

Оглавление

Предисловие	3
1 Обратное и неявное отображения	4
1.1. Теорема о неподвижной точке сжимающего отображения	5
1.2. Неравенство Лагранжа для отображения	7
1.3. Теорема об обратном отображении	8
1.4. Теорема о неявно заданном отображении	13
1.5. Замена переменных	17
1.6. Гладкие многомерные поверхности	22
2 Экстремумы функций нескольких переменных	30
2.1. Необходимые и достаточные условия экстремума	30
2.2. Условный экстремум	35
2.3. Признаки существования условного экстремума	37
3 Кратный интеграл	44
3.1. Кратный интеграл Римана	44
3.2. Классы интегрируемых функций	49
3.3. Свойства кратного интеграла	50
3.4. Элементарное множество	54
3.5. Сведение кратного интеграла к повторному	56
3.6. Обсуждение теоремы 3.5.2	59
4 Замена переменных в кратном интеграле	62
4.1. Геометрические свойства меры Жордана	62
4.2. Геометрический смысл модуля якобиана	69
4.3. Формула замены переменной в кратном интеграле	73
4.4. Геометрический смысл знака якобиана	78
5 Формула Грина	80
5.1. Ориентация замкнутой кривой	80
5.2. Формула Грина	83
6 Поверхностные интегралы	87
6.1. Кусочно-гладкие поверхности	87
6.2. Поверхностный интеграл первого рода	90
6.3. Ориентация кусочно-гладкой поверхности	94

6.4.	Поверхностный интеграл второго рода	98
7	Формула Остроградского-Гаусса	103
7.1.	Теорема Остроградского-Гаусса	103
7.2.	Геометрический и физический смысл дивергенции	107
7.3.	Соленоидальные векторные поля	109
8	Формула Стокса	113
8.1.	Теорема Стокса	113
8.2.	Геометрический и физический смысл ротора	117
8.3.	Потенциальные векторные поля	118
8.4.	Безвихревые векторные поля	121
8.5.	Элементы теории поля	124
8.6.	Оператор Гамильтона	126

Предисловие

- Мальчик, возьмите за четыре сольдо мою новую азбуку.
- С картинками?
- С ччччудными картинками и большими буквами.

Алексей Толстой.

Приключения Буратино или Золотой ключик

В третьей части учебного пособия, предназначенной студентам второго курса МФТИ, завершается изложение конечномерного анализа и излагаются элементы бесконечномерного. Третий семестр посвящен многомерным поверхностям и теории экстремумов функций многих переменных (главы 1-2), теории кратного интегрирования (главы 3-5), теории поверхностного интегрирования и основам теории поля (главы 5-8). В четвертом семестре изучаются классический гармонический анализ (главы 9-12), элементы теории бесконечномерных (функциональных) пространств и ряды Фурье в них (главы 13-15), теория интегралов, зависящих от параметра и ее приложение к преобразованию Фурье (главы 16-17), введение в теорию обобщенных функций (глава 18).

Автор еще раз выражает свою благодарность А. Ю. Петровичу, который прочитал рукописи всех трех частей, сделал полезные замечания и дал ценные советы.

Глава 1

Обратное и неявное отображения

Мы говорим, что задано отображение $f : X \rightarrow Y$, если каждому элементу из множества X поставлен в соответствие *единственный* элемент из множества Y . Само *существование* отображения уже является нетривиальным фактом. Поэтому важно знать, при каких условиях *зависимость* между элементами двух множеств является именно отображением. Для числовых функций мы уже обсудили обратную функцию, параметрически заданную функцию и затронули проблему существования неявной функции. Теперь мы обсудим проблему *локального* существования и дифференцируемости обратного и неявного отображений конечномерных пространств.

Напомним, что мы используем арифметическое *точечное* пространство \mathbb{R}^n и линейное=*векторное* пространство \mathbf{V}^n . Точка $x = (x_1, \dots, x_n) = (x_i) \in \mathbb{R}^n$ – упорядоченный набор из n чисел, записанный в строку; вектор $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^T \in \mathbf{V}^n$ – упорядоченный набор из n чисел, записанный в столбец. С векторами определены линейные операции (сложение и умножение на число) и операция скалярного произведения. Для двух точек определена их разность, результатом которой является вектор. Для точки и вектора определена операция сложения (откладывания вектора от точки), результатом которой является точка. Впредь для упрощения записи мы не будем ставить стрелку над разностью точек, т. е. для произвольных $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n$ пишем $x^2 - x^1 := \overrightarrow{x^2 - x^1} \in \mathbf{V}^n$. Кроме того, чтобы применять векторные операции, при необходимости мы будем переходить от точки к ее радиус-вектору,

оставляя прежние обозначение: $x := \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$. Из контекста будет понятно, имеем ли мы дело с точкой или с ее радиус-вектором.

1.1. Теорема о неподвижной точке сжимающего отображения

Все дороги ведут в Рим

Это знаменитая теорема о существовании и единственности решения уравнения общего вида.

ТЕОРЕМА 1.1.1. (Стефан Банах, 1892-1945) Пусть отображение $h : \mathbb{R}^n \supset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ обладает следующими свойствами:

- 1) отображает замкнутое подмножество $M = \overline{M}$ в себя, т. е. образ $h(M) \subset M$;
- 2) является **сжимающим** с коэффициентом $k \in (0, 1)$, т. е.

$$\forall x^1, x^2 \in M \Leftrightarrow |h(x^2) - h(x^1)| \leq k|x^2 - x^1|.$$

Тогда:

- 1) существует и при том единственная **неподвижная точка** $x^* \in M$ отображения h , т. е. $h(x^*) = x^*$;
- 2) неподвижная точка является пределом **итерационного процесса**, который можно начать из произвольной точки $x^0 \in M$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ полагаем, что } x^n := h(x^{n-1}), \text{ тогда } x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n;$$

- 3) погрешность на n -ом шаге оценивается сверху по первому шагу как убывающая геометрическая прогрессия с коэффициентом k :

$$|x^n - x^*| \leq \frac{k^n}{1 - k} |h(x^0) - x^0|. \quad (1.1)$$

ОБСУЖДЕНИЕ 1.1.1. Отметим, что в теореме:

- 1) исследуемое уравнение $h(x) = x$ имеет специфический вид, отличный от традиционного $h(x) = x^0$, где x^0 – фиксированная точка;

- 2) сформулированы достаточные условия не только *существования* неподвижной точки, но и ее *единственности*;
- 3) указан *итерационный* процесс, сходящийся к неподвижной точке (см. рис. 1.1);
- 4) итерации можно начинать с *произвольной* точки (этот факт иллюстрирует рис. 1.2);
- 5) указана *погрешность* итераций;
- 6) идея доказательства теоремы содержится в п. 2 формулировки;
- 7) теорема и ее обобщение на бесконечномерные пространства имеют многочисленные *применения* в теории приближений, функциональном анализе, теории дифференциальных уравнений и в теории уравнений математической физики. \square

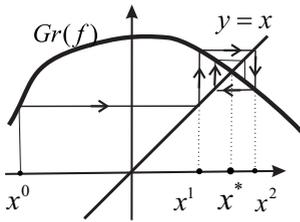


Рис. 1.1 Итерации

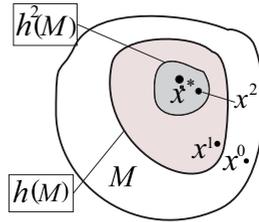


Рис. 1.2 Сжатие

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что последовательность итераций $x^n := h(x^{n-1})$ является фундаментальной. Для произвольных $n, p \in \mathbb{N}$ выполняется:

$$\begin{aligned}
 |x^{n+p} - x^n| &= |h^{n+p}(x^0) - h^n(x^0)| \leq k|h^{n+p-1}(x^0) - h^{n-1}(x^0)| \leq \dots \\
 &\leq k^n|h^p(x^0) - x^0| \leq k^n(|x^1 - x^0| + |x^2 - x^1| + \dots + |x^p - x^{p-1}|) \leq \\
 &\leq k^n \cdot |x^1 - x^0| \cdot (1 + k + k^2 + \dots + k^{p-1}) \leq k^n \frac{|x^1 - x^0|}{1 - k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (1.2)
 \end{aligned}$$

(мы воспользовались сжатием, применили p раз неравенство треугольника и оценили конечную сумму убывающей геометрической прогрессией). Из фундаментальности последовательности и замкнутости множества M следует, что существует предел $x^* := \lim_{n \rightarrow \infty} x^n \in M$. Покажем, что x^* – неподвижная точка. Из условия сжатия следует, что

отображение h непрерывно на всей области определения (докажите), поэтому

$$h(x^*) = h(\lim_{n \rightarrow \infty} x^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(x^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1} = x^*.$$

Существование неподвижной точки доказано. Докажем ее единственность. Допустим противное: существует точка $x^\sharp \in M$, для которой $h(x^\sharp) = x^\sharp$. Тогда $|x^* - x^\sharp| = |h(x^*) - h(x^\sharp)| \leq k|x^* - x^\sharp|$. Т. к. $k \in (0, 1)$, то $|x^* - x^\sharp| = 0$, т. е. $x^* = x^\sharp$.

В неравенстве (1.2) перейдем к пределу при $p \rightarrow \infty$; поскольку $\lim_{p \rightarrow \infty} x^{n+p} = x^*$, получаем оценку (1.1) ■

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1.1. В формулировке и доказательстве теоремы 1.1.1 используется только понятие расстояния между точками $\rho(x, y) := |y - x|$ и его свойства. Позже мы воспользуемся этим обстоятельством для обобщения теоремы на случай *метрических* пространств. □

1.2. Неравенство Лагранжа для отображения

Ранее мы обсудили понятие дифференцируемости отображения

$$f : \mathbb{R}^n \supset X \rightarrow \mathbb{R}^m \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \\ \dots \\ y_m = f_m(x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

в точке x^0 . Мы выяснили, что производной $Df(x^0)$ отображения f (если она существует!) является матрица Якоби $(m \times n) = (\partial f_i(x^0)/\partial x_j)$, составленная из частных производных всех координатных функций f_i ($i = 1, \dots, m$) по всем переменным x_j ($j = 1, \dots, n$). Также нами введено понятие нормы $\|A\|$ произвольной матрицы $A = (a_{i,j})$ и изучены ее основные свойства. В частности, доказано, что: 1) для любого вектора \mathbf{a} справедлива оценка $\|A\mathbf{a}\| \leq \|A\| \cdot \|\mathbf{a}\|$; 2) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, что если для всех элементов верна оценка $|a_{i,j}| < \delta$, то $\|A\| < \varepsilon$. Нам понадобится обобщение неравенства Лагранжа, ранее доказанное для вектор-функций, в котором модуль приращения отображения оценивается через норму матрицы Якоби и модуль приращения аргумента:

ТЕОРЕМА 1.2.1. (неравенство Лагранжа) Пусть $f : \mathbb{R}^n \supset X \rightarrow \mathbb{R}^m$ – всюду дифференцируемое отображение выпуклой области X .

Тогда для любых точек $x^1, x^2 \in X$ существует такое число $\theta \in (0, 1)$, что

$$|f(x^2) - f(x^1)| \leq \|Df(x^1 + \theta(x^2 - x^1))\| \cdot |x^2 - x^1|. \quad (1.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу выпуклости X , отрезок, соединяющий произвольные точки $x^1, x^2 \in X$, целиком содержится в X :

$$[x^1, x^2] = \{x = x^1 + t(x^2 - x^1), t \in [0, 1]\} \subset X.$$

Поэтому существует вектор-функция скалярного переменного

$$\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbf{V}^m, \quad \varphi(t) := f(x^1 + t(x^2 - x^1)).$$

Из теоремы о дифференцируемости сложного отображения следует, что ее производная $\varphi'(t) = Df(x^1 + t(x^2 - x^1))(x^2 - x^1) \in \mathbf{V}^m$ есть вектор, полученный действием матрицы $Df(\dots)$ на вектор $x^2 - x^1 \in \mathbf{V}^n$. Из теоремы Лагранжа для вектор-функции следует, что существует такое число $\theta \in (0, 1)$, для которого $|\varphi(1) - \varphi(0)| \leq |\varphi'(\theta)| \cdot 1$. (Теорема доказана нами для случая $m = 3$; для произвольного m ее формулировка и доказательство остаются прежними.) Воспользовавшись неравенством $|Aa| \leq \|A\| \cdot |a|$, получаем

$$\begin{aligned} |f(x^2) - f(x^1)| &= |\varphi(1) - \varphi(0)| \leq |\varphi'(\theta)| = \\ &= |Df(x^1 + \theta(x^2 - x^1))(x^2 - x^1)| \leq \|Df(x^1 + \theta(x^2 - x^1))\| \cdot |x^2 - x^1|. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Нам понадобится вытекающее из (1.3)

СЛЕДСТВИЕ 1.2.1. Если в условиях теоремы 1.2.1 дополнительно имеет место оценка $\sup_{x \in X} \|Df(x)\| < +\infty$, то для любых $x^1, x^2 \in X$ справедливо

$$|f(x^2) - f(x^1)| \leq \sup_{x \in X} \|Df(x)\| \cdot |x^2 - x^1|. \quad (1.4)$$

1.3. Теорема об обратном отображении

Ниже понятие **окрестность** точки означает произвольное открытое подмножество, содержащее эту точку, в частности, это может быть шаровая окрестность.

