Начала математического анализа. Интегралы и ряды

Л.Н. Знаменская

Оглавление

ГЛАВА 1

Ряды Фурье

§1. Пространства интегрируемых функций

Будем использовать обозначение $X = \{a, b\}$ — это одно из следующих множеств: $[a, b]$ — отрезок; (a, b) — интервал; $(a, b]$ или $[a, b)$ — полуинтервал; при этом a может быть символом $-\infty$, а b — символом $+\infty$.

Определение 1.1. Функция $y = f(x)$ называется *абсолютно интегрируемой на* $X \subset \mathbb{R}$, если интеграл от функции f по множеству X сходится абсолютно.

Обозначение. Множество функций, абсолютно интегрируемых на X, обозначим $L^1_R(X)$.[1.1]

rem_1.1 Замечание 1.1. Обратим внимание на тот факт, что введенное множество не совсем является естественным, в силу того, что мы знаем только интеграл Римана.

Если рассматривать функцию f, интегрируемую по Риману на отрезке $[a, b]$, то функция $|f|$ является интегрируемой по Риману на указанном отрезке. Однако из интегрируемости по Риману функции $|f|$ на отрезке $[a, b]$ не следует интегрируемость по Риману функции f на этом отрезке.[1.2]

Но если функция f неограничена на множестве X или множество X является неограниченным, тогда мы можем

[1.1] Символ R означает, что интегрируемость понимается в смысле Римана.

[1.2] Примером такой функции является функция типа функции Дирихле $\mathscr{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ -1, & x \in \mathbb{J}. \end{cases}$

говорить о несобственном интеграле от функции f по множеству X. Тогда из абсолютной сходимости несобственного интеграла от функции f по множеству X следует, что указанный несобственный интеграл сходится.[1.3]

Замечание 1.2. Если на множестве $L^1_R(X)$ ввести операции сложения функций и умножения функции на действительное число, то это множество превращается в линейное пространство, поскольку для введенных операций выполняются все аксиомы линейного пространства.

Определение 1.2. Функция $y = f(x)$ называется *абсолютно интегрируемой с квадратом на* $X \subset \mathbb{R}$, если $f \in L^1_R(X)$ и $|f|^2 \in L^1_R(X)$.

Обозначение. Множество функций, абсолютно интегрируемых с квадратом на X, обозначим $L^2_R(X)$.[1.4]

Замечание 1.3. Обратим внимание на тот факт, что если f принимает только действительные значения, т. е. верно $f : X \to \mathbb{R}$, то $|f|^2 = f^2$, но $|f|^2 \neq f^2$, если для функции f верно $f : X \to \mathbb{C}$.

Соглашение. Далее будем предполагать, что функции принимают только действительные значения, т. е. выполнено равенство $|f|^2 = f^2$.

exm_4.4

Пример 1.1. Приведем пример функции, которая не является интегрируемой с квадратом. Функция $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, определенная на множестве $X = (0,\, 1]$, принадлежит множеству $L^1_R(X)$, но не принадлежит множеству $L^2_R(X)$.

Предложение 1.1. *Множество $L^2_R(X)$ образует линейное пространство относительно операций сложения функций и умножения функции на любое действительное число.*

[1.3] Множество функций абсолютно интегрируемых на множестве является естественным для интегралов Лебега.

[1.4] Символ R по-прежнему означает, что интегрируемость понимается в смысле Римана.

Доказательство. Пусть $f,\, g \in L^2_R(X)$ — произвольные функции. Надо доказать, что функция $\alpha f + \beta g$ принадлежит $L^2_R(X)$ для действительных чисел α и β.

Очевидно, что функция $\alpha f + \beta g$ принадлежит $L^1_R(X)$. Используя неравенство

$$2|f(x) \cdot g(x)| \leqslant f^2(x) + g^2(x), \tag{1.1}$$

получаем

$$|\alpha f + \beta g|^2 \leqslant \alpha^2 f^2 + 2|\alpha|\,|\beta|\,|f \cdot g| + \beta^2 g^2 \leqslant \\ \leqslant \big(\alpha^2 + |\alpha|\,|\beta|\big) f^2 + \big(\beta^2 + |\alpha|\,|\beta|\big) g^2.$$

Утверждение следует из абсолютной интегрируемости функций f^2 и g^2. △

Замечание 1.4. Если функции f и g принадлежат пространству $L^2_R(X)$, то из неравенства (1.1) следует, что функция $f \cdot g$ принадлежит $L^1_R(X)$.

Мы хотим превратить линейное пространство $L^2_R(X)$ в евклидово пространство[1.5] со скалярным произведением вида $(f,\, g) = \int\limits_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx$.

Если задано произвольное множество M и отношение $\mathfrak{R}$ на нем, то символом $x\,\mathfrak{R}\,y$ будем обозначать тот факт, что элемент $x \in M$ находится в отношении $\mathfrak{R}$ с элементом $y \in M$.

Определение 1.3. Отношение $\mathfrak{R}$ называется *отношением эквивалентности* на множестве M, если для любых элементов x, y и z из M выполняется:

1) $x\,\mathfrak{R}\,x$ (*рефлексивность*);
2) если $x\,\mathfrak{R}\,y$, то $y\,\mathfrak{R}\,x$ (*симметричность*);
3) если $x\,\mathfrak{R}\,y$ и $y\,\mathfrak{R}\,z$, то $x\,\mathfrak{R}\,z$ (*транзитивность*).

[1.5]Бесконечномерные линейные пространства, в которых определено скалярное произведение иногда в литературе называют *предгильбертовыми* пространствами.

Определение 1.4. Отношение эквивалентности $\mathfrak{R}$ разбивает множество M на классы эквивалентности. Совокупность классов эквивалентности образуют *фактор–пространство*, которое обозначим $M/\mathfrak{R}$.

Все элементы x, y из множества M, для которых выполняется $x\,\mathfrak{R}\,y$, принадлежат одному классу эквивалентности. Эти элементы называются *эквивалентными*, обозначается $x \sim y$. Элементы из разных классов не являются эквивалентными.

Предложение 1.2. *Если*

$$[f\,\mathfrak{R}\,g] \overset{\text{def}}{=} \left[\int\limits_a^b \bigl(f(x)-g(x)\bigr)^2\,dx = 0\right], \tag{1.2}$$ 4.1

то $\mathfrak{R}$ является отношением эквивалентности в $L^2_R(X)$.

Доказательство. Рефлексивность и симметричность отношения $\mathfrak{R}$ очевидны. Докажем транзитивность.

Поскольку $f-g=(f-h)+(h-g)$, то используя неравенство (1.1), получаем

$$|f-g|^2 = \bigl|(f-h)+(h-g)\bigr|^2 \leqslant 2\bigl[(f-h)^2+(h-g)^2\bigr].$$

Следовательно,

$$\int\limits_a^b \bigl(f(x)-g(x)\bigr)^2\,dx \leqslant$$

$$\leqslant 2\left[\int\limits_a^b \bigl(f(x)-h(x)\bigr)^2\,dx + \int\limits_a^b \bigl(h(x)-g(x)\bigr)^2\,dx\right].$$

Поэтому, если $f\,\mathfrak{R}\,h$ и $h\,\mathfrak{R}\,g$, то $f\,\mathfrak{R}\,g$. $\triangle$

Поскольку отношение (1.2) является отношением эквивалентности, то естественным является следующее определение.

dfn_1.5 Определение 1.5. Функции f и g из $L^2_R(X)$ называются *эквивалентными*, если выполняется следующее равенство: $\int\limits_a^b \big(f(x) - g(x)\big)^2\,dx = 0$.

Обозначение. Эквивалентные в указанном смысле элементы из $L^2_R(X)$ обозначим $f \sim g$, а полученное фактор–пространство $L^2_R(x)/\mathfrak{R}$ обозначим $\mathscr{L}^2_R(X)$.

Докажем, что $\mathscr{L}^2_R(X)$ есть линейное пространство.

Предложение 1.3. *Если $f \sim \widetilde{f}$ и $g \sim \widetilde{g}$, то для любых действительных чисел α и β выполняется $h \sim \widetilde{h}$, где обозначено $h = \alpha f + \beta g$ и $\widetilde{h} = \alpha\widetilde{f} + \beta\widetilde{g}$.*

Доказательство. Поскольку выполнены равенства $\int\limits_a^b \big(f - \widetilde{f}\,\big)^2\,dx = 0$ и $\int\limits_a^b \big(g - \widetilde{g}\big)^2\,dx = 0$, то, используя неравенство (1.1), находим

$$0 \leqslant \left|\int\limits_a^b \big(h - \widetilde{h}\big)^2\,dx\right| \leqslant \big(\alpha^2 + |\alpha|\cdot|\beta|\big)\int\limits_a^b \big(f - \widetilde{f}\,\big)^2\,dx + {}$$
$$+ \big(\beta^2 + |\alpha|\cdot|\beta|\big)\int\limits_a^b \big(g - \widetilde{g}\,\big)^2\,dx = 0.$$

Откуда следует, что $h \sim \widetilde{h}$. △

Теперь докажем, что

$$(f,\,g) = \int\limits_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx \qquad (1.3)$$ 4.3

является скалярным произведением в $\mathscr{L}^2_R(X)$, а для этого воспользуемся следующим предложением.

Предложение 1.4. *Если $f \sim \widetilde{f}$ и $g \sim \widetilde{g}$, то справедливо равенство $(f,\,g) = \big(\widetilde{f},\,\widetilde{g}\big)$.*

Доказательство. Для доказательства воспользуемся неравенством Коши–Буняковского

$$\big|(f,\,g)\big| \leqslant \sqrt{(f,\,f)}\cdot\sqrt{(g,\,g)}. \tag{1.4}$$ C_B

Тогда выполняется

$$0 \leqslant \big|(f,\,g) - \big(\widetilde{f},\,\widetilde{g}\big)\big| = \big|(f,\,g) - \big(f,\,\widetilde{g}\big) + \big(f,\,\widetilde{g}\big) - \big(\widetilde{f},\,\widetilde{g}\big)\big| = \\ = \big|\big(f,\,g-\widetilde{g}\big) + \big(f-\widetilde{f},\,\widetilde{g}\big)\big| \leqslant \sqrt{(f,\,f)}\cdot\sqrt{\big(g-\widetilde{g},\,g-\widetilde{g}\big)} + \\ + \sqrt{\big(\widetilde{g},\,\widetilde{g}\big)}\cdot\sqrt{\big(f-\widetilde{f},\,f-\widetilde{f}\,\big)} = 0.$$

Откуда и следует требуемое равенство. △

Замечание 1.5. В $\mathscr{L}^2_R(X)$ мы не можем различать эквивалентные функции, поэтому из того, что $(f,\,f)=0$ следует, что $f=0$. Выполняется соответствующая аксиома скалярного произведения. Выполнение остальных аксиом очевидно.

Таким образом, пространство $\mathscr{L}^2_R(X)$ превращается в евклидово.

dfn_norm Определение 1.6. Линейное пространство $\mathscr{L}$ называется *нормированным*, если на нем определена такая функция $\|\cdot\|$, называемая *нормой*, что для любого действительного числа α и для любых элементов x и y из $\mathscr{L}$ выполняется

1) $\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$ (*неравенство треугольника*);
2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;
3) $\|x\| \geqslant 0$; причем $\|x\|=0$ только если $x=0$.

space_n_m Замечание 1.6. Произвольное нормированное пространство $\mathscr{N} = (\mathscr{L},\,\|\cdot\|)$ можно превратить в метрическое пространство $\mathscr{M} = (\mathscr{L},\,\rho)$, если метрику ρ определить следующим образом: $\rho(x,\,y) = \|x-y\|$. Поэтому в нормированных пространствах, подобно тому как это делалось в метрических пространствах, можно определить сходимость последовательности, фундаментальные последовательности и говорить о полноте пространства.

evkl_norm

Замечание 1.7. Произвольное евклидово пространство $\mathscr{E} = \big(\mathscr{L},\, (\cdot,\, \cdot)\big)$ можно превратить в нормированное пространство $\mathscr{N} = (\mathscr{L},\, \|\cdot\|)$, определив для любого элемента x норму следующим образом: $\|x\| = \sqrt{(x,\, x)}$.

Пространство $\mathscr{L}^2_R(X)$ является линейным нормированным пространством с нормой

$$\|f\|_2 = \sqrt{(f,\, f)} = \left[\int\limits_a^b f^2(x)\, dx\right]^{1/2}. \tag{1.5}$$

norm_L2

Замечание 1.8. Отказаться от введенной выше факторизации пространства $L^2_R(X)$ нельзя, иначе не будет выполняться аксиома 3) нормы.

В линейном пространстве $L^1_R(X)$ можно также ввести факторизацию используя следующее отношение эквивалентности: $f \sim g$, если $\int\limits_a^b \big|f(x) - g(x)\big|\, dx = 0$. Тогда фактор–пространство $\mathscr{L}^1_R(X)$ является линейным нормированным пространством с нормой: $\|f\|_1 = \int\limits_a^b \big|f(x)\big|\, dx$.

Замечание 1.9. Следует обратить внимание на тот факт, что пространство $\mathscr{L}^1_R(x)$ не является евклидовым, в нем нельзя определить скалярное произведение как в пространстве $\mathscr{L}^2_R(X)$.

Предложение 1.5. *Если f принадлежит пространству $\mathscr{L}^2_R(X)$, то справедливо $\|f\|_1 \leqslant \sqrt{b-a}\, \|f\|_2$.*

Доказательство. Из неравенства Коши–Буняковского следует

$$\|f\|_1 \leqslant \left[\int\limits_a^b f^2(x)\, dx\right]^{1/2} \cdot \left[\int\limits_a^b dx\right]^{1/2} = \sqrt{b-a}\, \|f\|_2. \quad \triangle$$

Замечание 1.10. Из доказанного предложения следует, что $\mathscr{L}^2_R(X) \subset \mathscr{L}^1_R(X)$.

§2. Некоторые вспомогательные утверждения для абсолютно интегрируемых функций

Докажем важные для дальнейшего утверждения. Следующее утверждение еще называют *лемма Римана об осцилляции*.

thm_Riemann Теорема 1.1. (Римана об осцилляции). *Для функции $f \in L^1_R(X)$ справедливы следующие равенства:*

$$\lim_{t\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\sin tx\,dx = 0; \quad \lim_{t\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\cos tx\,dx = 0. \quad (1.6)$$ lemma_Riemann

Доказательство. Теорему докажем для первого равенства из (lemma_Riemann 1.6).

1. Пусть $X = [a,\, b]$ и $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,\, b]$. Из критерия интегрируемости функции f следует, что для любого положительного числа ε найдется такое разбиение $T = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b\}$ отрезка $[a,\, b]$, что выполнено неравенство (см. критерий интегрируемости функции)

$$\overline{S}(T) - \underline{S}(T) = \sum_{i=1}^{k}(M_i - m_i)\Delta x_i < \varepsilon/2.$$

Тогда выполнено

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\sin tx\,dx\right| = \left|\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\sin tx\,dx\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\big(f(x) - m_i\big)\sin tx\,dx + \sum_{i=1}^{k} m_i\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\sin tx\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \bigl|f(x) - m_i\bigr|\,dx + \sum_{i=1}^{k} \frac{|m_i|}{|t|} \bigl|\cos tx_{i-1} - \cos tx_i\bigr| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} \bigl(M_i - m_i\bigr)\Delta x_i + 2k\,\frac{M}{|t|},$$

где $M = \sup\limits_{[a,\,b]}\bigl|f(x)\bigr|$. Второе слагаемое в полученном неравенстве — бесконечно малая функция при $t \to \infty$. Поэтому для любого наперед заданного положительного числа ε найдется такое положительное число t_0, зависящее от ε, что для всех t таких, что $|t| > t_0$, выполняется $2k\,\dfrac{M}{|t|} < \varepsilon/2$.

Окончательно получаем, что для любого наперед заданного положительного числа ε найдется такое положительное число t_0, зависящее от ε, что для всех t таких, что $|t| > t_0$, выполняется $\left|\int\limits_a^b f(x)\sin tx\,dx\right| < \varepsilon$, а это равносильно первому равенству в (1.6).

2. Теперь рассмотрим случай, когда функция f имеет конечное число особенностей на множестве $X = \{a;\, b\}$. Для простоты будем считать, что функция f определена на полуинтервале $[a,\, b)$ и имеет особенность в точке b, при этом b может быть символом $+\infty$.

Поскольку несобственный интеграл $\int\limits_a^b \bigl|f(x)\bigr|\,dx$ сходится, то в силу критерия Коши для любого наперед заданного положительного числа ε найдется такое число δ, зависящее от ε, причем $\delta \in (0,\, b-a)$, что справедливо неравенство $\int\limits_{b-\delta}^{b} \bigl|f(x)\bigr|\,dx < \varepsilon/2$.

При этом функция f будет интегрируема на отрезке $[a,\, b-\delta]$. По доказанному в п. 1, для указанного положительного числа ε найдется положительное число t_0, зависящее от ε, что для всех таких t, что $|t| > t_0$ выполняется неравенство $\left|\int\limits_a^{b-\delta} f(x)\sin tx\,dx\right| < \varepsilon/2$.

Таким образом, справедливо неравенство

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\sin tx\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\int\limits_a^{b-\delta} f(x)\sin tx\,dx\right| + \int\limits_{b-\delta}^{b} \bigl|f(x)\bigr|\,dx \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

для всех таких t, что $|t| > t_0$. Это и означает выполнение первого равенства в (lemma_Riemann 1.6).

Второе равенство из (lemma_Riemann 1.6) доказывается аналогично. $\triangle$

Напомним известные для интегрируемых на отрезке функций определения.

Определение 1.7. Функция $y = f(x)$ называется *четной* на отрезке $[-a,\, a]$, если для любого $x \in [-a,\, a]$ выполняется $f(-x) = f(x)$.

Функция $y = f(x)$ называется *нечетной* на отрезке $[-a,\, a]$, если для любого $x \in [-a,\, a]$ выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Определение 1.8. Функция $y = f(x)$ называется *периодической* на $\mathbb{R}$ с периодом $T > 0$, если для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется $f(x+T) = f(x)$

Приведенные ниже теоремы известны для интегрируемых на отрезке функций, однако они справедливы и для функций из $L^1_R(X)$.

Теорема 1.2. *Если функция $f \in L^1_R[-a,\, a]$ четная на отрезке $[-a,\, a]$, то* $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx$.

Если функция $f \in L^1_R[-a,\, a]$ нечетная на отрезке $[-a,\, a]$, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

thm_period Теорема 1.3. *Если функция $f \in L^1_R[0,\, T]$ периодическая на $\mathbb{R}$ с периодом $T > 0$, то функция f абсолютно интегрируема на любом конечном отрезке и для любого $a \in \mathbb{R}$ выполняется равенство* $\int\limits_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{T} f(x)\,dx$.

§3. Счетные ортонормированные системы в предгильбертовых пространствах

Определение 1.9. Счетная система $\{\varphi_1,\, \ldots,\, \varphi_n,\, \ldots\}$ ненулевых элементов предгильбертова пространства называется *ортогональной*, если $(\varphi_i,\, \varphi_j) = 0$ при $i \neq j$.

Если при этом $(\varphi_i,\, \varphi_i) = 1$, $i = 1,\, 2,\, \ldots$, то ортогональная система называется *ортонормированной*.

Замечание 1.11. Поскольку в m–мерном евклидовом пространстве ортогональная система из ненулевых элементов может содержать не более m элементов, то счетные ортонормированные системы существуют лишь в бесконечномерных пространствах — предгильбертовых.

Приведем примеры счетных ортонормированных систем в пространстве $\mathscr{L}^2_R(X)$.

Пример 1.2. В пространстве $\mathscr{L}^2_R[-\ell,\, \ell]$ система

$$\left\{1,\, \cos\frac{\pi x}{\ell},\, \sin\frac{\pi x}{\ell},\, \ldots,\, \cos\frac{n\pi x}{\ell},\, \sin\frac{n\pi x}{\ell},\, \ldots\right\} \qquad (1.7)$$ trig_ell_0

является счетной ортогональной системой функций:

$$\int\limits_{-\ell}^{\ell} \cos\frac{n\pi x}{\ell}\cdot 1\,dx = 0, \qquad \int\limits_{-\ell}^{\ell} \sin\frac{n\pi x}{\ell}\cdot 1\,dx = 0;$$

для $n \neq m$ выполняется

$$\int\limits_{-\ell}^{\ell} \cos\frac{n\pi x}{\ell}\cdot\cos\frac{m\pi x}{\ell}\,dx = \\ = \frac{1}{2}\int\limits_{-\ell}^{\ell}\left[\cos\frac{(n+m)\pi x}{\ell} + \cos\frac{(n-m)\pi x}{\ell}\right]dx = 0;$$

$$\int\limits_{-\ell}^{\ell} \sin\frac{n\pi x}{\ell}\cdot\sin\frac{m\pi x}{\ell}\,dx = \\ = \frac{1}{2}\int\limits_{-\ell}^{\ell}\left[\cos\frac{(n-m)\pi x}{\ell} - \cos\frac{(n+m)\pi x}{\ell}\right]dx = 0;$$

$$\int\limits_{-\ell}^{\ell} \sin\frac{n\pi x}{\ell}\cdot\cos\frac{m\pi x}{\ell}\,dx = \\ = \frac{1}{2}\int\limits_{-\ell}^{\ell}\left[\sin\frac{(n+m)\pi x}{\ell} + \sin\frac{(n-m)\pi x}{\ell}\right]dx = 0.$$

Для того, чтобы получить ортонормированную систему функций, заметим, что $\int\limits_{-\ell}^{\ell} dx = 2\ell$ и

$$\int\limits_{-\ell}^{\ell} \cos^2 \frac{n\pi x}{\ell}\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\ell}^{\ell} \left[1 + \cos\frac{2n\pi x}{\ell}\right] dx = \ell,$$
$$\int\limits_{-\ell}^{\ell} \sin^2 \frac{n\pi x}{\ell}\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\ell}^{\ell} \left[1 - \cos\frac{2n\pi x}{\ell}\right] dx = \ell.$$

Итак, счетная ортонормированная система функций в $\mathscr{L}^2_R[-\ell,\, \ell]$ имеет следующий вид:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\ell}},\, \frac{1}{\sqrt{\ell}}\cos\frac{\pi x}{\ell},\, \frac{1}{\sqrt{\ell}}\sin\frac{\pi x}{\ell},\, \ldots \right.$$
$$\left. \ldots,\, \frac{1}{\sqrt{\ell}}\cos\frac{n\pi x}{\ell},\, \frac{1}{\sqrt{\ell}}\sin\frac{n\pi x}{\ell},\, \ldots\right\}. \quad (1.8)$$

trig_ell

Система называется *тригонометрической* системой функций в $\mathscr{L}^2_R[-\ell,\, \ell]$.

Пример 1.3. В пространстве $\mathscr{L}^2_R[-1,\, 1]$ *многочлены Лежандра*

$$P_0(x) \equiv 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!}\,\frac{d^n\left[(x^2-1)^n\right]}{dx^n}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

образуют счетную ортогональную систему функций. Функции

$$S_0(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad S_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\, P_n(x), \qquad n \in \mathbb{N}$$

образуют ортонормированную систему в $\mathscr{L}^2_R[-1,\, 1]$.

§4. Общие ряды Фурье. Основная теорема

Пусть $\mathscr{E}$ предгильбертово пространство, в котором задана счетная ортонормированная система ненулевых элементов

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots\}. \tag{1.9}$$

ort_nor_sys

Определение 1.10. Назовем *рядом Фурье* элемента $f \in \mathscr{E}$ по ортонормированной системе (1.9), ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k, \quad f_k = \big(f, \varphi_k\big), \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Числа f_k называются *коэффициентами Фурье* элемента f по системе (1.9). Конечная сумма

$$S_n^f = \sum_{k=1}^{n} f_k \varphi_k, \quad f_k = \big(f, \varphi_k\big), \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.10}$$

n_summ_F

называется *частичной суммой ряда Фурье* элемента f.

Поскольку в евклидовом пространстве $\mathscr{E}$ можно определить норму (см. замечание 1.7), то число $\|f - g\|$ будем называть *отклонением элемента g от элемента f по норме данного пространства*.

Следующая теорема является фундаментальной для теории рядов Фурье, поэтому ее называют *основной теоремой*.

thm_osn

Теорема 1.4. (основная). *Среди всех сумм вида $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$ наименьшее отклонение от элемента f по норме данного пространства имеет частичная сумма S_n^f ряда Фурье* (1.10).

Доказательство. Рассмотрим отклонение конечной суммы от элемента f:

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k - f\Big\|^2 = \Big(\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k - f, \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k - f\Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \bigl(\varphi_k,\, \varphi_k\bigr) - 2\sum_{k=1}^{n} c_k \bigl(f,\, \varphi_k\bigr) + (f,\, f) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} c_k f_k + \|f\|^2.$$

После несложного преобразования отклонение можно записать в следующем виде:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k - f\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \bigl(c_k - f_k\bigr)^2 + \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2. \qquad (1.11)$$ thm_osn_rav_0

Итак, указанный квадрат отклонения будет наименьшим, если $c_k = f_k$. △

Следствие. *Для произвольного элемента f данного предгильбертова пространства, любой ортонормированной системы (1.9), при каком угодно выборе постоянных c_k и для любого фиксированного номера n справедливо неравенство*

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \leqslant \left\|\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k - f\right\|^2. \qquad (1.12)$$ thm_osn_rav_1

Доказательство. Неравенство (1.12) следует из тождества (1.11). △

Следствие. *Для произвольного элемента f данного предгильбертова пространства, любой ортонормированной системы (1.9) и для любого фиксированного номера n справедливо тождество*

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} f_k\varphi_k - f\right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2, \qquad (1.13)$$ rav_Bessel

называемое тождеством Бесселя.

Доказательство. Тождество (1.13) следует из тождества (1.11) при $c_k = f_k$. △

Теорема 1.5. *Для произвольного элемента f данного предгильбертова пространства и любой ортонормированной системы* (1.9) *справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \leqslant \|f\|^2, \tag{1.14}$$

enq_Bessel

называемое неравенством Бесселя.

Доказательство. Из тождества Бесселя (1.13) следует, что

$$\sum_{k=1}^{n} f_k^2 \leqslant \|f\|^2. \tag{1.15}$$

4.14

Левая часть неравенства (1.15) есть частичная сумма S_n числового ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^2$ с неотрицательными коэффициентами. Причем последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена, поскольку для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство (1.15). Следовательно (см. соответствующий критерий сходимости числового ряда), указанный ряд сходится и, устремляя n к бесконечности в неравенстве (1.15), получаем неравенство Бесселя (1.14). $\triangle$

§5. Тригонометрические ряды Фурье

Для рассмотренной тригонометрической системы (1.8) ряд Фурье функции $f \in \mathscr{L}_R^2[-\ell,\, \ell]$ имеет следующий вид:

$$\frac{\alpha_0}{\sqrt{2\ell}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\sqrt{\ell}} \cos\frac{k\pi x}{\ell} + \frac{\beta_k}{\sqrt{\ell}} \sin\frac{k\pi x}{\ell},$$

где

$$\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2\ell}} \int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)\, dx = \Big(f,\, \frac{1}{\sqrt{2\ell}}\Big);$$

$$\alpha_k = \frac{1}{\sqrt{\ell}} \int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{k\pi x}{\ell}\, dx = \Bigl(f,\ \frac{1}{\sqrt{\ell}} \cos \frac{k\pi x}{\ell}\Bigr);$$

$$\beta_k = \frac{1}{\sqrt{\ell}} \int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell}\, dx = \Bigl(f,\ \frac{1}{\sqrt{\ell}} \sin \frac{k\pi x}{\ell}\Bigr);$$

$k = 1, 2, \ldots$. При этом неравенство Бесселя принимает следующий вид:

$$\alpha_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \bigl[\alpha_k^2 + \beta_k^2\bigr] \leqslant \int\limits_{-\ell}^{\ell} f^2(x)\, dx.$$

В теории тригонометрических рядов Фурье принята несколько иная форма записи как самого ряда Фурье, так и неравенства Бесселя для счетной ортогональной системы (1.7):

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{\ell} + b_k \sin \frac{k\pi x}{\ell}, \tag{1.16}$$

tr_Fourier

где

$$a_0 = \frac{1}{\ell} \int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)\, dx; \qquad a_k = \frac{1}{\ell} \int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{k\pi x}{\ell}\, dx;$$
$$b_k = \frac{1}{\ell} \int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell}\, dx; \tag{1.17}$$

tr_koef_F

$k = 1, 2, \ldots$.

