2.$$

Здесь $a_k$, $b_k$ — коэффициенты Фурье по тригонометрической системе, вычисляемые по формулам (24.1.2), где интегралы понимаются как интегралы Лебега.

Утверждение вытекает из полноты системы (10) в $L_2([-\pi,\pi])$ (см. пример 9) и из теоремы 5.

В частности, сформулированные свойства верны для произвольной непрерывной или кусочно-непрерывной на $[-\pi,\pi]$ функции $f$.

**Пример 11.** Пусть $f \in L_2([-1,1])$. Тогда $f$ разлагается в ряд Фурье по полиномам Лежандра:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n P_n, \quad \alpha_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,dx$$

(ряд сходится по норме пространства $L_2([-1,1])$, т. е. в смысле среднего квадратичного), и справедливо равенство Парсеваля.

Сказанное верно, в частности, для произвольной непрерывной или кусочно-непрерывной на отрезке $[-1,1]$ функции $f$.

Обоснование то же, что в примере 10.

**Определение 5.** Пусть $R$ — нормированное пространство. Последовательность $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$, $e_j \in R \ \ \forall\, j \in \mathbb{N}$, называется *базисом* в $R$, если:

1° для любого $x \in R$ справедливо представление

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j, \quad \lambda_j \in \mathbb{R};$$

2° указанное представление единственно.

**Упражнение 3.** Показать, что система $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ элементов базиса линейно независима.

Базис является, очевидно, полной системой в $R$. Обратное неверно. Например, система одночленов $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, будучи полной в $C([-1,1])$ (см. пример 4), не является в этом пространстве базисом. В самом деле, если $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda_k x^k$, причём этот степенной ряд сходится в $C([-1,1])$, т. е. равномерно на $[-1,1]$, то его сумма $f$ является бесконечно дифференцируемой на $(-1,1)$, но не произвольной функцией из $C([-1,1])$.

Известно, что тригонометрическая система (10), полная в $C^*([-\pi,\pi])$, не является базисом в этом пространстве (пример 6).

**Теорема 8.** *Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортогональная система в предгильбертовом пространстве $R$.*

*Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — полная система, то она является базисом в $R$.*

Доказательство. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — полная система в предгильбертовом пространстве $R$, и пусть $x \in R$. Тогда в силу теоремы 5

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k, \quad \alpha_k = \frac{(x, e_k)}{\|e_k\|^2},$$

т. е. $x$ совпадает с суммой своего ряда Фурье. Такое представление единственно по теореме 1. Следовательно, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — базис в $R$.

**Теорема 9** (об ортогонализации). *Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — линейно независимая система элементов в предгильбертовом пространстве $R$.*

*Тогда в $R$ существует система элементов $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющая следующим условиям:*

$1^\circ$ *$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированная система,*

$2^\circ$ *при каждом $n \in \mathbb{N}$*

$$e_n = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n, \quad a_{nn} \neq 0.$$

*Каждый элемент системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ определяется условиями $1^\circ$, $2^\circ$ однозначно с точностью до множителя $\pm 1$.*

Доказательство. Элемент $e_1$ ищется в виде $e_1 = a_{11}x_1$; при этом $a_{11}$ определяется из условия

$$(e_1, e_1) = a_{11}^2(x_1, x_1) = 1, \quad \text{т. е.} \quad a_{11} = \frac{\pm 1}{\|x_1\|}.$$

Пусть элементы $e_k$ ($k = 1, \ldots, n-1$), удовлетворяющие условиям $1^\circ$, $2^\circ$, уже построены.

Ищем элемент $e_n$ в виде

$$e_n = a_{nn}(x_n - b_{n1}e_1 - \ldots - b_{n,n-1}e_{n-1}).$$

Здесь виден геометрический смысл выражения

$$x_n - b_{n1}e_1 - \ldots - b_{n,n-1}e_{n-1},$$

состоящий в том, что из элемента $x_n$ вычитается его проекция на подпространство, натянутое на элементы $e_1, \ldots, e_{n-1}$.

Из требований ортогональности $(e_n, e_k) = 0$ при $k < n$ получаем

$$b_{nk} = (x_n, e_k) \quad (k = 1, \ldots, n-1).$$

Из требования нормированности получаем

$$(e_n, e_n) = a_{nn}^2\|x_n - b_{n1}e_1 - \ldots - b_{n,n-1}e_{n-1}\|^2 = 1,$$

откуда $a_{nn}$ (а значит, и $e_n$) определяется с точностью до множителя $\pm 1$.

Переход от системы $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ к системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющей условиям $1^\circ$, $2^\circ$, называется *процессом ортогонализации*. Ясно, что в $R$ системы $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ полны или не полны одновременно.

Глава 26

# ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

## § 26.1. Интегралы Римана, зависящие от параметра

Интегралы Римана вида

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

или

$$J(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\, dx$$

называются *интегралами, зависящими от параметра*. Здесь будут установлены условия непрерывности, интегрируемости и дифференцируемости по параметру для таких интегралов.

**Теорема 1.** *Пусть функция $f$ непрерывна на $[a, b] \times [c, d]$. Тогда интеграл $I(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$ непрерывен на $[c, d]$.*

Доказательство. Пусть $y, y + \Delta y \in [c, d]$. Тогда

$$|I(y + \Delta y) - I(y)| = \left|\int_a^b f(x, y + \Delta y)\, dx - \int_a^b f(x, y)\, dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b |f(x, y + \Delta y) - f(x, y)|\, dx \leqslant (b - a)\omega(|\Delta y|; f),$$

где $\omega(\delta; f)$ — модуль непрерывности функции $f$. Так как $\omega(\delta; f) \to 0$ при $\delta \to 0$ в силу непрерывности, а значит, и равномерной непрерывности функции $f$ на $[a, b] \times [c, d]$, то отсюда следует утверждение теоремы.

**Теорема 2.** *Пусть функции $\varphi$, $\psi$ непрерывны на $[c, d]$, $\varphi \leqslant \psi$ на $[c, d]$, $\overline{G} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(y) \leqslant x \leqslant \psi(y),\ c \leqslant y \leqslant d\}$. Пусть функция $f$ непрерывна на $\overline{G}$.*

*Тогда интеграл $J(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\, dx$ непрерывен на $[c, d]$.*

Доказательство. С помощью замены переменного получаем, что

$$J(y) = \int_0^1 f(\varphi(y) + t(\psi(y) - \varphi(y)), y)(\psi(y) - \varphi(y))\, dt =:$$

$$=: \int_0^1 g(t, y)\, dt.$$

Подынтегральная функция $g$ непрерывна на $[0, 1] \times [c, d]$ по теореме о непрерывности композиции непрерывных функций. По теореме 1 интеграл $J(y)$ непрерывен на $[c, d]$.

**Теорема 3** (об интегрировании под знаком интеграла). *Пусть:*

1° *функция $f$ интегрируема на $[a, b] \times [c, d]$,*

2° *интеграл $I(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$ существует при каждом $y \in \in [c, d]$,*

3° *интеграл $\int_c^d f(x, y)\, dy$ существует при каждом $x \in [a, b]$.*

*Тогда существуют оба повторных интеграла и*

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx.$$

Эта теорема вытекает из теорем 19.3.1, 19.3.1′.

Последняя формула справедлива, в частности, если функция $f$ непрерывна на $[a, b] \times [c, d]$.

**Теорема 4** (правило Лейбница). *Пусть $f$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на $[a, b] \times [c, d]$. Тогда функция*

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

*дифференцируема на $[c, d]$ и*

$$\frac{dI(y)}{dy} = \frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\, dx.$$

Доказательство. Пусть $y$, $y + \Delta y \in [c, d]$. Тогда, используя формулу конечных приращений Лагранжа, имеем

$$\left|\frac{I(y+\Delta y)-I(y)}{\Delta y}-\int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\,dx\right| =$$

$$= \int_a^b \Big[\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big]\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y+\theta\Delta y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| dx \leqslant (b-a)\omega\left(|\Delta y|; \frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

где $\omega\left(\delta; \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ — модуль непрерывности функции $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ на $[a,b]\times\times[c,d]$. В силу непрерывности, а значит, и равномерной непрерывности $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ на $[a,b]\times[c,d]$

$$\omega\left(|\Delta y|; \frac{\partial f}{\partial y}\right) \to 0 \quad \text{при} \quad |\Delta y| \to 0.$$

Из приведённых оценок получаем, что существует

$$\frac{dI(y)}{dy} := \lim_{\Delta y\to 0}\frac{I(y+\Delta y)-I(y)}{\Delta y} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx,$$

что и требовалось доказать.

**Теорема 5.** *Пусть функции $f$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на $[a,b]\times\times[c,d]$, функции $\varphi$, $\psi$ непрерывно дифференцируемы на $[c,d]$, $a\leqslant\varphi\leqslant\psi\leqslant b$ на $[c,d]$.*

*Тогда на отрезке $[c,d]$ существует производная*

$$\frac{dJ(y)}{dy} = \frac{d}{dy}\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx =$$

$$= \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx + f(\psi(y),y)\frac{d\psi}{dy}(y) - f(\varphi(y),y)\frac{d\varphi}{dy}(y). \quad (1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим на $[c,d]\times[a,b]\times[a,b]$ функцию

$$F(y,u,v) := \int_u^v f(x,y)\,dx.$$

Тогда

$$J(y) = F(y, \varphi(y), \psi(y)).$$

Формула (1) получается, очевидно, при дифференцировании последнего равенства в соответствии с правилами дифференцирования сложной функции и дифференцирования интеграла с переменным верхним (нижним) пределом. Для применения теоремы 11.3.1 о дифференцируемости сложной функции достаточно убедиться в непрерывности на $[c, d] \times [a, b] \times [a, b]$ производных

$$F'_u(y, u, v) = -f(u, y), \quad F'_v(y, u, v) = f(v, y),$$
$$F'_y(y, u, v) = \int\limits_u^v \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx.$$

Производные $F'_u$, $F'_v$ непрерывны в силу непрерывности функции $f$.