ТЕОРЕМА 1.3.1. Пусть отображение $f : \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируемо на области U и в некоторой точке $x^0 \in U$ определитель $\det Df(x^0) \neq 0$. Тогда существуют такие окрестности $V(x^0) = V \subset U$ и $W(y^0) = W$ точек x^0 и $y^0 = f(x^0)$ соответственно, что:

- 1) сурjection $f : V \rightarrow W$ является биекцией;
- 2) обратное отображение $f^{-1} : W \rightarrow V$ непрерывно дифференцируемо;
- 3) производная обратного отображения вычисляется по формуле

$$\forall y \in W \hookrightarrow Df^{-1}(y) = (Df(x))^{-1}, \text{ где } x = f^{-1}(y). \quad (1.5)$$

ОБСУЖДЕНИЕ 1.3.1. Отметим:

- 1) Теорема 1.3.1 является локальным аналогом теоремы об обратимости числовой функции числового аргумента, производная которой имеет на интервале постоянный знак.
- 2) Размерности пространства-прообраза и пространства образа совпадают.
- 3) Формула (1.5) означает, что взятие обратного отображения и дифференцирование перестановочны. Эта формула позволяет найти производную обратного отображения, не находя самого обратного отображения.
- 4) Идея доказательства теоремы: если матрица производной $Df(x^0)$ обратима, то само отображение f локально обратимо, поскольку оно отличается от своего дифференциала на бесконечно малую более высокого порядка. \square

Доказательство осуществляется в несколько этапов.

1. Упрощающие преобразования. Как и в доказательстве теоремы 1.2.1, перейдем от точечных пространств к векторным, заменив точки их радиус-векторами.

Так как линейное отображение $Df(x^0)$ является дифференцируемой биекцией (обоснуйте), то утверждение теоремы справедливо только тогда, когда оно верно для суперпозиции $(Df(x^0))^{-1} \circ f$. Но производная $((Df(x^0))^{-1} \circ f)'(x^0) = (Df(x^0))^{-1} \circ Df(x^0) = id$ есть тождественное отображение. Поэтому без ограничения общности считаем, что $Df(x^0) = id$. Замены $x \rightarrow x - x^0$, $y \rightarrow y - y^0$ позволяют предположить, что векторы $x^0 = y^0 = 0 \in U$ совпадают с нуль-вектором.

2. Предварительная оценка. Рассмотрим отображение

$$g : U \rightarrow \mathbf{V}^n, \quad g(x) := x - f(x). \quad (1.6)$$

Заметим, что $g(0) = 0 - 0 = 0$. Далее, оно всюду непрерывно дифференцируемо и его производная в нуле $Dg(0) = id - id = 0$ равна нулевому

отображению. Поскольку производная $Dg(x)$ непрерывно зависит от x , то существует такое $r > 0$, что шар $B_{2r}(0) \subset U$ радиуса $2r$ целиком принадлежит области определения и для каждого $x \in B_{2r}(0)$ норма матрицы $Dg(x)$ допускает оценку $\|Dg(x)\| < 1/2$. Поскольку шар $B_{2r}(0)$ есть выпуклое множество, из неравенства (1.4) следует, что как только $x \in \overline{B}_r(0) \subset B_{2r}(0)$, верна оценка

$$|g(x)| = |g(x) - g(0)| \leq \frac{1}{2}|x - 0| = \frac{1}{2}|x|. \quad (1.7)$$

Значит, g отображает замкнутый шар $\overline{B}_r(0)$ радиуса r в концентрический замкнутый шар $\overline{B}_{r/2}(0)$ половинного радиуса.

3. Переформулировка проблемы. Существование обратного отображения $f^{-1} : B_{r/2}(0) \rightarrow \overline{B}_r(0)$ равносильно тому, что для каждого $y \in B_{r/2}(0)$ уравнение $f(x) = y$ разрешимо *единственным* образом относительно неизвестного $x \in \overline{B}_r(0)$. Для каждого $y \in B_{r/2}(0)$ определим отображение

$$g_y : \overline{B}_r(0) \rightarrow \mathbf{V}^n, \quad g_y(x) := y + x - f(x) = y + g(x).$$

Теперь заметим, что равносильны уравнения

$$f(x) = y \Leftrightarrow g_y(x) = x.$$

Значит, существование обратного отображения f^{-1} равносильно существованию для каждого $y \in B_{r/2}(0)$ *единственной неподвижной точки* $x \in \overline{B}_r(0)$ отображения g_y .

4. Исследование отображения g_y . Поскольку $|y| < r/2$ и $|x| \leq r$, то, в силу оценки (1.7), получаем

$$|g_y(x)| \leq |y| + |g(x)| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

Значит, для каждого $y \in B_{r/2}(0)$ отображение g_y действует из замкнутого шара $\overline{B}_r(0)$ в себя. Далее, для каждого $y \in B_{r/2}(0)$ и для любой пары $x^1, x^2 \in \overline{B}_r(0)$, в силу оценки $\|Dg(x)\| < 1/2$ и неравенства Лагранжа (1.4), получаем:

$$|g_y(x^2) - g_y(x^1)| = |g(x^2) - g(x^1)| \leq \frac{1}{2}|x^2 - x^1|. \quad (1.8)$$

Итак, для каждого $y \in B_{r/2}(0)$ отображение g_y удовлетворяет условиям теоремы 1.1.1 с коэффициентом $k = 1/2$. Следовательно, для

каждого $y \in B_{r/2}(0)$ отображение g_y имеет единственную неподвижную точку. Значит, существует обратное отображение $f^{-1} : W := B_{r/2}(0) \rightarrow \overline{B}_r(0)$.

5. Доказательство непрерывности обратного отображения следует из оценок: для произвольных $y^1, y^2 \in B_{r/2}(0)$, в силу определения (1.6) и оценки (1.8), верно

$$\begin{aligned} |f^{-1}(y^2) - f^{-1}(y^1)| &= |x^2 - x^1| = |(g(x^2) + f(x^2)) - (g(x^1) + f(x^1))| \leq \\ &\leq |f(x^2) - f(x^1)| + |g(x^2) - g(x^1)| \leq |f(x^2) - f(x^1)| + \frac{1}{2}|x^2 - x^1|. \end{aligned}$$

Поэтому

$$|f^{-1}(y^2) - f^{-1}(y^1)| = |x^2 - x^1| \leq 2|f(x^2) - f(x^1)| = 2|y^2 - y^1|. \quad (1.9)$$

Из предыдущей оценки следует, что полный прообраз $V := f^{-1}(B_{r/2}(0)) \subset B_r(0)$ принадлежит *открытому* шару радиуса r (достаточно взять $y^1 = 0, y^2 = y \in B_{r/2}(0)$). Но, как мы ранее установили, у непрерывного отображения, определенного на открытом подмножестве, полный прообраз открытого множества открыт, т. е. V – открытое подмножество. С другой стороны, в силу существования обратного отображения f^{-1} , V есть его образ. (Через $f^{-1}(B_{r/2}(0))$ мы обозначаем всегда полный прообраз отображения f и образ обратного отображения f^{-1} , если оно существует.) Стало быть, отображение f является взаимно непрерывной биекцией между открытым подмножеством $V = f^{-1}(B_{r/2}(0))$ и открытым шаром $W = B_{r/2}(0)$:

$$V = f^{-1}(B_{r/2}(0)) \xleftrightarrow{f} B_{r/2}(0) = W.$$

6. Доказательство непрерывной дифференцируемости обратного отображения. Пусть $y \in W$ – произвольная фиксированная точка, а $y' \in W$ – переменная. Тогда $x = f^{-1}(y) \in V$ – фиксированная точка, а $x' = f^{-1}(y') \in V$ – переменная. Из дифференцируемости f следует, что

$$f(x') - f(x) = Df(x)(x' - x) + \varepsilon(x' - x),$$

где отображение ε является o -малым при $|x' - x| \rightarrow 0$, т. е.

$$\lim_{x' \rightarrow x} \frac{|\varepsilon(x' - x)|}{|x' - x|} = 0. \quad (1.10)$$

Применяя к обеим частям равенства обратную матрицу $(Df(x))^{-1}$, получаем

$$(Df(x))^{-1}(f(x') - f(x)) = x' - x + (Df(x))^{-1}(\varepsilon(x' - x)).$$

Последнее равенство равносильно следующему:

$$f^{-1}(y') - f^{-1}(y) = (Df(x))^{-1}(y' - y) - (Df(x))^{-1}(\varepsilon(f^{-1}(y') - f^{-1}(y))).$$

Убедимся, что отображение $(Df(x))^{-1}(\varepsilon(f^{-1}(y') - f^{-1}(y)))$ является o -малым от приращения $y' - y$ при $y' - y \rightarrow 0$. Поскольку

$$|(Df(x))^{-1}(\varepsilon(f^{-1}(y') - f^{-1}(y)))| \leq \|(Df(x))^{-1}\| \cdot |\varepsilon(f^{-1}(y') - f^{-1}(y))|$$

и множитель $\|(Df(x))^{-1}\|$ от переменной y' не зависит, то остается доказать предельное равенство

$$\lim_{y' \rightarrow y} \frac{|\varepsilon(f^{-1}(y') - f^{-1}(y))|}{|y' - y|} = 0.$$

Но

$$\frac{|\varepsilon(f^{-1}(y') - f^{-1}(y))|}{|y' - y|} = \frac{|\varepsilon(f^{-1}(y') - f^{-1}(y))|}{|f^{-1}(y') - f^{-1}(y)|} \cdot \frac{|f^{-1}(y') - f^{-1}(y)|}{|y' - y|}.$$

В силу доказанной непрерывности обратного отображения, $f^{-1}(y') \rightarrow f^{-1}(y)$ при $y' \rightarrow y$. Поэтому (в силу (1.10) и теоремы о переходе к пределу при замене переменной) первый множитель стремится к нулю. Второй множитель не превосходит 2 (см. (1.9)). Следовательно произведение стремится к нулю. Дифференцируемость отображения f^{-1} и формула (1.5) доказаны.

Элементы матрицы производной обратного отображения являются суперпозицией трех отображений:

$$y \rightarrow f^{-1}(y) = x \rightarrow Df(x) = A \rightarrow A^{-1}.$$

Первое отображение непрерывно по доказанному, второе непрерывно по условию, непрерывность третьего следует из правила нахождения обратной матрицы. Следовательно, обратное отображение является непрерывно дифференцируемым. ■

ПРИМЕР 1.3.1. Рассмотрим полярную систему координат как отображение

$$p : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad p(\rho, \varphi) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi).$$

Матрица Якоби и ее определитель равны:

$$J(\rho, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \det J(\rho, \varphi) = \rho \geq 0.$$

Значит, сужение \tilde{p} отображения p на открытую полуплоскость $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ имеет невырожденную производную в каждой точке. Согласно теореме 1.3.1, отображение \tilde{p} в любой точке открытой полуплоскости является *локальной* биекцией. Образ $Im(\tilde{p})$ всей открытой полуплоскости есть вся плоскость без начала координат. Однако отображение \tilde{p} НЕ является *глобальной* биекцией поскольку $\tilde{p}(\rho, \varphi + 2\pi k) = \tilde{p}(\rho, \varphi)$ для любого $k \in \mathbb{Z}$, т. е. отображение 2π -периодично по второму аргументу. Ранее мы установили, что отображение \tilde{p} является биекцией между любой открытой горизонтальной полосой ширины 2π и плоскостью, из которой удален луч, выходящий из начала координат:

$$\{\rho > 0\} \times \{\varphi : \varphi_0 < \varphi < \varphi_0 + 2\pi\} \xrightarrow{\tilde{p}} \\ \mathbb{R}^2 \setminus \{x = \rho \cos \varphi_0, y = \rho \sin \varphi_0; \rho \geq 0\}.$$

1.4. Теорема о неявно заданном отображении

Мне мило отвлеченное:
Им жизнь я создаю...
Я всё уединенное,
Неявное люблю.

Э.Н. Гиппиус

Неявно заданные отображения (неявные отображения) возникают и в математических, и в физических исследованиях (в последних из так называемых *уравнений связи*).