Неравенство Бесселя:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \bigl[a_k^2 + b_k^2\bigr] \leqslant \frac{1}{\ell} \int\limits_{-\ell}^{\ell} f^2(x)\, dx. \tag{1.18}$$

tr_enq_B

Замечание 1.12. Будем рассматривать функции f из $L^1_R[-\ell,\, \ell]$. Поскольку выполнены неравенства

$$\left|f(x)\cos\frac{k\pi x}{\ell}\right| \leqslant \bigl|f(x)\bigr|, \qquad \left|f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\right| \leqslant \bigl|f(x)\bigr|,$$

то, по признаку сравнения сходимости несобственных интегралов, интегралы в (1.17) сходятся.

Замечание 1.13. Если $f \in L^1_R[-\ell,\, \ell]$, то из теоремы Римана об осцилляции (теорема 1.1) следует, что коэффициенты Фурье a_k, b_k из (1.17) стремятся к нулю при $k \to \infty$.

Замечание 1.14. Функцию $f \in L^1_R[-\ell,\, \ell]$ периодически продолжим на всю числовую ось с периодом 2ℓ. Полученная продолженная функция будет абсолютно интегрируемой функцией на любом конечном отрезке длины (см. теорему 1.3).

Если функция f непрерывна на отрезке $[-\ell,\, \ell]$, а односторонние пределы $f(-\ell+0)$ и $f(\ell-0)$ равны, то, в силу периодичности, продолженная на всю ось функция будет непрерывна на $\mathbb{R}$.

При условии $f(\ell-0) \neq f(-\ell+0)$ продолженная функция в точках $(2m+1)\ell$, $m \in \mathbb{Z}$, будет иметь разрывы первого рода со скачком $f(\ell-0) - f(-\ell+0)$.

§6. Сходимость тригонометрических рядов Фурье

6.1. Ядро Дирихле, формула Дирихле. Получим представление для частичной суммы

$$S^f_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\frac{k\pi x}{\ell} + b_k \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

тригонометрического ряда Фурье функции $f \in L^1_R[-\ell, \ell]$, используя формулы (1.17) для коэффициентов a_k и b_k:

$$S_n^f(x) = \frac{1}{2\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos\frac{k\pi t}{\ell}\,dt\right]\cos\frac{k\pi x}{\ell} + \\ + \left[\frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(t)\sin\frac{k\pi t}{\ell}\,dt\right]\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi t}{\ell}\cos\frac{k\pi x}{\ell} + \sin\frac{k\pi t}{\ell}\sin\frac{k\pi x}{\ell}\right]dt =$$

$$= \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi(t-x)}{\ell}\right]dt. \qquad (1.19)$$

summ_n_0

Определение 1.11. Функцию

$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos ku, \qquad (1.20)$$

kernel_D_0

назовем *ядром Дирихле*.

6.1.1. *Свойства ядра Дирихле.* Перечислим свойства ядра Дирихле, при этом очевидные свойства оставим без доказательства.

1°. *Функция D_n четная: $D_n(u) = D_n(-u)$.*

2°. *Функция D_n периодическая с периодом 2π, т. е. выполнено равенство $D_n(u + 2\pi) = D_n(u)$.*

3°. *Функция D_n непрерывна в любой точке $u \in \mathbb{R}$.*

4°. *Функция D_n имеет следующий вид*:

$$D_n(u) = \frac{\sin\left(n + \dfrac{1}{2}\right)u}{2\sin\dfrac{u}{2}}. \qquad (1.21)$$

kernel_D_1

Доказательство. Для ядра Дирихле (1.20) выполняется:

$$D_n(u)\cdot \sin\frac{u}{2} = \frac{1}{2}\,\sin\frac{u}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos ku\cdot\sin\frac{u}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}\,\sin\frac{u}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\Big[\sin\Big(k+\frac{1}{2}\Big)u - \sin\Big(k-\frac{1}{2}\Big)u\Big] =$$
$$= \frac{1}{2}\,\sin\Big(n+\frac{1}{2}\Big)u. \quad \triangle$$

Замечание 1.15. Функция D_n вида (1.21) неопределена в точках $u = 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. Тем не менее, существует предел $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin\Big(n+\dfrac{1}{2}\Big)u}{2\sin\dfrac{u}{2}} = n+\dfrac{1}{2}$, который и положим равным значению функции D_n в точке $u = 0$. Это же значение получаем для функции D_n вида (1.20).

Непрерывность в остальных точках $u = 2\pi m$, $m \neq 0$, функции D_n вида (1.21) получаем из периодичности этой функции с периодом 2π.

5°. *Справедливо равенство* $\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(u)\,du = \pi$, *а в силу свойства* **1°** *выполняется* $\int\limits_{0}^{\pi} D_n(u)\,du = \dfrac{\pi}{2}$. *В частности, для произвольного* $\ell > 0$ *выполнено* $\int\limits_{0}^{\ell} D_n\Big(\dfrac{\pi}{\ell}\,y\Big)\,dy = \dfrac{\ell}{2}$.

6.1.2. *Формула Дирихле.* Из (1.19) следует, что

$$S_n^f(x) = \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(t)\,D_n\Big(\frac{\pi(t-x)}{\ell}\Big)\,dt. \tag{1.22}$$

Поскольку из перечисленных свойств функции D_n следует, в частности, что функция $D_n\Big(\dfrac{\pi(t-x)}{\ell}\Big)$, как функция переменной t периодичная с периодом 2ℓ ограничена на отрезке $[-\ell,\,\ell]$, то равенство (symm_n 1.22), в силу теоремы thm_period 1.3, можно переписать следующим образом для всех $x\in\mathbb{R}$:

$$S_n^f(x)=\frac{1}{\ell}\int\limits_{x-\ell}^{x+\ell} f(t)\,D_n\Big(\frac{\pi(t-x)}{\ell}\Big)\,dt.$$

Сделаем замену $z=t-x$ в полученном равенстве, тогда

$$S_n^f(x)=\frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x+z)\,D_n\Big(\frac{\pi}{\ell}\,z\Big)\,dz. \tag{1.23}$$

summ_n_D

Используя полученное выражение (summ_n_D 1.23), выведем формулу Дирихле. Справедливо

$$S_n^f(x)=$$
$$=\frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{0} f(x+z)\,D_n\Big(\frac{\pi}{\ell}\,z\Big)\,dz+\frac{1}{\ell}\int\limits_{0}^{\ell} f(x+z)\,D_n\Big(\frac{\pi}{\ell}\,z\Big)\,dz=$$

$$\frac{1}{\ell}\int\limits_{0}^{\ell} f(x-s)\,D_n\Big(-\frac{\pi}{\ell}\,s\Big)\,ds+\frac{1}{\ell}\int\limits_{0}^{\ell} f(x+z)\,D_n\Big(\frac{\pi}{\ell}\,z\Big)\,dz=$$
$$=\frac{1}{\ell}\int\limits_{0}^{\ell}\big[f(x+z)+f(x-z)\big]\,D_n\Big(\frac{\pi}{\ell}\,z\Big)\,dz.$$

Здесь использовано свойство **1°** ядра Дирихле. Окончательно получаем формулу

$$S_n^f(x)=\frac{1}{\ell}\int\limits_{0}^{\ell}\big[f(x+z)+f(x-z)\big]\,D_n\Big(\frac{\pi}{\ell}\,z\Big)\,dz, \tag{1.24}$$

formula_D

которую называют *формулой Дирихле*.

6.2. Теорема о локализации. Важнейшим следствием из теоремы Римана об осцилляции является так называемый «принцип локализации».

Теорема 1.6. *Пусть функция $f \in L^1_R[-\ell,\, \ell]$ периодически с периодом 2ℓ продолжена на $\mathbb{R}$. Тогда сходимость тригонометрического ряда Фурье функции f в произвольной точке $x_0 \in \mathbb{R}$ и сумма тригонометрического ряда Фурье функции f в точке x_0 (если этот ряд сходится в этой точке) зависят только от поведения функции f в произвольно малом интервале $(x_0 - \delta,\, x_0 + \delta)$ для некоторого $\delta > 0$.*

Доказательство. Формулу Дирихле (1.24), используя вид ядра Дирихле (1.21), запишем в виде:

$$S_n^f(x_0) = \frac{1}{\ell}\int\limits_0^{\ell} \frac{f(x_0+z)+f(x_0-z)}{2\sin\left[\dfrac{\pi}{2\ell}\,z\right]} \cdot \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\ell}\,z\right] dz.$$

Поскольку функция $f(x_0+z)+f(x_0-z)$ абсолютно интегрируема на отрезке $[-\ell,\, \ell]$, а при некотором $\delta \in (0,\, \ell)$ и для любого $z \in [\delta,\, \ell]$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{f(x_0+z)+f(x_0-z)}{2\sin\left[\dfrac{\pi}{2\ell}\,z\right]}\right| \leqslant \frac{1}{2\sin\left[\dfrac{\pi}{2\ell}\,\delta\right]}\,\Big|f(x_0+z)+f(x_0-z)\Big|,$$

то функция $\dfrac{f(x_0+z)+f(x_0-z)}{2\sin\left[\dfrac{\pi}{2\ell}\,z\right]}$ является абсолютно интегрируемой на отрезке $[\delta,\, \ell]$, что следует из признака сравнения сходимости несобственного интеграла.

В силу теоремы Римана об осцилляции (теорема 1.1) выполняется

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ell}\int\limits_{\delta}^{\ell} \frac{f(x_0+z)+f(x_0-z)}{2\sin\left[\dfrac{\pi}{2\ell}\,z\right]} \cdot \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\ell}\,z\right] dz = 0.$$

Поэтому при $n \to \infty$ справедливо

$$S_n^f(x_0) - \frac{1}{\ell}\int\limits_0^\delta \frac{f(x_0+z)+f(x_0-z)}{2\sin\left[\dfrac{\pi}{2\ell}\,z\right]}\cdot\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\ell}\,z\right]dz \to 0.$$

Откуда следует, что существование и величина предела $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^f(x_0)$ зависит только от существования и величины предела $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ell}\displaystyle\int\limits_0^\delta \frac{f(x_0+z)+f(x_0-z)}{2\sin\left[\dfrac{\pi}{2\ell}\,z\right]}\cdot\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\ell}\,z\right]dz$, т. е. от значений функции f на интервале $(x_0-\delta,\, x_0+\delta)$ при некотором $\delta > 0$. $\triangle$

6.3. Признак сходимости Дини. Приводимый ниже признак Дини носит вспомогательный характер, в частности, его используют для доказательства «проверямого» признака сходимости тригонометрических рядов Фурье такого, как признак Гёльдера.

thm_Dini

Теорема 1.7. (Дини). *Пусть функция $f \in L_R^1[-\ell,\, \ell]$ периодически с периодом 2ℓ продолжена на $\mathbb{R}$, а S_0 — такое число, что при некотором $\delta > 0$ сходится интеграл $\displaystyle\int\limits_0^\delta \left|f(x_0+z)+f(x_0-z)-2S_0\right|\frac{dz}{z}$. Тогда тригонометрический ряд Фурье функции f сходится в точке x_0 к S_0.*

Доказательство. Очевидно, что подынтегральная функция $\dfrac{\left|f(x_0+z)+f(x_0-z)-2S_0\right|}{z}$ не определена при $z=0$, но интеграл по множеству $[0,\, \delta\,]$ сходится, следовательно, интеграл $\displaystyle\int\limits_0^\ell \left|f(x_0+z)+f(x_0-z)-2S_0\right|\frac{dz}{z}$ сходится, т. е. функция $\dfrac{f(x_0+z)+f(x_0-z)-2S_0}{z}$ принадлежит пространству $L_R^1[0,\, \ell]$.

Покажем, что $S_n^f(x_0) \to S_0$ при $n \to \infty$. Из свойства **5°** ядра Дирихле следует

$$S_n^f(x_0) - S_0 = \frac{1}{\ell}\int\limits_0^\ell g(z)\cdot\sin\Big[\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\,\frac{\pi}{\ell}\,z\Big]\,dz, \qquad (1.25)$$ 4.25

здесь $g(z) = \dfrac{f(x_0+z)+f(x_0-z)-2S_0}{2\sin\Big[\dfrac{\pi}{2\ell}\,z\Big]}$.

Подынтегральную функцию g представим следующим образом: $g(z) = \dfrac{f(x_0+z)+f(x_0-z)-2S_0}{z}\cdot h(z)$, где введено обозначение: $h(z) = \dfrac{z}{2\sin\Big[\dfrac{\pi}{2\ell}\,z\Big]}$. При этом выполняется $\lim\limits_{z\to 0} h(z) = \dfrac{\ell}{\pi}$, т. е. функция h ограничена на $[0,\,\ell]$.

Поскольку функция $\dfrac{f(x_0+z)+f(x_0-z)-2S_0}{z}$ принадлежит пространству $L_R^1[0,\,\ell]$, то и функция g принадлежит пространству $L_R^1[0,\,\ell]$. Тогда по теореме Римана об осцилляции (теорема 1.1) интеграл, стоящий в правой части равенства (1.25), стремиться к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, при $n \to \infty$ выполняется $S_n^f(x_0) \to S_0$. $\triangle$

6.4. Признак Гёльдера. Для того, чтобы сформулировать признак введем необходимые определения.

dfn_Helder Определение 1.12. Говорят, что функция $y = f(x)$ удовлетворяет в точке x_0 *условию Гёльдера*, если существуют односторонние конечные пределы $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ и такие числа $\delta > 0$, $\alpha \in (0,\,1]$ и $C > 0$, что для любого $z \in (0,\,\delta)$ выполнены следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \big|f(x_0-z)-f(x_0-0)\big| &\leqslant Cz^\alpha;\\ \big|f(x_0+z)-f(x_0+0)\big| &\leqslant Cz^\alpha; \end{aligned} \qquad (1.26)$$ usl_Helder

при этом число α называется *показателем Гёльдера*.

Заметим, что при $\alpha = 1$ условие Гёльдера называют *условием Липшица*.

Выясним, как связаны приведенные условия с дифференциальными свойствами функций. Для этого расширим определения односторонних производных $f'(x_0 \pm 0)$ в точке x_0. Положим

$$\begin{aligned} f'_-(x_0) &= \lim_{z\to+0} \frac{f(x_0 - z) - f(x_0 - 0)}{-z}; \\ f'_+(x_0) &= \lim_{z\to+0} \frac{f(x_0 + z) - f(x_0 + 0)}{z}. \end{aligned} \tag{1.27}$$ 4.26

Замечание 1.16. В отличие от приведенных ранее определений левой и правой производных функции f в точке x_0, в выражении (1.27) стоят не значения функции f в этой точке, а левый и правый пределы функции f в точке x_0, соответственно.

Предложение 1.6. *Если в точке x_0 функция f имеет конечные односторонние производные $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$, то функция f удовлетворяет в точке x_0 условию Липшица.*

Доказательство. Из условий теоремы следует, что функции

$$\frac{f(x_0 - z) - f(x_0 - 0)}{-z}, \qquad \frac{f(x_0 - z) - f(x_0 + 0)}{z},$$

ограничены на некотором интервале[1.6] $(0,\, \delta)$, т. е. найдутся такие положительные постоянные C_1 и C_2, что для любой точки $z \in (0,\, \delta)$ выполняются следующие неравенства:

$$\left| \frac{f(x_0 - z) - f(x_0 - 0)}{-z} \right| \leqslant C_1, \ \left| \frac{f(x_0 - z) - f(x_0 + 0)}{z} \right| \leqslant C_2.$$

Это и означает, что функция $y = f(x)$ удовлетворяет в точке x_0 условию Липшица с некоторой положительной постоянной $C = \max\{C_1,\, C_2\}$. △

[1.6] Этот факт следует из локальных свойств функций, имеющих предел (см. в **[1, Гл. 3, §6]** теорема 3.10 и замечание 3.10).

Следствие. *Если функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет производную, то она удовлетворяет в этой точке условию Липшица.*

Замечание 1.17. Заметим, что утверждение обратное, приведенному в следствии, неверно. Например, функция $y = |x|$ удовлетворяет условию Липшица в точке $x = 0$. Однако, указанная функция не является дифференцируемой в точке $x = 0$.

thm_Helder Теорема 1.8. (Гёльдер). *Пусть функция $y = f(x)$ принадлежит пространству $L^1_R[-\ell, \ell]$, продолжена с периодом 2ℓ на $\mathbb{R}$ и в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Гёльдера (usl_Helder 1.26). Тогда в точке x_0 тригонометрический ряд Фурье функции f сходится к $\frac{1}{2}\left[f(x_0+0)+f(x_0-0)\right]$.*

Если, кроме того, в точке x_0 функция f непрерывна, то сумма тригонометрического ряда Фурье функции f в этой точке равна $f(x_0)$.

Доказательство. Введем следующее обозначение: $2S_0 = f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)$. Тогда для любого $z \in (0, \delta)$ выполняется

$$\frac{\left|f(x_0+z)+f(x_0-z)-2S_0\right|}{z} \leqslant \leqslant \frac{\left|f(x_0+z)-f(x_0+0)\right|}{z} + \frac{\left|f(x_0-z)-f(x_0-0)\right|}{z} \leqslant \leqslant 2C \cdot \frac{z^\alpha}{z} = 2C \cdot \frac{1}{z^{1-\alpha}}.$$

Поскольку $0 \leqslant 1-\alpha < 1$, то интеграл $\int\limits_0^\delta \frac{dz}{z^{1-\alpha}}$ сходится. По признаку сравнения сходимости несобственных интегралов, сходится интеграл $\int\limits_0^\delta \frac{\left|f(x_0+z)+f(x_0-z)-2S_0\right|}{z}\,dz$.

Следовательно, по признаку Дини (теорема 1.7), тригонометрический ряд Фурье функции f сходится к S_0. △

Приведем простейшие следствия теоремы 1.8.

Следствие. *Пусть функция $y = f(x)$ принадлежит пространству $L^1_R[-\ell,\, \ell]$, периодически с периодом 2ℓ продолжена на $\mathbb{R}$ и в точке x_0 имеет конечные односторонние производные $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$. Тогда тригонометрический ряд Фурье функции f сходится в указанной точке x_0 к числу $\dfrac{1}{2}\bigl[f(x_0+0) + f(x_0-0)\bigr]$.*

Следствие. *Пусть функция $y = f(x)$ принадлежит пространству $L^1_R[-\ell,\, \ell]$, периодически с периодом 2ℓ продолжена на $\mathbb{R}$ и в точке x_0 дифференцируема. Тогда тригонометрический ряд Фурье функции f сходится в точке x_0 к $f(x_0)$.*

§7. Почленное дифференцирование и интегрирование тригонометрических рядов Фурье. Равномерная сходимость

7.1. Кусочно непрерывные и кусочно гладкие функции. Введем необходимые для дальнейшего классы функций.

Определение 1.13. Функция $y = f(x)$ называется *кусочно непрерывной* на отрезке $[a,\, b]$, если существует такое разбиение $T = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b\}$ отрезка $[a,\, b]$, что функция $y = f(x)$ непрерывна на каждом интервале $(x_{i-1},\, x_i)$, $i = 1,\, \ldots,\, n$, и существуют конечные односторонние пределы $f(a+0)$, $f(b-0)$, $f(x_i \pm 0)$, $i = 1,\, \ldots,\, m-1$.

Приведем примеры.

Пример 1.4. Рассмотрим функцию

$$y = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & x \in (-1,\, 1); \\ 0, & x = \mp 1; \end{cases} \tag{1.28}$$

определенную на отрезке $[-1,\, 1]$ и продолженную с периодом 2 на всю числовую ось. Полученная функция является кусочно непрерывной на любом отрезке $[a,\, b]$, содержащем целочисленные точки.

Пример 1.5. Функция $y = -\ln\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|$ не является кусочно непрерывной на любом отрезке $[a,\, b]$, содержащем точки вида $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

dfn_4.14 Определение 1.14. Функция $y = f(x)$ называется *кусочно непрерывно дифференцируемой* на отрезке $[a,\, b]$, если существует разбиение $T = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b\}$ отрезка $[a,\, b]$ такое, что функция $y = f(x)$ имеет непрерывную производную $y = f'(x)$ на каждом отрезке $[x_{i-1},\, x_i]$, $i = 1,\, \ldots,\, m$. При этом добиться непрерывности производной возможно изменением ее значений на концах указанных отрезков.

Определение 1.15. Функция $y = f(x)$ называется *кусочно гладкой* на отрезке $[a,\, b]$, если она непрерывна и кусочно непрерывно дифференцируема на этом отрезке.

Пример 1.6. Функция (f_sgn_loc 1.28) определенная на отрезке $[-1,\, 1]$ и продолженная с периодом 2 на всю числовую ось, является кусочно непрерывно дифференцируемой на любом отрезке $[a,\, b]$, содержащем целочисленные точки. Эта функция не будет кусочно гладкой на любом отрезке $[a,\, b]$, содержащем целочисленные точки.

Пример 1.7. Функция $y = |x|$, $x \in [-1,\, 1]$, продолженная с периодом 2 на всю числовую ось, является кусочно гладкой на любом отрезке $[a,\, b]$, содержащем целочисленные точки.

Замечание 1.18. Если 2ℓ–периодическая на всей числовой оси функция $y = f(x)$ $(f(-\ell) = f(\ell))$ является кусочно гладкой на отрезке $[-\ell,\, \ell]$, то эта функция является кусочно гладкой на любом отрезке $[a,\, b]$.

rem_4.17 Замечание 1.19. Производная $y = f'(x)$ кусочно непрерывно дифференцируемой функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,\, b]$ есть кусочно непрерывная на этом отрезке функция.

Замечание 1.20. Ряд Фурье кусочно непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a,\, b]$ функции $y = f(x)$ сходится в каждой точке непрерывности функции к значению функции в этой точке, а в каждой точке разрыва — к полусумме предельных значений функции в этой точке. Это следует из предыдущего замечания и теоремы thm_Helder 1.8.

7.2. О почленном дифференцировании тригонометрических рядов Фурье. Пока оставим в стороне вопросы о возможности почленного дифференцирования тригонометрических рядов Фурье и о сходимости рядов, получающихся в результате почленного дифференцирования тригонометрических рядов Фурье.

thm_diff_F

Теорема 1.9. *Пусть функция $y = f(x)$ является кусочно гладкой на отрезке $[-\ell,\, \ell]$, $f(-\ell) = f(\ell)$, периодически с периодом 2ℓ продолжена на $\mathbb{R}$. Тогда тригонометрический ряд Фурье функции f' получается при помощи формального почленного дифференцирования тригонометрического ряда Фурье функции f.*

Доказательство. Пусть a_0, a_k и b_k, $k \in \mathbb{N}$, коэффициенты тригонометрического ряда Фурье функции f, а $\overline{a}_0$, $\overline{a}_k$ и $\overline{b}_k$, $k \in \mathbb{N}$, коэффициенты тригонометрического ряда Фурье функции f'. Тогда

$$\overline{a}_0 = \frac{1}{\ell} \int\limits_{-\ell}^{\ell} f'(x)\, dx = \frac{1}{\ell} \big[f(\ell) - f(-\ell)\big] = 0;$$

$$\overline{a}_k = \frac{1}{\ell} \int\limits_{-\ell}^{\ell} f'(x) \cos\frac{k\pi x}{\ell}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\ell} \left[f(x) \cos\frac{k\pi x}{\ell} \Big|_{x=-\ell}^{x=\ell} + \frac{k\pi}{\ell} \int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin\frac{k\pi x}{\ell}\, dx \right] = \frac{k\pi}{\ell}\, b_k;$$

$$\overline{b}_k = \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f'(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\ell}\Bigl[f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\Bigr|_{x=-\ell}^{x=\ell} - \frac{k\pi}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{k\pi x}{\ell}\,dx\Bigr] = -\frac{k\pi}{\ell}\,a_k.$$

Итак, имеют место равенства:

$$\overline{a}_0 = 0, \quad \overline{a}_k = \frac{k\pi}{\ell}\,b_k, \quad \overline{b}_k = -\frac{k\pi}{\ell}\,a_k, \qquad n\in\mathbb{N}, \qquad (1.29)$$ diff_koef_F

и для функции f' получаем следующий тригонометрический ряд Фурье:

$$\frac{\overline{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\overline{a}_k\cos\frac{k\pi x}{\ell} + \overline{b}_k\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi}{\ell}\Bigl[b_k\cos\frac{k\pi x}{\ell} - a_k\sin\frac{k\pi x}{\ell}\Bigr].$$

Если формально почленно продифференцировать тригонометрический ряд Фурье функции f, то получим

$$\frac{d}{dx}\Bigl[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi x}{\ell} + b_k\sin\frac{k\pi x}{\ell}\Bigr] =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi}{\ell}\Bigl[b_k\cos\frac{k\pi x}{\ell} - a_k\sin\frac{k\pi x}{\ell}\Bigr].$$

Из полученных равенств и следует утверждение теоремы. $\triangle$

pros_4.17 Предложение 1.7. *Если 2ℓ–периодическая функция $y = f(x)$ имеет на числовой оси непрерывные производные до порядка $m-1$, а функция $y = f^{(m-1)}(x)$ кусочно гладкая на $[-\ell, \ell]$, то тригонометрический ряд Фурье* *функции* $f^{(m)}$ *получается из тригонометрического ряда Фурье функции* f *путем его почленного* m *раз дифференцирования.*

Это утверждение простое следствие теоремы thm_diff_F 1.9.

7.3. Асимптотические оценки коэффициентов Фурье. Следующие утверждения являются следствиями доказанной теоремы thm_diff_F 1.9 о почленном дифференцировании тригонометрических рядов Фурье.

Предложение 1.8. *Пусть функция* $y = f(x)$ *является кусочно гладкой на отрезке* $[-\ell, \ell]$ 2ℓ, $f(-\ell) = f(\ell)$, *и периодически с периодом* 2ℓ *продолжена на* $\mathbb{R}$. *Тогда для коэффициентов Фурье функции* f *справедливы следующие асимптотические оценки:* $a_n = o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$, $b_n = o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство. Функция $y = f'(x)$ кусочно непрерывна на $[-\ell, \ell]$, следовательно функция f' принадлежит пространству $L^1_R[-\ell, \ell]$ и коэффициенты Фурье $\overline{a}_n$ и $\overline{b}_n$ функции f' стремятся к нулю при $n \to \infty$ (теорема thm_Riemann 1.1 Римана об осцилляции).

Таким образом, из выражений (diff_koef_F 1.29) получаем, что

$$\frac{\pi}{\ell}\,\frac{b_n}{1/n} \to 0, \quad \frac{\pi}{\ell}\,\frac{a_n}{1/n} \to 0, \qquad n \to \infty,$$

т. е. $a_n = o\big(1/n\big)$, $b_n = o\big(1/n\big)$ при $n \to \infty$. $\triangle$

Предложение 1.9. *Пусть функция* $y = f(x)$ *является кусочно непрерывно дифференцируемой на отрезке* $[-\ell, \ell]$ *и эта функция периодически с периодом* 2ℓ *продолжена на всю числовую ось. Тогда для ее коэффициентов Фурье* a_n, b_n *выполняется*: *существует такая положительная постоянная* C, *что* $|a_n n| \leqslant C$, $|b_n n| \leqslant C$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$[1.7].