Производная $F'_y$, вычисленная по правилу Лейбница (теорема 4), с помощью замены переменного в интеграле записывается в виде

$$F'_y(y, u, v) = \int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(u + (v - u)t, y)(v - u)\, dt =:$$
$$=: \int\limits_0^1 h(y, u, v, t)\, dt. \quad (2)$$

По теореме о непрерывности композиции непрерывных функций подынтегральная функция $h$ непрерывна на $[c, d] \times [a, b] \times$ $\times [a, b] \times [0, 1]$. Отсюда следует, что интеграл $\int_0^1 h(y, u, v, t)\, dt$ непрерывен на $[c, d] \times [a, b] \times [a, b]$. Последнее свойство можно установить с помощью непосредственной оценки

$$\left| \int\limits_0^1 h(y + \Delta y, u + \Delta u, v + \Delta v, t)\, dt - \int\limits_0^1 h(y, u, v, t)\, dt \right| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_0^1 |h(y + \Delta y, u + \Delta u, v + \Delta v, t) - h(y, u, v, t)|\, dt \leqslant \omega(\delta; h),$$

где $\omega(\delta; h)$ — модуль непрерывности функции $h$, $(\Delta y)^2 + (\Delta u)^2 +$ $+ (\Delta v)^2 \leqslant \delta^2$.

## § 26.2. Равномерная сходимость функции на множестве

**Определение 1.** Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$, $y_0$ — предельная точка множества $Y$ (не исключаются случаи $y_0 = -\infty, +\infty, \infty$).

Пусть заданы функции $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$, $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$. Говорят, что функция $f$ *равномерно на* $X$ *стремится* (*сходится*) к $\varphi$ при $Y \ni y \to y_0$, и пишут

$$f(x, y) \underset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x) \quad \text{при} \quad Y \ni y \to y_0,$$

если

$$\sup_{x \in X} |f(x, y) - \varphi(x)| \to 0 \quad \text{при} \quad Y \ni y \to y_0. \tag{1}$$

Можно сформулировать эквивалентное определению 1 определение равномерного стремления $f$ к $\varphi$, если вместо условия (1) написать

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists U(y_0)\colon |f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon \quad \forall y \in Y \cap \mathring{U}(y_0).$$

В последней формулировке вместо $U(y_0)$ можно написать $U_\delta(y_0)$, где $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$.

**Пример 1.** Пусть функция $f$ непрерывна на $[a, b] \times [c, d]$, $y_0 \in [c, d]$. Тогда

$$f(x, y) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x, y_0) \quad \text{при} \quad [c, d] \ni y \to y_0.$$

В самом деле, из равномерной непрерывности функции $f$ на $[a, b] \times [c, d]$ следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon |f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon \text{ при } |y - y_0| < \delta.$$

В случае $Y = \mathbb{N}$, $y_0 = +\infty$ значения функции $f$ на $X \times Y$ можно записать как $f_n(x) := f(x, n)$. Тогда понятие равномерного стремления $f(x, n) \underset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ при $n \to \infty$ совпадает с изученным понятием равномерной на $X$ сходимости последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$:

$$f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

**Замечание 1.** Введём в рассмотрение нормированное пространство ограниченных на $X$ функций:

$$M(X) = \{g\colon g \text{ — ограниченная на } X \text{ функция}, \ \|g\|_M = \sup_X |g|\}.$$

Тогда равномерное стремление $f(x,y) \underset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ при $Y \ni y \to y_0$ совпадает, очевидно, с понятием сходимости по норме:

$$\|f(\cdot, y) - \varphi(\cdot)\|_M \to 0 \quad \text{при} \quad Y \ni y \to y_0,$$

а понятие равномерной сходимости последовательности $f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ — с понятием сходимости последовательности $\{f_n\}$ по норме:

$$\|f_n - \varphi\|_M \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Если же $X = [a,b]$, а $f(x,y)$ непрерывна на $[a,b]$ как функция аргумента $x$ при каждом $y \in Y$, то вместо $M([a,b])$ можно взять $C([a,b])$.

Так же, как для случая равномерной сходимости последовательности функций, доказываются следующие три теоремы.

**Теорема 1** (критерий Коши равномерной сходимости функции). *Для того чтобы заданная на $X \times Y \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ функция $f$ равномерно на $X$ стремилась к какой-либо функции при $Y \ni y \to y_0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Коши*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta_\varepsilon > 0\colon \sup_{x \in X} |f(x,y') - f(x,y'')| < \varepsilon \quad \forall y',\ y'' \in Y \cap \mathring{U}_\delta(y_0).$$

**Теорема 2.** *Пусть заданная на $X \times Y \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ функция $f$ при каждом фиксированном $y \in Y$ непрерывна как функция от $x$ в точке $x_0 \in X$ (по $X$), и пусть*

$$f(x,y) \underset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x) \quad \text{при} \quad Y \ni y \to y_0.$$

*Тогда функция $\varphi$ непрерывна в точке $x_0$ (по $X$).*

**Теорема 3.** *Пусть функция $f\colon [a,b] \times Y \to \mathbb{R}$ при каждом $y \in Y$ непрерывна на $[a,b]$ как функция аргумента $x$, и пусть*

$$f(x,y) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi(x) \quad \text{при} \quad Y \ni y \to y_0.$$

*Тогда*

$$\int_a^b f(x,y)\,dx \to \int_a^b \varphi(x)\,dx \quad \text{при} \quad Y \ni y \to y_0.$$

Теорему 3 называют *теоремой о переходе к пределу под знаком интеграла*, поскольку она утверждает, что

$$\lim_{Y \ni y \to y_0} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b \lim_{Y \ni y \to y_0} f(x, y)\, dx.$$

**Упражнение 1.** Получить теорему 26.1.1 в качестве следствия из теоремы 3.

**Упражнение 2.** Сравнить теоремы 1, 2, 3 соответственно с теоремами 16.1.1, 16.3.1, следствием из теоремы 16.3.2.

**Упражнение 3.** Сформулировать и доказать аналог теоремы 16.3.3 о дифференцировании предела последовательности.

## § 26.3. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Будем рассматривать несобственные интегралы

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx, \quad -\infty < a < b \leqslant +\infty, \quad y \in Y, \tag{1}$$

с особенностью на верхнем пределе, где

$$f\colon [a, b) \times Y \to \mathbb{R}, \quad [a, b) \subset \mathbb{R}, \quad Y \subset \mathbb{R}^m.$$

Чаще всего будем считать, что $m = 1$ и $Y = [c, d]$.

Напомним, что при написании символа $\int_a^b f(x, y)\, dx$ предполагается, что функция $f(x, y)$ интегрируема по Риману по переменному $x$ на любом отрезке $[a, \eta] \subset [a, b)$, т. е. что интеграл

$$I(y, \eta) := \int_a^\eta f(x, y)\, dx \quad \forall\, [a, \eta] \subset [a, b) \tag{2}$$

существует как интеграл Римана.

Напомним также, что несобственный интеграл $I(y)$ при фиксированном $y \in Y$ называется *сходящимся* и что

$$I(y) = \lim_{\eta \to b-0} \int_a^\eta f(x, y)\, dx,$$

если последний предел существует и, следовательно, конечен. В противном случае несобственный интеграл $I(y)$ называется *расходящимся*.

**Определение 1.** Говорят, что несобственный интеграл $I(y)$ вида (1) *сходится равномерно* на $Y$, если:

1° $I(y)$ сходится на множестве $Y$ (т. е. $\forall\, y \in Y$),

2° $\sup\limits_{y\in Y}\left|\int_\eta^b f(x,y)\,dx\right| \to 0$ при $\eta \to b-0$.

Поясним, что при выполнении условия 1°

$$\left|\int\limits_\eta^b f(x,y)\,dx\right| \to 0 \quad \text{при} \quad \eta \to b-0 \quad \forall\, y \in Y, \tag{3}$$

однако скорость этого стремления к нулю может существенно зависеть от $y$. Условие же 2° показывает, что стремление к нулю интеграла в (3) «в равной мере быстрое» на множестве точек из $Y$ (точнее говоря, имеется стремящаяся к нулю мажоранта [1]) модуля этого интеграла).

**Пример 1.**

$$I(y) = \int\limits_0^\infty y\,e^{-xy}\,dx, \quad Y = (\delta, +\infty) \subset (0, +\infty).$$

Здесь

$$\sup_{y\in Y}\left|\int\limits_\eta^\infty y\,e^{-xy}\,dx\right| = \sup_{y\in Y}\left|\int\limits_{\eta y}^\infty e^{-u}\,du\right| = e^{-\eta\delta}.$$

При $\delta > 0$ имеем $\lim\limits_{\eta\to+\infty} e^{-\eta\delta} = 0$, так что интеграл $I(y)$ сходится равномерно на $(\delta, +\infty)$.

При $\delta = 0$ предел $\lim\limits_{\eta\to+\infty} e^{-\eta 0} \neq 0$, так что интеграл $I(y)$ не сходится равномерно на $(0, +\infty)$.

**Замечание 1.** Условие 2° определения 1 можно переписать в виде

$$I(y,\eta) \underset{Y}{\rightrightarrows} I(y) \quad \text{при} \quad \eta \to b-0.$$

**Теорема 1** (критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла). *Для того чтобы несобственный интеграл* (1) *сходился равномерно на $Y$, необходимо и достаточно выполнения условия Коши*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \eta_\varepsilon \in [a,b)\colon \sup_{y\in Y}\left|\int\limits_{\eta'}^{\eta''} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon \qquad \forall\, \eta', \eta'' \in [\eta_\varepsilon, b). \tag{4}$$

---

[1]) При выполнении условия $g(x,y) \leqslant \varphi(x)$ на некотором множестве точек $\{(x,y)\}$ функция $\varphi$ называется *мажорантой* функции $g$.