ПРИМЕР 1.4.1. Уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$, задающее на координатной плоскости окружность, порождает две *непрерывные* неявные функции $y = f_{1,2}(x) = \pm\sqrt{1 - x^2}$ ($x \in [-1, 1]$), графиками которых являются верхняя и нижняя полуокружности (рис. 1.3). Заметим, что *разрывных* функций, порожденных этим уравнением, бесконечное множество: разобьем отрезок $[-1, 1]$ на два произвольных непересекающихся множества

$$[-1, 1] = X_1 \cup X_2, \quad X_1 \cap X_2 = \emptyset$$

и определим неявную функцию по правилу

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & x \in X_1, \\ -\sqrt{1 - x^2}, & x \in X_2. \end{cases}$$

Если же мы хотим сосредоточиться на *одной* неявной функции, то достаточно выбрать на окружности точку $A(x^0, y^0)$, причем $x^0 \neq \pm 1$, и потребовать, чтобы график неявной функции принадлежал ее достаточно *малой* окрестности (рис. 1.3). Заметим, что ни в какой окрестности точек $A^\pm(\pm 1, 0)$ дуга окружности $x^2 + y^2 - 1 = 0$ не является графиком функции!

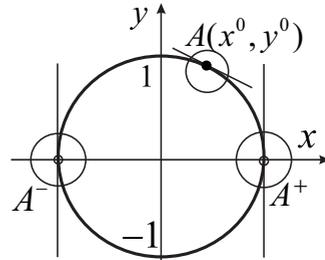


Рис. 1.3

Принципиальное наблюдение: только в особых точках A^\pm касательные к окружности вертикальны, что равносильно обнулению в этих точках частных производных данной функции по переменной y , т. е. $\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 - 1)|_{(\pm 1, 0)} = 0$.

ТЕОРЕМА 1.4.1. Пусть: 1) отображение

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$$

непрерывно дифференцируемо на открытом подмножестве U , содержащем точку $A(x^0, y^0) \in U$; 2) $F(x^0, y^0) = O_y$, где O_y – начало координат в точечном пространстве \mathbb{R}^m ; 3) в точке $A(x^0, y^0)$ матрица частной производной отображения F по переменной y невырождена: $\det D_y F(x^0, y^0) \neq 0$.

Тогда:

- 1) существуют окрестность $Q_A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ точки $A(x^0, y^0)$ (причем $Q_A \subset U$), шаровая окрестность $X_{x^0} \subset \mathbb{R}^n$ точки x^0 и единственное **неявное отображение** $f : X_{x^0} \rightarrow \mathbb{R}^m$, для которого условие разрешимости уравнения

$$F(x, y) = O_y, \text{ где } (x, y) \in Q_A \quad (1.11)$$

эквивалентно условию

$$y = f(x), \text{ где } x \in X_{x^0}; \quad (1.12)$$

- 2) отображение f непрерывно дифференцируемо на X_{x^0} , причем в точке $x \in X_{x^0}$ матрица производной неявного отображения определяется по правилу

$$Df(x) = -(D_y F(x, f(x)))^{-1} \circ D_x F(x, f(x)); \quad (1.13)$$

G , которое в некоторой окрестности точки $A(x^0, y^0)$ является биекцией. Именно, положим

$$G : U \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad G(x, y) := (x, F(x, y)). \quad (1.14)$$

Проверим выполнение условий теоремы 1.3.1. Во-первых, отображение G непрерывно дифференцируемо и матрица производной имеет блочный вид:

$$DG(x, y) = \begin{pmatrix} id_x & \Theta(n, m) \\ D_x F(x, y) & D_y F(x, y) \end{pmatrix}.$$

(через $\Theta(n, m)$ обозначена нулевая матрица размером $n \times m$) Во-вторых, в силу условия теоремы, в точке $A(x^0, y^0)$ определитель

$$\det \begin{pmatrix} id_x & \Theta(n, m) \\ D_x F(x_0, y_0) & D_y F(x_0, y_0) \end{pmatrix} = 1 \cdot \det D_y F(x_0, y_0) \neq 0.$$

Следовательно, отображение G является биекцией между некоторой окрестностью $V \subset U$ точки $A(x^0, y^0)$ и окрестностью W ее образа $G(x^0, y^0) = (x^0, O_y)$, причем $\det D_y F(x, y) \neq 0$ при $(x, y) \in V$.

2. Обратное отображение $G^{-1} : W \rightarrow V$ имеет структуру, аналогичную структуре прямого отображения, а именно $G^{-1}(x', y') = (x', H(x', y'))$. В самом деле, обратное отображение есть *единственное* решение уравнения $G(x, y) = (x', y')$ относительно неизвестной пары $(x, y) \in V$, где правая часть $(x', y') \in W$; но это уравнение равносильно системе уравнений $x = x', F(x, y) = y'$. Значит, существует такое единственное отображение

$$H : W \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \text{что } G^{-1}(x', y') = (x', H(x', y')). \quad (1.15)$$

Поскольку G биективно, то для двух пар $(x, y) \in V$ и $(x, y') \in W$ равносильны следующие три условия:

$$F(x, y) = y' \Leftrightarrow G(x, y) = (x, y') \Leftrightarrow y = H(x, y'). \quad (1.16)$$

3. Определение неявного отображения. Поскольку множество W открытое, то существует целиком ему принадлежащий открытый шар $B := Ball_\delta(x^0, O_y) \subset W$ некоторого радиуса δ с центром в точке (x^0, O_y) . Пересечение $X = X_{x^0} := Ball_\delta(x^0, O_y) \cap \mathbb{R}^n$ этого $(n + m)$ -мерного шара с n -мерным подпространством является открытым n -мерным шаром того же радиуса с тем же центром (рис. 1.4). Рассмотрим *сужение* отображения H на шар X_{x^0} , т. е. отображение

$$f : X_{x^0} \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad f(x) := H(x, O_y). \quad (1.17)$$

В силу эквивалентностей (1.16), это искомое неявное отображение. В самом деле, $F(x, y) = O_y$ только тогда, когда $y = H(x, O_y) = f(x)$. Его единственность следует из биективности отображения G на окрестности V .

Хотя искомое отображение найдено, давайте разберемся, почему отображение G называют распрямляющим. В силу первой равносильности из (1.16), для произвольной *фиксированной* точки y' (достаточно близкой к точке O_y) отображение G преобразует ее полный прообраз $F^{-1}(y') \cap V = \{(x, y) \in V : F(x, y) = y'\}$ в “горизонтальное” подмножество $\{(x, y')\}$. В частности, $G(F^{-1}(O_y) \cap V) \subset \mathbb{R}^n \times \{O_y\}$ (рис. 1.4).

4. Непрерывная дифференцируемость отображения $f(x) := H(x, O_y)$ следует, в силу теоремы 1.3.1, из определения отображения H и непрерывной дифференцируемости отображения G^{-1} . Теперь, чтобы найти производную $Df(x)$, достаточно продифференцировать тождество $F(x, f(x)) \equiv O_y$ ($x \in X_{x^0}$) и воспользоваться обратимостью матрицы $D_y F(x, y)$ для всех $(x, y) \in V$:

$$\begin{aligned} F(x, f(x)) &\stackrel{x \in X_{x^0}}{\equiv} O_y \Rightarrow \\ D_x F(x, f(x)) + D_y F(x, f(x)) \circ Df(x) &\stackrel{x \in X_{x^0}}{\equiv} \Theta(m, n) \Leftrightarrow \\ Df(x) &\stackrel{x \in X_{x^0}}{\equiv} -(D_y F(x, f(x)))^{-1} \circ D_x F(x, f(x)) \end{aligned}$$

(через $\Theta(m, n)$ обозначена нулевая матрица размером $m \times n$).

5. Из определения (1.17) и равносильностей первого и третьего условий из (1.16) следует, что график f есть

$$\begin{aligned} gr(f) &= \{(x, f(x)), x \in X_{x^0}\} = \{(x, H(x, O_y)), x \in X_{x^0}\} = \\ &= \{(x, y) \in Q : F(x, y) = O_y\}. \blacksquare \end{aligned}$$

1.5. Замена переменных

Мы уже применяли замену переменных при вычислении пределов и интегралов. Метод постоянно применяется в анализе, линейной алгебре (например, приведение матрицы или квадратичной формы к каноническому виду), дифференциальных уравнениях, уравнениях математической физики и т. д. Цель замены “старой” системы координат на “новую” в том, чтобы исследуемый объект стал выглядеть проще. В

основе метода лежат теоремы о существовании обратного и неявного отображений. Для простоты вычислений мы рассмотрим случай двух переменных.

Предположим, мы исследуем гладкую функцию $z = z(x, y)$, где аргумент $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ принадлежит некоторой области Ω . Заметим, что по сложившейся традиции и функцию, и ее значение обозначают одной буквой z , что часто приводит к ошибкам. Пусть дано выражение $G(x, y, z, \partial z/\partial x, \partial z/\partial y, \dots)$, зависящее от независимых переменных, функции и ее производных до порядка n включительно. Взаимно непрерывная и n раз непрерывно-дифференцируемая *биекция*

$$\mathbb{R}^2 \supset \Xi \xrightarrow{f} \Omega \Leftrightarrow \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y) \end{cases} \quad (1.18)$$

задает замену переменных. (Обычно мы знаем первую систему функций – выражение старых переменных через новые.) Требуется записать данное выражение G через новые переменные u, v , функцию $z = z(u, v)$ и частные производные $\partial z/\partial u, \partial z/\partial v, \dots$. (Заметим, что общепринятое обозначение функций $z(u, v)$ и $z(x, y)$ одной и той же буквой некорректно – это разные функции, которые принимают одинаковые значения при соответствующих друг другу аргументах $(u, v) \xrightarrow{f} (x, y)$. Получается, что буква z трактуется нами *четырьмя* способами в зависимости от обстоятельств!) Понятно, что в G вместо старых переменных надо подставить их выражения из (4.6), обозначение z оставляем без изменений, но понимаем как функцию $z(u, v)$. Остается найти выражения частных производных $\partial z/\partial x, \partial z/\partial y, \dots$, но как *функции новых переменных* u, v . Применяя правило дифференцирования сложной функции, получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (1.19)$$

где слева $z = z(x, y)$, а справа $z = z(u, v)$. Чтобы найти производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ нужно воспользоваться выражением новых координат через старые, но следует иметь в виду, что эти выражения заданы неявно. Однако – и это принципиальный момент в процедуре замены – можно продифференцировать выражение старых координат через новые, *подразумевая*, что последние выражены через старые. Т. е.

продифференцировать *тождества* по паре переменных (x, y) :

$$\begin{cases} x = x(u(x, y), v(x, y)), \\ y = y(u(x, y), v(x, y)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \\ 0 = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}, \\ 0 = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \\ 1 = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}. \end{cases} \quad (1.20)$$

И еще раз отметим, что в записи $\frac{\partial x}{\partial u}$ в числителе $x = x(u, v)$ – функция, а в знаменателе u – независимая переменная; в записи $\frac{\partial u}{\partial x}$ – наоборот: в числителе $u = u(x, y)$ – функция, а в знаменателе x – независимая переменная. Полученная *линейная* система 4×4 распадается на две подсистемы 2×2 : первое и третье уравнения и второе и четвертое. Получаем искомые производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = g_1 \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v} \right), \dots, \frac{\partial v}{\partial x} = g_4 \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v} \right). \quad (1.21)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5.1. При поиске производных $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$, мы фактически повторили доказательство формулы (1.5) нахождения производной обратного отображения. Можно сразу найти матрицу Df , затем к ней обратную $(Df)^{-1} = D(f^{-1})$. \square

ПРИМЕР 1.5.1. Пусть новые переменные – полярные координаты, т. е. $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Мы найдем частные производные новых переменных r, φ по старым переменным x, y не выражая новые переменные через старые двумя способами – через систему (1.20) и методом обратной матрицы. Импликация (1.20) имеет вид:

$$\begin{cases} x = r(x, y) \cos \varphi(x, y), \\ y = r(x, y) \sin \varphi(x, y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \frac{\partial r}{\partial x} \cos \varphi - r \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ 0 = \frac{\partial r}{\partial y} \cos \varphi - r \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ 0 = \frac{\partial r}{\partial x} \sin \varphi + r \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ 1 = \frac{\partial r}{\partial y} \sin \varphi + r \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \end{cases}$$

Решение системы при условии $r \neq 0$ имеет вид:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin \varphi}{r}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos \varphi}{r}.$$

С другой стороны, матрица частных производных замены переменных имеет вид:

$$Df(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix},$$

поэтому обратная матрица такова:

$$D(f^{-1})(r, \varphi) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \varphi & r \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\frac{\sin \varphi}{r} & \frac{\cos \varphi}{r} \end{pmatrix}.$$

Если выражение G содержит производные второго порядка, то дифференцируем выражения (1.19) еще раз по старым переменным. Появляются частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dots, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ (всего 6 штук). Чтобы их найти, дифференцируем выражения (1.21) по старым переменным. Предупреждаем, что объем вычислений существенно увеличивается – требуется решить линейную систему 6×6 .