[1.7] Этот факт, используя o–символику, записывают следующим образом: $a_n = O\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$, $b_n = O\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$ при $n \to \infty$.

dfn_4.14

Доказательство. Из определения 1.14 кусочно непрерывно дифференцируемой на отрезке $[-\ell,\, \ell]$ функции следует, что существует такое разбиение отрезка $[-\ell,\, \ell]$:

$$T = \{-\ell = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = \ell\},$$

что на каждом таком отрезке $[x_{i-1},\, x_i]$, $i = 1,\, \ldots,\, m$, функция $y = f(x)$ непрерывно дифференцируема (возможно, после изменения ее значений на концах отрезков), тогда, используя интегрирование по частям, находим

$$\left|a_n n\right| =$$

$$= \left|\frac{n}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx\right| = \left|\frac{n}{\ell}\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx\right| =$$

$$= \left|\frac{n}{\ell}\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{\ell}{n\pi}f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\Bigg|_{x_{k-1}}^{x_k} - \frac{\ell}{n\pi}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx\right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{m}\left|f(x_k)\right| + \frac{1}{\pi}\left|\int\limits_{-\ell}^{\ell} f'(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx\right|.$$

Поскольку $\displaystyle\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{m}\left|f(x_k)\right| \leqslant B$, а для всех $n \in \mathbb{N}$ верны неравенства

$$\frac{1}{\pi}\left|\int\limits_{-\ell}^{\ell} f'(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx\right| \leqslant A_1, \quad \frac{1}{\pi}\left|\int\limits_{-\ell}^{\ell} f'(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx\right| \leqslant A_2,$$

то верно $\left|a_n n\right| \leqslant B + A_1 = C_1$, $\left|b_n n\right| \leqslant B + A_2 = C_2$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда, в качестве положительной константы C возьмем $C = \max\{C_1,\, C_2\}$. $\triangle$

Предложение 1.10. *Если 2ℓ–периодическая функция $y = f(x)$ имеет на числовой оси непрерывные производные до порядка $m - 1$, а функция $y = f^{(m-1)}(x)$ кусочно гладкая на $[-\ell,\, \ell]$, то коэффициенты a_n, b_n функции f*

удовлетворяют следующим асимптотическим оценкам: $a_n = o\Big(\dfrac{1}{n^m}\Big)$ *и* $b_n = o\Big(\dfrac{1}{n^m}\Big)$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство. Из предложения pros_4.17 1.7 следует, что тригонометрический ряд Фурье функции $f^{(m)}$ имеет следующий вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_m \left[n^m a_n \cos\Big(\frac{n\pi x}{\ell} + m\,\frac{\pi}{2}\Big) + n^m b_n \sin\Big(\frac{n\pi x}{\ell} + m\,\frac{\pi}{2}\Big) \right],$$

где $C_m = \Big(\dfrac{\pi}{\ell}\Big)^m$.

Поскольку функция $y = f^{(m)}(x)$ кусочно непрерывна на отрезке $[-\ell, \ell]$, то $f^{(m)} \in L^1_R[-\ell, \ell]$ и, в силу теоремы thm_Riemann 1.1 Римана об осцилляции, коэффициенты Фурье $\overline{a}_n$ и $\overline{b}_n$ функции $f^{(m)}$ стремятся к нулю при $n \to \infty$. Коэффициенты Фурье функции $f^{(m)}$ содержат $n^m a_n$ и $n^m b_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, из этого и получаются искомые асимптотические оценки при $n \to \infty$. $\triangle$

7.4. О почленном интегрировании тригонометрических рядов Фурье.

thm_F_int

Теорема 1.10. *Пусть функция* $y = f(x)$ *кусочно непрерывна на отрезке* $[-\ell, \ell]$, *периодически с периодом* 2ℓ *продолжена на всю числовую ось, имеет тригонометрический ряд Фурье* $\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{\ell} + b_k \sin\frac{k\pi x}{\ell}$. *Тогда ряд Фурье функции* $\Phi(x) = \displaystyle\int\limits_0^x f(t)\,dt - \frac{a_0 x}{2}$ *получается формальным почленным интегрированием тригонометрического ряда Фурье функции* $y = f(x)$.

Доказательство. Функция $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt$ имеет в точках непрерывности функции f непрерывную производную, равную $f(x)$, а в точках разрыва первого рода функции f — односторонние производные, равные $f(x-0)$ и $f(x+0)$, т. е. функция F кусочно гладкая на отрезке $[-\ell,\ \ell]$.

Таким образом, функция $\varPhi$, кусочно гладкая на отрезке $[-\ell,\ \ell]$, удовлетворяет условию

$$\varPhi(x+2\ell) - \varPhi(x) = \int\limits_x^{x+2\ell} f(t)\,dt - a_0\ell = \int\limits_{-\ell}^{\ell} f(t)\,dt - a_0\ell = 0,$$

т. е. является 2ℓ–периодической на всей числовой оси. Функция $\varPhi$ удовлетворяет условиям теоремы thm_diff_F 1.9. Если тригонометрический ряд Фурье функции $\varPhi$ имеет следующий вид: $\dfrac{A_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k \cos\dfrac{k\pi x}{\ell} + B_k \sin\dfrac{k\pi x}{\ell}$, то для коэффициентов Фурье функции f справедливы равенства: $a_n = \dfrac{n\pi}{\ell}\,B_n$ и $b_n = -\dfrac{n\pi}{\ell}\,A_n$ (ср. с выражениями (diff_koef_F 1.29).

Поскольку $\varPhi(0) = 0$, то выполняется $\dfrac{A_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k = 0$. Поэтому $\dfrac{A_0}{2} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\ell}{k\pi}\,b_k$. Итак, тригонометрический ряд Фурье функции $\varPhi$ можно записать в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ell}{k\pi}\,a_k \sin\frac{k\pi x}{\ell} - \frac{\ell}{k\pi}\,b_k\Bigl(\cos\frac{k\pi x}{\ell} - 1\Bigr).$$

При этом выполнено

$$\int\limits_0^x \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi t}{\ell} + b_k \sin\frac{k\pi t}{\ell}\right] dt =$$

$$= \frac{a_0 x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ell}{k\pi}\, a_k \sin\frac{k\pi x}{\ell} - \frac{\ell}{k\pi}\, b_k \Bigl(\cos\frac{k\pi x}{\ell} - 1\Bigr). \quad \triangle$$

7.5. Равномерная сходимость тригонометрических рядов Фурье. Справедлива следующая теорема.

thm_ravn_ch

Теорема 1.11. *Тригонометрический ряд Фурье кусочно гладкой на отрезке $[-\ell,\, \ell]$ функции $y = f(x)$, такой, что $f(-\ell) = f(\ell)$ и периодически (с периодом 2ℓ) продолженную на $\mathbb{R}$, сходится равномерно к этой функции на всей числовой оси.*

Доказательство. Для доказательства воспользуемся выражением для коэффициентов (1.29) и неравенством Коши–Буняковского:

$$\sum_{k=1}^{n} \bigl|a_k\bigr| = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ell}{k\pi}\, \bigl|\overline{b}_k\bigr| \leqslant \frac{\ell}{\pi} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \bigl(\overline{b}_k\bigr)^2}\, \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}};$$

$$\sum_{k=1}^{n} \bigl|b_k\bigr| = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ell}{k\pi}\, \bigl|\overline{a}_k\bigr| \leqslant \frac{\ell}{\pi} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \bigl(\overline{a}_k\bigr)^2}\, \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}}.$$

В силу того, что $f' \in L^1_R[-\ell,\, \ell]$ (см., в частности, замечание 1.19), то из неравенства Бесселя (1.18) следует, что ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \bigl(\overline{a}_k\bigr)^2$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \bigl(\overline{b}_k\bigr)^2$ сходятся[1.8], а поэтому сходятся ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \bigl|a_k\bigr|$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \bigl|b_k\bigr|$.

Поскольку справедливы неравенства

$$\left| a_k \cos\frac{k\pi x}{\ell} + b_k \sin\frac{k\pi x}{\ell} \right| \leqslant \bigl|a_k\bigr| + \bigl|b_k\bigr|, \qquad k = 1,\, 2,\, \ldots,$$

[1.8] Сходимость числового ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ известна.

то по признаку Вейерштрасса тригонометрический ряд Фурье функции f сходится равномерно на всей числовой прямой к функции f. $\triangle$

Замечание 1.21. Обратим внимание на тот факт, что по ходу доказательства теоремы 1.10 было получено следующее утверждение: «*для любой функции f кусочно непрерывной на $[-\ell,\, \ell]$ и 2ℓ–периодически продолженной на $\mathbb{R}$ ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ сходится, где b_n — коэффициент Фурье функции f при* $\sin\dfrac{n\pi x}{\ell}$, $n\in\mathbb{N}$.»

Это утверждение следует из равенства $\dfrac{A_0}{2}=\dfrac{\ell}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k}$, где $\dfrac{A_0}{2}=\dfrac{1}{2\ell}\displaystyle\int\limits_{-\ell}^{\ell}\Phi(x)\,dx$. Одновременно мы получаем способ суммирования некоторых числовых рядов.

Таким образом, тригонометрический ряд $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\sin kx}{\ln k}$ не может быть рядом Фурье никакой функции f с указанными в утверждении свойствами, поскольку из интегрального признака сходимости рядов следует, что числовой ряд $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln k}$ расходится.

Проиллюстрируем то, как можно просуммировать некоторые ряды на примере.

Пример 1.8. Исходя из разложения

$$x=2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k},$$

справедливого на интервале $(-\pi,\,\pi)$, получить разложение функции $y=x^2$.

Почленное интегрирование ряда в правой части равенства, дает следующий ряд: $2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}(1-\cos kx)$.

Таким образом, для $x \in [-\pi,\, \pi]$ выполняется

$$x^2 = 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{k^2}\cos kx.$$

Справедливо равенство $4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{A_0}{2}$, где

$$\frac{A_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{\pi^2}{3}.$$

Таким образом, получаем разложение функции

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{k^2}\cos kx, \qquad x \in [-\pi,\, \pi],$$

и удается найти сумму числового ряда: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

§8. Ряд Фурье в комплексной форме

Будем рассматривать функции, которые принимаю комплексные значения на отрезке $[a,\, b]$: $f(x) = w(x) + iv(x)$, здесь $w = w(x)$ и $v = v(x)$ — функции, принимающие действительные значения на указанном отрезке, $w = \operatorname{Re} f$ и $v = \operatorname{Im} f$.

Для комплекснозначных на отрезке $[a,\, b]$ функций справедливо следующее утверждение.

Предложение. *Функция f принадлежит пространству $L^1_R[a,\, b]$ в том и только в том случае, когда функции w и v принадлежат пространству $L^1_R[a,\, b]$.*

Функция f принадлежит пространству $L_R^2[a,\,b]$ в том и только в том случае, когда функции w и v принадлежат пространству $L_R^2[a,\,b]$.

Определение 1.16. Комплекснозначные функции f_1 и f_2 из пространства $L_R^2[a,\,b]$ называются *ортогональными*, если выполнено равенство $\displaystyle\int_a^b f_1(x)\cdot\overline{f}_2(x)\,dx = 0$.

Система функций $\left\{e^{ikx} = \cos kx + i\sin kx\right\}$, $k\in\mathbb{Z}$, представляет собой систему функций, ортогональных на отрезке $[-\pi,\,\pi]$. Действительно, при $k\neq m$ выполняется

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}e^{-imx}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-m)x}\,dx = 2\int_0^{\pi}\cos(k-m)x\,dx = \\ = 2\,\frac{\sin(k-m)x}{k-m}\bigg|_0^{\pi} = 0.$$

Счетная система функций $\left\{e^{(ik\pi/\ell)x}\right\}$, $k\in\mathbb{Z}$, есть система функций, ортогональных на отрезке $[-\ell,\,\ell]$.

Для комплекснозначной функции $f = w + iv$ из пространства $L_R^2[-\ell,\,\ell]$ коэффициенты ее тригонометрического ряда Фурье имеют следующий вид:

$$a_k = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} w(x)\cos\frac{k\pi x}{\ell}\,dx + \frac{i}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} v(x)\cos\frac{k\pi x}{\ell}\,dx;$$

$$b_k = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} w(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx + \frac{i}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} v(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx.$$

Если воспользоваться выражениями для тригонометрический функций

$$\cos\frac{k\pi x}{\ell} = \frac{e^{i\frac{k\pi}{\ell}x} + e^{-i\frac{k\pi}{\ell}x}}{2},$$

$$\sin\frac{k\pi x}{\ell} = \frac{e^{i\frac{k\pi}{\ell}x} - e^{-i\frac{k\pi}{\ell}x}}{2i},$$

то для частичной суммы тригонометрического ряда Фурье функции f получаем выражение

$$S_n^f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2}\big(e^{i\frac{k\pi}{\ell}x}+e^{-i\frac{k\pi}{\ell}x}\big)+\frac{b_k}{2i}\big(e^{i\frac{k\pi}{\ell}x}-e^{-i\frac{k\pi}{\ell}x}\big)=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{a_k-ib_k}{2}\Big)e^{i\frac{k\pi}{\ell}x}+\Big(\frac{a_k+ib_k}{2}\Big)e^{-i\frac{k\pi}{\ell}x}.$$

Обозначим $c_k=\dfrac{a_k-ib_k}{2}$ и $c_{-k}=\dfrac{a_k+ib_k}{2}$, тогда

$$c_k=\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\Big[\cos\frac{k\pi x}{\ell}-i\sin\frac{k\pi x}{\ell}\Big]\,dx=$$

$$=\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)e^{-i\frac{k\pi}{\ell}x}\,dx;$$

$$c_{-k}=\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\Big[\cos\frac{k\pi x}{\ell}+i\sin\frac{k\pi x}{\ell}\Big]\,dx=$$

$$=\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)e^{-i\frac{(-k)\pi}{\ell}x}\,dx.$$

Обобщим полученные выражения

$$c_k=\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\,e^{-i\frac{k\pi}{\ell}x}\,dx,\qquad k\in\mathbb{Z}. \tag{1.30}$$ koef_compl_F

Итак, частичную сумму тригонометрического ряда Фурье функции f можно записать в виде: $S_n^f(x)=\sum\limits_{k=-n}^{n}c_ke^{i\frac{k\pi}{\ell}x}$.

Теперь дадим определение тригонометрического ряда Фурье в комплексной форме для функции f.

Определение 1.17. Ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{k\pi}{\ell}x}$, где коэффициенты c_k определены в (1.30), называется *тригонометрическим рядом Фурье функции* $f = w + iv$ *в комплексной форме*.

§9. Суммирование рядов Фурье методом средних арифметических

Если периодическая функция $y = f(x)$ непрерывна на всей числовой оси, то ее тригонометрический ряд Фурье может расходиться в некоторых точках[1.9], т. е. непрерывности функции на всей числовой оси не достаточно для сходимости ее тригонометрического ряда Фурье. Как было доказано ранее, для этого требуются, например, некоторые дифференциальные свойства функции (см. теорему Гёльдера 1.8 и следствия из нее, а так же теорему 1.11). Тем не менее, если определить сумму ряда в неком обобщенном смысле, то возможно суммирование тригонометрических рядов Фурье указанных функций.

9.1. Метод средних арифметических для суммирования рядов. Для числового ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ определим последовательность $\sigma_n = \dfrac{S_0 + S_1 + \ldots + S_n}{n+1}$, здесь S_n — частичная сумма рассматриваемого числового ряда.

Если последовательность $\{\sigma_n\}$ при $n \to \infty$ сходится к числу σ, то это число σ называют «*обобщенной* (*в смысле средних арифметических*) *суммой ряда*»[1.10].

[1.9]Пример приведен на с. 474 книги: Зигмунд А. Тригонометрические ряды Фурье. Т. I. М.: Мир, 1965. Идея этого примера принадлежит Фейеру и Лебегу.

[1.10]Для числовых рядов еще эту сумму называют *обобщенной* (*в смысле Чезаро*) *суммой ряда*.

Пример 1.9. Числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ является расходящимся, поскольку $S_{2k} = 1$ и $S_{2k+1} = 0$, следовательно, последовательность частичных сумм $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ расходится.

Члены последовательности $\{\sigma_n\}$ имеют следующий вид: $\sigma_{2k} = \dfrac{k+1}{2k+1}$, $\sigma_{2k+1} = \dfrac{1}{2}$. Поэтому $\sigma = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \dfrac{1}{2}$.

Пример 1.10. Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = \dfrac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \cos k\,\dfrac{\pi}{\ell}\,u$ расходится при каждом фиксированном u, поскольку не выполнено необходимое условие сходимости числового ряда.

Для последовательности $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ выполняется равенство $S_n = D_n(u) = \dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\ell}\,u}{2\sin\frac{\pi}{2\ell}\,u}$ при $u \neq 2k\ell$. Это следует из вида ядра Дирихле (1.20) и (1.21). Тогда верно

$$
\begin{aligned}
(n+1)\,\sigma_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\ell}\,u}{2\sin\frac{\pi}{2\ell}\,u} = \\
&= \frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{2\ell}\,u} \sum_{k=0}^{n} 2\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\ell}\,u \sin\frac{\pi}{2\ell}\,u = \\
&= \frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{2\ell}\,u} \sum_{k=0}^{n} \left(\cos k\,\frac{\pi}{\ell}\,u - \cos(k+1)\frac{\pi}{\ell}\,u\right) = \\
&= \frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{2\ell}\,u}\left(1-\cos(n+1)\frac{\pi}{\ell}\,u\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{2\ell}\,u}{\sin\frac{\pi}{2\ell}\,u}\right)^2.
\end{aligned}
$$

Итак, получаем

$$\sigma_n = \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin(n+1)\dfrac{\pi}{2\ell}\,u}{\sin\dfrac{\pi}{2\ell}\,u}\right)^2. \qquad (1.31)$$ 4.31

Поскольку $\sigma_n \to 0$ при $n \to \infty$, то сумма σ рассматриваемого ряда в смысле средних арифметических равна нулю.

Следует обратить внимание на тот факт, что если числовой ряд сходится к числу σ, то это же число σ является обобщенной в смысле средних арифметических суммой рассматриваемого ряда.

Пример 1.11. Числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ для каждого фиксированного q, $|q| < 1$, сходится к $\sigma = \dfrac{1}{1-q}$.

Для этого ряда $S_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ и выполняется

$$\sigma_n = \frac{n}{(n+1)(1-q)} - \frac{q\bigl(1-q^{n+1}\bigr)}{(n+1)(1-q)^2}.$$

Очевидно, что $\sigma_n \to \sigma = \dfrac{1}{1-q}$ при $n \to \infty$.

Замечание 1.22. В теории тригонометрических рядов Фурье метод суммирования средних арифметических называется *методом Фейера*.

9.2. Сумма и ядро Фейера. Будем предполагать, что функция $y = f(x)$ является непрерывной на всей числовой оси и 2ℓ–периодической.

Определение 1.18. Выражение

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0^f(x) + S_1^f(x) + \ldots + S_n^f(x)}{n+1}$$

называется *суммой Фейера*.

Из (summ_n_D 1.23) следует, что

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x+z)\,F_n(z)\,dz, \tag{1.32}$$

summ_Feier

здесь $F_n(z) = \dfrac{1}{n+1}\left[D_0\left(\dfrac{\pi}{\ell}\,z\right) + D_1\left(\dfrac{\pi}{\ell}\,z\right) + \ldots + D_n\left(\dfrac{\pi}{\ell}\,z\right)\right]$ — *ядро Фейера*.

Приведем свойства ядра Фейера, которые базируются на свойствах ядра Дирихле.

1°. *F_n — 2ℓ–периодическая, четная и непрерывная на всей числовой оси функция.*

Утверждение вытекает из аналогичных свойств **1°**–**3°** ядра Дирихле.

2°. $\dfrac{1}{\ell}\displaystyle\int\limits_{-\ell}^{\ell} F_n(z)\,dz = 1.$

Легко получается из свойства **5°** ядра Дирихле.

3°. *На всей числовой оси выполняется $F_n(z) \geqslant 0$.*

Это следует из равенства (4.31 1.31).

4°. *Для произвольного $\delta \in (0,\,\ell)$ справедливо следующее равенство*: $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{\delta\leqslant z\leqslant\ell} F_n(z) = 0.$

Доказательство. В силу полученного выражения (4.31 1.31) для F_n находим

$$\max_{\delta\leqslant z\leqslant\ell} F_n(z) \leqslant \frac{1}{2\sin^2\dfrac{\pi}{2\ell}\,\delta}\cdot\frac{1}{n+1} \to 0, \qquad n\to\infty.$$

9.3. Суммирование тригонометрических рядов Фурье методом Фейера. Справедлива следующая теорема.

thm_Feier

Теорема 1.12. *Последовательность $\left\{\sigma_n(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ сумм Фейера 2ℓ–периодической и непрерывной на всей числовой* *оси функции $y = f(x)$ равномерно на $\mathbb{R}$ сходится к функции $y = f(x)$.*

Доказательство. Докажем, что 2ℓ–периодическая и непрерывная на $\mathbb{R}$ функция равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$. Функция $y = f(x)$ равномерно непрерывна на отрезке $[-2\ell,\, 2\ell]$, что следует из теоремы Кантора, т. е.

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \ \forall\, x',\, x'' \in [-2\ell,\, 2\ell] :\ |x' - x''| < \delta \\ \longmapsto\ \bigl|f(x') - f(x'')\bigr| < \varepsilon.$$

Пусть ξ и η произвольные числа, для которых выполнено неравенство $|\xi - \eta| < \delta < \ell$. Тогда найдется такое число $k \in \mathbb{Z}$, что $x' = \xi - 2k\ell$ принадлежит отрезку $[-\ell,\, \ell]$. Из неравенства $|\xi - \eta| < \ell$ следует, что $x'' = \eta - 2k\ell$ принадлежит отрезку $[-2\ell,\, 2\ell]$ и $\bigl|x' - x''\bigr| < \delta$. Следовательно,

$$\bigl|f(\xi) - f(\eta)\bigr| = \bigl|f(\xi - 2k\ell) - f(\eta - 2k\ell)\bigr| = \bigl|f(x') - f(x'')\bigr| < \varepsilon.$$

Это доказывает, что функции $y = f(x)$ равномерно непрерывна на всей числовой оси.

Итак, выполняется

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \ \forall\, x \in \mathbb{R} \quad \& \quad \forall z :\ |z| < \delta \\ \longmapsto\ \bigl|f(x + z) - f(x)\bigr| < \varepsilon/2. \quad (1.33)$$ 4.33

Оценим разность $\sigma_n(x) - f(x)$:

$$\bigl|\sigma_n(x) - f(x)\bigr| \leqslant \frac{1}{\ell} \int\limits_{-\ell}^{\ell} \bigl|f(x + z) - f(x)\bigr|\, F_n(z)\, dz.$$

Здесь использовано выражение (1.32) и свойство **2°** ядра Фейера F_n. Тогда из неравенства (1.33) следует

$$\frac{1}{\ell}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\bigl|f(x+z)-f(x)\bigr|\,F_n(z)\,dz \leqslant \frac{\varepsilon}{2\ell}\int\limits_{-\delta}^{\delta}F_n(z)\,dz \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell}F_n(z)\,dz = \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Функция $y = f(x)$ ограничена на $\mathbb{R}$, т.е. найдется положительное число M такое, что для всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется $\bigl|f(x)\bigr| \leqslant M$. Из свойства $\mathbf{4^\circ}$ ядра Фейера F_n получаем, что для произвольного числа ε найдется такой номер N, что для всех номеров $n \geqslant N$ справедливо неравенство $\max\limits_{x\in[\delta,\,\ell]} F_n(x) < \dfrac{\varepsilon}{8M}$. Поэтому

$$\frac{1}{\ell}\int\limits_{\delta}^{\ell}\bigl|f(x+z)-f(x)\bigr|\,F_n(z)\,dz \leqslant \frac{2M(\ell-\delta)}{\ell}\max_{z\in[\delta,\,\ell]}F_n(z) <$$

$$< \frac{2M(\ell-\delta)}{\ell}\cdot\frac{\varepsilon}{8M} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Аналогичная оценка получается и для отрезка $[-\ell,\,-\delta]$.

Таким образом, для любого наперед заданного положительного числа ε найдется такой номер N, что для всех номеров $n \geqslant N$ и для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $\bigl|\sigma_n(x) - f(x)\bigr| < \varepsilon$. Что и означает равномерную сходимость последовательности $\bigl\{\sigma_n(x)\bigr\}$ к функции $y = f(x)$ на всей числовой оси. $\triangle$

§10. Теоремы Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывных функций многочленами

Выражение $T_m(x) = \dfrac{A_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{m} A_k\cos\dfrac{k\pi x}{\ell} + B_k\sin\dfrac{k\pi x}{\ell}$ назовем *тригонометрическим многочленом степени* m.

Заметим, что функция $y = T_m(x)$ — 2ℓ–периодическая и бесконечно дифференцируемая на всей числовой оси $\mathbb{R}$.

Множество тригонометрических многочленов образует линейное пространство относительно операций сложения и умножения на действительное число.

thm_4.13

Теорема 1.13. *Произвольную 2ℓ–периодическую и непрерывную на всей числовой оси функцию $y = f(x)$ с любой степенью точности можно равномерно приблизить тригонометрическим многочленом, т. е. для любого наперед заданного положительного числа ε найдется такой тригонометрический многочлен $y = T_m(x)$, что справедливо неравенство* $\max\limits_{x\in[-\ell,\,\ell\,]}\bigl|f(x) - T_m(x)\bigr| < \varepsilon$.

Доказательство. Частичные суммы S_n^f тригонометрического ряда Фурье функции f являются тригонометрическими многочленами, поэтому суммы Фейера $\sigma_m(x)$ также есть тригонометрические многочлены. Последовательность $\bigl\{\sigma_m(x)\bigr\}_{m=1}^{\infty}$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$ к функции f (теоремы 1.12). Это означает, что для любого положительного числа ε найдется такая сумма Фейера $\sigma_m(x)$, что для всех $x \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство $\bigl|f(x) - \sigma_m(x)\bigr| < \varepsilon$. $\triangle$

thm_4.14

Теорема 1.14. *Произвольную непрерывную на отрезке $[a,\,b]$ функцию $y = f(x)$ с любой степенью точности можно равномерно на отрезке $[a,\,b]$ приблизить многочленом, т. е. для любого заданного положительного числа ε найдется такой многочлен $P_n(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, что справедливо неравенство* $\max\limits_{x\in[a,\,b]}\bigl|f(x) - P_n(x)\bigr| < \varepsilon$.

Доказательство. **1°**. Пусть $[a,\,b] = [0,\,\ell]$. Функцию $y = f(x)$ четным образом продолжим на отрезок $[-\ell,\,0]$ и с периодом 2ℓ — на всю числовую ось. Полученная функция является 2ℓ–периодической и непрерывной на всей числовой оси. Поэтому, в частности, для любого положительного числа ε найдется такой тригонометрический многочлен T_m, что $\max\limits_{[0,\,\ell\,]}\bigl|f(x) - T_m(x)\bigr| < \varepsilon/2$ (теорема 1.13).

Функции $y = \cos\dfrac{k\pi x}{\ell}$ и $y = \sin\dfrac{k\pi x}{\ell}$ раскладываются в степенные ряды (ряд Тейлора по степеням x), которые равномерно сходятся на любом отрезке числовой оси, в частности, это выполнено и на отрезке $[0,\,\ell\,]$. Поэтому $T_m(x) = c_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k x^k$ и для любого наперед заданного положительного числа ε найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n \geqslant N$ и выполняется $\max\limits_{[0,\,\ell\,]}\bigl|T_m(x) - P_n(x)\bigr| < \varepsilon/2$, здесь P_n — частичная сумм степенного ряда для T_m.

Таким образом, для любого $x \in [0,\,\ell]$ справедливо

$$\bigl|f(x) - P_n(x)\bigr| \leqslant \bigl|f(x) - T_m(x)\bigr| + \bigl|T_m(x) - P_n(x)\bigr| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{[0,\,\ell\,]}\bigl|f(x) - T_m(x)\bigr| + \max_{[0,\,\ell\,]}\bigl|T_m(x) - P_n(x)\bigr| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2°. Рассмотрим случай, когда отрезок $[a,\,b]$ произвольный. Функция $F(t) = f\Bigl(a + \dfrac{t}{\ell}\,(b - a)\Bigr)$ непрерывна на отрезке $[0,\,\ell\,]$ (как суперпозиция непрерывных функций) и ее можно равномерно на отрезке $[0,\,\ell\,]$ приблизить многочленом. Для произвольного положительного числа ε найдется такой многочлен Q_n, что $\max\limits_{[0,\,\ell\,]}\bigl|F(t) - Q_n(t)\bigr| < \varepsilon$.

Если положить $x = a + \dfrac{t}{\ell}\,(b - a)$, то $P_n(x) = Q_n\Bigl(\ell\,\dfrac{x - a}{b - a}\Bigr)$ и $\max\limits_{[a,\,b]}\bigl|f(x) - P_n(x)\bigr| < \varepsilon$. $\triangle$

§11. Банаховы пространства

Напомним, что метрическое пространство $\mathscr{M} = (\mathscr{L},\,\rho)$, в котором любая фундаментальная последовательность сходится, называется *полным*, здесь $\mathscr{L}$ — произвольное линейное пространство. Аналогично определяется и полнота нормированного пространства (см. определение dfn_norm 1.6 и замечание space_n_m 1.6).