Доказательство необходимости основывается на равенстве

$$\int_{\eta'}^{\eta''} f(x,y)\,dx = \int_{\eta'}^{b} f(x,y)\,dx - \int_{\eta''}^{b} f(x,y)\,dx,$$

а достаточности — на критерии Коши сходимости несобственного интеграла (теорема 14.7.1) и на предельном переходе в неравенстве $\left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$ при $\eta'' \to b-0$.

**Замечание 2.** Доказательство теоремы 1 можно получить в качестве следствия из теоремы 26.2.1, используя замечание 1.

**Упражнение 1.** Доказать, что несобственный интеграл

$$I(y) = \int_0^{\infty} e^{-yx}\sin x\,dx, \quad Y = Y_\delta = (\delta, +\infty)$$

а) сходится равномерно на множестве $Y_\delta$ при $\delta > 0$;

б) сходится, но не равномерно на $Y_0$.

**Упражнение 2.** Доказать, что несобственный интеграл

$$I(y) = \int_0^{\infty} e^{-yx}\,\frac{\sin x}{x}\,dx, \quad y \geqslant 0,$$

равномерно сходится на $Y = [0, +\infty)$.

**Теорема 2** (признак сравнения). *Пусть для функций $f, g$: $[a,b)\times Y \to \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ и для некоторого $M > 0$ выполняется неравенство $|f(x,y)| \leqslant M g(x,y)$ при $(x,y) \in [a,b)\times Y$, и пусть несобственный интеграл*

$$J(y) = \int_a^b g(x,y)\,dx$$

*сходится равномерно на $Y$.*

*Тогда несобственный интеграл*

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

*сходится равномерно на $Y$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда в силу равномерной сходимости на $Y$ интеграла $J(y)$ из критерия Коши следует

$$\exists\, \eta_\varepsilon \in [a, b)\colon \sup_{y\in Y}\left|\int\limits_{\eta'}^{\eta''} g(x, y)\, dx\right| < \varepsilon \quad \forall\, \eta', \eta'' \in [\eta_\varepsilon, b).$$

Тогда

$$\sup_{y\in Y}\left|\int\limits_{\eta'}^{\eta''} f(x, y)\, dx\right| < M\varepsilon \quad \forall\, \eta', \eta'' \in [\eta_\varepsilon, b).$$

Из критерия Коши следует, что несобственный интеграл $I(y)$ сходится равномерно на $Y$.

Частным случаем признака сравнения (теоремы 2) является

**Теорема 3** (признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственного интеграла). *Пусть* $f\colon [a, b) \times Y \to \mathbb{R}$, $\varphi\colon [a, b) \to \mathbb{R}$, $|f(x, y)| \leqslant \varphi(x)$ *при* $(x, y) \in [a, b) \times Y$. *Пусть несобственный интеграл* $\int_a^b \varphi(x)\, dx$ *сходится.*

*Тогда несобственный интеграл* $\int_a^b f(x, y)\, dx$ *равномерно сходится на* $Y$.

**Упражнение 3.** Доказать, что несобственный интеграл

$$I(y) = \int\limits_0^\infty \frac{\cos yx}{1 + x^2}\, dx$$

сходится равномерно на $(-\infty, +\infty)$.

Для несобственного интеграла $I(y)$ вида (1) установим достаточные условия его непрерывности, интегрируемости и дифференцируемости по параметру под знаком интеграла.

**Теорема 4.** *Пусть функция* $f$ *непрерывна на* $[a, b) \times \Pi$, $\Pi = [c_1, d_1] \times \ldots \times [c_m, d_m]$, *и пусть интеграл*

$$I(y) = \int\limits_a^b f(x, y)\, dx, \quad y \in \Pi, \tag{5}$$

*сходится равномерно на* $\Pi$.

*Тогда* $I(y)$ *непрерывен на* $\Pi$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varepsilon > 0$, и пусть $\eta_\varepsilon \in [a, b)$ таково, что

$$\sup_{y\in \Pi}\left|\int\limits_{\eta_\varepsilon}^{b} f(x, y)\, dx\right| < \varepsilon.$$

Пусть $y$, $y+\Delta y \in \Pi$. Тогда

$$|I(y+\Delta y) - I(y)| \leqslant \int\limits_a^{\eta_\varepsilon} |f(x,y+\Delta y) - f(x,y)|\,dx + \\ + \left|\int\limits_{\eta_\varepsilon}^b f(x,y+\Delta y)\,dx\right| + \left|\int\limits_{\eta_\varepsilon}^b f(x,y)\,dx\right| \leqslant \\ \leqslant (\eta_\varepsilon - a)\omega(|\Delta y|; f; \Pi_\varepsilon) + \varepsilon + \varepsilon,$$

где $\omega(\delta; f; \Pi_\varepsilon)$ — модуль непрерывности функции $f$ на замкнутом прямоугольнике $\Pi_\varepsilon := [a,\eta_\varepsilon] \times \Pi$, причём $\omega(\delta; f; \Pi_\varepsilon)$ (при фиксированном $\varepsilon > 0$) стремится к нулю при $\delta \to 0$. Следовательно, существует такое $\delta_\varepsilon > 0$, что $|I(y+\Delta y) - I(y)| \leqslant \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$, если $|\Delta y| \leqslant \delta_\varepsilon$, что и означает непрерывность интеграла $I(y)$ при любом $y \in \Pi$, т. е. непрерывность интеграла $I$ на $\Pi$.

**Упражнение 4.** Доказать следующую теорему о предельном переходе под знаком несобственного интеграла.

**Теорема 5.** *Пусть $y^{(0)}$ — предельная точка множества $Y \subset \mathbb{R}^m$ (при $m = 1$ допускаются значения $y^{(0)} = -\infty, +\infty, \infty$). Пусть функция $f\colon [a,b) \times Y \to \mathbb{R}$, $[a,b) \subset \mathbb{R}$, при каждом $y \in Y$ непрерывна на $[a,b)$ как функция аргумента $x$, и пусть*

$$f(x,y) \underset{[a,\eta]}{\rightrightarrows} \varphi(x) \quad \text{при} \quad Y \ni y \to y^{(0)}$$

*на любом отрезке $[a,\eta] \subset [a,b)$. Пусть также интеграл $I(y)$ вида (1) сходится равномерно на $Y$.*

*Тогда $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ сходится и*

$$\lim_{Y \ni y \to y^{(0)}} \int\limits_a^b f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx.$$

**Теорема 6** (об интегрировании под знаком интеграла). *В условиях теоремы 4 при $m = 1$, $\Pi = [c,d]$*

$$\int\limits_c^d I(y)\,dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx\right) dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right) dx. \qquad (6)$$

Доказательство. В силу непрерывности функции $f$ на $[a,\eta] \times [c,d]$ при $a < \eta < b$

$$\int\limits_c^d \int\limits_a^\eta f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^\eta \int\limits_c^d f(x,y)\,dy\,dx. \qquad (7)$$

Перейдём в этом равенстве к пределу при $\eta \to b - 0$. Левая часть (7) в силу теоремы 26.2.3 имеет конечный предел

$$\int\limits_c^d \int\limits_a^b f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_c^d I(y)\, dy$$

— интеграл от функции, непрерывной на $[c, d]$ в силу теоремы 4.

В самом деле,

$$\left| \int\limits_c^d \int\limits_a^b f(x, y)\, dx\, dy - \int\limits_c^d \int\limits_a^\eta f(x, y)\, dx\, dy \right| \leqslant$$
$$\leqslant (d - c) \sup_{y \in [c,d]} \left| \int\limits_\eta^b f(x, y)\, dx \right| \to 0$$

при $\eta \to b - 0$ в силу равномерной сходимости $I(y)$ на $[c, d]$. Следовательно, и правая часть (7) имеет конечный предел, который по определению несобственного интеграла есть правая часть (6).

Переходя в равенстве (7) к пределу при $\eta \to b - 0$, получаем равенство (6).

**Упражнение 5.** Получить теоремы 4 (при $m = 1$), 6 в качестве следствий из теорем 26.2.2, 26.2.3 соответственно. Такие их доказательства сравнить с доказательствами теорем 16.3.1$'$, 16.3.2$'$.

**Теорема 7** (о дифференцировании под знаком интеграла). *Пусть $I(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$, и пусть функции $f$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на $[a, b) \times [c, d]$. Пусть также для некоторого $y_0 \in [c, d]$ сходится интеграл $I(y_0) = \int\limits_a^b f(x, y_0)\, dx$, а интеграл $\int\limits_a^b \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx$ сходится равномерно на $[c, d]$.*

*Тогда функция $I(y)$ дифференцируема на $[c, d]$ и*

$$\frac{d}{dy} I(y) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx.$$

Доказательство. По теореме 6 при $y \in [c, d]$

$$\int\limits_{y_0}^y \int\limits_a^b f'_y(x, t)\, dx\, dt = \int\limits_a^b (f(x, y) - f(x, y_0))\, dx =$$
$$= \int\limits_a^b f(x, y)\, dx - \int\limits_a^b f(x, y_0)\, dx.$$

В правой части последнего равенства первый из интегралов сходится в силу сходимости второго интеграла и интеграла в левой части этого равенства. Дифференцируя полученное тождество, имеем
$$\int_a^b f'_y(x, y)\,dx = \frac{d}{dy}\int_a^b f(x, y)\,dx,$$
что и требовалось получить.