Рассмотрим общий случай, когда нужно перейти от функции $z = z(x, y)$ к функции $w = w(u, v)$, воспользовавшись биекцией $\mathbb{R}^3 \supset \Xi \xrightarrow{f} \Omega \subset \mathbb{R}^3$ трехмерных областей. Эту биекцию можно задать неявно с помощью системы из трех уравнений $F_i(x, y, z; u, v, w) = 0$ ($i = 1, 2, 3$), предполагая, что отображение $F = (F_1, F_2, F_3)$ удовлетворяет теореме 1.4.1, если считать зависимой хоть вторую тройку переменных (u, v, w) , хоть первую тройку (x, y, z) :

$$\begin{cases} F_1(x, y, z; u, v, w) = 0, \\ F_2(x, y, z; u, v, w) = 0, \\ F_3(x, y, z; u, v, w) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x(u, v, w), \\ y = y(u, v, w), \\ z = z(u, v, w) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = u(x, y, z), \\ v = v(x, y, z), \\ w = w(x, y, z). \end{cases} \quad (1.22)$$

Поскольку по условию $z = z(x, y)$, получаем систему из трех уравнений с пятью неизвестными, которая равносильна заданию неявного отображения:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z(x, y); u, v, w) = 0, \\ F_2(x, y, z(x, y); u, v, w) = 0, \\ F_3(x, y, z(x, y); u, v, w) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \\ w = w(x, y). \end{cases} \quad (1.23)$$

Чтобы записать выражение $G(x, y, z, \partial z/\partial x, \partial z/\partial y, \dots)$ через новые переменные u, v, w и производные $\partial w/\partial u, \partial w/\partial v, \dots$, во-первых, из системы уравнений (1.22) выражаем старые координаты через новые. Во-вторых, трактуя систему уравнений (1.23) как систему тождеств

$$\begin{cases} F_1(x, y, z(x, y); u(x, y), v(x, y), w(u(x, y), v(x, y))) \equiv 0, \\ F_2(x, y, z(x, y); u(x, y), v(x, y), w(u(x, y), v(x, y))) \equiv 0, \\ F_3(x, y, z(x, y); u(x, y), v(x, y), w(u(x, y), v(x, y))) \equiv 0, \end{cases} \quad (1.24)$$

и дифференцируя ее по переменным x и y , получаем систему из шести *линейных* уравнений относительно шести неизвестных функций $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$. Выпишем одно уравнение, полученное дифференцированием первого тождества по переменной x :

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial w} \left(\frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0.$$

Решаем систему (в общем случае 6×6) и подставляем выражения для частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ в G .

Если выражение G содержит производные второго порядка, то является еще девять неизвестных функций $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dots, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, которые находим, дифференцируя по x и по y полученные ранее выражения производных $\frac{\partial z}{\partial x}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x}$.

ПРИМЕР 1.5.2. Сделаем замену в выражении $G(x, y, z, \partial z/\partial x, \partial z/\partial y)$, приняв x за функцию, а y и z за независимые переменные. Чтобы не запутаться в переменных, запишем систему (1.22):

$$\begin{cases} x = w, \\ y = u, \\ z = v. \end{cases}$$

Теперь система тождеств (1.23) по паре переменных (x, y) принимает вид:

$$\begin{cases} x \equiv w(u(x, y), v(x, y)), \\ y \equiv u(x, y), \\ z(x, y) \equiv v(x, y). \end{cases}$$

Дифференцируя полученную систему по переменным x и y , получаем линейную систему уравнений:

$$\begin{cases} 1 = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \\ 0 = \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}, \\ 0 = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}, \\ 1 = \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}. \end{cases}$$

Ее решение таково:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\frac{\partial w}{\partial v}}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial w}{\partial u}}{\frac{\partial w}{\partial v}}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\frac{\partial w}{\partial v}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial w}{\partial u}}{\frac{\partial w}{\partial v}}.$$

В двух последних равенствах перейдем к старым обозначениям, помня, что слева переменная z – функция, переменная x – аргумент, а справа переменная z – аргумент, переменная x – функция:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial x}{\partial y}}{\frac{\partial x}{\partial z}}.$$

Остается подставить полученные выражения под знак функции G .

1.6. Гладкие многомерные поверхности

В многомерной геометрии, в теории экстремумов, в теории интегрирования, а также в различных разделах физики возникают поверхности, размерности выше двух. Поэтому полезно иметь их единообразное описание.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6.1. Подмножество $S \subset \mathbb{R}^p$ называется n -мерной **простой гладкой поверхностью** в p -мерном пространстве, если S является образом отображения $\Phi : \mathbb{R}^n \supset V \rightarrow \mathbb{R}^p$, обладающего следующими свойствами:

- 1) $n < p$;
- 2) $V \subset \mathbb{R}^n$ – область;
- 3) отображение Φ инъективно, т. е. $\forall t^1, t^2 \in V, t^1 \neq t^2$ верно $\Phi(t^1) \neq \Phi(t^2)$;
- 4) $\Phi \in C^1(V)$ и в каждой точке $t \in V$ ранг матрицы частных производных максимален, т. е. $\text{rank}(D\Phi(t)) = n$.

Отображение Φ называют **параметризацией** поверхности, а переменную $t \in \mathbb{R}^n$ – параметром. \square

ОБСУЖДЕНИЕ 1.6.1. Одна и та же поверхность всегда параметризована бесконечным количеством способов: если $K : \mathbb{R}^n \supset V' \rightarrow V$ есть биекция класса C^1 , производная которой в каждой точке невырождена, то отображение

$$\Phi' : V' \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad \Phi'(t') := \Phi(K(t'))$$

также является параметризацией (см. рис. 1.5). Можно доказать, что таким образом получаются все параметризации данной поверхности.

\square

Зафиксируем все координаты параметра t , кроме одной t_j . Изменяя ее, получим кривую $\gamma_j \subset S$, принадлежащую данной поверхности, которая параметризована отображением $\Gamma_j(t_j) := \Phi(t_1^0, \dots, t_j, \dots, t_n^0)$. В результате прямолинейная координатная сеть пространства \mathbb{R}^n преобразуется в **криволинейную координатную сеть** на S (рис. 1.5).

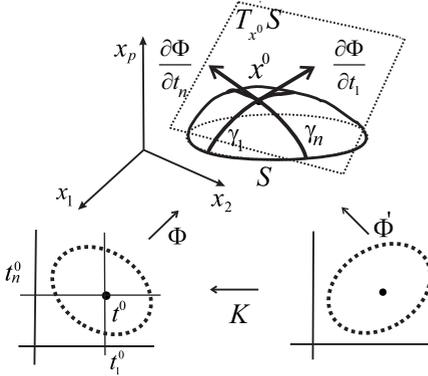


Рис. 1.5

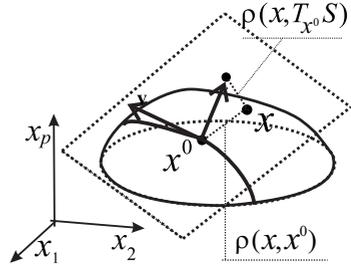


Рис. 1.6

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6.2. Пусть $\Phi(t^0) = x^0 \in S$ – фиксированная точка простой гладкой поверхности. Векторное подпространство $T_{x^0}S := \text{Im}(D\Phi(t^0)) \subset \mathbf{V}^p$ (т. е. образ производной $D\Phi(t^0)$) называется **касательным пространством** к поверхности в точке x^0 . \boxtimes

ОБСУЖДЕНИЕ 1.6.2. Отметим, что

- 1) Требование *максимальности* ранга матрицы $D\Phi(t^0)$ означает, что поверхность в каждой точке имеет касательное пространство одной и той же размерности n .
- 2) В геометрических исследованиях удобно откладывать векторы $\mathbf{v} \in T_{x^0}S$ касательного пространства от точки касания x^0 . В такой трактовке касательное пространство является точечным. Можно доказать, что расстояние от точки $x \in S$ поверхности до касательного пространства $T_{x^0}S$ есть величина более высокого порядка малости, чем расстояние от x до точки касания x^0 (рис. 1.6): $\rho(x, T_{x^0}S) = o(\rho(x, x^0))$ при $x \rightarrow x^0$, $x \in S$.
- 3) Физический смысл касательного пространства. Рассмотрим всевозможные элементарные гладкие кривые γ , которые целиком

принадлежат гладкой поверхности S и проходят через ее фиксированную точку x^0 ; такие кривые имеют параметризации $(-1, 1) \xrightarrow{\Gamma} S \subset \mathbb{R}^n$, где $\Gamma(0) = x^0 \in S$. Проинтерпретируем γ как *траекторию* движения материальной точки по поверхности S через x^0 . Тогда касательное пространство $T_{x^0}S$ есть пространство всех *скоростей* $\mathbf{v} = D\Gamma(0)$ названных движений материальной точки: $T_{x^0}S = \{\mathbf{v}\}$ (рис. 1.6). \square

ЛЕММА 1.6.1. (о задании касательного пространства)

- 1) Касательное пространство не зависит от параметризации Φ поверхности.
- 2) Столбцы матрицы

$$D\Phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi_1(t)}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial\Phi_1(t)}{\partial t_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\Phi_p(t)}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial\Phi_p(t)}{\partial t_n} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial\Phi(t)}{\partial t_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial\Phi(t)}{\partial t_n} \right) \quad (1.25)$$

образуют базис касательного пространства; каждый из столбцов является касательным вектором соответствующей кривой γ_j (рис. 1.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО п. 1. Из обсуждения 1.6.1 следует, что образ $Im(D\Phi'(t')) = Im(D\Phi(t) \circ DK(t'))$, где $t = f(t')$. Поскольку производная $DK(t')$ невырождена, ее образом является все пространство \mathbf{V}^n . Поэтому $Im(D\Phi'(t')) = Im(D\Phi(t) \circ DK(t')) = Im(D\Phi(t))$.

Утверждение п. 2 является прямым следствием геометрического смысла столбцов матрицы, определения касательного пространства и определения криволинейной координатной сети. \blacksquare

ПРИМЕРЫ 1.6.1. 1) Гладкая незамкнутая кривая на плоскости или в пространстве есть 1-мерная простая гладкая поверхность. 2) Плоскость, эллиптический и гиперболический параболоиды, одна из полостей двуполостного гиперboloида – 2-мерные простые гладкие поверхности в трехмерном пространстве.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6.3. Подмножество $S \subset \mathbb{R}^n$ называется *n -мерной гладкой поверхностью* в p -мерном пространстве, если S **локально** является n -мерной простой гладкой поверхностью. Т. е. у каждой точки $x \in S$ имеется окрестность, пересечение которой с S является n -мерной простой гладкой поверхностью. \boxtimes

ПРИМЕРЫ 1.6.2. 1) Простая гладкая поверхность автоматически гладкая поверхность. 2) Замкнутая гладкая кривая. 3) Сфера, однополостный гиперболоид, тор – 2-мерные гладкие поверхности (обоснование в конце пункта).

Применение параметризации для задания поверхности, во-первых, не всегда возможно; так, гладкую поверхность, которая не является простой, задать целиком одной параметризацией невозможно по определению. Во вторых, пользоваться параметризацией неудобно из-за ее аналитической громоздкости. Существует другой способ задания поверхности

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6.4. Пусть $S \subset \mathbb{R}^p$ – гладкая поверхность некоторой размерности n . Если отображение $F : \mathbb{R}^p \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$ такое, что $S = \{x \in U : F(x) = O_y\}$, то говорят о **неявном** способе задания поверхности S . Другими словами, поверхность $S = F^{-1}(O_y)$ есть *полный прообраз* точки O_y . \square

Аналитически применение неявного способа приводит к исследованию множества всех решений системы $F_i(x_1, \dots, x_p) = 0$ ($i = 1, \dots, m$) из m уравнений с p неизвестными. Возникает вопрос: каким должно быть отображение F , чтобы оно порождало гладкую поверхность, и какой размерности будет эта поверхность?

ТЕОРЕМА 1.6.1. (*о неявном задании гладкой поверхности*) Пусть $m, p \in \mathbb{N}$ и $m < p$, $U \subset \mathbb{R}^p$ – область, отображение $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ принадлежит классу гладкости $C^1(U)$ и в каждой точке $x \in F^{-1}(O_y)$ ранг матрицы частных производных максимален (т. е. $\text{rank}(DF(x)) = m$). Тогда:

- 1) $S = F^{-1}(O_y)$ есть гладкая поверхность размерности $n = p - m$;
- 2) касательное пространство к поверхности S в точке x есть ядро матрицы Якоби отображения F , т. е.

$$\begin{aligned} T_x S &= \text{Ker} DF(x) = (DF(x))^{-1}(\mathbf{0}) = \\ &= \{\mathbf{v} \in \mathbf{V}^p : DF(x)\mathbf{v} = \mathbf{0}\}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.6.1. Из теоремы следует, что каждое уравнение $F_i(x) = 0$ “забирает” одну размерность в прообразе $F^{-1}(O_y)$. \square

ЗАДАЧА 1.6.1. Сколько неизвестных и сколько уравнений должна содержать система, удовлетворяющая условиям теоремы 1.6.1, чтобы задать линию в геометрическом (т. е. трехмерном) пространстве?