Определение 1.19. Полное нормированное пространство $\mathscr{N} = (\mathscr{L},\ \|\cdot\|)$ называется *банаховым пространством*.

Пример 1.12. Метрическое пространство $\mathbb{E}^m$ является конечномерным нормированным пространством и его норма имеет вид $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{m} x_k^2$. Это пространство банахово.

Как отмечалось ранее любое пространство со скалярным произведением можно превратить в нормированное пространство (см. замечание evkl_norm 1.7).

Определение 1.20. Полное предгильбертово пространство $\mathscr{E}$ называют *гильбертовым* пространством.

Определение 1.21. В линейном пространстве $\mathscr{L}$ норма $\|\cdot\|_2$ *не слабее нормы* $\|\cdot\|_1$, если существует такая положительная постоянная C, что для всех $x \in \mathscr{L}$ выполняется $\|x\|_1 \leqslant C\|x\|_2$.

Определение 1.22. Нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ линейного пространства $\mathscr{L}$ называются *эквивалентными*, если существуют такие положительные постоянные C_1 и C_2, что для всех $x \in \mathscr{L}$ выполняется $C_1\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant C_2\|x\|_2$.

Можно сказать, что норма $\|\cdot\|_2$ не слабее нормы $\|\cdot\|_1$, а норма $\|\cdot\|_1$ не слабее нормы $\|\cdot\|_2$.

thm_ekv_norm Теорема 1.15. *В конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $\dim\mathscr{L} = m$ и $\{e_1, \ldots, e_m\}$ фиксированный базис в пространстве $\mathscr{L}$. Тогда для любого элемента x пространства $\mathscr{L}$ верно $x = \sum\limits_{k=1}^{m} x_i e_i$. Обозначим через $|x|$ евклидову норму элемента x, т. е. имеет место[1.11] $|x|^2 = \sum\limits_{k=1}^{m} x_k^2$ и $\|\cdot\|$ — другая норма в $\mathscr{L}$.

[1.11] Пространство $(\mathscr{L}, |\cdot|)$ ранее обозначали $\mathbb{E}^m$.

Из неравенства Коши–Буняковского следует

$$\|x\| = \Big\|\sum_{k=1}^{m} x_k e_k\Big\| \leqslant \sum_{k=1}^{m} |x_k|\,\|e_k\| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \|e_k\|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{m} |x_k|^2} = C_1|x|. \quad (1.34)$$ 4.34

Доказано, что евклидова норма не слабее любой нормы в конечномерном линейном пространстве $\mathscr{L}$.

Докажем, что любая норма $\|\cdot\|$ в $\mathscr{L}$ не слабее евклидовой нормы. Очевидно, что для любых x, $y \in \mathscr{L}$ выполняется[1.12] $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\|$. Из (1.34) следует существование такой положительной постоянной C, что для любых x, $y \in \mathscr{L}$ верно $\|x - y\| \leqslant C|x - y|$. Таким образом, верно

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant C|x - y|, \quad (1.35)$$ 4.35

для произвольных x, $y \in \mathscr{L}$.

Используя неравенство (1.35), легко доказать, что функция $\varphi(x) = \|x\|$ равномерно непрерывна как функция переменных $x_1, \ldots, x_m$ на $\mathbb{E}^m$.

Обозначим через S сферу $S = \big\{x : x_1^2 + \ldots + x_m^2 = 1\big\}$, это компакт в $\mathbb{E}^m$, а поэтому функция φ достигает на S своего наименьшего значения (вторая теорема Вейерштрасса), т. е. существует такой элемент x^0 на S, для которого $\varphi(x^0) = C_2$ и $\|x\| \geqslant C_2 > 0$ для всех $x \in S$.

Для произвольного элемента $y \in \mathscr{L}$, $y \neq 0$, выполняется $x = \dfrac{y}{|y|}$ и $x \in S$. Следовательно,

$$\|y\| = \big\||y|\,x\big\| = |y|\,\|x\| \geqslant C_2|y|.$$

Доказано, что любая норма не слабее евклидовой нормы в конечномерном линейном пространстве $\mathscr{L}$. △

Замечание 1.23. Известно, что пространство $\mathbb{E}^m$ (конечномерное линейное пространство с евклидовой нормой)

[1.12] Поскольку $x = (x-y)+y$, то $\|x\| \leqslant \|x-y\|+\|y\|$ и справедливо неравенство $\|x\| - \|y\| \leqslant \|x - y\|$. Аналогично, для $y = y - x + x$, получаем $\|y\| - \|x\| \leqslant \|x - y\|$.

полно. Из теоремы 1.15 следует, что *любое конечномерное нормированное пространство полно*.

В бесконечномерных нормированных пространствах все гораздо сложнее. Пусть $\mathscr{C}[a,\,b]$ — линейное пространство функций, непрерывных на отрезке $[a,\,b]$. На $\mathscr{C}[a,\,b]$ можно ввести нормы, которые не являются эквивалентными:

$$\begin{aligned}
&\|f\|_c = \max_{x\in[a,\,b]} |f(x)|, \quad C[a,\,b] = \big(\mathscr{C}[a,\,b],\, \|\cdot\|_c\big);\\
&\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx, \quad L^1_c[a,\,b] = \big(\mathscr{C}[a,\,b],\, \|\cdot\|_1\big);\\
&\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b \big(f(x)\big)^2\,dx},\; L^2_c[a,\,b] = \big(\mathscr{C}[a,\,b],\, \|\cdot\|_2\big).
\end{aligned} \tag{1.36}$$

Замечание 1.24. Сходимость в нормированном пространстве $C[a,\,b]$ есть равномерная сходимость на отрезке $[a,\,b]$, сходимость в пространстве $L^1_c[a,\,b]$ называется *сходимостью в среднем* на отрезке $[a,\,b]$ и сходимость в пространстве $L^2_c[a,\,b]$ называется *сходимостью в среднем квадратичном* на отрезке $[a,\,b]$.

Предложение. *Для норм* (1.36)*, введенных на пространств* $\mathscr{C}[a,\,b]$ *функций, непрерывных на отрезке* $[a,\,b]$*, справедливо*:

1) *норма* $\|\cdot\|_c$ *не слабее норм* $\|\cdot\|_1$ *и* $\|\cdot\|_2$;
2) *норма* $\|\cdot\|_2$ *не слабее нормы* $\|\cdot\|_1$.

Доказательство. 1) Для произвольной функции f из $\mathscr{C}[a,\,b]$ верно

$$\|f\|_1 = \int\limits_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \|f\|_c \int\limits_a^b dx = (b-a)\cdot\|f\|_c\,,$$

$$\|f\|_2 = \left[\int\limits_a^b \bigl(f(x)\bigr)^2\,dx\right]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\|f\|_c^2 \int\limits_a^b dx\right]^{1/2} = \sqrt{b-a}\cdot\|f\|_c. \quad (1.37)$$

norm_2_c

2) Для любой функции $f \in \mathscr{C}[a,\,b]$ выполняется

$$\|f\|_1 = \int\limits_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \left[\int\limits_a^b \bigl(f(x)\bigr)^2\,dx\right]^{1/2}\left[\int\limits_a^b dx\right]^{1/2} =$$

$$= \sqrt{b-a}\cdot\|f\|_2. \quad \triangle$$

Заметим, что из сходимости в среднем квадратичном на отрезке $[a,\,b]$ не следует равномерная сходимость на отрезке $[a,\,b]$, а из сходимости в среднем на отрезке $[a,\,b]$ не следует сходимость в среднем квадратичном на отрезке $[a,\,b]$. Проиллюстрируем это на примере.

Пример 1.13. В пространстве функций, непрерывных на отрезке $[0,\,1]$, построим следующую последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$: функция $y = f_n(x)$ равна нулю на отрезке $\left[\frac{1}{n},\,1\right]$, четная на отрезке $\left[0,\,\frac{1}{n}\right]$ относительно точки $x = \frac{1}{2n}$ и $f_n(x) = (2n\cdot h_n)x$ на отрезке $\left[0,\,\frac{1}{2n}\right]$, где $h_n > 0$. Предельной функции является функция $y = f(x) \equiv 0$ на заданном отрезке $[0,\,1]$.

Поскольку $\bigl\|f_n - f\bigr\|_c = \max\limits_{[0,\,1]}\bigl|f_n(x)\bigr| = h_n$, то последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно на $[0,\,1]$ к функции f при условии, что $h_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Для пространства $L_c^2[a,\, b]$ выполняется

$$\|f_n - f\|_2 = \left[\int\limits_0^1 \big(f_n(x)\big)^2\,dx\right]^{1/2} = \\ = \left[2\int\limits_0^{1/(2n)} \big(2n\,h_n\big)^2 x^2\,dx\right]^{1/2} = \frac{h_n}{\sqrt{3n}}\,.$$

Очевидно, что $\|f_n - f\|_2 \to 0$, если $h_n = o\big(\sqrt{n}\big)$ при $n \to \infty$.

Для функций из пространства $L_c^1[a,\, b]$ справедливо

$$\|f_n - f\|_1 = \int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = 2\int\limits_0^{1/(2n)} \big(2n\,h_n\big)x\,dx = \frac{h_n}{2n}\,.$$

Поэтому $\|f_n - f\|_1 \to 0$, если $h_n = o(n)$ при $n \to \infty$.

Если $h_n = 1$, то имеет место сходимость в среднем квадратичном, но нет равномерной сходимости.

При $h_n = \sqrt{n}$ есть сходимость в среднем, но нет сходимости в среднем квадратичном.

Теорема 1.16. *Пространство $C[a,\, b]$ полно.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ произвольная фундаментальная последовательность функций, непрерывных на отрезке $[a,\, b]$, т. е. для любого положительного числа ε найдется такой номер N, зависящий от ε, что для всех номеров $n,\, m > N$ и для любого $x \in [a,\, b]$ выполняется $\big|f_n(x) - f_m(x)\big| < \varepsilon$. В силу критерия Коши равномерной сходимости функциональной последовательности, это означает, что последовательность функций $\{f_n\}$ сходится равномерно на отрезке $[a,\, b]$ к предельной функции $y = f(x)$. Эта предельная функция будет также непрерывной на отрезке $[a,\, b]$.

В силу произвольности фундаментальной последовательности получаем полноту пространства $C[a,\, b]$. $\triangle$

Замечание 1.25. Пространства $L_c^1[a,\, b]$ и $L_c^2[a,\, b]$ не являются полными.

§12. Полные ортонормированные системы в предгильбертовых пространствах

Определение 1.23. Пусть $\mathscr{L}'$ подпространство линейного пространства $\mathscr{L}$ и пространство $\mathscr{N} = (\mathscr{L}, \|\cdot\|)$ банахово, тогда нормированное пространство $\mathscr{N}' = (\mathscr{L}',\, \|\cdot\|)$ называется подпространство пространства $\mathscr{N}$, если пространство $\mathscr{N}'$ есть банахово пространство.

exm_4.14 Пример 1.14. Пусть $\mathscr{C}[a,\, b]$ — линейное пространство функций, непрерывных на отрезке $[a,\, b]$ и

$$\widetilde{\mathscr{C}}[a,\, b] = \bigl\{ f \in \mathscr{C}[a,\, b]\colon\ f(a) = f(b) \bigr\}, \tag{1.38}$$ set_f_end

то $\widetilde{C}[a,\, b] = (\widetilde{\mathscr{C}}[a,\, b],\, \|\cdot\|_c)$ есть подпространство банахова пространства[1.13] $C[a,\, b]$.

Определение 1.24. Назовем счетную систему элементов $\{\varphi_1,\, \varphi_2,\, \ldots,\, \varphi_n,\, \ldots\}$ линейного нормированного пространства $\mathscr{N} = (\mathscr{L},\, \|\cdot\|)$ *полной*, если для любого элемента $f \in \mathscr{N}$ и для любого положительного числа ε найдутся такие действительные числа $\alpha_1,\, \ldots,\, \alpha_n$, что справедливо неравенство $\Bigl\| f - \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i \Bigr\| < \varepsilon$.

Другими словами, можно сказать, что система $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ полна в $\mathscr{N}$, если любой элемент пространства $\mathscr{N}$ можно с любой точностью в норме $\mathscr{N}$ приблизить конечной линейной комбинацией элементов системы.

rem_4.26 Замечание 1.26. Из теоремы 1.13 следует, что тригонометрические системы (1.7) и (1.8) полны в пространстве $\widetilde{C}[-\ell,\, \ell]$, определенном в примере 1.14.

[1.13] Норма $\|\cdot\|_c$ и пространство $C[a,\, b]$ определены в (1.36).

Замечание 1.27. Из теоремы 1.14 следует, что система $\{1,\, x,\, x^2,\, \ldots,\, x^n,\, \ldots\}$ полна в линейном нормированном пространстве $C[a,\, b]$.

thm_Pars

Теорема 1.17. *Пусть в предгильбертовом пространстве $\mathscr{E}$ задана счетная ортонормированная система элементов $\Phi = \{\varphi_1,\, \ldots,\, \varphi_n,\, \ldots\}$. Ряд Фурье элемента $f \in \mathscr{E}$ по заданной системе Φ сходится к f в том и только в том случае, когда для f выполнено равенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2, \qquad f_k = (f,\, \varphi_k), \tag{1.39}$$

eq_Pars

называемое равенством Парсеваля.

Доказательство. Необходимость. Пусть ряд Фурье элемента $f \in \mathscr{E}$ по системе Φ сходится к f, т. е. для любого положительного числа ε найдется такой номер N, зависящий от ε, что для всех номеров $n > N$ выполняется неравенство $\left\| f - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k\varphi_k \right\| < \sqrt{\varepsilon}$. Из тождества Бесселя (1.13) следует, что $\|f\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2 = \left\| f - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k\varphi_k \right\|^2 < \varepsilon$.

Таким образом, последовательность $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2$ сходится к $\|f\|^2$ при $n \to \infty$ и имеет место равенство Парсеваля (1.39).

Достаточность. Выполняется равенство Парсеваля (1.39), т. е. для любого положительного числа ε найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n \geqslant N$ справедливо $\|f\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2 < \varepsilon$. Применение тождества Бесселя (1.13) $\left\| f - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k\varphi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2 < \varepsilon$ завершает доказательство теоремы. $\triangle$

Определение 1.25. Счетная ортонормированная система $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n \ldots\}$ предгильбертова пространства $\mathscr{E}$ называется *ортонормированным базисом* пространства $\mathscr{E}$, если любой элемент $f \in \mathscr{E}$ является в $\mathscr{E}$ суммой своего ряда Фурье по системе Φ.

thm_4.18

Теорема 1.18. *Для счетной ортонормированной системы $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ в предгильбертвом пространстве $\mathscr{E}$ равносильны следующие условия:*

1) *система Φ полна в $\mathscr{E}$;*
2) *система Φ является ортонормированным базисом в $\mathscr{E}$;*
3) *для любого элемента $f \in \mathscr{E}$ выполняется равенство Парсеваля (1.39).*

Доказательство. Эквивалентность условий 2) и 3) доказано в теореме 1.17.

Докажем эквивалентность условий 1) и 2).

1) $\Rightarrow$ 2). Система Φ полна, т. е. для любого элемента f из $\mathscr{E}$ и для произвольного положительного числа ε найдутся такие числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_0}$, что выполнено неравенство $\left\| f - \sum\limits_{k=1}^{n_0} \alpha_k \varphi_k \right\| < \varepsilon$. Из основной теоремы 1.4 следует, что $\left\| f - \sum\limits_{k=1}^{n_0} f_k \varphi_k \right\| \leqslant \left\| f - \sum\limits_{k=1}^{n_0} \alpha_k \varphi_k \right\| < \varepsilon$. Тождество Бесселя 1.13 позволяет утверждать, что последовательность $\|f - S_{n_0}^f\|^2 = \|f\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{n_0} f_k^2$ убывает, т. е. для любого номера $n \geqslant n_0$ справедливо $\|f - S_n^f\| \leqslant \|f - S_{n_0}^f\|$. Таким образом доказано, что $f = \lim\limits_{n\to\infty} S_n^f$ и тем самым доказано, что система Φ есть ортонормированный базис в $\mathscr{E}$.

2) $\Rightarrow$ 1). Итак, имеет место равенство $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k$, где $f_k = (f, \varphi_k)$, для произвольного элемента $f \in \mathscr{E}$. Это

означает, что для любого положительного числа ε найдется такой номер n_0, что для всех номеров $n \geqslant n_0$ выполнено неравенство $\left\| f - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k \varphi_k \right\| < \varepsilon$, т. е. система Φ полна. $\triangle$

thm_R-F Теорема 1.19. (Рисс–Фишер). *Пусть в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ задана счетная ортонормированная система $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ и последовательность $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ такова, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$ сходится. Тогда существует такой элемент $f \in \mathscr{H}$, что выполнено следующее:*

1) *α_k — коэффициенты Фурье элемента f по системе Φ;*
2) *$f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k$;*
3) *$\|f\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$.*

Доказательство. Пусть $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$ и

$$\|S_{n+p} - S_n\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k \varphi_k \right\|^2 = \\ = \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k \varphi_k, \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k \varphi_k \right) = \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k^2. \quad (1.40)$$ 4.38

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$ сходится, поэтому для произвольного положительного числа ε найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех номеров $n \geqslant N$ и для произвольного $p \in \mathbb{N}$ выполняется $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k^2 < \varepsilon$. Из указанного неравенства и равенства (1.40) следует, что последовательность $\{S_n\}$ фундаментальна, а из полноты пространства $\mathscr{H}$ следует, что существует такой элемент $f \in \mathscr{H}$, для которого выполнено условие 2).

Из введенных обозначений и из неравенства Коши–Буняковского (1.4) следует $(f, \varphi_k) = (f - S_n, \varphi_k) + (S_n, \varphi_k)$ и $(f - S_n, \varphi_k) \leqslant \|f - S_n\| \cdot \|\varphi_k\| = \|f - S_n\| \to 0$ при $n \to \infty$ (см. доказанное условие 2)). Тогда имеет место равенство $(S_n, \varphi_k) = \Bigl(\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j, \varphi_k\Bigr) = \alpha_k$. Следовательно, $(f, \varphi_k) = \alpha_k$, т. е. выполнено условие 1).

Поскольку α_k — коэффициенты Фурье элемента f по системе $\varPhi$ и выполнено условие 2), то из теоремы 1.17 следует выполнение условия 3). $\triangle$

Определение 1.26. Ортонормированная система элементов $\varPhi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ предгильбертового пространства $\mathscr{E}$ называется *замкнутой*, если из равенств $(f, \varphi_k) = 0$ для $k = 1, 2, \ldots,$ с некоторым элементом $f \in \mathscr{E}$ следует, что $f = 0$.

Теорема 1.20. 1°. *Если ортонормированная система элементов $\varPhi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ предгильбертового пространства $\mathscr{E}$ полна, то она замкнута.*

2°. *Если ортонормированная в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ система элементов $\varPhi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ замкнута, то она полна.*

Доказательство. 1°. Поскольку система $\varPhi$ полна, то по теореме 1.18 для любого элемента $f \in \mathscr{E}$ имеет место равенство Парсеваля (1.39). Поэтому, если $f_k = (f, \varphi_k) = 0$ для $k = 1, 2, \ldots,$ то, в силу равенства Парсеваля, получаем, что $\|f\| = 0$, следовательно, и $f = 0$.

2°. Докажем от противного. Пусть система Φ не является полной, т. е. найдется такой элемент g пространства $\mathscr{H}$, что $\|g\|^2 > \sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k^2$, для $g_k = (g, \varphi_k)$. Это следует из теоремы thm_4.18 1.18.

Из теоремы thm_R-F 1.19 Рисса–Фишера следует, что найдется такой элемент $f \in \mathscr{H}$, что $(f, \varphi_k) = g_k$, $k = 1, 2, \ldots$, и $\|f\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k^2$. Поскольку $\|g\| > \|f\|$, то $g \neq f$ и для $k \in \mathbb{N}$ выполняется $(g - f, \varphi_k) = 0$. Но из замкнутости системы Φ находим, что $f = g$. Полученное противоречие доказывает теорему. $\triangle$

Замечание 1.28. В гильбертовом пространстве полнота счетной ортонормированной системы эквивалентна ее замкнутости.

Теорема 1.21. *Для того, чтобы числовая последовательность $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ была последовательностью коэффициентов Фурье некоторого элемента f гильбертова пространства $\mathscr{H}$ по счетной ортонормированной системе $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$ сходился. При этом*

1) *если система Φ полна, то такой элемент $f \in \mathscr{H}$ определен однозначно;*
2) *если система Φ не является полной, то такой элемент $f \in \mathscr{H}$ определен с точностью до некоторого элемента $g \in \mathscr{H}$, имеющего нулевой ряд Фурье по системе Φ.*

Доказательство. Необходимость. Если существует такой элемент $f \in \mathscr{H}$, что $\alpha_k = (f, \varphi_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \leqslant \|f\|^2$, что вытекает из неравенства Бесселя (1.14), т. е. числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$ сходится.

Достаточность. Если указанный числовой ряд сходится, то в силу теоремы 1.19 Рисса–Фишера существует такой элемент $f \in \mathscr{H}$, что $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k$ и $\alpha_k = (f, \varphi_k)$, $k = 1, 2, \ldots$. △

§13. Полнота тригонометрической системы

Применим результаты предыдущего параграфа для доказательства полноты счетных ортогональной (1.7) и ортонормированной (1.8) тригонометрических систем в предгильбертовом пространстве $\mathscr{L}_R^2[a, b]$ и нормированном пространстве $L_c^2[a, b]$, определенном в (1.36).

В замечании 1.26 отмечено, что эти системы полны в $\widetilde{C}[-\ell, \ell]$ (см. также пример 1.14).

dfn_plotnost

Определение 1.27. Подмножество $\mathscr{N}'$ линейного нормированного пространства $\mathscr{N}$ называется *плотным* в $\mathscr{N}$, если для любого элемента $x \in \mathscr{N}$ и произвольного положительного числа ε найдется такой элемент $y \in \mathscr{N}'$, что $\|x - y\| < \varepsilon$.

Замечание 1.29. Как уже отмечалось ранее евклидово пространство $\mathscr{L}_R^2[a, b]$ можно превратить в нормированное пространство (см. замечание 1.7) с введенной нормой $\|\cdot\|_2$.

Приведем без доказательства следующий результат.

thm_4.22

Теорема 1.22. *Подмножество*[1.14] $\widetilde{\mathscr{C}}[a, b]$ *плотно в пространстве* $\mathscr{L}_R^2[a, b]$.

[1.14]Множество $\widetilde{\mathscr{C}}[a, b]$ определено в (1.38).

thm_4.23 Теорема 1.23. *Если система $\varPhi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ функций, непрерывных на отрезке $[a,\, b]$, полна в $\widetilde{C}[a,\, b]$, то она полна в $\mathscr{L}_R^2[a,\, b]$ и в $L_c^2[a,\, b]$.*

Доказательство. В силу теоремы 1.22 для любой функции $f \in \mathscr{L}_R^2[a,\, b]$ и для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $g \in \widetilde{\mathscr{C}}[a,\, b]$, что справедливо неравенство $\|f - g\|_2 < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

В силу полноты системы $\varPhi$ для этого же $\varepsilon > 0$ найдутся такие числа $\alpha_1,\, \ldots,\, \alpha_n$, что имеет место следующее неравенство: $\Big\|g - \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\Big\|_c < \dfrac{\varepsilon}{2\sqrt{b-a}}$.

Из неравенства (1.37) вытекает, что

$$\Big\|g - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\Big\|_2 \leqslant \sqrt{b-a}\, \Big\|g - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\Big\|_c < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Окончательно получаем следующее:

$$\Big\|f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\Big\|_2 \leqslant \|f - g\|_2 + \Big\|g - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\Big\|_2 < \varepsilon.$$

Таким образом, система $\varPhi$ полна в $\mathscr{L}_R^2[a,\, b]$.

Линейное нормированное пространство $L_c^2[a,\, b]$ является подмножеством пространства $\mathscr{L}_R^2[a,\, b]$, в котором полна система $\varPhi$, состоящая из непрерывных на отрезке $[a,\, b]$ функций. Поэтому рассматриваемая система $\varPhi$ полна в пространстве $L_c^2[a,\, b]$. $\triangle$

Поскольку тригонометрические системы (1.7) и (1.8) полны в $\widetilde{C}[-\ell,\, \ell]$ (см. замечание 1.26), то из теоремы 1.23 получается следующее утверждение.

Теорема 1.24. *Тригонометрические системы (1.7) и (1.8) полны в пространствах $\mathscr{L}_R^2[-\ell,\, \ell]$ и $L_c^2[-\ell,\, \ell]$.*

Сформулируем важные выводы, которые следуют из полноты тригонометрической системы.

В ы в о д ы.

1. Тригонометрическая ортонормированная система (1.8) является ортонормированным базисом в пространстве $\mathscr{L}_R^2[-\ell,\,\ell]$, т. е. для любой функции f из $\mathscr{L}_R^2[-\ell,\,\ell]$ ее тригонометрический ряд Фурье сходится к f в среднем квадратичном.
2. Для любой функции $f \in \mathscr{L}_R^2[-\ell,\,\ell]$ имеет место равенство Парсеваля:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 = \frac{1}{\ell} \int\limits_{-\ell}^{\ell} f^2(x)\,dx.$$

3. Тригонометрическая ортонормированная система (1.8) замкнута в пространстве $\mathscr{L}_R^2[-\ell,\,\ell]$, т. е. если f имеет нулевой ряд Фурье, то $f = 0$ в $\mathscr{L}_R^2[-\ell,\,\ell]$ в смысле определения 1.5.

ГЛАВА 2

Интегралы, зависящие от параметров

§1. Понятие интеграла, зависящего от параметра

1.1. Простейший случай. Обозначим через Π замкнутый прямоугольник

$$\Pi = \{(x,\, y)\colon\ a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\} = [a,\, b] \times [c,\, d].$$

Предположим, что функция $w = f(x,\, y)$ интегрируема на отрезке $[a,\, b]$ при каждом фиксированном $y \in [c,\, d]$, тогда на отрезке $[c,\, d]$ определена функция

$$J = J(y) = \int\limits_a^b f(x,\, y)\, dx, \qquad y \in [c,\, d]. \tag{2.1}$$ dfn_int_pr

Функция (dfn_int_pr 2.1) называется *интегралом, зависящим от параметра*.

Выясним, какими свойствами обладает введенная функция $J = J(y)$.

thm_P5.1 Теорема 2.1. *Если функция $w = f(x,\, y)$ непрерывна в прямоугольнике Π, то функция (dfn_int_pr 2.1) непрерывна на отрезке $[c,\, d]$.*

Доказательство. В силу теоремы Кантора функция $w = f(x,\, y)$ равномерно непрерывна на прямоугольнике Π, т. е. выполняется Уточнить ссылку!

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon\ \forall\, (x, y) \in \Pi\ \&\ y + \Delta y \in [c,\, d]\colon$$
$$|\Delta y| < \delta\ \longmapsto\ |f(x,\, y + \Delta y) - f(x,\, y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Уточнить ссылку! Используем разностную форму условия непрерывности (см. теорему 3.12, Т. 1). Поскольку

$$\Delta J(y,\,\Delta y) = J(y+\Delta y)-J(y) = \int_a^b \bigl[f(x,\,y+\Delta y)-f(x,\,y)\bigr]\,dx,$$

то

$$|\Delta J(y,\,\Delta y)| \leqslant \int_a^b \bigl|f(x,\,y+\Delta y)-f(x,\,y)\bigr|\,dx < \frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b dx = \varepsilon.$$

Полученная оценка доказывает теорему. △

thm_P5.2 Теорема 2.2. *Если функция $w = f(x,\,y)$ непрерывна в прямоугольнике* Π, *то функция* (dfn_int_pr 2.1) *интегрируема на отрезке* $[c,\,d]$ *и для любого фиксированного* $y_0 \in [c,\,d]$

$$\int_c^{y_0} J(y)\,dy = \int_c^{y_0}\left[\int_a^b f(x,\,y)\,dx\right]dy = \int_a^b\left[\int_c^{y_0} f(x,\,y)\,dy\right]dx. \qquad (2.2)$$ P5.2

Уточнить ссылку! Доказательство. Из теоремы thm_P5.1 2.1 следует, что J интегрируема на отрезке $[c,\,d]$ (см. также теорему). Справедливость формулы (P5.2 2.2) следует из равенства повторных интегралов, которая следует из того, что эти интегралы равны двойному интегралу $\iint\limits_{\Pi_0} f(x,\,y)\,dx\,dy$ (см. теорему 2.7, Т. 3), где $\Pi_0 = [a,\,b]\times[c,\,y_0]$. △ Уточнить ссылку!

thm_5P.3 Теорема 2.3. *Если функции $w = f(x,y)$ и $w = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ непрерывны в* Π, *то функция* (dfn_int_pr 2.1) *дифференцируема на отрезке* $[c,\,d]$ *и* $J'(y) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,\,y)\,dx$.