**Упражнение 6.** Доказать, что
$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}. \tag{8}$$

У к а з а н и е. Предварительно вычислить вспомогательный интеграл
$$I(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx, \quad \alpha > 0,$$
найдя его производную $\frac{d}{d\alpha}I(\alpha)$ с помощью дифференцирования под знаком интеграла. Затем воспользоваться упражнением 2.

Для доказательства равномерной сходимости несобственного интеграла иногда бывает полезно применить интегрирование по частям, «улучшающее» сходимость интеграла.

**Пример 2.** Интеграл
$$I(y) = \int_1^\infty \frac{1}{x}\cos yx\,dx, \quad Y = (y_0, +\infty), \quad y_0 > 0,$$
сходится, но не абсолютно (ср. с примером 14.7.3). В результате интегрирования по частям получается интеграл $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\frac{\sin yx}{y}\,dx$, сходящийся абсолютно и (по признаку Вейерштрасса) равномерно на $Y$.

Приведём точные рассуждения. В соответствии с определением 1 оценим
$$\sup_{y\geqslant y_0}\left|\int_\eta^\infty \frac{1}{x}\cos yx\,dx\right| = \sup_{y\geqslant y_0}\left|\frac{1}{x}\cdot\frac{\sin yx}{y}\Big|_{x=\eta}^{\infty} + \int_\eta^\infty \frac{1}{x^2}\frac{\sin yx}{y}\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{y\geqslant y_0}\frac{2}{\eta y} = \frac{2}{\eta y_0} \to 0 \quad \text{при} \quad \eta \to +\infty.$$

Следовательно, $I(y)$ сходится равномерно на $Y$.

Доказательства формулируемых ниже признаков Дирихле и Абеля равномерной сходимости интеграла

$$I(y) = \int_a^{\infty} f(x,y)g(x,y)\,dx, \quad y \in Y, \quad a \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

основаны на интегрировании по частям, улучшающем сходимость интеграла.

**Теорема 8** (признак Дирихле). *Пусть заданы функции* $f, g$: $[a,+\infty) \times Y \to \mathbb{R}$, *и пусть при любом* $y \in Y$ *функции* $f$ *и* $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ *непрерывны по* $x$, *а функция* $g$ *монотонна по* $x$. *Пусть также:*

$1^\circ$ *интегралы*

$$\int_a^{\eta} f(x,y)\,dx$$

*равномерно ограничены на* $Y$, *т. е. существует число* $M > 0$ *такое, что*

$$\left|\int_a^{\eta} f(x,y)\,dx\right| \leqslant M \quad \forall\, \eta \in [a,+\infty), \quad \forall\, y \in Y;$$

$2^\circ$ $g(x,y) \underset{Y}{\rightrightarrows} 0$ *при* $x \to +\infty$.

*Тогда интеграл* (9) *сходится равномерно на* $Y$.

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши равномерной сходимости несобственного интеграла (теорема 1). Для этого при $a < \eta' < \eta'' < \infty$ оценим интеграл

$$I(\eta',\eta'',y) := \int_{\eta'}^{\eta''} f(x,y)g(x,y)\,dx =$$

$$= \left(g(x,y)\int_{\eta'}^{x} f(\xi,y)\,d\xi\right)\Bigg|_{x=\eta'}^{\eta''} - \int_{\eta'}^{\eta''}\left(\int_{\eta'}^{x} f(\xi,y)\,d\xi\right)g'_x(x,y)\,dx.$$

Тогда

$$|I(\eta',\eta'',y)| \leqslant |g(\eta'',y)|2M + 2M\int_{\eta'}^{\eta''} |g'_x(x,y)|\,dx =$$

$$= 2M\left(|g(\eta'',y)| + \left|\int_{\eta'}^{\eta''} g'_x(x,y)\,dx\right|\right) \leqslant 2M[2|g(\eta'',y)| + |g(\eta',y)|].$$

Следовательно, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta_\varepsilon \in [a, \infty)$:

$$\sup_{y \in Y} |I(\eta', \eta'', y)| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad \eta', \ \eta'' > \eta_\varepsilon,$$

и теорема доказана.

**Теорема 9** (признак Абеля). *Пусть заданы функции* $f, g$: $[a, +\infty) \times Y \to \mathbb{R}$, *и пусть при любом* $y \in Y$ *функции* $f$ *и* $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ *непрерывны по* $x$, *а функция* $g$ *монотонна по* $x$. *Пусть также:*

$1^\circ$ *интеграл*

$$\int\limits_a^\infty f(x, y)\, dy$$

*сходится равномерно на* $Y$,

$2^\circ$ *функция* $g$ *равномерно ограничена, т. е. существует число* $M > 0$ *такое, что*

$$|g(x, y)| \leqslant M \quad \text{при} \quad x \in [a, \infty), \quad y \in Y.$$

*Тогда интеграл* $I(y)$ *из* (9) *сходится равномерно на* $Y$.

Доказательство предлагается провести самостоятельно, оценив, как и при доказательстве признака Дирихле, интеграл $I(\eta', \eta'', y)$.

**Упражнение 7.** Установить равномерную сходимость интеграла из примера 2 с помощью признака Дирихле.

**Упражнение 8.** С помощью признака Абеля доказать утверждение из упражнения 2, воспользовавшись примером 14.7.3.

До сих пор в этом параграфе рассматривались несобственные интегралы с особенностью на верхнем пределе интегрирования. Аналогично изучают зависящие от параметра несобственные интегралы с особенностью на нижнем пределе интегрирования (см. определение 14.7.3) и зависящие от параметра несобственные интегралы с несколькими особенностями (см. определение 14.7.5). В последнем случае интеграл

$$I(y) = \int\limits_a^b f(x, y)\, dx, \quad -\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty, \quad y \in Y,$$

с несколькими особенностями представляется в виде суммы интегралов:

$$I(y) = \sum_{i=1}^k I_i(y) = \sum_{i=1}^k \int\limits_{c_{i-1}}^{c_i} f(x, y)\, dy,$$

$$-\infty \leqslant a = c_0 < c_1 < \ldots < c_k = b \leqslant +\infty,$$

где каждый из интегралов $I_i(y)$ является несобственным с одной особенностью на верхнем либо на нижнем пределе интегрирования. При этом интеграл $I(y)$ называется *равномерно сходящимся на* $Y$, если каждый из интегралов $I_i(y)$ равномерно сходится на $Y$.

**Пример 3.** *Гамма-функция Эйлера*

$$\Gamma(s) = \int\limits_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx, \quad s > 0, \tag{10}$$

есть интеграл, имеющий две особенности на нижнем и на верхнем пределах интегрирования. Представим $\Gamma(s)$ в виде

$$\Gamma(s) = \int\limits_0^1 x^{s-1}e^{-x}\,dx + \int\limits_1^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx. \tag{11}$$

Легко видеть, что первый интеграл сходится при $s > 0$ и расходится при $s \leqslant 0$, а второй сходится при $s > 0$. Следовательно, интеграл (10) сходится при $s > 0$.

Интеграл (10) сходится равномерно на любом отрезке $[s_0, s_1] \subset (0, +\infty)$, так как на таком отрезке равномерно сходятся оба интеграла из (11), что устанавливается с помощью признака Вейерштрасса с мажорантами $\varphi_0(x) = x^{s_0-1}$, $\varphi_1(x) = x^{s_1-1}e^{-x}$ соответственно. Следовательно, гамма-функция $\Gamma(s)$ непрерывна при $s > 0$ по теореме 4.

При $s > 0$ с помощью интегрирования по частям имеем

$$\Gamma(s+1) = \int\limits_0^{+\infty} x^s e^{-x}\,dx = -x^s e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + s\int\limits_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx = s\Gamma(s).$$

Значит, при $s > 0$

$$\Gamma(s+n) = (s+n-1)\ldots(s+1)s\Gamma(s).$$

Из этой формулы видно, что по значениям гамма-функции на полуинтервале $(0, 1]$ можно вычислить её значения для любого аргумента $s > 1$.

Поскольку $\Gamma(1) = 1$, то из последнего соотношения получаем

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N},$$

т. е. функция $\Gamma(s+1)$ является продолжением функции $s \to$ $\to s!$ с множества целых неотрицательных чисел на полуось $\{s\colon s > -1\}$.

**Пример 4.** *Бета-функция Эйлера*

$$B(p,q)=\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \tag{12}$$

зависит от двух параметров: $p$, $q$. Интеграл имеет две особенности на нижнем и на верхнем пределах интегрирования. Поэтому представим его в виде

$$B(p,q)=\int\limits_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx+\int\limits_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx. \tag{13}$$

Первый из интегралов в (13) сходится при $p>0$ и расходится при $p\leqslant 0$, а второй сходится при $q>0$ и расходится при $q\leqslant 0$. Следовательно, бета-функция $B(p,q)$ определена на первом квадранте $\{(p,q)\colon p>0,\ q>0\}=(0,+\infty)\times(0,+\infty)$.

Интеграл (12) равномерно сходится на множестве

$$\{(p,q)\colon p\geqslant p_0,\quad q\geqslant q_0\}\quad \text{при}\quad p_0,\ q_0>1,$$

так как на этом множестве равномерно сходится каждый из интегралов (13), что легко установить, применив признак Вейерштрасса с мажорантой $\varphi(x)=x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}$. Следовательно, по теореме 4 бета-функция $B(p,q)$ непрерывна на первом квадранте.

Функции $B(p,q)$ и $\Gamma(s)$ связаны между собой *формулой Эйлера*

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\quad p>0,\quad q>0.$$

Существуют компьютерные программы, позволяющие находить значения бета- и гамма-функций при различных значениях параметров. Эти программы используются для вычисления интегралов, сводящихся к этим функциям.

Глава 27

# ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

## § 27.1. Интеграл Фурье

Напомним определение 14.8.2.