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольную точку $x^* \in S$. Поскольку $\text{rank} DF(x^*) = m$, матрица $DF(x^*)$ содержит набор (не обязательно единственный) из m линейно независимых столбцов. Без ограничения общности можно считать, что последние m столбцов $\partial F(x^*)/\partial x_{p-m+1}, \dots, \partial F(x^*)/\partial x_p$ линейно независимы (иначе перенумеруем переменные x_i). Переобозначим переменные x_i , где $i = p - m + 1, \dots, p$, в y_i ; для переменных с номерами $i = 1, \dots, p - m$ оставим прежнее обозначение. Теперь $x = (x_1, \dots, x_n)$ ($n = p - m$), $y = (y_1, \dots, y_m)$. В результате данное пространство получит представление в виде прямого произведения двух пространств ($\mathbb{R}^p = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$), а данное отображение $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1.4.1 о неявном отображении. В силу п. 4 теоремы 1.4.1, множество S в некоторой окрестности Q_A точки $A(x^0, y^0) = x^*$ является графиком неявного отображения $f : X_{x^0} \rightarrow \mathbb{R}^m$ шаровой окрестности X_{x^0} . Определим отображение

$$Gr(f) : X_{x^0} \rightarrow \mathbb{R}^p \quad Gr(f)(x) := (x, f(x)),$$

которое сопоставляет точке x соответствующую ей точку на графике $gr(f)$ отображения f . Подчеркнем, что $Gr(f)$ – отображение, а график $gr(f) \subset \mathbb{R}^p$ – подмножество, причем, в силу определения, образ $Gr(Q_A) \subset \subset gr(f)$ (рис. 1.7). Отображение $Gr(f)$ удовлетворяет всем требованиям, перечисленным в определении 1.6.1. В самом деле:

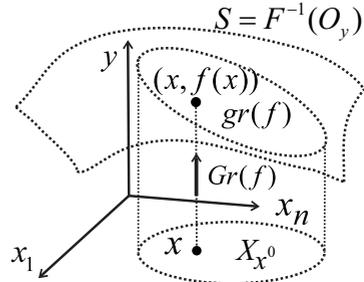


Рис. 1.7

- 1) $n = p - m < p$ поскольку $m \in \mathbb{N}$;
- 2) X – область (в силу теоремы 1.4.1);

3) если $x^1 \neq x^2$, то $GR(f)(x^1) = (x^1, f(x^1)) \neq (x^2, f(x^2)) = GR(f)(x^2)$;

4) гладкость $Gr(f)$ следует из гладкости f , а $\text{rank} D(Gr(f))(x^0, y^0) = n$ поскольку матрица производной имеет блочный вид $D(Gr(f))(x^0, y^0) = (id_x | D_y(Gr(f))(x^0, y^0))$. Значит, график отображения f является простой гладкой поверхностью. Первое утверждение доказано.

Вернемся к исходному обозначению точки $x \in \mathbb{R}^p$. Пусть $x = \Phi(t)$ ($t \in V \subset \mathbb{R}^n$, см. определение 1.6.1) какая-то параметризация поверхности S в ε -окрестности т. $x^* \in S$ (например, в качестве параметризации можно взять отображение $Gr(f)$). Тогда, в силу определения

простой гладкой поверхности и доказанного п. 1 теоремы,

$$x \in S \cap U_\varepsilon(x^*) \Leftrightarrow \forall t \in V \hookrightarrow F(\Phi(t)) \equiv O_y.$$

Дифференцируя тождество $F(\Phi(t)) \equiv O_y$, получаем $DF(x) \circ D\Phi(t) = \Theta$, где $x = \Phi(t)$, а Θ – нулевая матрица размером $m \times n$. Значит, $\forall \vec{\tau} \in \mathbf{V}^n$ верно равенство $DF(x)(D\Phi(t)\vec{\tau}) = \mathbf{0}$. Но, по определению 1.6.2, векторное подпространство-образ $\{\mathbf{v} = D\Phi(t)\vec{\tau}, \text{ где } \vec{\tau} \in \mathbf{V}^n\} = \text{Im}(D\Phi(t)) = T_x S$ есть касательное пространство. Следовательно, $T_x S \subset \ker DF(x)$. Поскольку совпадают размерности $\dim T_x S = \dim(\ker DF(x)) = n$, то совпадают подпространства: $T_x S = \ker DF(x)$.

■

ЗАМЕЧАНИЕ 1.6.2. В доказательстве теоремы 1.6.1 мы задали поверхность как график гладкого отображения. Такой способ задания поверхности называется **явным**. Явный способ является частным случаем параметрического. Но он удобнее его, поскольку не использует дополнительные переменные-параметры: переменные x_1, \dots, x_n одновременно являются и параметрами, и первыми координатами точки на поверхности. □

ЗАДАЧА 1.6.2. Дайте параметрическое, неявное и явное задания окружности, двумерной сферы и их касательных пространств.

Как известно из курса линейной алгебры, ранг матрицы равен количеству линейно независимых строк. Поскольку в условиях теоремы 1.6.1 $\text{rank}(DF(x)) = m$ максимален, то все строки матрицы $DF(x)$ линейно независимы. Но транспонированная i -я строка есть вектор градиента функции $F_i(x)$. Следовательно, условие максимальности ранга матрицы частных производных геометрически равносильно линейной независимости m градиентов $\text{grad}F_i(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6.5. Линейную m -мерную оболочку векторов $\text{grad}F_i(x)$ ($i = 1, \dots, m$) называют **нормальным подпространством** $N_x S$ к поверхности S в точке $x \in S$. □

Мы получаем

СЛЕДСТВИЕ 1.6.1. *Нормальное подпространство $N_x S$ является ортогональным дополнением к касательному пространству $T_x S$: а) в каждой точке $x = \Phi(t)$ справедливы $m \cdot n$ условий ортогональности:*

$$\left(\text{grad}F_i(x), \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t_j} \right) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad \forall j = 1, \dots, n;$$

б) прямая сумма указанных подпространств образует все p -мерное пространство: $T_x S \oplus N_x S = \mathbf{V}^p$, где $p = m + n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Распишем полученное выше матричное равенство:

$$DF(x) \circ D\Phi(t) = \Theta \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_m(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m(x)}{\partial x_p} \end{array} \right) \circ \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial \Phi_1(t)}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1(t)}{\partial t_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \Phi_p(t)}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_p(t)}{\partial t_n} \end{array} \right) = \Theta,$$

где $x = \Phi(t)$, а Θ — нулевая матрица размером $m \times n$. Умножая i -ю строку левой матрицы на j -й столбец правой матрицы, получаем попарную ортогональность названных векторов.

На рис. 1.8 показаны два возможных случая размерностей касательного пространства и его ортогонального дополнения в трехмерном пространстве. Так как касательное пространство $T_x S$ имеет размерность n , а нормальное пространство $N_x S$ является $m = (p - n)$ -мерным, их прямая сумма является p -мерным подпространством, т. е. всем пространством.

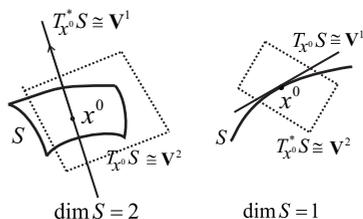


Рис. 1.8

Значит, $N_x S$ является ортогональным дополнением к $T_x S$. ■

В заключение пункта обсудим различные аналитические задания двумерной сферы S^2 радиуса R . Во-первых, она задается *явно* одним уравнением в \mathbb{R}^3 : $S^2 = \{A(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0\}$. Поскольку в произвольной точке $A(x, y, z) \in S^2$ градиент $\mathbf{grad} \mathbf{F} = 2(x, y, z)^T \neq \mathbf{0}$, сфера является гладкой двумерной поверхностью (теорема 1.6.1). Во-вторых, для фиксированной точки $A(x_0, y_0, z_0) \in S^2$ выберем какую-то координату, которая не равна нулю; пусть это $z_0 \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности точки A сфера задается *явно* функцией $z = \text{sign}(z^0) \cdot \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

Наконец, параметризуем сферу с помощью *сферических координат* $(\rho, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}_0^+ \times [-\pi, \pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$, взяв $\rho = R = \text{const}$ (см. п. 10.2 во второй части лекций и рис. 1.9):

$$\Phi : [-\pi, \pi] \times \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Phi(\varphi, \theta) = (x, y, z), \quad \text{где} \quad \begin{cases} x = R \cos \theta \cos \varphi, \\ y = R \cos \theta \sin \varphi, \\ z = R \sin \theta. \end{cases}$$

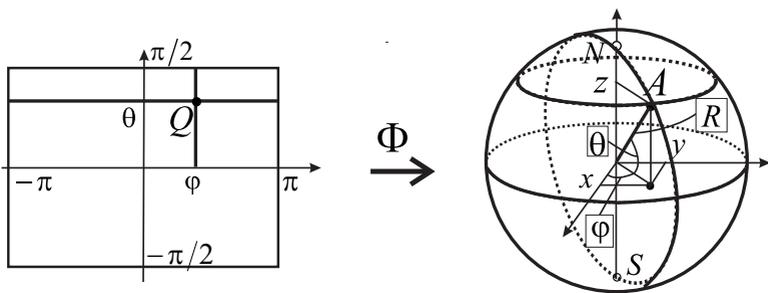


Рис. 1.9

Обратим внимание на специфику этой параметризации: 1) отрезки $\{\theta = \pm\pi/2\}$ отображаются в северный полюс N и в южный полюс S соответственно: $\Phi(\varphi, \pm\pi/2) = (0, 0, \pm R)$; 2) точки $(\pm\pi, \theta)$ отображаются в одну и ту же точку на сфере: $\Phi(\pm\pi, \theta) = (-R \cos \theta, 0, R \sin \theta)$; 3) параметры (φ, θ) на географических картах называются «долготой» и «широтой» точки A ; 4) криволинейную координатную сеть из «параллелей» ($\theta = \text{const}$) и «меридианов» ($\varphi = \text{const}$) мы видим на глобусе.

Значит, на открытом прямоугольнике $(-\pi, \pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$ параметризация Φ является инъективной. Покажем, что ранг матрицы $D\Phi$ равен двум. Матрица Якоби равна

$$D\Phi(\varphi, \theta) = R \begin{pmatrix} -\cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \cos \varphi & -\sin \theta \sin \varphi \\ 0 & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Минор, порожденный двумя верхними строками, есть

$$\det R \begin{pmatrix} -R \cos \theta \sin \varphi & -R \sin \theta \cos \varphi \\ R \cos \theta \cos \varphi & -R \sin \theta \sin \varphi \end{pmatrix} = R^2 \frac{\sin 2\theta}{2}.$$

Следовательно $\text{rank}(D\Phi(\varphi, \theta)) \neq 0$ при $\theta \neq \frac{\pi}{2}$. Значит, во всех точках, кроме полюсов и меридиана $\theta = \pi$, выполнены требования определения 1.6.1. Поворотом осей декартовой системы (x, y, z) описанную параметризацию можно задать в любой точке сферы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.6.3. Оказывается, всю сферу целиком параметризовать с учетом требований определения 1.6.1 невозможно, т. е. сфера НЕ является простой гладкой поверхностью.

ЗАДАЧА 1.6.3. Придумайте параметризацию сферы с одной особой точкой.

Глава 2

Экстремумы функций нескольких переменных

Проблема отыскания экстремума функции естественным образом возникает в геометрических задачах, задачах теории управления, в уравнениях математической физики, в многочисленных физических приложениях (которые основаны на вариационном принципе), в экономике.

2.1. Необходимые и достаточные условия экстремума

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.1. Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ задана на некотором открытом множестве. Точка $x^0 \in U$ называется точкой строгого (нестрогого) **локального максимума (минимума)**, если в некоторой проколотой шаровой окрестности этой точки $f(x) < f(x^0)$ ($\leq, >, \geq$). Точку локального максимума или минимума называют точкой **локального экстремума** функции. \boxtimes

ТЕОРЕМА 2.1.1. (необходимые условия локального экстремума)
Если в точке локального экстремума x^0 функция f дифференцируема, то вектор производной (градиент) в этой точке обнуляется, т. е. обнуляются все частные производные:

$$f'(x^0) = \left(\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_n} \right)^T = \mathbf{0} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1} = 0, \dots, \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_n} = 0. \quad (2.1)$$

На рис. 2.1 изображен график функции $z = \sin y^2 \cos x$, а на рис. 2.2 изображены линии уровня этой функции. Видны изолированные экстремальные точки, в которых касательная плоскость к графику *горизонтальна*. Обратите внимание, что они сами по себе являются вырожденными линиями уровня функции.