Доказательство. Обозначим $g(y) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,\, y)\, dx$. В силу непрерывности функции $w = \frac{\partial f}{\partial y}(x,\, y)$ из теоремы thm_P5.1 2.1 следует, что функция $g = g(y)$ непрерывна на $[c,\, d]$, а поэтому (см. теорему thm_P5.2 2.2) для любого $y \in [c,\, d]$ верны следующие равенства:

$$\int\limits_c^y g(t)\, dt = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^y \frac{\partial f}{\partial t}(x,\, t)\, dt\right] dx = \\ = \int\limits_a^b f(x,\, y)\, dx - \int\limits_a^b f(x,\, c)\, dx = J(y) - J(c).$$

Итак, получено равенство $J(y) = \int\limits_c^y g(t)\, dt + J(c)$, в правой части которого стоит интеграл с переменных верхним пределом с непрерывной подынтегральной функцией g. Поэтому (см. теорему) справедливо Уточнить ссылку!

$$J'(y) = g(y) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,\, y)\, dy. \qquad \triangle$$

1.2. Интегралы с переменными границами. Рассмотрим случай замкнутой области $\overline{D}$, элементарной относительно оси Ox:

$$\overline{D} = \{(x,\, y)\colon\ a(y) \leqslant x \leqslant b(y),\ c \leqslant y \leqslant d\}.$$

Если для каждого фиксированного $y \in [c,\, d]$ функция $w = f(x,\, y)$ интегрируема по x на отрезке $[a(y),\, b(y)]$, то на отрезке $[c,\, d]$ определена функция

$$J = J(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,\, y)\, dx, \qquad y \in [c,\, d]. \tag{2.3}$$

dfn_int_gr

Функция (2.3) также называется *интегралом, зависящим от параметра*.

Теорема 2.4. *Пусть функция $w = f(x,\, y)$ непрерывна в $\overline{D}$, а функции $a = a(y)$ и $b = b(y)$ непрерывны на $[c,\, d]$. Тогда функция (2.3) непрерывна на отрезке $[c,\, d]$.*

Доказательство. Зафиксируем $y_0 \in [c,\, d]$, тогда для функции (2.3) справедливо

$$J(y) = \int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,\, y)\, dx + \int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,\, y)\, dx -$$

$$- \int\limits_{a(y_0)}^{a(y)} f(x,\, y)\, dx = J_0(y) + J_b(y) - J_a(y). \tag{2.4}$$

P5.4

Из теоремы 2.1 следует, что функция J_0 непрерывна на отрезке $[c,\, d]$ и $J_0(y) \to J_0(y_0) = J(y_0)$ при $y \to y_0$. Для функций J_a и J_b справедливо

$$|J_a(y)| \leqslant M\bigl|a(y) - a(y_0)\bigr| \to 0, \qquad y \to y_0;$$

$$|J_b(y)| \leqslant M\bigl|b(y) - b(y_0)\bigr| \to 0, \qquad y \to y_0.$$

Здесь учтено, что функции f, a и b непрерывны на соответствующих множествах и $\max\limits_{(x,\, y) \in \Pi} \bigl|f(x,\, y)\bigr| = M$.

Таким образом, $J(y) \to J(y_0)$ при $y \to y_0$. В силу произвольности точки $y_0 \in [c,\, d]$ функция $J = J(y)$ непрерывна на отрезке $[c,\, d]$. $\triangle$

Теорема 2.5. *Предположим, что функции $w = f(x,\, y)$ и $w = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\, y)$ непрерывны в $\overline{D}$, а функции $a = a(y)$ и*

$b = b(y)$ *дифференцируемы на отрезке* $[c,\, d]$. *Тогда функция* (2.3) *дифференцируема на отрезке* $[c,\, d]$ *и*

$$J'(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}\,(x,\, y)\, dx + b'(y) f\bigl(b(y),\, y\bigr) - a'(y) f\bigl(a(y),\, y\bigr).$$

Доказательство. Зафиксируем $y_0 \in [c,\, d]$, тогда для функции (2.3) справедливо равенство (2.4).

Функция J_0 дифференцируема на $[c,\, d]$ (теорема 2.3) и для нее справедливо $J_0'(y) = \int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} \frac{\partial f}{\partial y}\,(x,\, y)\, dx$.

Заметим, что функции J_a и J_b обращаются в нуль при $y = y_0$. Производную функции J_b в точке y_0 будем искать по определению:

$$J_b'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{1}{y - y_0} \int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,\, y)\, dx.$$

В силу интегральной теоремы о среднем (см. теорема), Уточнить ссылку! найдется такая точка $\overline{x}$, лежащая между $b(y_0)$ и $b(y)$, что справедливо равенство $\int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,\, y)\, dx = f(\overline{x},\, y)\bigl[b(y) - b(y_0)\bigr]$, при этом $f(\overline{x},\, y) \to f\bigl(b(y_0),\, y_0\bigr)$, если $y \to y_0$. Таким образом, выполняется

$$J_b'(y_0) = \lim_{y \to y_0} f(\overline{x},\, y)\, \frac{b(y) - b(y_0)}{y - y_0} = f\bigl(b(y_0),\, y_0\bigr)\, b'(y_0).$$

Аналогично получается выражение для $J_a'(y_0)$. $\triangle$

§2. Понятие несобственного интеграла, зависящего от параметра. Равномерная сходимость

2.1. Несобственный интеграл первого рода. Обозначим через Π_∞ множество $\Pi_\infty = [a, +\infty) \times Y$, где Y — конечный или бесконечный промежуток числовой оси. Предположим, что функция $w = f(x, y)$ такова, что при каждом фиксированном $y \in Y$ она интегрируема в несобственном смысле по $x \in [a, +\infty)$. При этих условиях на множестве Y определена функция

$$J(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\, dx, \qquad y \in X, \tag{2.5}$$ dfn_int_nes_1

которую будем называть *несобственным интегралом первого рода, зависящим от параметра*.

dfn_P5.1 Определение 2.1. Несобственный интеграл (dfn_int_nes_1 2.5) *равномерно сходится по параметру* $y \in Y$, если для любого положительного числа ε найдется такое число $A \geqslant a$, зависящее от ε, что для всех чисел $R \geqslant A$ и для любого $y \in Y$, выполняется неравенство $\left|\int\limits_R^{+\infty} f(x, y)\, dx\right| < \varepsilon$.

Запишем это определение в символьном виде.

$$\left[\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\, dx \text{ сходится равномерно по } \ y \in Y\right] \ \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\left[\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, A = A(\varepsilon) \geqslant a: \ \forall\, R \geqslant A \ \ \& \ \forall y \in Y \ \longmapsto\right.$$

$$\left.\longmapsto \left|\int\limits_R^{+\infty} f(x, y)\, dx\right| < \varepsilon\right].$$

Сформулируем отрицание приведенного определения в символьном виде:

$$\left[\int\limits_a^{+\infty} f(x,\,y)\,dx \text{ сходится неравномерно по } \ y \in Y\right] \overset{\text{def}}{=}$$

$$\Big[\exists\,\varepsilon_0 > 0 : \forall\, A \geqslant a \ \exists\, R_A \geqslant A \ \ \& \ \exists\, y_A \in Y :$$

$$: \ \left|\int\limits_{R_A}^{+\infty} f\big(x,\,y_A\big)\,dx\right| \geqslant \varepsilon_0\Big].$$

2.2. Несобственный интеграл второго рода. Обозначим через Π_b прямоугольник $\Pi_b = [a,\,b) \times Y$. Предположим, что функция $w = f(x,\,y)$ такова, что при каждом фиксированном $y \in Y$ она интегрируема в несобственном смысле по $x \in [a,\,b)$. При этих условиях на множестве Y определена функция

$$J(y) = \int\limits_a^b f(x,\,y)\,dx, \qquad y \in Y, \tag{2.6}$$ dfn_int_nes_2

которую будем называть *несобственным интегралом вторго рода, зависящим от параметра*.

dfn_P5.2 Определение 2.2. Несобственный интеграл (2.6) *равномерно сходится по параметру* $y \in Y$, если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, зависящее от ε, что для всех чисел η таких, что $0 < \eta < \delta$ и для любого $y \in Y$, выполняется неравенство $\left|\int\limits_{b-\eta}^{b} f(x,\,y)\,dx\right| < \varepsilon$.

Запишем это определение в символьном виде.

$$\left[\int\limits_a^b f(x,\,y)\,dx \text{ сходится равномерно по } \ y\in Y\right] \ \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\Bigl[\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta=\delta(\varepsilon)>0:\ \forall\,\eta\in(0,\,\delta)\ \&\ \forall y\in Y\ \longmapsto$$

$$\longmapsto \left|\ \int\limits_{b-\eta}^{b} f(x,\,y)\,dx\right|<\varepsilon\Bigr].$$

Замечание 2.1. Далее будем рассматривать несобственные интегралы первого рода и все утверждения формулировать для них.

2.3. Равномерная сходимость несобственного интеграла по параметру. Справедлив следующий критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла по параметру.

Теорема 2.6 (Коши). *Для того, чтобы несобственный интеграл (2.5) равномерно сходился по параметру y на отрезке $[c,\,d]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие:*

$$\forall\,\varepsilon>0\quad \exists\,A=A(\varepsilon)\geqslant a:\ \forall\,R'\geqslant A\ \&\ \forall\,R''\geqslant A$$

$$\&\ \forall\,y\in Y\longmapsto \left|\int\limits_{R'}^{R''} f(x,\,y)\,dx\right|<\varepsilon.$$

Справедливость критерия непосредственно следует из определения 2.1.

Приведем отрицание условия критерия Коши в символьном виде:

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0: \ \forall\, A \geqslant a \ \exists\, R'_A \geqslant A \ \&\ \exists\, R''_A \geqslant A$$

$$\&\ \exists\, y_A \in Y: \ \left| \int\limits_{R'_A}^{R''_A} f\big(x,\, y_A\big)\, dx \right| \geqslant \varepsilon_0. \qquad (2.7)$$ P.5.7

Пример 2.1. Используя отрицание условия критерия Коши (2.7), докажем, что интеграл $I(y) = \int\limits_{2}^{+\infty} \dfrac{dx}{x \ln^y x}$ сходится неравномерно по параметру y на множестве $(1,\, +\infty)$.

Для любого натурального числа $n > 1$ найдутся такие числа $R'_n = e^n$, $R''_n = e^{2n}$ и $y_n = 1 + \dfrac{1}{n} \in (1,\, +\infty)$, что выполняется

$$\left| \int\limits_{R'_n}^{R''_n} \frac{dx}{x \ln^{y_n} x} \right| = \left| \frac{\ln^{-y_n+1} x}{-y_n+1} \Bigg|_{R'_n}^{R''_n} \right| = n \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}} - \frac{1}{\sqrt[n]{2n}} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[n]{2n}} \left(\frac{2^{1/n} - 1}{1/n} \right) \to \ln 2, \qquad n \to \infty.$$

Следовательно, найдется такое натуральное число n_0, что для всех $n \geqslant n_0$ найдутся такие $R'_n = e^n$, $R''_n = e^{2n}$ и $y_n = 1 + \dfrac{1}{n} \in (1,\, +\infty)$, что выполняется следующее неравенство: $\left| \int\limits_{R'_n}^{R''_n} \dfrac{dx}{x \ln^{y_n} x} \right| \geqslant \dfrac{\ln 2}{2} = \varepsilon_0$.

Таким образом (см. (2.7)), несобственный интеграл $I(y)$ сходится неравномерно по параметру $y \in (1,\, +\infty)$.

Дадим достаточные признаки равномерной сходимости несобственного интеграла по параметру.

thm_pr_Veirshtr Теорема 2.7. (признак Вейерштрасса). *Предположим, что функция $w = f(x,\, y)$ определена в замкнутой* *полосе* Π_∞ *и для каждого* $y \in Y$ *интегрируема по* x *на отрезке* $[a,\, R]$ *для всех* $R > a$. *Пусть для всех точек* Π_∞ *выполнено неравенство* $\bigl|f(x,\, y)\bigr| \leqslant g(x)$. *Тогда из сходимости интеграла* $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *следует равномерная сходимость по параметру* y *на множестве* Y *интеграла* (2.5).

Уточнить ссылку!

Доказательство. В силу критерия Коши (см. теорему) сходимости несобственного интеграла от функции g справедливо следующее условие:

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, A = A(\varepsilon) \geqslant a:\ \forall\, R' > A \ \&\ \forall\, R'' > A \ \longmapsto \ \longmapsto \int\limits_{R'}^{R''} g(x)\,dx < \varepsilon.$$

Применим неравенство, указанное в условии теоремы, тогда для всех $y \in Y$ выполняется

$$\left|\int\limits_{R'}^{R''} f(x,\, y)\,dx\right| \leqslant \int\limits_{R'}^{R''} \bigl|f(x,\, y)\bigr|\,dx \leqslant \int\limits_{R'}^{R''} g(x)\,dx < \varepsilon,$$

т. е. выполнено условие критерия Коши (теорема 2.6) равномерной сходимости интеграла (2.5) по параметру y на множестве Y. $\triangle$

Следствие. *Предположим, что функция* $w = \varphi(x,\, y)$ *ограничена в замкнутой полосе* Π_∞ *и для каждого* y *из множества* Y *интегрируема по* x *на отрезке* $[a,\, R]$ *для всех* $R > a$. *Тогда, если сходится интеграл* $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} \bigl|h(x)\bigr|\,dx$, *то сходится равномерно по параметру* y *на множестве* Y *интеграл* $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x,\, y)\,h(x)\,dx$.

Доказательство. Положим $f(x, y) = \varphi(x, y)\, h(x)$ и $g(x) = M\big|h(x)\big|$ для $M = \sup\limits_{\Pi_\infty} |\varphi|$. Затем применим теорему thm_pr_Veirshtr 2.7. △

Пример 2.2. Докажем, что несобственный интеграл $I(y) = \int\limits_1^{+\infty} e^{-yx^4}\, dx$ сходится равномерно по параметру y на множестве $E = [\alpha, +\infty)$, где $\alpha > 0$.

Обозначим $\Pi = [1, +\infty) \times [\alpha, +\infty)$. Поскольку имеет место неравенство $e^{-yx^4} \leqslant e^{-\alpha x^4}$ для всех $(x, y) \in \Pi$, то надо исследовать на сходимость несобственный интеграл $I_\alpha = \int\limits_1^{+\infty} e^{-\alpha x^4}\, dx.$

Представим интеграл I_α в следующем виде:

$$I_\alpha = -\frac{1}{4\alpha} \int\limits_1^{+\infty} (-4\alpha x^3)\, e^{-\alpha x^4} \cdot \frac{1}{x^3}\, dx = -\frac{1}{4\alpha} \int\limits_1^{+\infty} f(x) \cdot g(x)\, dx.$$

Непрерывная функция $f(x) = (-4\alpha x^3)\, e^{-\alpha x^4}$ имеет ограниченную на множестве $[1, +\infty)$ первообразную, равную $e^{-\alpha x^4}$ и $e^{-\alpha x^4} \leqslant 1$, а функция $g(x) = \dfrac{1}{x^3}$ непрерывно дифференцируема, монотонна и $g(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Тогда согласно признаку Дирихле сходимости несобственного интеграла (см. теорему), несобственный интеграл I_α сходится. Уточнить ссылку!

Следовательно, исходный несобственный интеграл $I(y)$ сходится равномерно про параметру y на множестве E по признаку Вейерштрасса (см. теорему thm_pr_Veirshtr 2.7).

thm_pr_Dirichlet

Теорема 2.8. (признак Дирихле). *Предположим, что функция $w = f(x, y)$ определена в замкнутой полосе Π_∞ и для каждого $y \in Y$ интегрируема по x на отрезке $[a, R]$ для всех $R > a$. Пусть выполнены следующие условия:*

1) *существует такая положительная постоянная M, что для всех $R > a$ и для любого $y \in Y$ выполняется* $\left|\int\limits_a^R f(x,\,y)\,dx\right| \leqslant M$;
2) *функция $w = g(x)$ непрерывно дифференцируема, монотонна и стремится к нулю при $x \to +\infty$.*

Тогда несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x,\,y)\,g(x)\,dx$ *сходится равномерно по параметру y на множестве Y.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству признака Дирихле сходимости несобственных интегралов (см. теорему).

Уточнить ссылку!

Приведем без доказательства еще один достаточный признак равномерной сходимости по параметру несобственного интеграла.

thm_pr_Dini

Теорема 2.9. (признак Дини). *Предположим, что функция $w = f(x,\,y)$ непрерывна и неотрицательна в Π_∞. Пусть для каждого $y \in Y$ сходится несобственный интеграл (2.5) и функция $J(y)$ непрерывна на множестве Y. Тогда несобственный интеграл $J(y)$ сходится равномерно по параметру y на множестве Y.*

dfn_int_nes_1

§3. Непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость несобственного интеграла, зависящего от параметра

В этом параграфе будем использовать следующие обозначения: $\Pi_\infty = [a,\,+\infty) \times [c,\,d]$ — замкнутая полоса и $J = J(y)$ — несобственный интеграл вида (2.5).

dfn_int_nes_1

Сформулируем свойства $J(y)$ несобственного интеграла, зависящего от параметра $y \in [c,\,d]$, которые вытекают из его равномерной сходимости по параметру.

thm_5P.9

Теорема 2.10. *Пусть функция $w = f(x,\,y)$ непрерывна в Π_∞ и несобственный интеграл $J = J(y)$ сходится* *равномерно по параметру на отрезке* $[c,\, d]$*, тогда функция* $J = J(y)$ *непрерывна на отрезке* $[c,\, d]$.

Доказательство. Введем следующее обозначение: $J_n = J_n(y) = \int\limits_a^{a+n} f(x,\, y)\, dx$. В силу теоремы thm_P5.1 2.1 для каждого $n \in \mathbb{N}$ функция J_n непрерывна на отрезке $[c,\, d]$, причем $J_n(y)$ сходится к $J(y)$ при $n \to \infty$. Докажем, что функциональная последовательность $\{J_n(y)\}$ сходится равномерно на отрезке $[c,\, d]$ к функции $J = J(y)$ при $n \to \infty$.

Воспользуемся равномерной сходимостью по параметру y на отрезке $[c,\, d]$ несобственного интеграла $J = J(y)$: для любого наперед заданного положительного числа ε найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех номеров $n \geqslant N$ и для любого $y \in [c,\, d]$ выполнено неравенство

$$\left| \int\limits_a^{+\infty} f(x,\, y)\, dx - \int\limits_a^{a+n} f(x,\, y)\, dx \right| = \left| \int\limits_{a+n}^{+\infty} f(x,\, y)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Следовательно, для всех номеров $n \geqslant N$ и для любого $y \in [c,\, d]$ выполнено $\left|J_n(y) - J(y)\right| < \varepsilon$. Последовательность $\{J_n(y)\}$ сходится равномерно на отрезке $[c,\, d]$ при $n \to \infty$ к функции $J(y)$, а в силу непрерывности функций $J_n(y)$ на отрезке $[c,\, d]$, предельная функция $J(y)$ также является непрерывной на отрезке $[c,\, d]Y$ (см. теорему). $\triangle$ Уточнить ссылку!

thm_P5.11 Теорема 2.11. *Пусть функции* f *и* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *непрерывны в* Π_∞ *и для некоторого* $y_0 \in [c,\, d]$ *несобственный интеграл*

$J(y_0) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,\, y_0)\, dx$ *сходится, а несобственный интеграл* $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\, y)\, dx$ *сходится равномерно по параметру y на отрезке $[c,\, d]$, тогда несобственный интеграл $J(y)$ сходится равномерно по параметру y на отрезке $[c,\, d]$ и производная $J'(y)$ может быть найдена по формуле $J'(y) = I(y)$.*

Доказательство. По-прежнему будем использовать обозначение $J_n(y) = \int\limits_a^{a+n} f(x,\, y)\, dx$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ функция $J_n(y)$ дифференцируема на отрезке $[c,\, d]$ и верно равенство $J_n'(y) = \int\limits_a^{a+n} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\, y)\, dx = I_n(y)$ (см. теорему thm_5P.3 2.3).

Функциональная последовательность $\{I_n(y) = J_n'(y)\}$ сходится равномерно на отрезке $[c,\, d]$ к функции $I(y)$ при $n \to \infty$, числовая последовательность $\{J_n(y_0)\}$ сходится к $J(y_0)$ при $n \to \infty$. Тогда функциональная последовательность $\{J_n(y)\}$ сходится равномерно на отрезке $[c,\, d]$ к функции $J(y)$ при $n \to \infty$ и $J_n'(y) \to J'(y) = I(y)$ при $n \to \infty$. $\triangle$

thm_P5.11 Теорема 2.12. *Пусть функция $w = f(x,\, y)$ непрерывна в Π_∞, а интеграл $J(y)$ сходится равномерно на отрезке $[c,\, d]$. Тогда интеграл $J(y)$ можно интегрировать по параметру y на отрезке $[c,\, d]$, причем*

$$\int\limits_c^d J(y)\, y = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^{+\infty} f(x,\, y)\, dx = \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^d f(x,\, y)\, dy.$$

Доказательство. Несобственный интеграл $J(y)$ равномерно сходится по параметру y на отрезке $[c,\, d]$, т. е. выполнено

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, A = A(\varepsilon) \geqslant a:\ \forall\, R > A\ \ \&\ \forall y \in [c,\, d]\ \longmapsto$$
$$\longmapsto \left| \int\limits_R^{+\infty} f(x,\, y)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{d - c}.$$

Кроме того, из равномерной сходимости интеграла $J(y)$ по параметру следует (см. теорему 2.10), что функция $J(y)$ непрерывна на отрезке $[c,\, d]$, а поэтому она интегрируема на отрезке $[c,\, d]$.

Для любого $R > A$ верно (см. теорему 2.2)

$$\int\limits_c^d J(y)\, dy = \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^R f(x,\, y)\, dx + \int\limits_R^{+\infty} f(x,\, y)\, dx \right] dy =$$
$$= \int\limits_a^R \left[\int\limits_c^d f(x,\, y)\, dy \right] dx + \int\limits_c^d \left[\int\limits_R^{+\infty} f(x,\, y)\, dx \right] dy.$$

Поэтому

$$\left| \int\limits_c^d J(y)\, dy - \int\limits_a^R \left[\int\limits_c^d f(x,\, y)\, dy \right] dx \right| =$$
$$= \left| \int\limits_c^d \left[\int\limits_R^{+\infty} f(x,\, y)\, dx \right] dy \right| < \frac{\varepsilon}{d - c} \int\limits_c^d dy = \varepsilon. \qquad \triangle$$

thm_P5.13 Теорема 2.13. *Пусть функция $w = f(x,\, y)$ определена, неотрицательна и непрерывна для $x \geqslant a$ и $y \geqslant c$. Предположим, что для любого натурального n интеграл $J(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,\, y)\, dx$ сходится равномерно по параметру y*

на отрезке $[c,\, c+n]$*, а интеграл* $I(x) = \int\limits_c^{+\infty} f(x,\, y)\, dy$ *сходится равномерно по параметру* x *на отрезке* $[a,\, a+n]$.

Если существует хотя бы один из повторных интегралов $\int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^{+\infty} f(x,\, y)\, dy$ *или* $\int\limits_c^{+\infty} dy \int\limits_a^{+\infty} f(x,\, y)\, dx$*, то существует и другой повторный интеграл и эти интегралы равны.*

Доказательство. Предположим, что сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^{+\infty} f(x,\, y)\, dy$. Тогда, в силу равномерной сходимости несобственного интеграла $J(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,\, y)\, dx$ по параметру y на отрезке $[c,\, c+n]$ из теоремы 2.12 следует

$$g_n = \int\limits_c^{c+n} dy \int\limits_a^{+\infty} f(x,\, y)\, dx = \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^{c+n} f(x,\, y)\, dy \leqslant \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^{+\infty} f(x,\, y)\, dy.$$

Это выполнено для любого $n \in \mathbb{N}$.

Таким образом, числовая последовательность $\{g_n\}$ возрастает и ограничена сверху. Следовательно, последовательность $\{g_n\}$ сходится, т. е. сходится повторный интеграл и справедливо неравенство

$$\int\limits_c^{+\infty} dy \int\limits_a^{+\infty} f(x,\, y)\, dx \leqslant \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^{+\infty} f(x,\, y)\, dy.$$

Так как оба повторных интеграла сходятся, то, поменяв местами переменные x и y и повторив рассуждения, получим неравенство

$$\int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^{+\infty} f(x,\,y)\,dy \leqslant \int\limits_c^{+\infty} dy \int\limits_a^{+\infty} f(x,\,y)\,dx.$$

Таким образом, имеет место указанное в условии теоремы равенство. $\triangle$

Замечание 2.2. На несобственные интегралы второго рода переносятся все утверждения, сформулированные для несобственных интегралов первого рода. Для этого, например, можно рассматривать функциональные последовательности $J_n(y) = \int\limits_a^{b-1/n} f(x,\,y)\,dx$.

§4. Применение теории к вычислению некоторых несобственных интегралов

4.1. Интеграл $J(y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-yx}\,\dfrac{\sin x}{x}\,dx$. Введем обозначение $\Pi_\alpha = [0,\,+\infty)\times[0,\,\alpha]$ для любого $\alpha > 0$. Заметим, что функция $f(x,\,y) = e^{-yx}\,\dfrac{\sin x}{x}$ неопределена при $x = 0$, но для любого фиксированного значения y выполняется $f(x,\,y) \to 1$ при $x \to 0$. Поэтому, определив по непрерывности функцию f в точках $(0,\,y)$ единицей, получим непрерывную на множестве Π_α функцию. Кроме того, заметим, что функция $g(x,\,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y} = -e^{-yx}\sin x$ непрерывна в Π_α.

Первообразная функции g имеет следующий вид:

$$\varPhi(x,\,y) + C = e^{-yx}\,\frac{y\sin x + \cos x}{1+y^2} + C. \qquad (2.8)$$ P5.8

Функция $\varPhi$ такова, что для всех точек $(x,\,y) \in \Pi_\alpha$ справедливо неравенство: $\bigl|\varPhi(x,\,y)\bigr| \leqslant \dfrac{1+y}{1+y^2} \leqslant 2$.

Оценим интеграл $\int\limits_R^{+\infty} f(x,\,y)\,dx$ для $R>0$:

$$\left|\int\limits_R^{+\infty} e^{-yx}\,\frac{\sin x}{x}\,dx\right| = \left|\frac{\Phi(x,\,y)}{x}\Big|_R^{+\infty} + \int\limits_R^{+\infty} \frac{\Phi(x,\,y)}{x^2}\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\bigl|\Phi(R,\,y)\bigr|}{R} + \int\limits_R^{+\infty} \frac{\bigl|\Phi(x,\,y)\bigr|}{x^2}\,dx \leqslant \frac{2}{R} + 2\int\limits_R^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{4}{R}.$$

Для произвольного $\varepsilon>0$ выбираем A таким образом, что $\dfrac{4}{A}<\varepsilon$. Тогда для любого $R\geqslant A$ и для любого $y\in[0,\,\alpha]$ выполняется неравенство $\left|\int\limits_R^{+\infty} e^{-yx}\,\dfrac{\sin x}{x}\,dx\right|<\varepsilon$. Таким образом, несобственный интеграл $J(y)$ сходится равномерно по параметру y на множестве $[0,\,\alpha]$ для любого $\alpha>0$. Следовательно, функция $J(y)$ непрерывна на каждом отрезке $[0,\,\alpha]$ (теорема 2.10), а поэтому $J(y)$ непрерывна на множестве $[0,\,+\infty)$.