Пусть $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Функция $f$ называется *абсолютно интегрируемой на интервале* $(a, b)$, если существует конечное множество точек $\{c_i\}$, $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_k = b$ таких, что:

$1^\circ$ функция $f$ интегрируема по Риману на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, не содержащем точек $c_i$;

$2^\circ$ сходится несобственный интеграл $\int_a^b |f(x)|\,dx$, понимаемый как несобственный интеграл с особенностями в точках $c_0$, $c_1$, …, $c_k$.

Множество абсолютно интегрируемых на $(a, b)$ функций образует полунормированное пространство $RL((a, b))$ с полунормой $\int_a^b |f(x)|\,dx$: см. пример 25.2.4.

**Лемма 1.** *Пусть функция $f$ абсолютно интегрируема на $(a, b)$, функция $\varphi$ непрерывна и ограничена на $(a, b) \times [c, d]$.*

*Тогда:*

$1^\circ$ *несобственный интеграл*

$$I(y) = \int_a^b f(x)\varphi(x, y)\,dx$$

*непрерывен на $[c, d]$,*

$2^\circ$ $\displaystyle\int_c^d \int_a^b f(x)\varphi(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x)\varphi(x, y)\,dy\,dx.$

Доказательство. $1^\circ$. Пусть $|\varphi| \leqslant M$ на $(a, b) \times [c, d]$. Пусть $\varepsilon > 0$, $a < \xi < \eta < b$, причём $\xi = \xi(\varepsilon)$ и $\eta = \eta(\varepsilon)$ таковы, что

$$\int_a^\xi |f(x)|\,dx < \varepsilon, \qquad \int_\eta^b |f(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Тогда при $y$, $y + \Delta y \in [c, d]$ имеем:

$$\Delta I := I(y + \Delta y) - I(y) =$$

$$= \left(\int\limits_a^\xi + \int\limits_\xi^\eta + \int\limits_\eta^b\right) f(x)[\varphi(x, y + \Delta y) - \varphi(x, y)]\, dx,$$

$$|\Delta I| \leqslant 2M\varepsilon + \omega(\Delta y; \varphi; \varPi) \int\limits_a^b |f(x)|\, dx + 2M\varepsilon, \qquad (1)$$

где $\omega(\delta; \varphi; \varPi)$ — модуль непрерывности функции $\varphi$ на замкнутом прямоугольнике $\varPi = [\xi, \eta] \times [c, d]$.

Поскольку функция $\varphi$ равномерно непрерывна на $\varPi$, то можно указать $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\omega(\delta_\varepsilon; \varphi; \varPi) < \varepsilon$.

Тогда из (1) получаем

$$|\Delta I| \leqslant 4M\varepsilon + \varepsilon \int\limits_a^b |f(x)|\, dx.$$

Следовательно, интеграл $I(y)$ непрерывен на $[c, d]$.

2°. При $\varepsilon > 0$ через $f_\varepsilon$: $(a, b) \to \mathbb{R}$ обозначим непрерывную финитную (т. е. равную нулю вне некоторого отрезка $[\alpha, \beta]$) функцию такую, что

$$\int\limits_a^b |f(x) - f_\varepsilon(x)|\, dx < \varepsilon.$$

Для каждого $\varepsilon > 0$ функция $f_\varepsilon$ существует в силу следствия из теоремы 14.8.3.

Тогда

$$\int\limits_c^d \int\limits_a^b f_\varepsilon(x)\varphi(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_a^b f_\varepsilon(x) \int\limits_c^d \varphi(x, y)\, dy\, dx. \qquad (2)$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим утверждение 2° теоремы.

Предельный переход в левой части равенства (2) обосновывается с помощью оценок

$$\left|\int\limits_c^d \int\limits_a^b [f(x) - f_\varepsilon(x)]\varphi(x, y)\, dx\, dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant M(d - c) \int\limits_a^b |f(x) - f_\varepsilon(x)|\, dx \leqslant M(d - c)\varepsilon.$$

Обоснование предельного перехода в правой части (2) аналогично.

**Определение 1.** Пусть функция $f$ абсолютно интегрируема на $(-\infty, +\infty)$. *Интегралом Фурье* функции $f$ называется интеграл

$$S(x) = S(x, f) := \int_0^{+\infty} [a(y)\cos xy + b(y)\sin xy]\, dy, \tag{3}$$

где

$$\left\{ \begin{matrix} a(y) \\ b(y) \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left\{ \begin{matrix} \cos yt \\ \sin yt \end{matrix} \right\} dt. \tag{4}$$

**Лемма 2.** *Пусть функция $f$ абсолютно интегрируема на* $(-\infty, +\infty)$.

*Тогда:*

1° *функции $a(y)$, $b(y)$ из* (4) *непрерывны на* $(-\infty, +\infty)$;

2° $a(y)$, $b(y) \to 0$ *при* $y \to +\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из леммы 1 и теоремы 24.1.1 Римана об осцилляции.

Из леммы 2 следует, что интеграл $S(x)$ из (3) является несобственным интегралом с одной особенностью на верхнем пределе.

Как видим, правая часть (3) является аналогом ряда Фурье, а $a(y)$, $b(y)$ из (4) — аналогами коэффициентов Фурье.

Перепишем интеграл Фурье $S(x)$ в виде

$$S(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos ty \cos xy + \sin ty \sin xy)\, dt\, dy =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(y(x-t))\, dt\, dy.$$

Изучим сходимость интеграла Фурье (т. е. внешнего интеграла в правой части последнего равенства). Для этого рассмотрим интеграл

$$S_\eta(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^{\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(y(x-t))\, dt\, dy, \quad \eta > 0,$$

являющийся аналогом суммы Фурье.

Применяя лемму 1, имеем

$$S_\eta(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\int\limits_0^\eta \cos y(x-t)\,dy\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{\sin\eta(x-t)}{x-t}\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u+x)\frac{\sin\eta u}{u}\,du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\infty}^{0} + \int\limits_{0}^{+\infty}\right) f(u+x)\frac{\sin\eta u}{u}\,du,$$

$$S_\eta(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty [f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin\eta t}{t}\,dt. \tag{5}$$

**Лемма 3.**

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin\eta t}{t}\,dt = \int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2} \quad \forall\,\eta > 0. \tag{6}$$

Доказательство этого равенства сводится к упражнению 26.3.6 с помощью замены переменного.

Напомним определение 24.2.1. Точка $x_0$ называется *почти регулярной* точкой функции $f$, если существуют $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$,

$$f'_+(x_0) := \lim_{h\to 0+0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0+0)}{h},$$
$$f'_-(x_0) := \lim_{h\to 0+0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0-0)}{-h}.$$

Если при этом $f(x_0) = [f(x_0-0)+f(x_0+0)]/2$, то точка $x_0$ называется *регулярной точкой* функции $f$.

Если функция $f$ имеет в точке $x_0$ правую и левую односторонние производные, то $f$ непрерывна в точке $x_0$ и $x_0$ — регулярная точка функции $f$.

**Теорема 1** (достаточные условия сходимости интеграла Фурье в точке). *Пусть функция $f$ абсолютно интегрируема на $(-\infty,+\infty)$, и пусть $a(y)$, $b(y)$ определены формулой* (4).

*Тогда:*

$1^\circ$ *если $x_0$ — почти регулярная точка функции $f$, то*

$$S(x_0) = S(x_0,f) = \int\limits_0^\infty [a(y)\cos x_0 y + b(y)\sin x_0 y]\,dy =$$
$$= \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2};$$

2° *если же* $x_0$ — *регулярная точка функции* $f$, *то*

$$S(x_0, f) = f(x_0).$$

Доказательство. Используя (5) и (6), получим

$$S_\eta(x_0) - \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty [f(x_0+t)-f(x_0+0)]\frac{\sin\eta t}{t}\,dt+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty [f(x_0-t)-f(x_0-0)]\frac{\sin\eta t}{t}\,dt = \frac{1}{\pi}J^+(\eta)+\frac{1}{\pi}J^-(\eta).$$

При $\eta > 0$ представим $J^+(\eta)$ в виде

$$J^+(\eta) = \int_0^1 \frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}\sin\eta t\,dt + \int_1^\infty \frac{f(x_0+t)}{t}\sin\eta t\,dt -$$
$$- f(x_0+0)\int_\eta^\infty \frac{\sin u}{u}\,du = J_1^+(\eta)+J_2^+(\eta)-f(x_0+0)J_3^+(\eta).$$

Интегралы $J_1^+(\eta)$, $J_2^+(\eta) \to 0$ при $\eta \to +\infty$ по теореме 24.1.1 Римана об осцилляции. Интеграл $J_3^+(\eta) \to 0$ при $\eta \to +\infty$ в силу сходимости интеграла $\int\limits_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du$. Следовательно, $J^+(\eta) \to 0$ и аналогично $J^-(\eta) \to 0$ при $\eta \to +\infty$.

Таким образом, теорема 1 доказана.

Многие свойства интегралов Фурье аналогичны соответствующим свойствам рядов Фурье по тригонометрической системе. В качестве примера можно сравнить формулировки теорем 1 и 24.2.1. Для интегралов Фурье и для рядов Фурье справедлив принцип локализации, аналогичны различные условия сходимости в точке (например, в терминах условий Гёльдера) и равномерной сходимости, одинаково влияние гладкости функции на скорость сходимости рядов Фурье и интегралов Фурье. Для интегралов Фурье имеются аналог равенства Парсеваля и др.

Напомним, что для комплекснозначной функции действительного аргумента $t$

$$w(t) = u(t) + iv(t), \quad u(t),\ v(t) \in \mathbb{R} \quad \forall\, t \in \langle a, b\rangle;$$

интеграл Римана и несобственный интеграл Римана определяются так же, как для действительнозначной функции. При этом

$$\int_a^b w(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt,$$

если два последних интеграла существуют, и

$$\left|\int_a^b w(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |w(t)|\,dt,$$

если интеграл в левой части существует как интеграл Римана или абсолютно сходится как несобственный интеграл с несколькими особенностями.