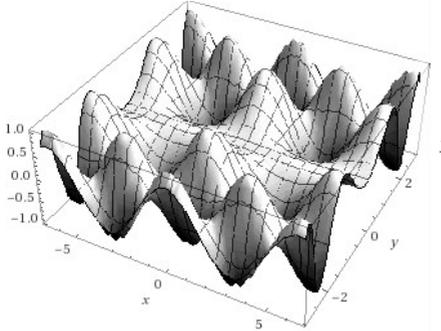


Рис. 2.1

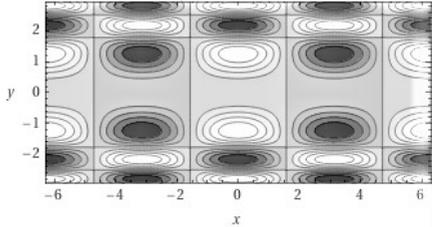


Рис. 2.2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ – точка локального экстремума функции f , то число x_i^0 является точкой локального экстремума функции $f_i(x_i) := f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0)$ *одного* (то есть числового) переменного x_i . В силу теоремы Ферма $0 = (f_i)'(x_i^0) = \partial f(x^0)/\partial x_i$. ■

Решения системы (2.1) являются точками подозрительными на экстремум. Их называют **стационарными**. Если функция f дифференцируема на U , кроме стационарных, других точек, подозреваемых на экстремум, нет. Заметим, что система уравнений (2.1) имеет квадратный вид – состоит из n уравнений с n неизвестными. В “типичном” случае такая система имеет изолированные решения. Если дополнительно известно, что множество стационарных точек ограничено, тогда их количество конечно. Условие (2.1) не является достаточным. Так, функция $y = x^3$ имеет стационарную точку $x = 0$, которая не является точкой экстремума.

ЗАДАЧА 2.1.1. Приведите пример функции двух переменных, которая обладает стационарной точкой не являющейся точкой экстремума.

Возникает проблема получения обозримых достаточных условий существования экстремума. Пусть функция $f \in C^2(U)$ в некоторой окрестности U стационарной точки x^0 . Как и в случае функции одной переменной воспользуемся формулой Тейлора $f(x) - f(x^0) = df(x^0; \Delta x) + \frac{1}{2}d^2f(x^0, \Delta x) + o(|\Delta x|^2)$, где $\Delta x = x - x^0$ и $\Delta x \rightarrow \mathbf{0}$ ($x \in U$). Напомним, что:

1) дифференциал второго порядка $d(df) = d^2f = d^2f(x, dx)$ есть функция $2n$ переменных $(x; dx) = (x_1, \dots, x_n; dx_1, \dots, dx_n)$ ($x \in \mathbb{R}^n$, $dx \in \mathbf{V}^n$);

2) $d^2f(x, dx)$ относительно вектора dx является *квадратичной формой*, которая порождена симметрической матрицей $D^2f(x) := (\partial^2 f(x) / \partial x_i \partial x_j)$ ($i, j = 1, \dots, n$) вторых производных:

$$\begin{aligned} d^2f(x, dx) &= d(df)(x) = d(\mathbf{grad} f(x), dx) = \\ &= (D^2f(x)dx, dx) = (dx)^T \cdot D^2f(x) \cdot dx. \end{aligned} \quad (2.2)$$

В силу (2.1), в точке x^0 первый дифференциал $df(x^0, dx) \equiv 0$ по переменной dx . Поэтому в точке x^0 разложение Тейлора имеет вид:

$$f(x) - f(x^0) = \frac{1}{2}d^2f(x^0, \Delta x) + o(|\Delta x|^2) \text{ при } \Delta x \rightarrow \mathbf{0}. \quad (2.3)$$

Напомним, что квадратичная форма $K(w)$ называется

- 1) **положительно определенной**, если $K(w) > 0$ для всех $w \neq \mathbf{0}$;
- 2) **отрицательно определенной**, если $K(w) < 0$ для всех $w \neq \mathbf{0}$;
- 3) **знаконеопределенной**, если существуют w_1, w_2 такие, что $K(w_1) > 0$, $K(w_2) < 0$;
- 4) **положительно (отрицательно) полуопределенной**, если она не принимает отрицательных (положительных) значений и существует $w \neq 0$, что $K(w) = 0$.

Знакоопределенность квадратичной формы проверяют с помощью критерия Сильвестра. Исследуя функцию с помощью разложения (2.3), мы рассчитываем на то, что в нем ведущую роль играет именно квадратичная форма, а не остаточный член, имеющий более высокий порядок малости. Именно так и происходит в *устойчивом* случае:

ТЕОРЕМА 2.1.2. (*достаточные условия экстремума*) Пусть x^0 – стационарная точка функции f , и $f \in C^2$ в некоторой окрестности точки x^0 . Тогда:

- 1) если квадратичная форма $d^2f(x^0, dx)$ является положительно определенной, то x^0 – точка **строгого** локального минимума функции f ;
- 2) если квадратичная форма $d^2f(x^0, dx)$ является отрицательно определенной, то x^0 – точка **строгого** локального максимума функции f ;
- 3) если квадратичная форма $d^2f(x^0, dx)$ знаконеопределенная, то x^0 **НЕ** является точкой локального экстремума функции f ;
- 4) если квадратичная форма $d^2f(x^0, dx)$ является или положительно, или отрицательно полуопределенной, то x^0 может быть точкой локального экстремума (как строгого, так и нестрогого), а может и не быть таковой.

ПРИМЕРЫ 2.1.1. Примерами случаев 1-4 в точке $O(0, 0)$ являются: 1) $z = x^2 + y^2$, 2) $z = -x^2 - y^2$, 3) $z = x^2 - y^2$, 4) (а) $z = x^2 + y^4$ (точка строгого минимума), (б) $z = x^2$ (точка нестрогого минимума), (в) $z = x^2 - x^4$ (экстремум отсутствует) (рис. 2.3 - 2.8).

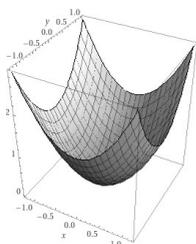


Рис. 2.3

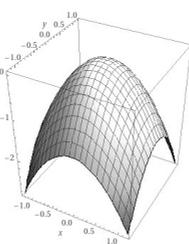


Рис. 2.4

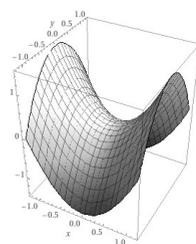


Рис. 2.5

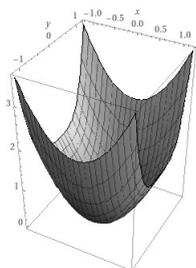


Рис. 2.6

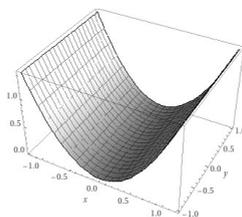


Рис. 2.7

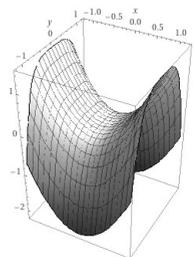


Рис. 2.8

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.1. Случаи 1-3 устойчивы, т. е. малое изменение элементов матрицы $D^2f(x^0)$ не меняет тип точки x^0 . \square

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что свойство точки x^0 быть экстремальной для функции f является геометрическим. Другими словами, если $A : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{V}^n$ ортогональное преобразование (сохраняющее расстояние между точками), то функции $f(x)$ и $g(y) := f(Ay + x^0)$ в точках $x^0 = A(0) + x^0$ и $y^0 = 0$ имеют одни и те же экстремальные свойства. В силу *линейности* A , первый дифференциал $d(Ay + x^0) = A(dy)$, а второй дифференциал $d^2(Ay + x^0) = d(A(dy)) \equiv 0$. Применяя правило Лейбница к скалярному произведению и правило дифференцирования суперпозиции отображений получаем:

$$\begin{aligned} d^2g(0, dy) &= d(dg(y, dy))|_{y=0} = d(\mathbf{grad} f(Ay + x^0), A(dy))|_{y=0} = \\ &= (D^2f(Ay + x^0)|_{y=0} \circ A(dy), A(dy)) + (\mathbf{grad} f(Ay + x^0), 0) = \\ &= (A(dy))^T \circ D^2f(x^0) \circ (A(dy)) = (dy)^T \cdot (A^T \circ D^2f(x^0) \circ A) \cdot dy. \end{aligned}$$

Сравнивая с (2.2), мы видим, что матрица $D^2f(x^0)$ вторых производных в результате линейной замены независимых переменных преобразуется по закону преобразования матрицы *квадратичной формы*. Значит, существует такое преобразование A , что квадратичная форма $d^2g(0, dy)$ приобретает канонический диагональный вид $\sum_{i=1}^n \lambda_i dy_i^2$; при этом диагональные элементы $\lambda_i = \partial^2g(0)/\partial y_i^2$. После *линейной* замены $x = Ay + x^0$ остаточный член в формуле Тейлора сохраняет порядок малости, т. е. $o(|dy|^2)$ (докажите). Без ограничения общности рассуждений считаем, что исходная система координат уже каноническая и $x^0 = 0$. Тогда, в силу (2.3),

$$\Delta f(x) = \frac{1}{2}(\lambda_1(x_1)^2 + \dots + \lambda_k(x_k)^2 + \lambda_{k+1}(x_{k+1})^2 + \dots + \lambda_{k+l}(x_{k+l})^2) + o(|x|^2),$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_k > 0, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_{k+l} < 0, k + l \leq n$.

Квадратичная форма положительно определена только при условии, что все $\lambda_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$). Пусть $\lambda = \min\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} > 0$. Следовательно, существует такое малое $\varepsilon > 0$, что для любого вектора $x \neq \mathbf{0} \wedge |x| < \varepsilon$ верно:

$$\Delta f(x) > \frac{1}{2}n\lambda|x|^2 + o(|x|^2) = |x|^2 \left(\frac{1}{2}n\lambda + \frac{o(|x|^2)}{|x|^2} \right) > \frac{n\lambda}{4}|x|^2 > 0.$$

Первый пункт доказан. Доказательство второго пункта сводится к первому заменой функции f на функцию $-f$.

Знаконеопределенность означает, что среди чисел λ_i имеются хотя бы два числа разных знаков: пусть $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$. Тогда существует $\varepsilon > 0$, что

$$f(x_1, 0, \dots, 0) = \frac{1}{2}\lambda_1(x_1)^2 + o((x_1)^2) > 0 \text{ при } 0 < |x_1| < \varepsilon,$$

$$f(0, x_2, 0, \dots, 0) = \frac{1}{2}\lambda_2(x_2)^2 + o((x_2)^2) < 0 \text{ при } 0 < |x_2| < \varepsilon.$$

Пункт 3 доказан.

Полуопределенность квадратичной формы означает, что те числа λ_i , которые отличны от нуля, одного знака, но их количество *строго* меньше, чем n . В качестве примеров возьмем две функции двух переменных, у которых совпадают вторые дифференциалы:

$$f_1(x, y) = x^2 + y^4, \quad f_2(x, y) = x^2 - y^4.$$

Для f_1 точка $O(0, 0)$ является точкой строгого минимума, а для f_2 точка O не является точкой экстремума (обоснуйте). Заметим, что графики 2.6, 2.8 функций f_1, f_2 визуальны аналогичны графикам 2.3 и 2.5 соответственно. ■

2.2. Условный экстремум

Обычно нахождение экстремума функции связано дополнительными условиями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2.1. Пусть в области $U \subset \mathbb{R}^p$ задана скалярная функция f и отображение $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $F(x) = (F_1(x), \dots, F_m(x))$ ($m < p$). Обозначим через $S := \{x \in U : F(x) = O_y\} \subset U$ подмножество, заданное неявно отображением F . Точка $x^0 \in S$ называется точкой **локального условного экстремума** функции f на множестве S , если существует такая шаровая окрестность $B_\varepsilon(x^0)$, что в пересечении $\forall x \in \overset{\circ}{B}_\varepsilon(x^0) \cap S$ выполняется неравенство: $f(x) > f(x^0)$ ($\geq, <, \leq$). В отсутствие дополнительных условий точку экстремума называют **безусловной**. ☒

Множество S задается системой $F_i(x_1, \dots, x_p) = 0$ из m уравнений с p неизвестными, причем $m < p$. Предположим, что система разрешима относительно m переменных, т. е. точка x представима в виде пары $x = (z, y)$ (где $y \in \mathbb{R}^m$, $z \in \mathbb{R}^{p-m}$), для которой условие $F(z, y) = O_y$ равносильно функциональной зависимости $y = H(z)$. (Достаточные

условия существования функциональной зависимости $y = H(z)$ сформулированы в теоремах 1.4.1 и 1.6.1.) В этом случае задача отыскания условного экстремума сводится к задаче отыскания безусловного экстремума функции $f(z) := f(z, H(z))$. Указанный метод называется **прямым**. Аналитическое осуществление прямого метода как правило не представляется возможным. Однако, в условиях теоремы 1.6.1, опираясь только лишь на *существование* зависимости $y = H(z)$, с помощью косвенных методов удается решить задачу отыскания условного экстремума.

Возникает естественный вопрос: насколько существенно дополнительные условия могут повлиять на экстремальные свойства функции? Ясно, что если точка x^0 является точкой безусловного *строгого* экстремума, то при любых дополнительных условиях она останется таковой. Если x^0 – точка безусловного *нестрогого* экстремума, то она останется точкой экстремума того же типа; возможно, нестрогого, возможно – строгого (приведите примеры обоих случаев). Если же x^0 не является точкой экстремума данной функции $f(x)$, то дополнительные условия могут приводить к любой ситуации.