Докажем, что интеграл $I(y)=\int\limits_0^{+\infty} g(x,\,y)\,dx$ сходится равномерно по параметру y на каждом отрезке $[\beta,\,\alpha]$, $0<\beta<\alpha$. На множестве $[0,\,+\infty)\times[\beta,\,\alpha]$ выполняется неравенство $\bigl|g(x,\,y)\bigr|\leqslant e^{-\beta x}$ и интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\,dx$ сходится. Следовательно (см. теорему 2.7), несобственный интеграл $I(y)$ сходится равномерно по параметру y на любом отрезке $[\beta,\,\alpha]$, $0<\beta<\alpha$.

Из теоремы thm_P5.11 2.12 получаем, что функция $J(y)$ дифференцируема на любом отрезке $[\beta,\, \alpha]$, $0 < \beta < \alpha$, и справедливо равенство $J'(y) = I(y)$. Тогда $J'(y) = -\dfrac{1}{1+y^2}$ (см. выражение (P5.8 2.8)).

Найдем интеграл $J(y)$ из полученного выражения для $J'(y)$: $J(y) = -\displaystyle\int \frac{dy}{1+y^2} = -\operatorname{arctg} y + C$. Осталось определить постоянную C. Поскольку $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| \leqslant 1$ при $x \geqslant 0$, то $|J(y)| \leqslant \displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-yx}\, dx = \frac{1}{y}$. Следовательно, $\lim\limits_{y\to+\infty} |J(y)| = 0$, а поэтому и $\lim\limits_{y\to+\infty} J(y) = 0$. Таким образом, $C = \dfrac{\pi}{2}$.

Окончательно находим

$$J(y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-yx}\, \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} y. \qquad (2.9)$$ P5.9

4.2. Интеграл Дирихле и аналитическое представление функции sgn $\boldsymbol{y}$. *Интегралом Дирихле* называется интеграл: $J_0 = \displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$.

Используем результаты исследования интеграла $J(y)$, полученные в предыдущем разделе. Поскольку справедливо $J_0 = \lim\limits_{y\to+0} J(y)$, а функция $J(y)$ непрерывна на множестве $[0,\, +\infty)$, то из (P5.9 2.9) находим

$$J_0 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}. \qquad (2.10)$$ int_Dirichlet

Обозначим $K(y) = \displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin yx}{x}\, dx$. Заметим, что если параметр y равен нулю, то $K(0) = 0$. Если $y > 0$, то сделав замену $z = yx$, получаем $K(y) = J_0 = \dfrac{\pi}{2}$. Если $y < 0$, то замена $-z = yx$ дает $K(y) = -J_0 = -\dfrac{\pi}{2}$. Окончательно находим

$$\operatorname{sgn} y = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin yx}{x}\, dx. \tag{2.11}$$

int_sgn

Выражение (int_sgn 2.11) называется *аналитическим представлением функции* $\operatorname{sgn} y$.

§5. Эйлеровы интегралы

Изучим свойства важных неэлементарных функций, называемых *эйлеровыми интегралами* или *интегралами Эйлера*.

5.1. Интеграл Эйлера первого рода. Так называется интеграл вида

$$B(p,\, q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx. \tag{2.12}$$

beta_funct

Функция $B(p,\, q)$ называется *бета–функцией*.

5.1.1. *Область определения функции* $B(p,\, q)$. Если для параметров p и q выполнены неравенства $p \geqslant 1$ и $q \geqslant 1$, то подынтегральная функция $f(x,\, p,\, q) = x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ непрерывна на множестве $[0,\, 1] \times [1,\, \alpha] \times [1,\, \beta]$ для всех $\alpha > 1$ и $\beta > 1$. Следовательно, функция $B(p,\, q)$ определена на множестве $[1,\, +\infty) \times [1,\, +\infty)$.

Если $p < 1$ и $q < 1$, то подынтегральная функция $f(x,\, p,\, q) = x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ неограничена при $x \to +0$ и $x \to 1-0$, поэтому $B(p,\, q)$ есть несобственный интеграл, зависящий от параметров.

При $p < 1$ и $q < 1$ исследуем сходимость несобственного интеграла $B(p,\, q)$:

$$B(p,\,q) = \int\limits_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx + \int\limits_{1/2}^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \\ = B_0(p,\,q) + B_1(p,\,q).$$

Интеграл B_0 имеет особенность в точке $x = 0$ и функция $(1-x)^{q-1}$ непрерывна на отрезке $[0,\,1/2]$, следовательно, она ограничена на этом отрезке. Поэтому справедлива оценка $B_0(p,\,q) \leqslant C_1 \int\limits_0^{1/2} \dfrac{dx}{x^{1-p}}$. Таким образом, $B_0(p,\,q)$ сходится при $0 < p < 1$ и для любого q.

Интеграл $B_1(p,\,q)$ имеет особенность в точке $x = 1$ и функция x^{p-1} непрерывна на отрезке $[1/2,\,1]$, следовательно, она ограничена на этом отрезке. Поэтому справедлива оценка $B_1(p,\,q) \leqslant C_0 \int\limits_{1/2}^{1} \dfrac{dx}{(1-x)^{1-q}}$. Таким образом, $B_1(p,\,q)$ сходится при $0 < q < 1$ и для любого p.

Обозначим $\Pi = (0,\,+\infty) \times (0,\,+\infty)$. Справедливо следующее утверждение.

Предложение. *Функция $B(p,\,q)$ определена на* Π.

5.1.2. *Непрерывность функции $B(p,\,q)$.* Пусть p_0 и q_0 таковы, что $0 < p_0 \leqslant p$ и $0 < q_0 \leqslant q$. Введем обозначение: $\Pi_0 = [p_0,\,+\infty) \times [q_0,\,+\infty)$. Тогда для функции $f(x,\,p,\,q)$ справедлива оценка: $f(x,\,p,\,q) \leqslant x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}$ на множестве $(0,\,1) \times \Pi_0$ и интеграл $B(p_0,\,q_0)$ сходится.

Следовательно, по признаку Вейерштрасса (см. теорему 2.7), интеграл $B(p,\,q)$ сходится равномерно для указанных p и q.

Функция $B(p,\,q)$ непрерывна на множестве Π_0 (см. теорему 2.10), а в силу произвольности параметров $p_0 > 0$ и $q_0 > 0$, она непрерывна на Π.

Доказано следующее утверждение

Предложение. *Функция $B(p,\, q)$ непрерывна на множестве* Π.

5.1.3. *Некоторые свойства функции $B(p,\, q)$.* Приведем свойства функции $B(p,\, q)$.

pros_P5.1 Предложение 2.1. *Для любых $(p,\, q) \in \Pi$ выполняется следующее равенство: $B(p,\, q) = B(q,\, p)$.*

Доказательство. В интеграле $B(p,\, q)$ сделаем замену $1 - x = t$, тогда

$$B(p,\, q) = \int\limits_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}\, dt = B(q,\, p). \qquad \triangle$$

Предложение 2.2. *Для любых $(p,\, q) \in \Pi$ выполняются следующие равенства:*

$$B(p,\, q+1) = \frac{q}{p+q}\, B(p,\, q); \tag{2.13}$$ B_f_priv_1

$$B(p+1,\, q) = \frac{p}{p+q}\, B(p,\, q). \tag{2.14}$$ B_f_priv_2

Доказательство. К интеграл $B(p,\, q+1)$ применим формулу интегрирования по частям:

$$B(p,\, q+1) = (1-x)^q\, \frac{x^p}{p}\Big|_0^1 + \frac{q}{p}\int\limits_0^1 x^p(1-x)^{q-1}\, dx =$$

$$= \frac{q}{p}\int\limits_0^1 \Big[x^{p-1}(1-x)^{q-1} - x^{p-1}(1-x)^q\Big]\, dx =$$

$$= \frac{q}{p}\, B(p,\, q) - \frac{q}{p}\, B(p,\, q+1)$$

и

$$\Big(1 + \frac{q}{p}\Big) B(p,\, q+1) = \frac{q}{p}\, B(p,\, q).$$

Откуда получаем равенство (2.13). Равенство (2.14) доказывается аналогично. $\triangle$

Формулы (2.13) и (2.14) называются *формулами приведения* для бета–функции (2.12).

5.2. Интеграл Эйлера второго рода. Так называется интеграл вида

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1}\, dx. \qquad (2.15)$$ gamma_funct

Функция $\Gamma(p)$ называется *гамма–функцией*.

5.2.1. *Область определения функции* $\Gamma(p)$. Подынтегральная функция $f(x,\, p) = e^{-x}x^{p-1}$ неограничена при $x \to +0$ для $p < 1$, поэтому функция (2.15) представляет собой несобственный интеграл по бесконечному промежутку интегрирования, например, $[1,\, +\infty)$ и несобственный интеграл на конечном промежутке, например, $(0,\, 1]$ от неограниченной функции для $p < 1$. Обозначим:

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^1 f(x,\, p)\, dx + \int\limits_1^{+\infty} f(x,\, p)\, dx = \Gamma_0(p) + \Gamma_\infty(p).$$

Поскольку $f(x,\, p) \leqslant x^{p-1}$ при $x > 0$, то интеграл $\Gamma_0(p)$ сходится при $p > 0$.

Представим подынтегральную функцию $f(x,\, p)$ в следующем виде: $f(x,\, p) = e^{-x/2} \cdot \left(e^{-x/2}x^{p-1}\right) = e^{-x/2} \cdot g(x,\, p)$. Поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x,\, p) = 0$ для любого $p > 0$, то верно $g(x,\, p) \leqslant C$. Поэтому $\Gamma_\infty(p) \leqslant C \int\limits_1^{+\infty} e^{-x/2}\, dx = C \cdot \dfrac{2}{\sqrt{e}}$ и интеграл $\Gamma_\infty(p)$ сходится для любого $p > 0$.

Справедливо утверждение.

Предложение. *Функция* $\Gamma(p)$ *определена при* $p > 0$.

5.2.2. *Непрерывность функции* $\Gamma(p)$. Пусть для p выполняется $-1 < p_0 - 1 \leqslant p - 1 \leqslant p_1 - 1$. Тогда справедливо $f(x, p) \leqslant x^{p_0 - 1}$ для всех точек (x, p) из $(0, 1] \times [p_0, p_1]$. Из сходимости несобственного интеграла $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{1-p_0}}$ следует равномерная сходимость $\Gamma_0(p)$ по параметру p на отрезке $[p_0, p_1]$ (признак Вейерштрасса). Соответственно, из неравенства $f(x, p) \leqslant e^{-x} x^{p_1 - 1}$ для $[1, +\infty) \times [p_0, p_1]$, из сходимости несобственного интеграла $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x} x^{p_1-1}\, dx$ и признака Вейерштрасса следует, что $\Gamma_\infty(p)$ сходится равномерно по параметру p на $[p_0, p_1]$.

Таким образом, несобственный интеграл $\Gamma(p)$ сходится равномерно по параметру p на отрезке $[p_0, p_1]$ для любых $0 < p_0 < p_1$. Следовательно, функция $\Gamma(p)$ непрерывна на этом отрезке (теорема thm_5P.9 2.10). В силу произвольности параметров p_0 и p_1, получаем, что функция $\Gamma(p)$ непрерывна на своей области определения.

pros_P5.3 Предложение 2.3. *Функция* $\Gamma(p)$ *непрерывна на множестве* $(0, +\infty)$.

5.2.3. *Некоторые свойства функции* $\Gamma(p)$.

pros_P5.4 Предложение 2.4. *Функция* $\Gamma(p)$ *бесконечно дифференцируема на множестве* $(0, +\infty)$.

Доказательство. Рассмотрим интеграл, который получается из $\Gamma(p)$ дифференцированием по параметру p подынтегральной функции:

$$I^1(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} \ln x \, dx =$$

$$= \int\limits_0^1 f_1(x, p)\, dx + \int\limits_1^{+\infty} f_1(x, p)\, dx = I_0^1(p) + I_\infty^1(p).$$

Пусть p меняется на отрезке $[p_0,\, p_1]$, $0 < p_0 < p_1$. Тогда $\left|f_1(x,\, p)\right| \leqslant \dfrac{|\ln x|}{x^{1-p_0}}$ для все точек $(x,\, p)$ множества $(0,\, 1] \times [p_0,\, p_1]$ и $f_1(x,\, p) \leqslant e^{-x}x^{p_1-1}\ln x$ для всех точек $(x,\, p) \in [1,\, +\infty) \times [p_0,\, p_1]$. Из полученных неравенств и признака Вейерштрасса следует, что несобственные интегралы $I_0^1(p)$ и $I_\infty^1(p)$ сходятся равномерно по параметру p на отрезке $[p_0,\, p_1]$. Таким образом, интеграл $I^1(p)$ сходится равномерно по параметру p на отрезке $[p_0,\, p_1]$ для всех $0 < p_0 < p_1$.

Применив теорему thm_P5.11 2.12, получаем, что функция $\Gamma(p)$ дифференцируема на отрезке $[p_0,\, p_1]$ для всех $0 < p_0 < p_1$, и, следовательно, на множестве $(0,\, +\infty)$, а также верно равенство $\Gamma'(p) = I^1(p)$.

Рассуждая аналогично, легко убедиться, что $\Gamma(p)$ имеет производную любого порядка n на множестве $(0,\, +\infty)$ и верно равенство

$$\Gamma^{(n)}(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}\ln^n x\, dx, \tag{2.16}$$ diff_Gamma

для производной порядка n функции $\Gamma(p)$. △

Предложение 2.5. *Для любых $n \in \mathbb{N}$ и $p > n-1$ справедливо равенство*

$$\Gamma(p+1) = p(p-1)\ldots\bigl(p-(n-1)\bigr)\Gamma\bigl(p-(n-1)\bigr). \tag{2.17}$$ P5.16

Доказательство. К интегралу $\Gamma(p+1)$ применим формулу интегрирования по частям:

$$\Gamma(p+1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^p\, dx = -x^p e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \\ + p\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}\, dx = p\,\Gamma(p).$$

Таким образом, справедливо равенство

$$\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p). \tag{2.18}$$ P5.17

Последовательно применяя формулу (2.18) для всех $n \in \mathbb{N}$ и $p > n - 1$, получаем формулу (2.17). $\triangle$

Формула (2.17) называется *формулой понижения* для гамма-функции $\Gamma(p)$.

Следствие. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ верно*

$$\Gamma(n+1) = n!\,. \tag{2.19}$$ P5.18

Доказательство. Так как $\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1$, то полагая $p = n$ в формуле (2.17), приходим к (2.19) $\triangle$

5.2.4. *Качественная характеристика графика гамма-функции.* Функция $\Gamma(p)$ непрерывна и бесконечно дифференцируема при $p > 0$ (см. предложение 2.3 и предложение 2.4). Тогда из (2.16) получаем следующее неравенство: $\Gamma''(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} \ln^2 x\,dx > 0$. Таким образом, $\Gamma'(p)$ не может иметь более одного нуля.

Заметим, что справедливы равенства $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$. Тогда нуль функции $\Gamma'(p)$ лежит на интервале $(1, 2)$, а поскольку $\Gamma''(p) > 0$, то точка, где $\Gamma'(p)$ обращается в нуль, есть точка минимума функции $\Gamma(p)$.

График функции $\Gamma(p)$ имеет вертикальную асимптоту $p = 0$. Действительно, поскольку $\Gamma(1) = 1$ и (см. формулу (2.18)) $\Gamma(p) = \dfrac{\Gamma(p+1)}{p}$, то из непрерывности в точке $p = 1$ функции $\Gamma(p)$ получаем, что $\Gamma(p) \to +\infty$ при $p \to +0$.

Очевидно, что $\Gamma(p) \to +\infty$ при $p \to +\infty$. Функция $\Gamma(p)$ не имеет наклонных асимптот (этот факт оставим без доказательства).

5.3. Связь между эйлеровыми интегралами. Докажем формулу, которая устанавливает связь между бета–функцией и гамма–функцией.

Теорема 2.14. *Для всех $p > 0$ и $q > 0$ верна формула*

$$B(p,\, q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{2.20}$$

beta-gamma

Доказательство. Выведем формулу (2.20), а потом дадим ее обоснование.

В интеграле (2.12) сделаем замену $x = \dfrac{1}{1+t}$, тогда верно $B(p,\, q) = \displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}\, dt$. Поскольку $B(p,\, q) = B(q,\, p)$ (см. предложение 2.1), то получаем следующее равенство:

$$B(p,\, q) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\, dt. \tag{2.21}$$

P5.21

Теперь в интеграле (2.15) сделаем замену $x = ty$, $t > 0$, тогда справедливо равенство

$$\frac{\Gamma(p)}{t^p} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ty} y^{p-1}\, dy. \tag{2.22}$$

P5.22_0

В выражении (2.22) заменим p на $p+q$, а t — на $1+t$:

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(1+t)y} y^{p+q-1}\, dy. \tag{2.23}$$

P5.22

Равенство (2.23) умножим на t^{p-1} и проинтегрируем по t от 0 до $+\infty$, при этом используем выражение (2.21):

$$\Gamma(p+q)B(p,\, q) = \int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_0^{+\infty} e^{-(1+t)y} y^{p+q-1} t^{p-1}\, dy. \tag{2.24}$$

P5.23

Если в правой части равенства (2.24) можно поменять порядок интегрирования, то, используя (2.22), получаем

$$\Gamma(p+q)B(p,\,q) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-y}y^{p+q-1}\,dy \int\limits_0^{+\infty} e^{-yt}t^{p-1}\,dt =$$

$$= \Gamma(p)\int\limits_0^{+\infty} e^{-y}y^{q-1}\,dy = \Gamma(p)\cdot\Gamma(q). \quad (2.25)$$

Откуда и следует формула (2.20).

Осталось доказать, что в выражении (2.24) можно менять порядок интегрирования. Для этого воспользуемся теоремой 2.13.

Обоснуем формулу (2.20) для $p > 1$ и $q > 1$.

Поскольку функция $f(t,\,y) = e^{-(1+t)y}y^{p+q-1}t^{p-1}$ неотрицательна и непрерывна на множестве $[0,\,+\infty)\times[0,\,+\infty)$, а несобственный интеграл (см. выражение (2.22))

$$I(t) = \int\limits_0^{+\infty} f(t,\,y)\,dy = t^{p-1}\int\limits_0^{+\infty} e^{-(1+t)y}y^{p+q-1}\,dy =$$

$$= \Gamma(p+q)\,\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}$$

есть непрерывная при $0 \leqslant t \leqslant t_0$ для всех $t_0 > 0$ функция, то по признаку Дини (теорема 2.9) несобственный интеграл $I(t)$ сходится равномерно по параметру t на отрезке $[0,\,t_0]$ для всех $t_0 > 0$.

Далее, несобственный интеграл

$$J(y) = \int\limits_0^{+\infty} f(t,\,y)\,dt = y^{p+q-1}e^{-y}\int\limits_0^{+\infty} e^{-yt}t^{p-1}\,dt =$$

$$= \Gamma(p)\,e^{-y}y^{q-1}$$

(см. также выражение (2.22)) есть непрерывная функция на отрезке $[0,\, y_0]$ для всех $y_0 > 0$. Тогда по признаку Дини (теорема 2.9) несобственный интеграл $J(y)$ сходится равномерно по параметру y на отрезке $[0,\, y_0]$ для всех $y_0 > 0$.

Сходимость интеграла $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} dy \int\limits_0^{+\infty} f(t,\, y)\, dt$ установлена, так как он вычислен непосредственно в (2.25).

Таким образом выполнены все условия теоремы 2.13. Поэтому обосновано изменение порядка интегрирования для $p > 1$ и $q > 1$ и формула (2.20) доказана для этих значений параметров p и q.

Предположим, что $p > 0$ и $q > 0$. Формула (2.20) доказана для параметров строго больших единицы, поэтому

$$B(p+1,\, q+1) = \frac{\Gamma(p+1)\cdot\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}. \tag{2.26}$$

Теперь воспользуемся формулами приведения (2.13) и (2.14) для бета–функции:

$$B(p+1,\, q+1) = \frac{p\,q}{(p+q+1)(p+q)}\, B(p,\, q). \tag{2.27}$$

Наконец, воспользуемся формулой понижения (2.18) для гамма–функции, получаем

$$\frac{\Gamma(p+1)\cdot\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)} = \frac{p\,q}{(p+q+1)(p+q)}\,\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{2.28}$$

Из (2.26) следует, что левые части в равенствах (2.27) и (2.28) равны, а поскольку в правых частях этих равенств стоит одна и та же дробь, то справедливо равенство (2.20) для всех $p > 0$ и $q > 0$. $\triangle$

Следствие. *Для любого $p > 0$ справедлива следующая формула:*

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}. \tag{2.29}$$

Формула (2.29) называется *формулой дополнения* для гамма–функции.

Заметим, что из формул (2.20) при $q = 1 - p$ и (2.21) следует, что $B(p,\,1-p) = \Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t}\,dt$. Интеграл, стоящий в правой части полученного равенства, равен $\frac{\pi}{\sin p\pi}$ (этот факт оставим без доказательства)[2.1]. Таким образом, имеет место формула (2.29).

Пример 2.3. Найдем интеграл $I = \int\limits_0^{+\infty} t^{3/4}(1+t)^{-3}\,dt$. Из формулы (2.21) находим, что $I = B\left(\frac{7}{4},\,\frac{5}{4}\right)$. Из формул приведения для бета–функции (2.13) и (2.14) приходим к следующему равенству: $I = \frac{3}{32}\,B\left(\frac{3}{4},\,\frac{1}{4}\right)$. Наконец, из формул (2.20) и (2.29) получаем ответ:

$$I = \frac{3}{32}\,\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(1-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{32}\,\frac{\pi}{\sin\frac{3}{4}\,\pi} = \frac{3\sqrt{2}\pi}{32}.$$

Пример 2.4. Вычислим интеграл $J = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x\,dx}{x^2+a^2}$, для всех $a \neq 0$. Сделаем замену $x^2 = a^2t$, тогда получаем следующее равенство:

[2.1] Строгое доказательство этого факта — вычисление соответствующего интеграла — можно найти в книге: Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2. СПб: Лань, 2009.

$$J = \frac{1}{2|a|} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln\bigl(|a|\,t\bigr)\,dt}{\sqrt{t}(1+t)} =$$

$$= \frac{\ln|a|}{2|a|} \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{-1/2}\,dt}{1+t} + \frac{1}{2|a|} \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{-1/2}\ln t\,dt}{1+t} =$$

$$= \frac{\ln|a|}{2|a|}\,J_1 + \frac{1}{2|a|}\,J_2.$$

Заметим, что интеграл J_2 есть значение следующей функции (см формулу (2.21) при $q = 1 - p$):

$$\frac{d}{dp}\Bigl(B(p,\,1-p)\Bigr) = \frac{d}{dp} \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}\,dt}{1+t} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}\ln t\,dt}{t+1} =$$

$$= \frac{d}{dp}\bigl(\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p)\bigr) = \frac{d}{dp}\Bigl(\frac{\pi}{\sin p\pi}\Bigr) = -\frac{\pi^2\cos p\pi}{\sin^2 p\pi}$$

в точке $p = 1/2$. Поэтому выполняется равенство $J_2 = 0$.

Для интеграла J_1 выполняется:

$$J_1 = \frac{\ln|a|}{2|a|}\,B\biggl(\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\biggr) = \frac{\ln|a|}{2|a|}\,\Gamma\biggl(\frac{1}{2}\biggr)\,\Gamma\biggl(1-\frac{1}{2}\biggr) =$$

$$= \frac{\ln|a|}{2|a|}\,\frac{\pi}{\sin\dfrac{\pi}{2}} = \frac{\pi\ln|a|}{2|a|}.$$

Следовательно, $J = \dfrac{\pi\ln|a|}{2|a|}$.

Пример 2.5. Найдем значение следующего интеграла: $I = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^4 t\cdot\cos^6 t\,dt$. Сделаем замену $x = \sin^2 t$, тогда получается равенство

$$I = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 x^{3/2}(1-x)^{5/2}\,dx = \frac{1}{2}\,B\left(\frac{5}{2},\,\frac{7}{2}\right).$$

Используем формулы приведения (2.13) и (2.14) для бета–функции, формулу дополнения для гамма–функции (2.29), получаем ответ: $I = \dfrac{3}{512}\,\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3\pi}{512}$.

§6. Интеграл Фурье

Применим изложенную теорию для несобственных интегралов, зависящих от параметра, к обоснованию так называемой *интегральной формулы Фурье*.

6.1. Интеграл Фурье как предельный случай ряда Фурье. Проведем формальные рассуждения, не обосновывая пока наши действия.

Рассмотрим функцию f, заданную на отрезке $[-\ell,\,\ell]$, кроме этого предположим, что на отрезке $[-\ell,\,\ell]$ функция f имеет тригонометрический ряд Фурье:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{\ell} + b_k \sin\frac{k\pi x}{\ell},$$

где

$$a_k = \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos\frac{k\pi t}{\ell}\,dt, \qquad k = 0,\,1,\,\ldots$$

и

$$b_k = \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(t)\sin\frac{k\pi t}{\ell}\,dt, \qquad k = 1,\,2,\,\ldots\,.$$

Поэтому справедливо выражение

$$\frac{1}{2\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos\frac{k\pi}{\ell}\,(t-x)\,dt. \tag{2.30}$$

P5.30

Таким образом, функция f имеет полученное разложение при любом $|x| < \ell$.

Переходя к пределу при $\ell \to \infty$, установим «предельную» форму.

Заметим, что первый член в (2.30) стремиться к нулю при $\ell \to \infty$, если сходится несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$. Введем обозначения

$$z_0 = 0,\ z_1 = \frac{\pi}{\ell},\ \ldots,\ z_k = \frac{k\pi}{\ell}, \ldots, \quad \Delta z_k = z_k - z_{k-1} = \frac{\pi}{\ell},$$

и $\Delta z_k \to 0$ при $\ell \to \infty$. Тогда сумма в (2.30) представляется в виде: $\dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\Delta z_k \int\limits_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos z_k(t-x)\,dt$. Это выражение напоминает интегральную сумму по переменной z, $0 < z < +\infty$, функции $I(z) = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos z(t-x)\,dt$.

Следовательно, при $\ell \to \infty$ имеет место выражение

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} dz \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos z(t-x)\,dt. \tag{2.31}$$

P5.31

Полученный интеграл называется *интегралом Фурье функции f*.

Замечание 2.3. Для выражения (2.31) можно использовать другую форму записи:

$$\int\limits_0^{+\infty} \big[a(z)\cos xz + b(z)\sin xz\big]\,dz,$$

где

$$a(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos zt\,dt, \qquad b(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin zt\,dt.$$

Просматривается аналогия с тригонометрическими рядами Фурье. При этом вместо натурального параметра k мы имеем дело с непрерывным параметром z, а вместо ряда имеем интеграл. Функции $a(z)$ и $b(z)$ по своей структуре напоминают коэффициенты Фурье.

6.2. Сходимость интеграла Фурье. Докажем теорему, являющуюся обобщением теорем 2.10 и 2.12.

thm_P5.15 Теорема 2.15. *Пусть функция f принадлежит пространству $L^1_R(-\infty,\,+\infty)$, а функция $w=g(x,\,y)$ непрерывна и ограничена на $\Pi=(-\infty,\,+\infty)\times[c,\,d]$. Тогда*

а) *несобственный интеграл* $J(y)=\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,g(x,\,y)\,dx,$

зависящий от параметра y, непрерывен на отрезке $[c,\,d]$;

б) *функция $J(y)$ интегрируема на отрезке $[c,\,d]$ и справедливо равенство*

$$\int\limits_c^d dy\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,g(x,\,y)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\int\limits_c^d f(x)\,g(x,\,y)\,dy.$$

Доказательство. а) Существует такое положительное число M, что для всех $(x,\,y)\in\Pi$ выполняется неравенство $\big|g(x,\,y)\big|\leqslant M$. Для произвольного $\varepsilon>0$ найдутся такие числа $R'=R'(\varepsilon)$ и $R''=R''(\varepsilon)$, $-\infty<R'<R''<+\infty$, что справедливы следующие неравенства:

$$\int\limits_{-\infty}^{R'} |f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{6M}, \qquad \int\limits_{R''}^{+\infty} |f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{6M}.$$

Пусть y и $y+\Delta y$ принадлежат отрезку $[c,\,d]$. Тогда, в силу равномерной непрерывности функции $w = g(x,\,y)$ на множестве $[R',\,R''] \times [c,\,d]$, для указанного $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число δ, зависящее от ε, что для всех точек $(x,\,y)$ и $(x,\,y+\Delta y)$ таких, что $|\Delta y| < \delta$, выполняется следующее неравенство: $\bigl|g(x,\,y+\Delta y) - g(x,\,y)\bigr| < \dfrac{\varepsilon}{3C}$, где $C = \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx.$

Окончательно получаем

$$\bigl|J(y+\Delta y) - J(y)\bigr| = \Biggl|\int\limits_{-\infty}^{R'} f(x)\,\bigl[g(x,\,y+\Delta y) - g(x,\,y)\bigr]\,dx +$$

$$+ \int\limits_{R'}^{R''} f(x)\,\bigl[g(x,\,y+\Delta y) - g(x,\,y)\bigr]\,dx +$$

$$+ \int\limits_{R''}^{+\infty} f(x)\,\bigl[g(x,\,y+\Delta y) - g(x,\,y)\bigr]\,dx\Biggr| <$$

$$< 2M\,\frac{\varepsilon}{6M} + 2M\,\frac{\varepsilon}{6M} + C\,\frac{\varepsilon}{3C} = \varepsilon.$$

В силу произвольности точки $y \in [c,\,d]$, получаем, что функция $J(y)$ непрерывна на отрезке $[c,\,d]$.