**Определение 2.** Пусть функция $f\colon (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману на любом отрезке $[-\eta, \eta]$, $\eta > 0$. Тогда *главным значением* (valeur principale) интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ называется

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{\eta \to +\infty} \int_{-\eta}^{\eta} f(x)\,dx.$$

Пусть функция $\varphi\colon [a, b] \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$, интегрируема по Риману на любом множестве $[a, b] \setminus U_\varepsilon(x_0)$, $\varepsilon > 0$. Тогда *главным значением* (valeur principale) интеграла $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ называется

$$\text{v.p.} \int_a^b \varphi(x)\,dx := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{[a,b]\setminus U_\varepsilon(x_0)} \varphi(x)\,dx.$$

Если интеграл сходится как несобственный, то он имеет, очевидно, и главное значение, совпадающее с несобственным интегралом. Обратное неверно. Например, главные значения интегралов $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \sin x\,dx$, $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ существуют и равны нулю, но сами интегралы расходятся как несобственные.

Пусть функция $f$ абсолютно интегрируема на $(-\infty, +\infty)$ и в каждой точке имеет обе односторонние производные (а значит, и непрерывна на $(-\infty, +\infty)$). Тогда по теореме 1 для любого $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(x - t)\, dt\, dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(x - t)\, dt\, dy.$$

В то же время вследствие нечётности функции $\sin x$

$$0 = \text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin y(x - t)\, dt\, dy.$$

Умножив обе части последнего равенства на $\dfrac{i}{2\pi}$ и сложив почленно с предыдущим, получим

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iy(x-t)}\, dt\, dy. \qquad (7)$$

Формула (7) называется *комплексной формой интеграла Фурье*.

## § 27.2. Преобразование Фурье

Пусть функция $f$ абсолютно интегрируема на $(-\infty, +\infty)$ и в каждой точке $x$ имеет односторонние производные $f'_+(x)$, $f'_-(x)$ (а значит, и непрерывна на $(-\infty, +\infty)$). Тогда $f$ может быть разложена в интеграл Фурье (т. е. представлена в виде интеграла Фурье). Это разложение, имеющее в комплексной форме вид (27.1.7), можно переписать так:

$$f(x) = \text{v.p.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt}\, dt \right) e^{ixy}\, dy. \qquad (1)$$

Правая часть (1) представляет собой результат двух последовательно применённых интегральных преобразований.

**Определение 1.** Пусть комплекснозначная функция $f\colon (-\infty, +\infty) \to \mathbb{C}$ абсолютно интегрируема на любом отрезке $[-\eta, \eta] \subset (-\infty, +\infty)$.

*Преобразование Фурье* функции $f$ определяется формулой

$$\widehat{f}(y) = F[f](y) := \text{v.p.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iyx}\, dx. \qquad (2)$$

*Обратное преобразование Фурье* функции $f$ определяется формулой

$$\widetilde{f}(y) = F^{-1}[f](y) := \text{v.p. } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iyx}\,dx. \tag{3}$$

В частности, если $f$ — комплекснозначная абсолютно интегрируемая на $(-\infty, +\infty)$ функция, то:

$$\begin{aligned} F[f](y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-iyx}\,dx, \\ F^{-1}[f](y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iyx}\,dx. \end{aligned} \tag{4}$$

**Теорема 1.** *Пусть функция* $f\colon (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$ *абсолютно интегрируема на* $(-\infty, +\infty)$ *и имеет в каждой точке обе односторонние производные.*

*Тогда*

$$F^{-1}[F[f]] = f, \quad F[F^{-1}[f]] = f. \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первая из формул (5) совпадает с ранее установленной формулой (1), а вторая получается применением первой к функции $f^*(x) := f(-x)$.

Формулы (5) называют *формулами обращения*.

**Замечание 1.** Теорема 1 доказана для действительнозначных функций $f$. Она справедлива и для комплекснозначных функций $f\colon (-\infty, +\infty) \to \mathbb{C}$ действительного аргумента, поскольку каждую такую функцию можно представить в виде $f(x) = g(x) + ih(x)$, где $g, h\colon (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$, и воспользоваться теоремой 1 для функций $g$ и $h$.

Эти же соображения применимы и при выводе ряда других свойств преобразований $F$ и $F^{-1}$. Поэтому при их формулировке и доказательстве можно ограничиться рассмотрением лишь действительнозначных функций.

Установим некоторые свойства преобразования Фурье абсолютно интегрируемых функций.

Пусть функции $f_1$, $f_2$, $f$ абсолютно интегрируемы на $(-\infty, +\infty)$.

Тогда:

1° (линейность)

$$F[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2] = \lambda_1 F[f_1] + \lambda_2 F[f_2] \quad \forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C};$$

2° $\widehat{f} = F[f]$ непрерывна на $(-\infty, +\infty)$,

$$\widehat{f}(y) \to 0 \quad \text{при} \quad y \to \pm\infty;$$

3° $\widehat{f}$ ограничена на $(-\infty, +\infty)$.

Доказательство. 1° следует из линейности несобственного интеграла.

2° следует из леммы 27.1.2, так как $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\widehat{f}(y) = a(y) - ib(y)$.

3° является следствием 2° или устанавливается простой оценкой

$$\sup_{-\infty<y<+\infty} |\widehat{f}(y)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < \infty.$$

Изучим преобразование Фурье производных и производные преобразования Фурье.

**Теорема 2.** *Пусть на $(-\infty, +\infty)$ функция $f$ абсолютно интегрируема, а производная $f'$ непрерывна и абсолютно интегрируема.*

*Тогда*

$$F[f'](y) = (iy)F[f](y), \quad y \in (-\infty, +\infty).$$

Доказательство. Представим функцию $f$ в виде

$$f(x) = f(0) + \int\limits_0^x f'(t)\, dt.$$

Из сходимости интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\, dt$ следует существование пределов $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Они не могут быть отличными от нуля в силу сходимости интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx$. С помощью интегрирования по частям получаем

$$F[f'](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-ixy}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x)e^{-ixy}\Big|_{x=-\infty}^{+\infty} + \frac{iy}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\, dy = iyF[f](y).$$

**Следствие.** *Пусть на $(-\infty, +\infty)$ функция $f$ абсолютно интегрируема вместе со своими производными до порядка $n$ включительно, и пусть $f^{(n)}$ непрерывна на $(-\infty, +\infty)$.*

*Тогда:*

$$F[f^{(n)}](y) = (iy)^n F[f](y) \quad \text{при} \quad y \in (-\infty, +\infty); \tag{6}$$

$$|F[f](y)| \leqslant \frac{M}{|y|^n}, \quad \text{где} \quad M = \sup_{(-\infty,+\infty)} |F[f^{(n)}]|. \tag{7}$$

Доказательство равенства (6) сводится к последовательному применению $n$ раз теоремы 2. Оценка (7) следует из равенства (6).

**Теорема 3.** *Пусть на $(-\infty, +\infty)$ функция $f$ непрерывна, а функция $f_1$ ($f_1(x) = xf(x)$) абсолютно интегрируема.*

*Тогда на $(-\infty, +\infty)$ существует производная*

$$\frac{d}{dy} F[f](y) = F[-if_1](y) = F[-ixf(x)](y).$$

Доказательство. Дифференцируя первый из интегралов (4) по параметру $y$, на основании теоремы 26.3.7 получаем

$$\frac{d}{dy} F[f](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dy} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iyx}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-ix) f(x) e^{-iyx}\, dx.$$

Заметим, что последний интеграл сходится равномерно на $(-\infty, +\infty)$ по признаку Вейерштрасса с мажорантой $\varphi(x) = |xf(x)|$.

**Следствие.** *Пусть на $(-\infty, +\infty)$ функция $f$ непрерывна, а при некотором $n \in \mathbb{N}$ функция $f_n$ ($f_n(x) = x^n f(x)$) абсолютно интегрируема.*

*Тогда на $(-\infty, +\infty)$ существует*

$$\frac{d^n}{dy^n} F[f](y) = F[(-i)^n f_n](y) = F[(-ix)^n f(x)](y).$$

Глава 28

# ОБОБЩЁННЫЕ ФУНКЦИИ

## § 28.1. Пространства $D$ и $D'$ основных и обобщённых функций

Понятие обобщённой функции расширяет классическое понятие функции и даёт возможность выразить в математической форме плотность материальной точки, плотность точечного заряда, интенсивность мгновенного точечного источника и т. п. В частности, реально можно измерить лишь среднюю плотность вещества в данной точке. Обобщённая функция отражает эту ситуацию: она определяется своими средними значениями в окрестности каждой точки. Возьмём, например, стержень, совпадающий с отрезком $[-1, 1]$ действительной прямой. Пусть требуется охарактеризовать его плотность, создаваемую материальной точкой массы 1, расположенной в точке $x = 0$. Сначала будем считать, что эта масса равномерно распределена на отрезке $\left[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right]$, где $\varepsilon > 0$ мало. Тогда плотность стержня $\delta_\varepsilon(x)$ задаётся формулой

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon} & \text{при } |x| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}, \\ 0 & \text{при } |x| > \dfrac{\varepsilon}{2}. \end{cases}$$

Как видим, масса стержня равна

$$m = \int\limits_{-1}^{1} \delta_\varepsilon(x)\,dx = \int\limits_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \delta_\varepsilon(x)\,dx = 1.$$

Перейдём к пределу при $\varepsilon \to 0$. Тогда получим «функцию»

$$\delta(x) := \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} +\infty & \text{при } x = 0, \\ 0 & \text{при } x \neq 0. \end{cases}$$

В то же время было бы желательно иметь равенство

$$\int\limits_{-1}^{1} \delta(x)\,dx = 1.$$

Как видим, наши требования к предельной «функции» $\delta$ противоречивы, если понимать их в классических математических терминах. Этот (в частности) вопрос разрешим в рамках теории обобщённых функций, созданной С.Л. Соболевым в 30-е и Л. Шварцем в 50-е годы прошлого века.