ПРИМЕР 2.2.1. Рассмотрим функцию от двух переменных $f(x, y) = y + 2$. Очевидно, у данной функции нет даже стационарных точек. Условие связи $x^2 + y^2 - 1 = 0$ задает на плоскости единичную окружность S . Суженная на S функция $f|_S$ имеет максимум и минимум в точках $(0, \pm 1)$ соответственно (рис. 2.9).

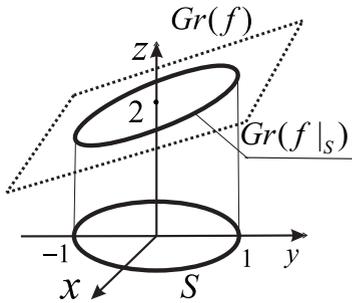


Рис. 2.9

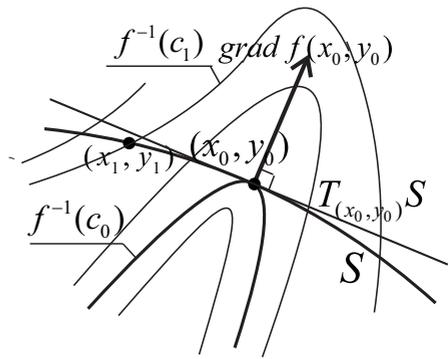


Рис. 2.10

ОБСУЖДЕНИЕ 2.2.1. (геометрическая интерпретация задачи на условный экстремум) Пусть функция $f(x, y)$ определена на плоской

области, а дополнительное условие задано уравнением $F(x, y) = 0$, удовлетворяющим теореме 1.6.1. Значит, речь идет о задаче на экстремум на кривой $S = \{F(x, y) = 0\}$ (рис. 2.10). Пусть в точке $(x_1, y_1) \in S$ поверхность уровня $f^{-1}(c_1) = \{(x, y) : f(x, y) = f(x_1, y_1) = c_1\}$ геометрически пересекает S , т. е. касательная прямая $T_{(x_1, y_1)}S$ пересекает касательную прямую $T_{(x_1, y_1)}f^{-1}(c_1)$. Тогда для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ линии уровней $f^{-1}(c_1 \pm \varepsilon)$ геометрически пересекают S . Следовательно, (x_1, y_1) НЕ является точкой условного экстремума. Если же линия уровня $f^{-1}(c_0)$ касается S в (x_0, y_0) , то точка (x_0, y_0) может оказаться точкой условного экстремума. На рис. 2.10 (x_0, y_0) является точкой условного минимума функции f , а точка (x_1, y_1) – НЕ является точкой экстремума. Заметим, что в точке условного экстремума выполнено условие ортогональности: $\mathbf{grad} f(x_0, y_0) \perp T_{(x_0, y_0)}S$. Оказывается, это ключевое наблюдение, лежащее в основе теории Лагранжа об условном экстремуме. \square

2.3. Признаки существования условного экстремума

Всюду ниже предполагается, что:

- 1) функция f и отображение F принадлежат классу гладкости $C^1(U)$;
- 2) в каждой точке $x \in S$ ранг матрицы $DF(x)$ максимален, т. е. равен m .

Из условия 2, в силу теоремы 1.6.1, следует, что подмножество S является гладкой поверхностью размерности $n = p - m$, касательное пространство в точке $x \in S$ задается системой линеаризованных уравнений (1.26)

$$T_x S = \{v \in \mathbb{R}^p : (\mathbf{grad} F_1(x), v) = 0, \dots, (\mathbf{grad} F_m(x), v) = 0\},$$

а система векторов $\{\mathbf{grad} F_1(x), \dots, \mathbf{grad} F_m(x)\}$ является базисом в ортогональном дополнении $N_x S$ к $T_x S$ (см. следствие 1.6.1).

В принятых предположениях о функции f и отображении F справедлива

ТЕОРЕМА 2.3.1. (необходимое условие существования условного экстремума) Пусть x^0 – точка локального условного экстремума,

тогда справедливы следующие равносильные между собой утверждения:

- 1) $\mathbf{grad}f(x^0) \perp T_{x^0}S \Leftrightarrow$
- 2) существует единственный набор $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ из m чисел, для которого $\mathbf{grad}f(x^0) = \lambda_1 \mathbf{grad}F_1(x^0) + \dots + \lambda_m \mathbf{grad}F_m(x^0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Переформулируем задачу на условный экстремум. Пусть $\Phi : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ – произвольная локальная параметризация поверхности S в некоторой окрестности точки $x^0 \in S$. Рассмотрим сложную функцию

$$\tilde{f} : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(t) := f(\Phi(t)). \quad (2.4)$$

Мы утверждаем, что задача $f(x) \rightarrow \text{extremum}$ при условии $F(x) = 0$ равносильна безусловной задаче $\tilde{f} \rightarrow \text{extremum}$. Точнее, точка $x^0 = \Phi(t^0)$ является для функции f точкой локального условного экстремума любого из указанных типов только тогда, когда точка t^0 является для функции \tilde{f} точкой локального безусловного экстремума того же типа. Утверждение следует из того обстоятельства, что параметризация Φ является непрерывной в обе стороны биекцией между некоторой окрестностью $V_\varepsilon(x^0) := B_\varepsilon(x^0) \cap S$ точки x^0 и некоторой окрестностью $W(t^0, \varepsilon) = \Phi^{-1}(V_\varepsilon(x^0))$ точки t^0 .

Теперь, если x^0 – точка локального условного экстремума, то для сложной гладкой функции $\tilde{f} = f(\Phi(t))$ точка t^0 стационарная:

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} \Leftrightarrow \frac{\partial \tilde{f}(t^0)}{\partial t_j} = 0 \Leftrightarrow Df(\Phi(t^0)) \circ \frac{\partial \Phi(t^0)}{\partial t_j} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\mathbf{grad}f(x^0), \frac{\partial \Phi(t^0)}{\partial t_j}) = 0.$$

Из (1.25) следует, что вектор $\mathbf{grad}f(x^0)$ ортогонален каждому базисному вектору касательного пространства $T_{x^0}S$, что доказывает первое утверждение.

Из следствия 1.6.1 вытекает, что: 1) утверждение п. 1 равносильно принадлежности $\mathbf{grad}f(x^0) \in N_{x^0}S$; 2) вектор $\mathbf{grad}f(x^0)$ единственным образом раскладывается по базису $\{\mathbf{grad}F_1(x^0), \dots, \mathbf{grad}F_m(x^0)\}$. ■

ЗАДАЧА 2.3.1. Докажите, что условие $\mathbf{grad}f(x^0) \perp T_{x^0}S$ равносильно условию принадлежности $T_{x^0}S \subset T_{x^0}f^{-1}(c^0)$, где $c^0 = f(x^0)$.

Из теоремы 2.3.1 сразу вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2.3.1. (о точках, подозрительных на условный экстремум) Точка $x = (x_1, \dots, x_p) \in S$ может оказаться точкой условного экстремума функции f только в том случае, когда ее p координат и еще m чисел $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ удовлетворяют системе из $p + m$ уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = \lambda_1 \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_j} + \dots + \lambda_m \frac{\partial F_m(x)}{\partial x_j} & (j = 1, \dots, p), \\ F_i(x) = 0 & (i = 1, \dots, m). \end{cases} \quad (2.5)$$

Первые p уравнений есть покоординатная запись п. 2 теоремы 2.3.1. Остальные m уравнений есть условие принадлежности $x \in S$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3.1. Совпадение количества уравнений и количества неизвестных в системе (2.5) означает, что все условия задачи исчерпаны. \square

Утверждение следствия 2.3.1 удобно формулировать с помощью вспомогательной **функции Лагранжа**, зависящей от $p + m$ переменных:

$$L : U \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(x, \Lambda) := f(x) - \lambda_1 F_1(x) - \dots - \lambda_m F_m(x).$$

(Функция L понадобится нам и для формулировки достаточных признаков условного экстремума.)

ЛЕММА 2.3.1. (необходимое условие существования условного экстремума в терминах функции Лагранжа) Если точка $x \in S$ является точкой условного экстремума функции f , то существует такой единственный набор чисел $\Lambda \in \mathbb{R}^m$, для которого x является стационарной точкой функции Лагранжа:

$$x - \text{точка условного экстремума} \Rightarrow \mathbf{grad}_x L(x, \Lambda) = \mathbf{0} \wedge F(x) = \mathbf{0}_y.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} - \lambda_1 \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_j} - \dots - \lambda_m \frac{\partial F_m(x)}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, p. \quad \blacksquare$$

Чтобы сформулировать достаточные признаки условного экстремума, ужесточим требования к гладкости функции f и отображения F : потребуем, чтобы $f, F \in C^2(U)$. Пусть точка $x \in S$ и набор Λ

фиксированы. Обозначим через $d^2L_T(x, \Lambda; v)$ сужение второго дифференциала $d^2L(x, \Lambda; dx)$ по переменной x на касательное пространство T_xS , т. е. переменная $v \in T_xS$ и $d^2L_T(x, \Lambda; v) \equiv d^2L(x, \Lambda; v)$ при условии $v \in T_xS$.

ТЕОРЕМА 2.3.2. (достаточные признаки условного экстремума) Пусть $f, F \in C^2(U)$. Пусть пара (x^0, Λ^0) удовлетворяет системе (2.5). Тогда:

- 1) если квадратичная форма $d^2L_T(x^0, v)$ положительно определена (т. е. $\forall v \in T_{x^0}S \setminus \{0\} \hookrightarrow d^2L_T(x^0, \Lambda^0; v) > 0$), то x^0 – точка локального **условного строгого** минимума функции f ;
- 2) если квадратичная форма $d^2L_T(x^0, \Lambda^0; v)$ отрицательно определена (т. е. $\forall v \in T_{x^0}S \setminus \{0\} \hookrightarrow d^2L_T(x^0, \Lambda^0; v) < 0$), то x^0 – точка локального **условного строгого** максимума функции f ;
- 3) если квадратичная форма $d^2L_T(x^0, \Lambda^0; v)$ знаконеопределенная (т. е. $\exists v_1, v_2 \in T_{x^0}S$, что $d^2L_T(x^0, \Lambda^0; v_1) > 0 \wedge d^2L_T(x^0, \Lambda^0; v_2) < 0$), то x^0 не является точкой локального условного экстремума функции f ;
- 4) если квадратичная форма $d^2L_T(x^0, \Lambda^0; v)$ является или положительно, или отрицательно полуопределенной, то x^0 может быть точкой локального условного экстремума (как строгого, так и нестрогого), а может и не быть таковой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как было показано в доказательстве теоремы 2.3.1, экстремальные свойства функции $f(x)$ на S и функции $\tilde{f}(t)$ совпадают в окрестностях точек x^0 и t^0 соответственно (см. (2.4)). Поэтому достаточно проверить выполнение требований теоремы 2.1.2 для функции $\tilde{f}(t)$ в точке t^0 . Если мы докажем, что на касательном пространстве $T_{x^0}S$ второй дифференциал $d^2L_T(x^0, \Lambda^0; v)$ совпадает со вторым дифференциалом $d^2\tilde{f}(t^0, dt)$, то теорема будет доказана. Уточним, как следует понимать названное совпадение. Поскольку линейное отображение $D\Phi(t^0)$ порождает касательное пространство $T_{x^0}S$ и является биекцией на $T_{x^0}S$, то любой вектор $v \in T_{x^0}S$ единственным образом представим в виде $v = D\Phi(t^0)dt$, где $dt \in \mathbf{V}^n$. Совпадение дифференциалов следует понимать так:

$$\forall dt \in \mathbf{V}^n \hookrightarrow d^2L_T(x^0, \Lambda^0; D\Phi(t^0)dt) = d^2\tilde{f}(t^0, dt). \quad (2.6)$$

Это тождество по dt нам нужно доказать.

Теперь заметим, что, в силу тождества $F(\Phi(t)) \equiv O_y$,

$$L(\Phi(t), \Lambda^0) = f(\Phi(t)) - \sum_{i=1}^m \lambda_i^0 F_i(\Phi(t)) = f(\Phi(t)) - 0 = \tilde{f}(t).$$

Поэтому первый дифференциал, в силу инвариантности его формы, равен:

$$d\tilde{f} = d(L(\Phi(t), \Lambda^0)) = (\mathbf{grad}_x L(\Phi(t), \Lambda^0), d\Phi(t)).$$

По определению второго дифференциала, применяя правило Лейбница к скалярному произведению и правило дифференцирования суперпозиции отображений, получаем (сравните с доказательством теоремы 2.1.2):

$$\begin{aligned} d^2\tilde{f}(t, dt) &= d(\mathbf{grad}_x L(\Phi(t), \Lambda^0), d\Phi(t)) = \\ &= (d(\mathbf{grad}_x L(\Phi(t), \Lambda^0)), D\Phi(t)dt) + (\mathbf{grad}_x L(\Phi(t), \Lambda^0), d(D\Phi(t))dt) = \\ &= (D^2L(\Phi(t), \Lambda^0) \circ D\Phi(t)dt, D\Phi(t)dt) + (\mathbf{grad}_x L(\Phi(t), \Lambda^0), d(D\Phi(t))dt). \end{aligned}$$

Подставим в полученное выражение второго дифференциала значение t^0 . Тогда, в силу (2.5), градиент $\mathbf{grad}_x L(\Phi(t^0), \Lambda^0) = \mathbf{grad}_x L(x^0, \Lambda^0) = \mathbf{0}$. Поэтому

$$\begin{aligned} d^2\tilde{f}(t^0, dt) &= (D^2L(\Phi(t^0), \Lambda^0) \circ D\Phi(t^0)dt, D\Phi(t^0)dt) = \\ &= d^2L(x^0, \Lambda^0; D\Phi(t^0)dt). \end{aligned}$$

Поскольку $D\Phi(t^0)dt \in T_{x^0}S$, то, в силу определения, $d^2L(x^0, \Lambda^0; D\Phi(t^0)dt) = d^2L_T(x^0, \Lambda^0; D\Phi(t^0)dt)$. Значит, тождество (2.6) доказано. ■

В заключение опишем поэтапно процедуру нахождения точек условного экстремума и выяснения их типа.