б) Из непрерывности функции $J(y)$ на отрезке $[c,\,d]$ следует ее интегрируемость на указанном отрезке, а из thm_pr_Veirshtr следствия из признака Вейерштрасса (см. теорему 2.7 и ее следствие) следует равномерная сходимость несобственного интеграла $J(y)$ по параметру y на отрезке $[c,\,d]$.

Далее, полностью повторяя доказательство теоремы thm_P5.11 2.12, получим требуемое утверждение. △

Применим теорему thm_P5.15 2.15 для обоснования сходимости интеграла Фурье (P5.31 2.31).

Пусть $J_R(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^R dz \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos z(t-x)\,dt$, где R — произвольное положительное число. Тогда

$$J_R(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt \int\limits_0^R \cos z(t-x)\,dz =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\frac{\sin R(t-x)}{t-x}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x+u)\,\frac{\sin Ru}{u}\,du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} \big[f(x+u)+f(x-u)\big]\,\frac{\sin Ru}{u}\,du.$$

Итак, имеет место равенство

$$J_R(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} \big[f(x+u)+f(x-u)\big]\,\frac{\sin Ru}{u}\,du. \qquad (2.32)$$ P5.32

Выясним вопрос о сходимости $J_R(x)$ при $R \to +\infty$.

thm_pr_Dini_F Теорема 2.16. (признак Дини). *Пусть функция f принадлежит $L^1_R(-\infty, +\infty)$, а $S(x)$ такое число, что при некотором $r > 0$ сходится интеграл* $\displaystyle\int\limits_0^r \frac{|\varphi(u)|}{u}\,du$, *где введено обозначение $\varphi(u) = f(x-u) + f(x+u) - 2S(x)$. Тогда* *интеграл Фурье функции f в точке x сходится и имеет значение $S(x)$.*

Доказательство. Поскольку для $R > 0$ выполняется равенство $1 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin Ru}{u}\,du$ (см. формулу (int_sgn 2.11)), то

$$J_R(x) - S(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u}\sin Ru\,du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{r} \frac{\varphi(u)}{u}\sin Ru\,du + \frac{1}{\pi}\int\limits_r^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u}\sin Ru\,du =$$

$$= J_R^1(x) + J_R^2(x).$$

Из условия теоремы и теоремы Римана об осцилляции следует, что $J_R^1(x) \to 0$ при $R \to +\infty$. Интеграл $J_R^2(x)$ представим в следующем виде:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_r^{+\infty} \frac{f(x+u)+f(x-u)}{u}\sin Ru\,du - \frac{2S(x)}{\pi}\int\limits_{rR}^{+\infty} \frac{\sin z}{z}\,dz.$$

Первый интеграл стремиться к нулю при $R \to +\infty$ в силу теоремы Римана об осцилляции, а второй интеграл стремится к нулю при $R \to +\infty$ в силу определения сходимости несобственного интеграла. $\triangle$

thm_pr_Holder_F

Теорема 2.17. (признак Гёльдера). *Если функция f принадлежит $L_R^1(-\infty, +\infty)$ и в точке x удовлетворяет условию Гёльдера, то интеграл Фурье функции f сходится к $S(x) = \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.*

Доказательство теоремы повторяет доказательство соответствующего признака для рядов Фурье.

6.3. Формулы Фурье и Коши. Предположим, что функция $f \in L^1_R(-\infty, +\infty)$ удовлетворяет в точке x условию Гёльдера и непрерывна в этой точке. Тогда справедлива *формула Фурье* (см. теорему 2.17):

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos z(t-x)\, dt, \qquad (2.33)$$ P5.33

которая имеет место в силу четности внутреннего интеграла по переменной z (см. интеграл Фурье (2.31)).

Из теоремы 2.15 следует, что несобственный интеграл $I(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin z(t-x)\, dt$ сходится и является непрерывной и нечетной функцией переменной z. Нельзя гарантировать существование несобственного интеграла по бесконечному промежутку $(-\infty, +\infty)$ от функции $I(z)$, но он существует в смысле главного значения и справедливо

$$\text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin z(t-x)\, dt = 0.$$

Из полученного равенства и равенства (2.33) находим

$$f(x) = \text{V.p.}\, \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-iz(t-x)}\, dt. \qquad (2.34)$$ P5.34

Формула (2.34) была получена Коши и называется *формулой Коши*.

Обратимся к формуле Фурье (2.33). Если функция f четная, то

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \cos zx\, dz \int\limits_{0}^{+\infty} f(t) \cos zt\, dt; \qquad (2.35)$$ P5.35

если функция f нечетная, то имеет место выражение:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \sin zx \, dz \int\limits_0^{+\infty} f(t) \sin zt \, dt. \tag{2.36}$$

P5.36

Замечание 2.4. Если функция f задана на промежутке $[0, +\infty)$, то продолжая ее четно или нечетно на промежуток $(-\infty, 0]$, получим формулы (2.35) и (2.35) соответственно.

§7. Преобразование Фурье

7.1. Определения. Пусть функция f принадлежит $L^1_R(-\infty, +\infty)$, непрерывна на $(-\infty, +\infty)$ и удовлетворяет в каждой точке x условию Гёльдера[2.2]. Обратимся к формуле Коши (2.34) и обозначим

$$\mathscr{F}(z) = \text{V.p.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \, e^{-izt} \, dt.$$

Тогда из (2.34) следует

$$f(x) = \text{V.p.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{F}(z) \, e^{izx} \, dz.$$

Формально, отличие в выписанных формулах только в знаке в показателе экспоненты.

Эти рассуждения приводят нас к новым определениям.

dfn_preobr_F

Определение 2.3. Назовем выражение

$$F[f](x) = \text{V.p.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(z) \, e^{-izx} \, dz$$

[2.2] Можно потребовать, например, существование односторонних производных в каждой точке x.

прямым преобразованием Фурье функции f; выражение

$$F^{-1}[f](x) = \text{V.p.}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(z)\,e^{izx}\,dz$$

обратным преобразованием Фурье функции f.

Если функция f четная, то из (2.35) находим

$$\mathscr{F}_c^f(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} f(t)\cos zt\,dt, \quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} \mathscr{F}_c^f(z)\cos zx\,dz;$$

если функция f нечетная, то из (2.36) находим

$$\mathscr{F}_s^f(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} f(t)\sin zt\,dt, \quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} \mathscr{F}_s^f(z)\sin zx\,dz.$$

Назовем $\mathscr{F}_c^f$ *косинус–преобразованием функции* f, а $\mathscr{F}_s^f$ — *синус–преобразованием функции* f. Следуя терминологии, введенной в Коши, назовем f и $\mathscr{F}_c^f$ *сопряженными функциями первого рода*, а функции f и $\mathscr{F}_s^f$ — *сопряженными функциями второго рода*.

Выясним связь косинус– и синус–преобразований с введенным в определении 2.3 преобразованием Фурье.

Если функция f четная, то $F[f] = \mathscr{F}_c^f$; если функция f нечетная, то $F[f] = -i\mathscr{F}_s^f$. В общем случае, когда функция f произвольна и $f(x) = g(x) + h(x)$, где обозначена через $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ — четная функция, а через $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ — нечетная функция. Тогда справедливо следующее равенство: $F[f] = \mathscr{F}_c^g - i\mathscr{F}_s^h$.

Приведем пример использования косинус– и синус–преобразования для вычисления несобственных интегралов.

Пример 2.6. Пусть на множестве $[0, +\infty)$ задана функция $f(x) = e^{-ax}$, $a > 0$. Продолжим f четно на промежуток $(-\infty, 0]$, тогда для сопряженных функций первого рода находим для $x \geqslant 0$:

$$\mathscr{F}_c^f(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-at} \cos zt \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{a}{a^2 + z^2};$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \mathscr{F}_c^f(z) \cos zx \, dz = \frac{2a}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos zx}{a^2 + z^2} \, dz.$$

Откуда получаем *интеграл Лапласа*:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos zx}{a^2 + z^2} \, dz = \frac{\pi}{2a} \, e^{-ax}.$$

Продолжая функцию f нечетно, для сопряженных функций второго рода находим:

$$\mathscr{F}_s^f(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-at} \sin zt \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{z}{a^2 + z^2};$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \mathscr{F}_s^f(z) \sin zx \, dz = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{z \sin zx}{a^2 + z^2} \, dz.$$

Таким образом получаем значение второго *интеграла Лапласа*:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{z \sin zx}{a^2 + z^2} \, dz = \frac{\pi}{2} \, e^{-ax}.$$

7.2. Некоторые свойства преобразования Фурье. Сформулируем и докажем свойства прямого и обратного преобразований Фурье, введенных в определении 2.3. dfn_preobr_F

Теорема 2.18. *Пусть функция* $f \in L^1_R(-\infty, +\infty)$ *в каждой точке* $x \in \mathbb{R}$ *непрерывна и имеет односторонние производные, тогда*

$$F\big[F^{-1}[f]\big] = f, \qquad F^{-1}\big[F[f]\big] = f.$$

Доказательство. Используя выражения для $F[f]$ и $F^{-1}[f]$, а также формулу Коши (2.34), получаем

$$F\big[F^{-1}[f]\big](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F^{-1}[f](z)\, e^{-izx}\, dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F^{-1}[f](-z)\, e^{izx}\, dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{izx}\, dz \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-itz}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-iz(t-x)}\, dt = f(x).$$

Аналогично доказывается и другое равенство. △

thm_P5.19 Теорема 2.19. *Пусть функция* $f \in L^1_R(-\infty, +\infty)$ *в каждой точке* $x \in \mathbb{R}$ *непрерывна и имеет односторонние производные, тогда функции* $F[f]$ *и* $F^{-1}[f]$ *равномерно непрерывны на множестве* $(-\infty, +\infty)$ *и справедливы равенства:* $\lim\limits_{x\to\infty} F[f](x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} F^{-1}[f](x) = 0$.

Доказательство. Утверждение докажем для $\operatorname{Re} F[f]$, остальные утверждение доказываются аналогично.

Обозначим $\operatorname{Re} F[f](x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(z) \cos zx\, dz = a(x)$.

Тогда для любых x_1 и x_2 выполняется

$$\left|a(x_1)-a(x_2)\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(z)\big(\cos zx_1 - \cos zx_2\big)\,dz\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(z)|\left|2\sin\frac{z(x_1-x_2)}{2}\cos\frac{z(x_1+x_2)}{2}\right|dz \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{-A}|f(z)|\,dz + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{A}^{+\infty}|f(z)|\,dz +$$

$$+\frac{|x_1-x_2|}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-A}^{A}\big|zf(z)\big|\,dz = J_1 + J_2 + |x_1-x_2|J_3. \quad (2.37)$$ P5.37

Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число $A = A(\varepsilon)$, что выполняется неравенства $J_1 < \dfrac{\varepsilon}{3}$ и $J_2 < \dfrac{\varepsilon}{3}$. При этом $J_3 = M(\varepsilon)$ поскольку функция $zf(z)$ непрерывна на отрезке $\big[-A(\varepsilon),\, A(\varepsilon)\big]$, а поэтому интегрируема на нем.

Выберем $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{3M(\varepsilon)}$. Тогда для всех x_1 и x_2 таких, что $|x_1 - x_2| < \delta$ из (2.37) следует, что $\big|a(x_1) - a(x_2)\big| < \varepsilon$. Итак, функция $a(x)$ равномерно непрерывна на числовой оси. Из теоремы Римана об осцилляции следует равенство $\lim\limits_{x\to\infty} a(x) = 0$. $\triangle$

thm_P5.20 Теорема 2.20. *Пусть функции f и xf принадлежат $L^1_R(-\infty, +\infty)$, функция f в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ непрерывна и имеет односторонние производные. Тогда функция $F[f]$ непрерывно дифференцируема на $(-\infty, +\infty)$ и справедливо равенство* $\dfrac{d}{dx}\big(F[f](x)\big) = F\big[(-iz)f\big](x)$.

Доказательство. Поскольку для всех $x \in (-\infty, +\infty)$ выполняется $\big|(-iz)f(z)\,e^{-izx}\big| = |zf(z)|$, а функция $zf(z)$ принадлежит $L^1_R(-\infty, +\infty)$, то несобственный интеграл

$I(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (-iz) f(z)\, e^{-izx}\, dz$ сходится равномерно по параметру x на любом отрезке $[-A, A]$ и функция $I(x)$ непрерывна на любом таком отрезке. Следовательно, функция $F[f]$ непрерывно дифференцируема на $(-\infty, +\infty)$ и верно равенство $\dfrac{d}{dx}\big(F[f](x)\big) = I(x) = F[(-iz)f](x)$. $\triangle$

Следствие. *Пусть функции f, xf, …, $x^n f$ принадлежат $L^1_R(-\infty, +\infty)$, функция f в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ непрерывна и имеет односторонние производные. Тогда функция $F[f]$ обладает непрерывными производными до порядка n включительно на $(-\infty, +\infty)$ и для любого k, $k = 1, \ldots, n$, справедливы на $(-\infty, +\infty)$ следующие равенства:* $\dfrac{d^k}{dx^k}\big(F[f](x)\big) = F\big[(-iz)^k f\big](x)$.

Доказательство следствия сводится к применению соответствующее число раз теоремы thm_P5.20 2.20.

thm_P5.21 Теорема 2.21. *Пусть функция f непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$, а функция f' имеет односторонние производные в каждой точке $x \in \mathbb{R}$, причем функции f и f' принадлежат пространству $L^1_R(-\infty, +\infty)$. Тогда для любого $x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $F[f'](x) = ix\, F[f](x)$.*

Доказательство. Поскольку $\displaystyle\int\limits_0^x f'(t)\, dt = f(x) - f(0)$ и несобственный интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} f'(t)\, dt$ сходится, то существует предел при $x \to +\infty$ функции f и $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Аналогично получаем, что $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

Справедливо следующее равенство:

$$F\big[f'\big](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(z)\, e^{-izx}\, dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, f(z)\, e^{-izx}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{ix}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(z)\, e^{-izx}\, dz =$$

$$= ixF[f](x). \qquad \triangle$$

Следствие. *Пусть функция $f^{(n-1)}$ непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$, а функция $f^{(n)}$ имеет односторонние производные в каждой точке $x \in \mathbb{R}$, причем f, f', ..., $f^{(n)}$ принадлежат пространству $L^1_R(-\infty, +\infty)$. Тогда для любого $x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $F[f^{(n)}](x) = (ix)^n F[f](x)$ и верна асимптотическая оценка $F[f](x) = o\Big(\dfrac{1}{x^n}\Big)$ при $x \to \infty$.*

Доказательство следствия получаем из теорем 2.21 и 2.19.

7.3. Применение преобразования Фурье к решению интегральных уравнений. Решим интегральное уравнение $\int\limits_0^{+\infty} g(z)\sin xz\, dz = f(x)$, где функция f задана и имеет вид: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\sin x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi; \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$

Из формулы Фурье (2.36) получаем

$$\frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \sin xt\, dx \int\limits_0^{+\infty} g(z)\sin zx\, dz = g(t).$$

Поэтому $g(t) = \dfrac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} f(x) \sin tx \, dx$. Это равенство и позволяет найти функцию g:

$$
\begin{aligned}
g(t) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \int\limits_0^{\pi} \sin x \sin tx \, dx = \\
= \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi} \bigl[\cos x(t-1) - \cos x(t+1)\bigr] \, dx = \\
= \frac{\sin x(t-1)}{2(t-1)}\Big|_0^{\pi} - \frac{\sin x(t+1)}{2(t+1)}\Big|_0^{\pi} = \\
= \frac{\sin \pi t}{2}\Bigl[-\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1}\Bigr] = \frac{\sin \pi t}{1-t^2}.
\end{aligned}
$$

ГЛАВА 3

Обобщенные функции

§1. Предварительные сведения

Обозначим через $C^\infty(\mathbb{R})$ линейное пространство функций, имеющих непрерывные производные любого порядка на всей числовой оси.

Определение 3.1. *Носителем функции* $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ назовем замыкание множества тех точек $x \in \mathbb{R}$, для которых верно $\varphi(x) \neq 0$.

Обозначение. $\operatorname{supp}\varphi = \overline{\{\, x \in \mathbb{R}\colon\ \varphi(x) \neq 0\,\}}$.

Определение 3.2. Функция $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ называется *финитной*, если $\operatorname{supp}\varphi$ есть ограниченное множество.

Пусть $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ — линейные пространства, а пространства $\mathscr{N}_1 = (\mathscr{L}_1,\ \|\cdot\|_1)$ и $\mathscr{N}_2 = (\mathscr{L}_2,\ \|\cdot\|_2)$ нормированные.

dfn_l_oper Определение 3.3. Оператор $A\colon\ \mathscr{N}_1 \to \mathscr{N}_2$ называется *линейным*, если для любых элементов f и g пространства $\mathscr{N}_1$ и для любых действительных (или комплексных) чисел α и β справедливо $A(\alpha f + \beta g) = \alpha A(f) + \beta A(g)$.

dfn_n_oper Определение 3.4. Линейный оператор $A\colon\ \mathscr{N}_1 \to \mathscr{N}_2$ называется *непрерывным*, если из сходимости по норме пространства $\mathscr{N}_1$ произвольной последовательности $\{f_n\}$ элементов этого пространства к некоторому элементу f из $\mathscr{N}_1$, следует сходимость по норме пространства $\mathscr{N}_2$ последовательности $\{A(f_n)\}$ элементов пространства $\mathscr{N}_2$ к элементу $A(f) \in \mathscr{N}_2$, т. е. из того, что $\|f_n - f\|_1 \to 0$ при $n \to \infty$, следует, что $\|A(f_n) - A(f)\|_2 \to 0$ при $n \to \infty$.

pros_P6.1 Предложение 3.1. *Для того, чтобы линейный оператор* $A\colon \mathscr{N}_1 \to \mathscr{N}_2$ *был непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы* $\bigl\|A(f_n)\bigr\|_2 \to 0$ *при* $n \to \infty$, *если имеет место* $\bigl\|f_n\bigr\|_1 \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Это утверждение следует непосредственно из определения 3.4.

dfn_o_oper Определение 3.5. Линейный оператор $A\colon \mathscr{N}_1 \to \mathscr{N}_2$ называется *ограниченным*, если существует такая положительная постоянная C, что для любого $f \in \mathscr{N}_1$ справедливо равенство $\bigl\|A(f)\bigr\|_2 \leqslant C\|f\|_1$.

Предложение 3.2. *Если линейный оператор* $A\colon \mathscr{N}_1 \to \mathscr{N}_2$ *ограничен, то он непрерывен.*

Частным случаем линейных операторов являются линейные функционалы. Пусть $\mathscr{L}$ — линейное пространство, а $\mathscr{N} = (\mathscr{L}, \|\cdot\|)$ — нормированное пространство. Для функционала $\ell : \mathscr{N} \to \mathbb{R}$ (или $\ell : \mathscr{N} \to \mathbb{C}$) справедливы определение 3.3 — линейности, определение 3.4 — непрерывности и определение 3.5 — ограниченности функционала ℓ. В этих определениях вместо нормы $\|\cdot\|_2$ следует использовать модуль действительного (или комплексного) числа.

dfn_P6.6 Обозначение. Через (ℓ, f) будем обозначать значение функционала ℓ на элементе $f \in \mathscr{N}$.

Определение 3.6. Последовательность линейных функционалов ℓ_k, $k = 1, 2, \ldots$, определенных на $\mathscr{N}$, *слабо сходится* к линейному функционалу ℓ, определенном на $\mathscr{N}$, если для любого элемента $f \in \mathscr{N}$ выполняется следующее: $(\ell_k, f) \to (\ell, f)$ при $k \to \infty$.

§2. Пространство основных функций

Рассмотрим подпространство $\mathscr{D} = \mathscr{D}(\mathbb{R})$ всех финитных функций линейного пространства $C^\infty(\mathbb{R})$. На нем введем сходимость следующим образом.

dfn_P6.7

Определение 3.7. Будем говорить, что последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{D}$ сходится к $\varphi \in \mathscr{D}$, если

1) найдется такое положительное число R, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется $\operatorname{supp} \varphi_n \subset (-R, R)$;
2) для любого $p \in \mathbb{N}$ функциональная последовательность $\left\{\dfrac{d^p \varphi_n}{dx^p}\right\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$ к $\dfrac{d^p \varphi}{dx^p}$ при $n \to \infty$.

Полученное функциональное пространство $\mathscr{D} = \mathscr{D}(\mathbb{R})$ назовем *пространством основных функций*.

Замечание 3.1. На пространстве $\mathscr{D}$ можно ввести различные нормы, например,

а) $\|\varphi\| = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)|$;

б) $\|\varphi\| = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)| + \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |\varphi'(x)|$;

в) $\|\varphi\| = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)| + \sum\limits_{k=1}^{p} \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} \left|\dfrac{d^k \varphi(x)}{dx^k}\right|$.

Но сходимость ни в одной из указанных норм не соответствует сходимости, введенной в $\mathscr{D}$.

Покажем, что введенное пространство $\mathscr{D}$ не является пустым. Построим функции, принадлежащие пространству $\mathscr{D}$.

exm_P6.1

Пример 3.1. Рассмотрим функцию

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_\varepsilon \exp\Bigl(-\dfrac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}\Bigr), & |x| \leqslant \varepsilon; \\ 0, & |x| > \varepsilon. \end{cases}$$

Здесь C_ε выбирается таким образом, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega_\varepsilon(x)\, dx = 1$.

Функция ω_ε финитна и имеет производную любого порядка на $\mathbb{R}$, т. е. $\omega_\varepsilon \in \mathscr{D}$.

exm_P6_1 Пример 3.2. Пусть $\Omega = (a, b)$, а $\varepsilon > 0$. Обозначим $\Omega_{k\varepsilon} = (a-k\varepsilon, b+k\varepsilon)$, $k = 1, 2, 3$ и $\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_{2\varepsilon}; \\ 0, & x \notin \Omega_{2\varepsilon}; \end{cases}$ — характеристическая функция множества $\Omega_{2\varepsilon}$. Тогда функция $\eta(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \chi(y)\, \omega_\varepsilon(x-y)\, dy$ принадлежит пространству основных функций $\mathscr{D}$.

Действительно, $\eta(x) = 1$, если $x \in \Omega_\varepsilon$ и $\eta(x) = 0$, если $x \in \mathbb{R} \setminus \Omega_{3\varepsilon}$. Таким образом, функция η финитна. Поскольку $\eta(x) = \int\limits_{a-2\varepsilon}^{b+2\varepsilon} \omega_\varepsilon(x-y)\, dy$, то функция $\eta(x)$ принадлежит $C^\infty(\mathbb{R})$ и, кроме того (см. пример 3.2) для любого $x \in \Omega_{3\varepsilon}$ выполняется

$$0 \leqslant \eta(x) \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega_\varepsilon(x-y)\, dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega_\varepsilon(z)\, dz = 1.$$

§3. Пространство обобщенных функций

Определение 3.8. *Обобщенной функцией* называется любой линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций $\mathscr{D}$.

Предложение 3.3. *Множество линейных непрерывных функционалов на $\mathscr{D}$ есть линейное пространство, которое обозначим $\mathscr{D}' = \mathscr{D}'(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Действительно для любых f и g из $\mathscr{D}'$ и любых чисел α и β из $\mathbb{R}$ (или из $\mathbb{C}$) определен функционал $h = \alpha f + \beta g$ следующим образом: для произвольной функции $\varphi \in \mathscr{D}$ имеет место равенство

$$(h, \varphi) = (\alpha f + \beta g, \varphi) = \alpha(f, \varphi) + \beta(g, \varphi). \tag{3.1}$$ P6.1

Покажем, что функционал h является линейным: для любых функций φ и ψ из $\mathscr{D}$ и для любых чисел λ и μ из

$\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) выполняется (в силу определения (3.1) и линейности функционалов f и g):

$$(h,\, \lambda\varphi + \mu\psi) = \alpha(f,\, \lambda\varphi + \mu\psi) + \beta(g,\, \lambda\varphi + \mu\psi) = \\ = \alpha\big[\lambda(f,\, \varphi) + \mu(f,\, \psi)\big] + \beta\big[\lambda(g,\, \varphi) + \mu(g,\, \psi)\big] = \\ = \lambda(h,\, \varphi) + \mu(h,\, \psi).$$

Наконец, докажем, что функционал h непрерывный, при этом используем предложение 3.1. Пусть последовательность $\{\varphi_n\}$ функций из $\mathscr{D}$ сходится к нулю, тогда из определения (3.1) и непрерывности функционалов f и g на $\mathscr{D}$ следует

$$(h, \varphi_n) = \alpha(f, \varphi_n) + \beta(g, \varphi_n) \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Итак функционал h линеен и непрерывен, т. е. $\mathscr{D}'$ есть линейное пространство. △

Определение 3.9. Сходимость последовательности функционалов $\{f_n\}$ к функционалу f в пространстве $\mathscr{D}'$ определим как *слабую* (см. определение 1), т. е. для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}$ выполняется $(f_n,\, \varphi) \to (f,\, \varphi)$ при $n \to \infty$.

Полученное функциональное пространство называется *пространством обобщенных функций* и обозначается $\mathscr{D}'$.

Замечание 3.2. Линейные функционалы на $\mathscr{D}$ не обязаны быть непрерывными на $\mathscr{D}$. Однако в явном виде не построено ни одного линейного разрывного функционала на $\mathscr{D}$. Можно только теоретически доказать их существование, используя аксиому выбора.

3.1. Умножение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую функцию. Пусть функция a принадлежит $C^\infty(\mathbb{R})$, тогда для любой обобщенной функции $f \in \mathscr{D}'$ определим обобщенную функцию $a\, f$ по следующему правилу:

$$(a\, f,\, \varphi) = (f,\, a\, \varphi) \tag{3.2}$$ oper_umn

для всех функций $\varphi \in \mathscr{D}$.

Замечание 3.3. Если $a \in C^\infty(\mathbb{R})$, а $\varphi \in \mathscr{D}$, то $a\, \varphi \in \mathscr{D}$.

Предложение 3.4. *Операция умножения обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую функцию определена корректно.*

Доказательство. Докажем, что $a\,f$ есть линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций $\mathscr{D}$. Сначала докажем его линейность. Для любых функций φ, $\psi \in \mathscr{D}$ и для любых чисел λ и μ из $\mathbb{R}$ (или из $\mathbb{C}$) выполняется

$$(a\,f,\, \lambda\varphi + \mu\psi) = \bigl(f,\, a(\lambda\varphi + \mu\psi)\bigr) = \\ = \lambda(f,\, a\,\varphi) + \mu(f,\, a\,\psi) = \lambda(a\,f,\, \varphi) + \mu(a\,f,\, \psi).$$

Линейность функционала $a\,f$ доказана.