В рассмотренном примере использованное понятие поточечного предельного перехода можно заменить другим. Если $\varphi$ — произвольная непрерывная на $(-\infty, +\infty)$ функция, то существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0).$$

Формально это записывают так:

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0) \quad \text{или} \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0).$$

Отображение, которое каждой функции некоторого класса ставит в соответствие число, называется *функционалом*. Предпоследнее равенство означает, что $\delta$ — функционал, определённый на множестве всех непрерывных на $(-\infty, +\infty)$ функций и ставящий в соответствие каждой непрерывной функции её значение в точке 0. Функционал $\delta$ называют *$\delta$-функцией Дирака*. Функцию $\delta_\varepsilon$ также можно рассматривать как функционал на множестве всех непрерывных функций, действующий по формуле

$$\varphi \to \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx,$$

в которой интеграл можно понимать как интеграл Римана по отрезку $\left[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right]$, а предельный переход $\delta_\varepsilon \to \delta$ (называемый *слабой сходимостью*) — как предельный переход на множестве функционалов.

Перейдём к точным формулировкам. Ниже будем рассматривать лишь одномерный случай.

Напомним, что функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ называется финитной, если $f = 0$ вне некоторого отрезка.

*Носителем функции* $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ называется замыкание множества точек $x\in\mathbb{R}$, в которых $f(x)\neq 0$. Носитель функции $f$ обозначается символом $\operatorname{supp} f$.

В силу данных определений функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ финитна тогда и только тогда, когда её носитель компактен (т. е. является замкнутым ограниченным множеством).

Символом $C_0^\infty$ обозначается множество бесконечно дифференцируемых финитных функций. Множество $C_0^\infty$ является линейным пространством при естественном определении операций сложения функций и умножения функции на число.

Введём понятие сходимости в пространстве $C_0^\infty$.

**Определение 1.** Последовательность $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ функций $\varphi_k \in C_0^\infty$ называется *сходящейся к функции* $\varphi \in C_0^\infty$, если:

1° $\exists\,[a, b]$: $\operatorname{supp}\varphi_k \subset [a, b]\ \forall\, k \in \mathbb{N}$,

2° $\sup|\varphi_k^{(s)} - \varphi^{(s)}| \to 0$ при $k \to \infty\ \ \forall\, s \in \mathbb{N}_0$.

**Определение 2.** Линейное пространство $C_0^\infty$ с введённым понятием сходимости называется *пространством $D$ основных функций*.

Пусть $f$ — функционал на пространстве $D$ основных функций. Значение $f$ на $\varphi \in D$ обозначается через $(f, \varphi)$.

**Определение 3.** Функционал $f$ на $D$ называется *линейным*, если

$$(f, \alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha(f, \varphi) + \beta(f, \psi) \quad \forall\, \varphi, \psi \in D, \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

**Определение 4.** Функционал $f$ на $D$ называется *непрерывным*, если

$$\text{при } k \to \infty \text{ из } \quad \varphi_k \to \varphi \quad \text{в} \quad D \quad \text{следует} \quad (f, \varphi_k) \to (f, \varphi).$$

**Определение 5.** Всякий линейный непрерывный функционал на $D$ называется *обобщённой функцией*.

**Определение 6.** *Пространством обобщённых функций $D'$* называется множество (линейное пространство) всех обобщённых функций с введёнными в нём операциями сложения, умножения на число, а также сходимостью по следующим правилам:

1° $(\alpha f + \beta g, \varphi) = \alpha(f, \varphi) + \beta(g, \varphi)\ \ \forall\, f, g \in D',\ \ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall\, \varphi \in D$;

2° последовательность $\{f_k\}_{k=1}^\infty$, $f_k \in D'\ \ \forall\, k \in \mathbb{N}$, называется *сходящейся в $D'$* к $f \in D'$ при $k \to \infty$, если

$$(f_k, \varphi) \to (f, \varphi) \quad \text{при} \quad k \to \infty \quad \forall\, \varphi \in D.$$

Сходимость в $D'$ записывается в виде

$$f_k \to f \quad \text{в} \quad D' \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Приведём некоторые примеры.

**Пример 1.** При любом $a > 0$ функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{a^2/(x^2-a^2)} & \text{при } |x| < a, \\ 0 & \text{при } |x| \geqslant a \end{cases}$$

принадлежит пространству $C_0^\infty$ (ср. с примером функции $\varphi$ из начала § 17.3).

Этот пример показывает, что пространство $C_0^\infty$ содержит функции, отличные от тождественного нуля.

**Пример 2.** Пусть функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *локально абсолютно интегрируема*, т. е. абсолютно интегрируема на каждом отрезке $[a, b] \subset (-\infty, +\infty)$. Тогда функционал, определённый равенством

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall\, \varphi \in D, \tag{1}$$

является обобщённой функцией, т. е. элементом пространства $D'$.

**Определение 7.** Обобщённая функция называется *регулярной*, если её значения на любой функции $\varphi \in D$ представимы в виде (1) с некоторой локально абсолютно интегрируемой функцией $f$.

В противном случае обобщённая функция называется *сингулярной*.

Регулярная обобщённая функция, определяемая формулой (1), обозначается тем же символом $f$ и отождествляется с локально абсолютно интегрируемой функцией $f$. Таким образом, можно сказать, что $D'$ содержит все локально абсолютно интегрируемые функции.

**Пример 3.** $\delta$-функция, определяемая формулой

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0) \quad \forall\, \varphi \in D,$$

является сингулярной обобщённой функцией. Покажем это.

Допустив противное, предположим, что

$$(\delta, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall\, \varphi \in D$$

при некоторой локально абсолютно интегрируемой функции $f$. Тогда для функции $\varphi$ из примера 1

$$\int_{-a}^{a} f(x)e^{a^2/(x^2-a^2)}\,dx = \varphi(0) = e^{-1} \quad \forall\, a \in (0, 1).$$

Но это равенство не выполняется при малых значениях $a$, так как его левая часть ограничена интегралом

$$\int\limits_{-a}^{a} |f(x)|\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad a \to 0+0.$$

Следовательно, $\delta$-функция является сингулярной обобщённой функцией.

**Пример 4.** Последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ неотрицательных абсолютно интегрируемых на $(-\infty,+\infty)$ функций называется *$\delta$-образной последовательностью*, если:

1° $\int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x)\,dx = 1 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$;

2° $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f_k(x)\,dx = 1 \quad \forall\, \varepsilon > 0$.

Примером $\delta$-образной последовательности является последовательность функций

$$f_k(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{2} & \text{при } |x| \leqslant \dfrac{1}{k}, \\ 0 & \text{при } |x| > \dfrac{1}{k}. \end{cases}$$

**Упражнение 1.** Показать, что если $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ — $\delta$-образная последовательность, то

$$f_k \to \delta \quad \text{в} \quad D' \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

т. е. (в соответствии с определением сходимости в $D'$)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_k(x)\varphi(x)\,dx \to \varphi(0) \quad \text{при} \quad k \to \infty \quad \forall\, \varphi \in D.$$

## § 28.2. Дифференцирование обобщённых функций

Если функция $f$ непрерывно дифференцируема на $(-\infty,+\infty)$, то для любой функции $\varphi \in D$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx.$$

Благодаря этому соотношению становится естественным

**Определение 1.** Пусть $f \in D'$. Обобщённая функция $f'$, задаваемая формулой

$$(f',\varphi) := -(f,\varphi') \quad \forall\, \varphi \in D, \tag{1}$$

называется *производной* обобщённой функции $f$.

Читателю предлагается проверить, что функционал, стоящий в правой части (1), является линейным и непрерывным на $D$, т. е. обобщённой функцией.

Переход от обобщённой функции к её производной называется *операцией дифференцирования.*

**Теорема 1.** *Справедливы следующие свойства операции дифференцирования:*

1° *(линейность)*

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g' \quad \forall\, f, g \in D', \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R};$$

2° *(непрерывность)*

$$\text{при } k \to \infty \quad f_k \to f \text{ в } D' \Rightarrow f_k' \to f' \text{ в } D'.$$

Доказательство. 1°. Для любой функции $\varphi \in D$ имеем

$$((\alpha f + \beta g)', \varphi) = -(\alpha f + \beta g, \varphi') = -\alpha(f, \varphi') - \beta(g, \varphi') = \\ = \alpha(f', \varphi) + \beta(g', \varphi) = (\alpha f' + \beta g', \varphi).$$

2°. Пусть $f_k \to f$ в $D'$ при $k \to \infty$. Тогда для любой функции $\varphi \in D$

$$(f_k', \varphi) = -(f_k, \varphi') \to -(f, \varphi') = (f', \varphi) \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

**Пример 1.** Пусть $\theta$ — *функция Хевисайда*

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Рассматривая $\theta$ как обобщённую функцию, найдём её производную. Пусть $\varphi \in D$. Тогда

$$(\theta', \varphi) = -(\theta, \varphi') = -\int\limits_0^{+\infty} \varphi'(x)\, dx = \varphi(0) = (\delta, \varphi).$$

Следовательно, $\theta' = \delta$.

**Определение 2.** Пусть $f \in D'$, $n \in \mathbb{N}$. Обобщённая функция $f^{(n)}$, задаваемая формулой

$$(f^{(n)}, \varphi) := (-1)^n (f, \varphi^{(n)}) \quad \forall\, \varphi \in D, \tag{2}$$

называется *производной порядка* $n$ обобщённой функции $f$.