Докажем непрерывность этого функционала. Пусть последовательность функций $\{\varphi_n\}$ из $\mathscr{D}$ сходится к нулю при $n \to \infty$. При этом $a\,\varphi_n \to 0$ при $n \to \infty$, поскольку функция a ограничена на интервале $(-R,\, R)$, в котором содержатся все носители функций φ_n. Тогда справедливо

$$(a\,f,\, \varphi_n) = (f,\, a\,\varphi_n) \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Следовательно функционал $a\,f$ непрерывен на $\mathscr{D}$. $\triangle$

§4. Регулярные и сингулярные обобщенные функции

Приведем примеры обобщенных функций. Они делятся на два класса: регулярные и сингулярные обобщенные функции.

4.1. Регулярные обобщенные функции. Простейшим примером обобщенной функции является функционал, порожденный *локально интегрируемой функцией*

Определение 3.10. Функция f называется *локально интегрируемой*, если функция f абсолютно интегрируема на каждом конечном отрезке.

Замечание 3.4. Локально интегрируемыми функциями являются следующие функции: x^k, $k \in \mathbb{N}$; e^x; $\sin x$;

$\cos x$; $\dfrac{1}{1+x^2}$; $\dfrac{1}{\sqrt[m]{|x|}}$; $\dfrac{\sin x}{x}$. Функции $\dfrac{1}{x^k}$, $k \geqslant 1$; $\dfrac{1}{x^2-1}$; $\dfrac{\cos x}{x}$; $\dfrac{e^x}{x}$ не являются локально интегрируемыми.

Пусть функция $y = f(x)$ является локально интегрируемой, тогда положим

$$(f,\, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \varphi(x)\, dx, \qquad \varphi \in \mathscr{D}. \tag{3.3}$$

Докажем, что функционал, определенный в (3.3), есть линейный непрерывный функционал на $\mathscr{D}$, т. е. является обобщенной функцией.

Для любых функций φ, $\psi \in \mathscr{D}$ и любых чисел λ, $\mu \in \mathbb{R}$ (или из $\mathbb{C}$) в силу определения (3.3) получаем

$$(f,\, \lambda\varphi + \mu\psi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda\varphi + \mu\psi)\, dx = \\ = \lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\, \varphi\, dx + \mu \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\, \psi\, dx = \lambda(f,\, \varphi) + \mu(f,\, \psi).$$

Итак, функционал f линеен.

Докажем, что функционал f является непрерывным. Для любой последовательности $\{\varphi_n\} \subset \mathscr{D}$ такой, что при $n \to \infty$ выполняется $\varphi_n \to 0$ (см. определение 3.7) справедливо $(f,\, \varphi_n) = \displaystyle\int\limits_{-R}^{R} f\varphi_n\, dx \to 0$ при $n \to \infty$, где $R > 0$ таково, что $\operatorname{supp} \varphi_n \subset (-R,\, R)$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Таким образом, функционал вида (3.3) определяет обобщенную функцию из $\mathscr{D}\,'$.

Определение 3.11. Обобщенные функции, определяемые локально интегрируемыми функциями по правилу

(3.3), называются *регулярными обобщенными функциями*, остальные обобщенные функции называются *сингулярными обобщенными функциями*.

Для локально интегрируемых функций справедлив следующий результат.

Предложение 3.5. *Если последовательность локально интегрируемых функций $\{f_k\}$ равномерно на каждом отрезке сходится к локально интегрируемой функции f, то она сходится к f в $\mathscr{D}'$.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathscr{D}$ и $\operatorname{supp}\varphi \subset [-R, R]$. По условию для любого положительного числа ε найдется такой номер $K = K(\varepsilon)$, что для всех номеров $k \geqslant K$ выполняется $\max\limits_{x\in[-R,\,R]} |f_k(x)-f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{C}$, где $C = \int\limits_{-R}^{R} |\varphi(x)|\,dx$. Тогда

$$\bigl|(f_k - f,\, \varphi)\bigr| = \left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (f_k - f)\,\varphi\,dx\right| = \left|\int\limits_{-R}^{R} (f_k - f)\,\varphi\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{x\in[-R,\,R]} |f_k(x) - f(x)| \int\limits_{-R}^{R} |\varphi|\,dx < \frac{\varepsilon}{C}\,C = \varepsilon. \qquad \triangle$$

4.2. Сингулярные обобщенные функции. Приведем пример сингулярной функции. Это δ–функция Дирака, которая определяется следующим образом: для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}$ выполняется $(\delta,\, \varphi) = \varphi(0)$.

Предложение 3.6. *δ–функция Дирака является сингулярной обобщенной функцией.*

Доказательство. Будем доказывать от противного: пусть существует такая локально интегрируемая функция

f, что для всех функций $\varphi \in \mathscr{D}$ справедливы равенства $(f,\, \varphi) = \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \varphi(x)\, dx = \varphi(0)$.

Функция x бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$, тогда определен функционал $x\, f$ (см. равенство (3.2)) на пространстве $\mathscr{D}$. Следовательно, для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}$ в силу определения умножения бесконечно дифференцируемой функции на обобщенную (см. равенство (3.2)) выполняется $(x\, f,\, \varphi) = (f,\, x\, \varphi) = \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\, (x\, \varphi)\, dx = 0$. Откуда следует, что f равна нулю на $\mathbb{R}$ за исключением, быть может, конечного числа точек.

Таким образом для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}$ справедливо равенство $(f,\, \varphi) = \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\, \varphi\, dx = 0$, а это противоречит равенству $(f,\, \varphi) = \varphi(0)$. $\triangle$

Пример 3.3. Функция ω_ε, определенная в примере 3.1, является регулярной обобщенной функцией, поскольку она локально интегрируемая. Покажем, что $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} \omega_\varepsilon = \delta$.

Так как сходимость в $\mathscr{D}\,'$ есть слабая сходимость, то надо доказать, что для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}$ выполняется $(\omega_\varepsilon,\, \varphi) \to (\delta,\, \varphi) = \varphi(0)$ при $\varepsilon \to +0$. Поскольку любая функция $\varphi \in \mathscr{D}$ непрерывна в нуле, то для любого положительного Δ найдется такое положительное число ε_0, что для всех x таких, что $|x| < \varepsilon_0$ верно $|\varphi(x) - \varphi(0)| < \Delta$. Тогда для любого $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ справедливо

$$|(\omega_\varepsilon,\, \varphi) - \varphi(0)| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\, \varphi(x) - \varphi(0)|\, \omega_\varepsilon(x)\, dx < \Delta.$$

Пример 3.4. Используя δ–функцию Дирака, легко построить другие сингулярные обобщенные функции. Для произвольной точки $x_0 \in \mathbb{R}$ и для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}$ положим $\big(\delta_{x_0}, \varphi\big) = \varphi(x_0)$. Эту сингулярную обобщенную функцию обозначают следующим образом: $\delta_{x_0} = \delta(x - x_0)$ или $\delta_{x_0} = \delta(x_0)$.

§5. Дифференцирование обобщенных функций

5.1. Определение и его корректность. Прежде, чем ввести определение операции дифференцирования обобщенной функции $f \in \mathscr{D}'$, обоснуем эту операцию. Предположим, что $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, тогда для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}$ и для любого натурального числа m справедливо

$$(f^{(m)}, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^{(m)}\, \varphi\, dx = f^{(m-1)}\varphi\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^{(m-1)}\varphi'\, dx =$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^{(m-1)}\varphi'\, dx = \ldots = (-1)^m \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\, \varphi^{(m)}\, dx =$$

$$= (-1)^m (f, \varphi^{(m)}).$$

Это равенство и возьмем за определение операции дифференцирования обобщенной функции $f \in \mathscr{D}'$. Для произвольной функции $\varphi \in \mathscr{D}$ и для любого натурального числа m определим $f^{(m)}$ следующим образом:

$$(f^{(m)}, \varphi) = (-1)^m (f, \varphi^{(m)}). \tag{3.4}$$

P6.4

Надо доказать, что введенный в (3.4) функционал $f^{(m)}$ есть линейный непрерывный функционал на $\mathscr{D}$.

Докажем линейность: для любых функций φ и ψ из пространства $\mathscr{D}$ и для произвольных чисел λ и μ из $\mathbb{R}$ (или из $\mathbb{C}$) выполняется

$$(f^{(m)}, \lambda\varphi + \mu\psi) = (-1)^m (f, (\lambda\varphi + \mu\psi)^{(m)}) =$$

$$= (-1)^m (f, \lambda\varphi^{(m)} + \mu\psi^{(m)}) = (-1)^m \lambda (f, \varphi^{(m)}) +$$

$$+ (-1)^m \mu (f, \psi^{(m)}) = \lambda (f^{(m)}, \varphi) + \mu (f^{(m)}, \psi).$$

Докажем непрерывность линейного функционала $f^{(m)}$. Для этого используем определение 3.7 сходимости в пространстве $\mathscr{D}$. Пусть $\varphi_n \in \mathscr{D}$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и $\varphi_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда для любого фиксированного натурального числа m при $n \to \infty$ выполняется

$$(f^{(m)}, \varphi_n) = (-1)^m (f, \varphi_n^{(m)}) \to 0.$$

Здесь использована непрерывность функционала $f \in \mathscr{D}'$ и условие 2) определения 3.7.

5.2. Свойства операции дифференцирования обобщенных функций. Свойства операции дифференцирования обобщенных функций во многом похожи на свойства операции дифференцирования обычных функций.

1°. Линейность. *Для любых обобщенных функций f и g и для любых чисел α и β из $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) выполняется*

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'.$$

Доказательство утверждения непосредственно следует из определения 3.4.

2°. Непрерывность. *Если $f_k \to f$ при $k \to \infty$ в $\mathscr{D}'$, то $f_k' \to f'$ при $k \to \infty$ в $\mathscr{D}'$.*

Утверждение следует из определения сходимости в $\mathscr{D}'$ и определения 3.4 производной.

3°. *Если $a \in C^\infty(\mathbb{R})$, то для любой функции $f \in \mathscr{D}'$ выполняется $(af)' = a'f + af'$.*

Доказательство. Следует из определения 3.4 производной обобщенной функции и операции умножения обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую функцию. Для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}$ выполняется

$$\begin{aligned}\big((af)', \varphi\big) &= -(af, \varphi') = -(f, a\varphi') = -(f, (a\varphi)' - a'\varphi) = \\ &= -(f, (a\varphi)') + (f, a'\varphi) = (f', a\varphi) + (a'f, \varphi) = \\ &= (af', \varphi) + (a'f, \varphi) = (af' + a'f, \varphi). \qquad \triangle\end{aligned}$$

§6. Обобщенные функции медленного роста

Введем еще одно пространство обобщенных функций, которые называются обобщенными функциями медленного роста или обобщенными функциями (распределениями) Шварца.

6.1. Пространство основных функций. Обозначим через $\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathbb{R})$ подпространство линейного пространства $C^\infty(\mathbb{R})$, содержащее все функции пространства $C^\infty(\mathbb{R})$, которые вместе со всеми своими производными убывают при $x \to \infty$ быстрее любой степени функции $\dfrac{1}{x}$.

Определим сходимость в пространстве $\mathscr{S}$ следующим образом: последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{S}$ сходится при $n \to \infty$ к функции $\varphi \in \mathscr{S}$, если для любых натуральных чисел m и k последовательность $\left\{x^m \dfrac{d^k\varphi_n}{dx^k}\right\}_{n=1}^\infty$ сходится равномерно на отрезке $[-R, R]$ при $n \to \infty$ к функции $x^m \dfrac{d^k\varphi}{dx^k}$ для всех $R > 0$.

Полученное функциональное пространство $\mathscr{S}$ называется *пространством основных функций*.

Замечание 3.5. Очевидно, что $\mathscr{D} \subset \mathscr{S}$ и из сходимости в $\mathscr{D}$ следует сходимость в $\mathscr{S}$. Но пространство $\mathscr{S}$ не совпадает с пространством $\mathscr{D}$. Функция $y = e^{-x^2}$ принадлежит пространству $\mathscr{S}$, но не принадлежит пространству $\mathscr{D}$ (она не является финитной).

Справедлив следующий результат.

Предложение 3.7. *Пространство $\mathscr{D}$ плотно в пространстве $\mathscr{S}$.*

Доказательство. Для доказательства утверждения надо для любой функции $\varphi \in \mathscr{S}$ построить такую последовательность $\{\varphi_n\}$ функций из $\mathscr{D}$, что φ_n сходится к функции φ при $n \to \infty$ в смысле сходимости в $\mathscr{S}$ (ср. определение 1.27).

Пусть функция $\eta \in \mathscr{D}$ такова, что $\eta(x) = 1$ при $|x| < 1$, Тогда определим функции $\varphi_n \in \mathscr{D}$ следующим образом: $\varphi_n(x) = \varphi(x) \cdot \eta\left(\dfrac{x}{n}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Если $\operatorname{supp} \eta \subset (-a, a)$, $a > 1$, то $\operatorname{supp} \eta\left(\dfrac{x}{n}\right) \subset (-an, an)$. Каждая функция φ_n принадлежит пространству $C^\infty(\mathbb{R})$ как произведение функций, принадлежащих $C^\infty(\mathbb{R})$, она финитна, т. е. каждая функция $\varphi_n \in \mathscr{D}$.

Отметим, что последовательность $\left\{\dfrac{d^k\varphi_n}{dx^k}\right\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно на $[-R, R]$ к функции $\dfrac{d^k\varphi}{dx^k}$ при $n \to \infty$ для любого фиксированного натурального числа k и для любого действительного числа $R > 0$. Таким образом, последовательность $\left\{x^m\dfrac{d^k\varphi_n}{dx^k}\right\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно на $[-R, R]$ при $n \to \infty$ к функции $x^m\dfrac{d^k\varphi}{dx^k}$ для любых фиксированных натуральных чисел k и m и для всех $R > 0$.

Следовательно, построенная последовательность функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ из $\mathscr{D}$ сходится к функции $\varphi \in \mathscr{S}$ в пространстве $\mathscr{S}$ при $n \to \infty$. $\triangle$

Замечание 3.6. Если функция φ принадлежит $\mathscr{S}$, то из определения пространства $\mathscr{S}$ следует, что $\varphi^{(k)}$ принадлежит пространству $\mathscr{S}$.

Если умножить функцию $\varphi \in \mathscr{S}$ на произвольную функцию $a \in C^\infty(\mathbb{R})$, то результат $a\varphi$ не обязательно принадлежит пространству $\mathscr{S}$. Например, пусть $\varphi = e^{-x^2}$ и $a = e^{x^2}$, тогда функция $a\varphi \equiv 1$ не принадлежит пространству $\mathscr{S}$.

Определим множество Θ таких функций из $C^\infty(\mathbb{R})$, умножение на которые функций из $\mathscr{S}$ не выводит за пределы пространства $\mathscr{S}$.

Определение 3.12. Функция $a \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ принадлежит множеству Θ, если она растет на бесконечности вместе со всеми своими производными не быстрее полинома:

$$|a(x)| \leqslant C_{k_0}\big(1+|x|\,\big)^{k_0}, \ \left|\frac{d^m a(x)}{dx^m}\right| \leqslant C_{k_m}\big(1+|x|\,\big)^{k_m}, \ m \in \mathbb{R}.$$

Предложение 3.8. *Операция умножения на функцию $a \in \Theta$ непрерывна из $\mathscr{S}$ в $\mathscr{S}$.*

Доказательство. Сначала докажем, что если функция a принадлежит Θ, а функция φ принадлежит пространству $\mathscr{S}$, то функция $a\varphi$ принадлежит $\mathscr{S}$.

Для любого m выполняется $\dfrac{d^m(a\varphi)}{dx^m} = \sum\limits_{j=0}^{m} C_m^j a^{(j)} \varphi^{(m-j)}$ и $x^k \dfrac{d^m(a\varphi)}{dx^m} = \sum\limits_{j=0}^{m} C_m^j x^k a^{(j)} \varphi^{(m-j)}$. Тогда

$$\left|x^k \frac{d^m(a\varphi)}{dx^m}\right| \leqslant \sum_{j=0}^{m} C_m^j |x|^k C_{k_j}\big(1+|x|\,\big)^{k_j}\left|\varphi^{(m-j)}\right| =$$

$$= \sum_{j=0}^{m} C_m^j\, C_{k_j} \sum_{i=0}^{k_j} C_{k_j}^i |x|^i |x|^k \left|\varphi^{(m-j)}\right|.$$

При $x \to \infty$ выполняется $|x|^{i+k}\left|\varphi^{(m-j)}\right| \to 0$.

Из полученных выкладок следует, что если последовательность φ_n функций из $\mathscr{S}$ сходится к нулю при $n \to \infty$ в пространстве $\mathscr{S}$, то последовательность функций $a\varphi_n$, $a \in \Theta$, сходится к нулю при $n \to \infty$ в пространстве $\mathscr{S}$. $\triangle$

6.2. Пространство обобщенных функций медленного роста.

Определение 3.13. *Обобщенной функцией медленного роста* называется любой линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций $\mathscr{S}$.

Совокупность обобщенных функций медленного роста обозначим $\mathscr{S}' = \mathscr{S}'(\mathbb{R})$. Сходимость в $\mathscr{S}'$ определим как слабую сходимость последовательности функционалов, т. е. последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathscr{S}\,'$ сходится к $f \in \mathscr{S}\,'$ при $k \to \infty$, если для любой функции $\varphi \in \mathscr{S}$ выполняется $(f_k,\, \varphi) \to (f,\, \varphi)$ при $k \to \infty$.

Замечание 3.7. Поскольку $\mathscr{D} \subset \mathscr{S}$, то $\mathscr{S}\,' \subset \mathscr{D}\,'$, а поэтому из сходимости в $\mathscr{S}\,'$ следует сходимость в $\mathscr{D}\,'$.

Теорема 3.1. (Шварц). *Для того, чтобы линейный функционал f на $\mathscr{S}$ принадлежал $\mathscr{S}\,'$, необходимо и достаточно, чтобы существовали такая положительная постоянная C и такое целое положительное число p, что для всех $\varphi \in \mathscr{S}$ выполнялось неравенство $|(f,\, \varphi)| \leqslant C\|\varphi\|_p$, где* $\|\varphi\|_p = \sup\limits_{\substack{m \leqslant p \\ x \in \mathbb{R}}} \bigl(1 + |x|\,\bigr) \Bigl|\dfrac{d^m\varphi}{dx^m}\Bigr|$.

Замечание 3.8. Смысл теоремы Шварца заключается в том, что всякая обобщенная функция медленного роста является непрерывным функционалом относительно нормы $\|\cdot\|_p$ (имеет конечный порядок).

6.3. Примеры обобщенных функций медленного роста и их свойства.

6.3.1. *Регулярные обобщенные функции медленного роста.* Введем новый класс функций.

dfn_P6.14 Определение 3.14. Локально интегрируемая функция f называется *локально интегрируемой функцией медленного роста*, если найдется такое натуральное число m, что несобственный интеграл $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\bigl(1 + |x|\,\bigr)^{-m}\, dx$ сходится.

Любая локально интегрируемая функция медленного роста определяет *регулярную обобщенную функцию медленного роста* по следующему правилу: для любой функции $\varphi \in \mathscr{S}$ выполняется

$$(f,\, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \varphi(x)\, dx. \tag{3.5}$$

P6.5

Из определения 3.14 и определения пространства основных функций $\mathscr{S}$ следует, что интеграл, стоящий в правой части равенства (3.5) существует.

Замечание 3.9. Не всякая локально интегрируемая функция принадлежит $\mathscr{S}\,'$. Например, функция $f(x) = e^x$ не принадлежит $\mathscr{S}\,'$.

С другой стороны, не всякая локально интегрируемая функция, принадлежащая $\mathscr{S}\,'$, имеет медленный рост. Например, функция $(\cos e^x)' = -e^x \sin e^x$ не является функцией медленного роста, но тем не менее она определяет обобщенную функцию медленного роста из $\mathscr{S}\,'$ по следующей формуле: $\big((\cos e^x)',\, \varphi\big) = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos e^x\, \varphi'(x)\, dx$ для любой функции $\varphi \in \mathscr{S}$.

6.3.2. *Дифференцирование обобщенных функций медленного роста.* Определим производную $f^{(m)}$ обобщенной функции медленного роста $f \in \mathscr{S}\,'$ следующим образом: для любой функции $\varphi \in \mathscr{S}$ выполняется равенство (3.4).

Так как производная $\varphi^{(m)}$ порядка m функции $\varphi \in \mathscr{S}$ принадлежит пространству $\mathscr{S}$, то правая часть равенства (3.4) есть линейный непрерывный функционал на $\mathscr{S}$.

6.3.3. *Умножение обобщенных функций медленного роста на функции из* Θ. Если $a \in \Theta$, а $\varphi \in \mathscr{S}$, то, как было доказано ранее, функция $a\varphi$ принадлежит пространству $\mathscr{S}$. Поэтому для функции $a \in \Theta$ определена обобщенная функция медленного роста af для для любой функции

$f \in \mathscr{S}'$ по следующему правилу: $(af, \varphi) = (f, a\varphi)$ для всех функций $\varphi \in \mathscr{S}$.

§7. Преобразование Фурье функции $\mathscr{S}$ и $\mathscr{S}'$

7.1. Преобразование Фурье функций медленного роста. На функциях φ пространства $\mathscr{S}$ можно определить преобразование Фурье $F[\varphi]$, функция $F[\varphi]$ не только непрерывна, но и бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$ в силу того, что функции $\varphi \in \mathscr{S}$ убывает на бесконечности быстрее любой степени $\dfrac{1}{x}$, причем (см. теорему 2.20 и следствие из нее) $\dfrac{d^m}{dx^m} F[\varphi](x) = F[(-it)^m\varphi](x)$. Кроме того, $F\big[\varphi^{(m)}\big](x) = (ix)^m F[\varphi](x)$ для функции $\varphi \in \mathscr{S}$ (см. теорему 2.21 и следствие из нее). Поэтому справедливо

$$x^n \frac{d^m}{dx^m} F[\varphi](x) = (-i)^n (ix)^n F[(-it)^m\varphi](x) = \\ = (-i)^{n+m}(ix)^n F[t^m\varphi](x) = i^{-(n+m)} F\big[(t^m\varphi)^{(n)}\big](x).$$

Из полученного равенства следует, что

$$\left| x^n \frac{d^m}{dx^m} F[\varphi](x) \right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{d^n}{dt^n}(t^m\varphi) \right| dt,$$

а интеграл, стоящий в правой части неравенства, сходится в силу определения функций из пространства $\mathscr{S}$.

Итак, доказали, что преобразование Фурье пространство $\mathscr{S}$ переводит в пространство $\mathscr{S}$. Более того, можно доказать, что это преобразование отображает $\mathscr{S}$ на $\mathscr{S}$, при том взаимно однозначно и справедливо следующее утверждение.

Предложение 3.9. *Операция преобразование Фурье F непрерывна из $\mathscr{S}$ в $\mathscr{S}$.*

7.2. Преобразование Фурье обобщенной функций медленного роста. Прежде, чем определить преобразование Фурье функции $f \in \mathscr{S}\,'$, приведем вспомогательные рассуждения.

Пусть функция f принадлежит $L^1_R(-\infty,\, \infty$, тогда верно $\bigl|F[f](x)\bigr| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$. Интеграл, стоящий в правой части неравенства, сходится, следовательно, функция $F[f](x)$ непрерывна и ограничена на $\mathbb{R}$ и определяет обобщенную функцию $\mathscr{S}\,'$ следующим образом: для любой функции $\varphi \in \mathscr{S}$ выполняется

$$
\begin{aligned}
\bigl(F[f],\, \varphi\bigr) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F[f](x)\,\varphi(x)\,dx &= \\
= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-itx}\,dt &= \\
= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,e^{-itx}\,dx &= \\
= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)F[\varphi](t)\,dt &= \bigl(f,\, F[\varphi]\bigr).
\end{aligned}
$$

Таким образом, приходим к определению *преобразования Фурье $F[f]$ обобщенной f функции медленного роста*: для любой функции $\varphi \in \mathscr{S}$ справедливо равенство

$$
\bigl(F[f],\, \varphi\bigr) = \bigl(f,\, F[\varphi]\bigr). \tag{3.6}
$$

Преобразование Фурье F переводит $\mathscr{S}\,'$ в $\mathscr{S}\,'$ и F линейная и непрерывная операция из $\mathscr{S}\,'$ в $\mathscr{S}\,'$.

Введем операцию F^{-1}: для любой обобщенной функции медленного роста f положим $F^{-1}[f]=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}F\bigl[f(-x)\bigr]$.

Предложение 3.10. *Операция F^{-1} является обратной к операции преобразования Фурье F и для любой функции $f\in\mathscr{S}\,'$ верны равенства $F^{-1}\bigl[F[f]\bigr]=F\bigl[F^{-1}[f]\bigr]=f$.*

Доказательство. Для любой функции $\varphi\in\mathscr{S}$ выполняется

$$\underline{\bigl(F^{-1}\bigl[F[f]\bigr],\,\varphi\bigr)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\bigl(F\bigl[F[f](-x)\bigr],\,\varphi\bigr)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\bigl(F[f](-x),\,F[\varphi]\bigr)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\bigl(F[f],\,F[\varphi](-x)\bigr)=$$
$$=\bigl(F[f],\,F^{-1}[\varphi]\bigr)=\bigl(f,\,F\bigl[F^{-1}[\varphi]\bigr]\bigr)=\underline{(f,\,\varphi)}=$$
$$=\bigl(f,\,F^{-1}\bigl[F[\varphi]\bigr]\bigr)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\bigl(f,\,F\bigl[F[\varphi]\bigr](-x)\bigr)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\bigl(F[f](-x),\,F[\varphi]\bigr)=\bigl(F^{-1}[f],\,F[\varphi]\bigr)=$$
$$=\underline{\bigl(F\bigl[F^{-1}[f]\bigr],\,\varphi\bigr)}.\qquad\triangle$$

pros_P6.11 Предложение 3.11. *Для любой функции $f\in\mathscr{S}\,'$ верно равенство $\dfrac{d^m}{dx^m}\,F[f]=F\bigl[(-it)^m f\bigr]$.*

Доказательство. Для любой функции $\varphi\in\mathscr{S}$ выполняется

$$\underline{\Bigl(\frac{d^m}{dx^m}\,F[f],\,\varphi\Bigr)}=(-1)^m\Bigl(F[f],\,\frac{d^m}{dx^m}\,\varphi\Bigr)=$$
$$=(-1)^m\Bigl(f,\,F\Bigl[\frac{d^m}{dx^m}\,\varphi\Bigr]\Bigr)=(-1)^m\bigl(f,\,(it)^m F[\varphi]\bigr)=$$
$$=\bigl((-it)^m f,\,F[\varphi]\bigr)=\underline{\bigl(F\bigl[(-it)^m f\bigr],\,\varphi\bigr)}.$$

Здесь воспользовались тем фактом, что $t^m\in\Theta$. $\triangle$

Предложение 3.12. *Для любой функции $f\in\mathscr{S}\,'$ верно равенство $F\Bigl[\dfrac{d^m}{dx^m}\,f\Bigr]=(it)^m F[f]$.*

Доказательство. Для любой функции $\varphi \in \mathscr{S}$ справедливо

$$\underline{\left(F\left[\frac{d^m}{dx^m}f\right],\varphi\right)} = \left(\frac{d^m}{dx^m}f,\, F[\varphi]\right) =$$
$$= (-1)^m\left(f,\, \frac{d^m}{dx^m}F[\varphi]\right) = (-1)^m\big(f,\, F\big[(-it)^m\big]\big) =$$
$$= (-1)^m\big(F[f],\, (-it)^m\varphi\big) = \underline{\big((it)^m F[f],\, \varphi\big)}.$$

Здесь воспользовались результатом предложения pros_P6.11 3.11 и тем фактом, что $t^m \in \Theta$. $\triangle$

Пример 3.5. Найдем преобразование Фурье функции $\delta_a = \delta(x-a) = \delta(a)$.

Для любой функции $\varphi \in \mathscr{S}$ выполняется

$$\big(F\big[\delta_a\big],\, \varphi\big) = \big(\delta_a,\, F[\varphi]\big) = F[\varphi](a) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,e^{-ita}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\big(e^{-iat},\,\varphi\big) = \left(\frac{e^{-iat}}{\sqrt{2\pi}},\,\varphi\right).$$

Следовательно, $F\big[\delta_a\big] = \dfrac{e^{-iat}}{\sqrt{2\pi}}$. При $a = 0$ находим преобразование Фурье δ–функции Дирака: $F[\delta] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.