Так же, как в случае $n = 1$, проверяется, что функционал $(f, \varphi^{(n)})$ из правой части (2) является линейным и непрерывным на $D$, т. е. обобщённой функцией.

**Упражнение 1.** Вычислить производную второго порядка функции $f(x) = |x|$.

Мы видим, что каждую обобщённую функцию $f$ $(\in D')$ можно дифференцировать и притом сколько угодно раз, а её производная $f^{(n)}$ порядка $n$ также является обобщённой функцией (элементом $D'$) при любом $n \in \mathbb{N}$.

**Определение 3.** Пусть $f_k \in D'$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ называется *рядом обобщённых функций*. Этот ряд называется *сходящимся* в $D'$ к $f \in D'$, если

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} f_k \to f \quad \text{в} \quad D' \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

При этом пишут

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k = f. \tag{3}$$

Из непрерывности операции дифференцирования (свойство 2° теоремы 1) следует, что всякий сходящийся в $D'$ ряд обобщённых функций (3) можно почленно дифференцировать:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f'_k = f',$$

и полученный ряд также будет сходиться в $D'$.

**Определение 4.** Пусть $f \in D'$, а функция $\lambda$ бесконечно дифференцируема на $(-\infty, +\infty)$. *Произведением* $\lambda f$ называется обобщённая функция, задаваемая формулой

$$(\lambda f, \varphi) := (f, \lambda\varphi) \quad \forall\, \varphi \in C_0^{\infty}.$$

**Упражнение 2.** Показать, что $\lambda f$ — линейный непрерывный функционал на $D$, т. е. обобщённая функция из $D'$.

## § 28.3. Пространства $S$ и $S'$ основных и обобщённых функций

Наряду с парой $D$ и $D'$ основных и обобщённых функций важную роль в математическом анализе и теории дифференциальных уравнений в частных производных играет пара пространств $S$ и $S'$ (называемых *пространствами Шварца*) основных и обобщённых функций. Эти пространства замечательны тем, что они инвариантны относительно преобразования Фурье:

$$\varphi \in S \Rightarrow F[\varphi] \in S, \quad f \in S' \Rightarrow F[f] \in S'.$$

**Определение 1.** *Пространством* $S$ (*Шварца*) называется линейное пространство комплекснозначных бесконечно дифференцируемых на $(-\infty, +\infty)$ функций $\varphi$, для которых конечна каждая из полунорм

$$\|\varphi\|_{n,m} := \sup_{-\infty<x<+\infty} |x^n \varphi^{(m)}(x)| < \infty \quad \forall\, n, m \in \mathbb{N}_0 \qquad (1)$$

при естественном определении сложения функций и умножения функции на комплексное число.

При $x \to \pm\infty$ функция $\varphi \in S$ и каждая из её производных убывает быстрее любой степени функции $1/|x|$. Такую функцию называют *быстро убывающей*.

Заметим, что $C_0^\infty \subset S$, однако $S$ не совпадает с $C_0^\infty$. Так, функция $\varphi(x) = e^{-x^2}$ принадлежит $S$, но не $C_0^\infty$.

Введём в $S$ понятие сходимости.

**Определение 2.** Последовательность $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ функций $\varphi_k \in S$ называется *сходящейся* к функции $\varphi \in S$, если при $k \to \infty$

$$\|\varphi_k - \varphi\|_{n,m} \to 0 \quad \forall\, n, m \in \mathbb{N}_0. \qquad (2)$$

В других терминах сходимость (2) означает, что для любых $n, m \in \mathbb{N}_0$ при $k \to \infty$

$$x^n \varphi_k^{(m)}(x) \rightrightarrows x^n \varphi^{(m)}(x) \quad \text{на} \quad (-\infty, +\infty).$$

**Определение 3.** Линейное пространство $S$ с введённой сходимостью (2) называется *пространством $S$ основных функций*.

**Определение 4.** Линейный непрерывный функционал на $S$ называется *обобщённой функцией медленного роста*.

**Пример 1.** Пусть функция $f$ локально абсолютно интегрируема, и пусть при некоторых $A > 0$, $n \in \mathbb{N}$

$$|f(x)| \leqslant A(1 + |x|^n), \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Тогда функционал

$$(f, \varphi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\, dx \quad \forall\, \varphi \in S$$

является обобщённой функцией медленного роста.

**Определение 5.** *Пространством* $S'$ (*Шварца*) *обобщённых функций* (медленного роста) называется линейное пространство обобщённых функций медленного роста с введёнными в нём операциями сложения, умножения на комплексное число, а также сходимостью по следующим правилам:

1° $(\alpha f + \beta g, \varphi) = \alpha(f, \varphi) + \beta(g, \varphi)$ $\forall\, f, g \in S'$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\forall\, \varphi \in S$;

2° последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, $f_k \in S'$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$, называется *сходящейся в* $S'$ к $f \in S'$ при $k \to \infty$, если при $k \to \infty$

$$(f_k, \varphi) \to (f, \varphi) \quad \forall\, \varphi \in S.$$

В пространстве $S'$ равенством

$$(f', \varphi) := -(f, \varphi') \quad \forall\, \varphi \in S.$$

определена операция дифференцирования. Эта операция непрерывна в $S'$ в том смысле, что (при $k \to \infty$) $f_k \to f$ в $S' \Rightarrow f_k' \to f'$ в $S'$.

Отсюда следует, что при $f_k$, $f \in S'$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \overset{S'}{=} f \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k' \overset{S'}{=} f'.$$

В пространстве $S'$ формулой

$$(pf, \varphi) := (f, p\varphi) \quad \forall\, \varphi \in S, \quad \forall\, f \in S'.$$

определена операция умножения на многочлен $p = p(x)$.

*Преобразование Фурье* $F[\varphi]$ и *обратное преобразование Фурье* $F^{-1}[\varphi]$ для $\varphi \in S$ имеют вид:

$$F[\varphi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) e^{-ixy}\, dy,$$

$$F^{-1}[\varphi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) e^{ixy}\, dy.$$

**Упражнение 1.** Установить следующие свойства преобразования Фурье:

1° $\varphi \in S \Rightarrow F[\varphi],\ F^{-1}[\varphi] \in S$;

2° преобразование Фурье взаимно однозначно отображает $S$ на $S$;

3° операции преобразования Фурье $F[\varphi]$ и обратного преобразования Фурье $F^{-1}[\varphi]$ непрерывны в $S$ в том смысле, что при $k \to \infty$

$$\varphi_k \xrightarrow{S} \varphi \Rightarrow F[\varphi_k] \xrightarrow{S} F[\varphi], \quad F^{-1}[\varphi_k] \xrightarrow{S} F^{-1}[\varphi]$$

соответственно.

Равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-ixy} dy \right) \varphi(x)\, dx = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-iyx} dx \right) f(y)\, dy$$

для функции $\varphi \in S$ и абсолютно интегрируемой на $(-\infty, +\infty)$ функции $f$ делает естественным

**Определение 6.** *Преобразованием* (*обратным преобразованием*) *Фурье обобщённой функции* $f \in S'$ называется обобщённая функция $F[f]$ $(F^{-1}[f])$, определённая равенством

$$(F[f], \varphi) := (f, F[\varphi]) \quad ((F^{-1}[f], \varphi) := (f, F^{-1}[\varphi])) \quad \forall\, \varphi \in S.$$

**Упражнение 2.** Установить следующие свойства преобразования Фурье обобщённых функций:

1° $f \in S' \Rightarrow F[f] \in S'$, $F^{-1}[f] \in S'$;

2° $S' \overset{F}{\leftrightarrow} S'$;

3° (непрерывность) при $k \to \infty$

$$f_k \to f \text{ в } S' \Rightarrow F[f_k] \to F[f] \text{ в } S', \; F^{-1}[f_k] \to F^{-1}[f] \text{ в } S';$$

4° $F[f^{(n)}] = (ix)^n F[f] \;\; \forall\, f \in S'$;

5° $(F[f])^{(n)} = F[(-ix)^n f] \;\; \forall\, f \in S'$.

# ПРИЛОЖЕНИЕ

## Производные основных элементарных функций

$(C)' = 0$ ($C$ — постоянная);

$(x^n)' = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$;

$(a^x)' = \ln a \cdot a^x, \quad a > 0$;

$(x^a)' = ax^{a-1}, \quad x > 0$;

$(\log_a x)' = \dfrac{\log_a e}{x}$, $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$;

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$;

$(\ln |x|)' = \dfrac{1}{x}, \quad x \neq 0$;

$(\sin x)' = \cos x$;

$(\cos x)' = -\sin x$;

$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$;

$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$;

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;

$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$;

$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$;

$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$;

$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;

$(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;

$(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

## Простейшие неопределённые интегралы

$$\int 0\,dx = C;$$

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C;$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\,\right| + C;$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C;$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

# Формулы Тейлора для основных элементарных функций

(при $x \to 0$)

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n);$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1});$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2});$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1});$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2});$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2});$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + o(x^n);$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n);$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n).$$

# Формулы Тейлора для основных элементарных функций

(при $x \to 0$)

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n);$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1});$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2});$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1});$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2});$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2});$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + o(x^n);$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n);$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n).$$

Учебное издание

*БЕСОВ Олег Владимирович*

**ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ**

Редактор *В.С. Аролович*
Оригинал-макет: *В.В. Затекин*
Оформление переплета: *Д.Б. Белуха, И.М. Уткин, Т.Е. Денисова*

Подписано в печать 19.11.2013. Формат 60×90/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 30.
Уч.-изд. л. 33. Тираж 500 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
http://www.fml.ru

Отпечатано с электронных носителей издательства
в ППП «Типография «Наука»
121099, г. Москва, Шубинский пер., 6

ISBN 978-5-9221-1506-3

9 785922 115063