1) Решая систему (2.5), находят все пары $(x^0, \Lambda^0) \in S \times \mathbb{R}^m$, где точка $x^0 \in S$ подозрительная на экстремум.

2) Находят касательное пространство $T_{x^0}S$: убеждаются, что система *линейных* уравнений $\mathbf{grad}F_i(x^0)dx = 0$ ($i = 1, \dots, m$) имеет максимальный ранг m и решают ее относительно неизвестных дифференциалов $(dx_1, \dots, dx_p) = dx$, т.е. выражают m зависимых дифференциалов через $n = p - m$ независимых (пусть, для определенности, независимы дифференциалы dx_1, \dots, dx_n).

3) Находят второй дифференциал $d^2L(x^0, \Lambda^0; dx)$ функции Лагранжа в виде суммы $\sum_{i,j=1}^p (\partial^2 L(x^0, \Lambda^0) / \partial x_i \partial x_j) dx_i dx_j$.

4) В полученный второй дифференциал подставляют выражения зависимых дифференциалов dx_{n+1}, \dots, dx_p через независимые – получают n -мерную квадратичную форму $\sum_{i,j=1}^n a_{i,j} dx_i dx_j$.

5) Выписывают симметрическую матрицу $n \times n$ полученной квадратичной формы и исследуют ее на знакоопределенность (например, с помощью критерия Сильвестра).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3.2. Систему нелинейных уравнений $F(x) = O_y$ разрешить как неявное отображение как правило не удается. Но линеаризованную систему $DF(x^0)dx = \mathbf{0}$ решить относительно зависимых дифференциалов можно всегда. \square

ЗАДАЧА 2.3.2. Исследуем, имеет ли функция $u = xy + xz + yz$ экстремум в точке $A(1, 1, 1)$ при условии $F(x, y, z) := 2x^3y^2z + 4x^2 + 5y^2 + 6z^2 - 17 = 0$.

1) Функция Лагранжа $L(x, y, z, \lambda) = xy + xz + yz + \lambda(2x^2y^2z + 4x^2 + 5y^2 + 6z^2 - 17 = 0)$. Система (2.5) такова:

$$\begin{cases} y + z + 6\lambda x^2 y^2 z + 8\lambda x = 0, \\ x + z + 4\lambda x^3 y z + 10\lambda y = 0, \\ x + y + 2\lambda x^3 y^2 + 12\lambda z = 0, \\ 2x^3 y^2 z + 4x^2 + 5y^2 + 6z^2 - 17 = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Подставив значения $x = y = z = 1$, убеждаемся, что $\lambda = -1/7$ удовлетворяет *всем четырем* уравнениям.

2) Находим дифференциал условия связи:

$$dF(x, y, z) = 6x^2y^2zdx + 4x^3yzdy + 2x^3y^2dz + 8xdx + 10ydy + 12zdz.$$

В исследуемой точке

$$dF(1, 1, 1) = dF(A) = 6dx + 4dy + 2dz + 8dx + 10dy + 12dz,$$

значит, ранг дифференциала максимален (равен единице). Следовательно, касательное пространство $T_A S$ определяется одним условием

$$14dx + 14dy + 14dz = 0 \Leftrightarrow dz = -dx - dy.$$

3) Первые производные функции Лагранжа при $\lambda = -1/7$ возьмем из левой части системы (2.7) (обоснуйте):

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, y, z; -1/7) = y + z - \frac{1}{7}(6x^2y^2z + 8x),$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x, y, z; -1/7) = x + z + -\frac{1}{7}(4x^3yz + 10y),$$

$$\frac{\partial L}{\partial z}(x, y, z; -1/7) = x + y - \frac{1}{7}(2x^3y^2 + 12z).$$

Поэтому вторые частные производные равны:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x, y, z; -1/7) = -\frac{1}{7}(12xy^2z + 8), \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(A; -1/7) = -\frac{20}{7},$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x, y, z; -1/7) = -\frac{1}{7}(4x^3z + 10), \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(A; -1/7) = -\frac{14}{7},$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(x, y, z; -1/7) = -\frac{1}{7} \cdot 12, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(A; -1/7) = -\frac{12}{7},$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x, y, z; -1/7) = 1 - \frac{1}{7}(12x^2yz), \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(A; -1/7) = -\frac{5}{7},$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z}(x, y, z; -1/7) = 1 - \frac{1}{7}(4x^3y), \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z}(A; -1/7) = \frac{3}{7},$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial z \partial x}(x, y, z; -1/7) = 1 - \frac{1}{7}(6x^2y^2), \quad \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial x}(A; -1/7) = \frac{1}{7}.$$

Теперь находим второй дифференциал в исследуемой точке:

$$d^2L(A; -1/7) = -\frac{20}{7}dx^2 - 2dy^2 - \frac{12}{7}dz^2 - \frac{10}{7}dxdy + \frac{6}{7}dydz + \frac{2}{7}dzdx.$$

4) Подставляя выражение $dz = -dx - dy$ во второй дифференциал, получаем:

$$d^2L_T(A; -1/7; dx, dy) = -\frac{1}{7}(34dx^2 + 2 \cdot 21dxdy + 32dy^2).$$

5) Полученная квадратичная форма отрицательно определена (проверьте). Следовательно т. $A(1, 1, 1)$ есть точка условного максимума.

Глава 3

Кратный интеграл

Понятие кратного интеграла является многомерным обобщением определенного интеграла Римана на отрезке. Его обоснование опирается на теорию меры Жордана.

3.1. Кратный интеграл Римана

Отыскавшему функцию клюквы
Не способен помочь интеграл.

Н.М. Олейников

Ниже приведены обобщения на многомерный случай понятий, которые были введены для определения интеграла Римана на отрезке.

- 1) Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ – измеримое множество. Конечная совокупность $P(G) = P := \{G_1, \dots, G_N\}$ непустых измеримых подмножеств называется **разбиением множества G** , если
 - а) попарно подмножества пересекаются по множеству нулевой меры: $\mu(G_i \cap G_j) = 0$ при $i \neq j$;
 - б) их объединение образует исходное множество: $\cup_{i=1}^N G_i = G$.
- 2) **Диаметром** произвольного множества G называют супремум расстояний между двумя точками этого множества:

$$\text{diam}(G) := \sup_{x, y \in G} \rho(x, y).$$

Максимальный диаметр подмножеств разбиения называют **мелкостью** разбиения:

$$p(P) := \max_{i=1, \dots, N} \text{diam}(G_i).$$

- 3) Говорят, что разбиение P' является **измельчением** разбиения P (обозначаем $P \prec P'$), если каждое подмножество из P' содержится в некотором подмножестве из P :

$$\forall i \in \{1, \dots, N'\} \exists j \in \{1, \dots, N\} : G'_i \subset G_j.$$

- 4) Пусть $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ – ограниченная функция. Обозначим

$$M_i(f) = M_i := \sup_{G_i} f(x) < +\infty, \quad m_i(f) = m_i := \inf_{G_i} f(x) > -\infty.$$

Неотрицательная величина

$$v(f, G_i) = \sup_{x, y \in G_i} |f(x) - f(y)| = \sup_{G_i} f - \inf_{G_i} f = M_i - m_i \geq 0$$

называется **колебанием** функции f на множестве G_i .

- 5) Определим

верхнюю сумму Дарбу $S_P^*(f) = S_P^* := \sum_{i=1}^N M_i \mu(G_i) < +\infty$,

нижнюю сумму Дарбу $S_{*P}(f) = S_{*P} := \sum_{i=1}^N m_i \mu(G_i) > -\infty$,

разность сумм Дарбу

$$V_P(f) := S_P^* - S_{*P} = \sum_{i=1}^N (M_i - m_i) \mu(G_i) = \sum_{i=1}^N v(f, G_i) \mu(G_i) \geq 0.$$

ЛЕММА 3.1.1. *Свойства разбиения и измельчения:*

- 1) *мера множества G равна сумме мер подмножеств из разбиения:* $\mu(G) = \sum_{i=1}^N \mu(G_i)$;

- 2)

если $P \prec P'$, то $p(P') \leq p(P)$;

- 3) *транзитивность измельчения:*

если $P \prec P' \wedge P' \prec P''$, то $P \prec P''$;

4) для любых двух разбиений существует их общее измельчение:

$$\forall P, P' \exists P'' : P \prec P'' \wedge P' \prec P'';$$

5) существует разбиение сколь угодно малой мелкости.

ЗАДАЧА 3.1.1. Докажите пункты 1-3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО п. 4. В качестве P'' можно взять объединение всевозможных попарных пересечений $P_i \cap P'_j$, отбросив пустые пересечения.

Доказательство п. 5. Построим разбиение мелкости не большей данного $\delta > 0$. Погрузим данное множество G в n -мерную клетку K (т. е. прямоугольный параллелепипед, стороны которого параллельны осям координат). Разобьем каждую сторону $[a_i, b_i]$ ($i = 1, \dots, n$) клетки на отрезки $[x_{i,j}, x_{i,j+1}]$ ($j = 1, \dots, N_i$), длиной меньше, чем $x_{i,j+1} - x_{i,j} < \delta/\sqrt{n}$. Рассмотрим всевозможные прямые произведения $K_{j_1 \dots j_n} := [x_{1,j_1}, x_{1,j_1+1}] \times \dots \times [x_{n,j_n}, x_{n,j_n+1}]$. Получим разбиение клетки K на $N_1 \cdot \dots \cdot N_n$ клеток: $K = \bigcup_{j_1, \dots, j_n=1}^{N_1, \dots, N_n} K_{j_1 \dots j_n}$. Затем пересечем каждый элемент из разбиения клетки с данным множеством, отбросив пустые пересечения: $G_{j_1 \dots j_n} := G \cap K_{j_1 \dots j_n}$. В результате получим разбиение $G = \bigcup_{j_1, \dots, j_n=1}^{N_1, \dots, N_n} G_{j_1 \dots j_n}$. Поскольку диаметр каждой клетки $K_{j_1 \dots j_n}$ меньше, чем δ (докажите), то диаметр каждого подмножества $G_{j_1 \dots j_n}$ тем более меньше, чем δ . ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1.1. кратного интеграла Римана по схеме Дарбу:

- 1) **Нижним интегралом Дарбу** называется $I_* := \sup_P S_{*P}$; **верхним интегралом Дарбу** называется $I^* := \inf_P S_P^*$.
- 2) Если $I_* = I^*$, то ограниченная функция f называется **интегрируемой по Риману на G по схеме Дарбу**, а общее значение $I_D = I_* = I^*$ называется **интегралом Римана по схеме Дарбу**.
⊠

ЛЕММА 3.1.2. (об упорядоченности интегральных сумм и интегралов Дарбу) Для произвольных разбиений P, P' справедливы двусторонние оценки

$$-\infty < S_{*P} \leq I_* \leq I^* \leq S_{P'}^* < +\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО повторяет доказательство аналогичного утверждения для интегральных сумм и интегралов Дарбу на отрезке.

Следующее утверждение о связи интегралов Дарбу с мелкостью разбиения формулируется так же, как и в одномерном случае, но его доказательство, которое весьма сложно в многомерном случае, мы опускаем.

ЛЕММА 3.1.3. *Для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для произвольного разбиения P , у которого мелкость $p(P) < \delta$, выполняются оценки: $0 \leq I_* - S_{*P}(f) < \varepsilon \wedge 0 \leq S_P^*(f) - I^* < \varepsilon$.*

Теперь мы можем сформулировать

ТЕОРЕМА 3.1.1. *(критерии интегрируемости функции по схеме Дарбу) Если функция f ограничена, то равносильны утверждения:*

- 1) *Существует интеграл $I_D \Leftrightarrow$*
- 2) *$\forall \varepsilon > 0 \exists P : V_P(f) < \varepsilon \Leftrightarrow$*
- 3) *$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, что разность $V_P(f) < \varepsilon$ для любого разбиения P , мелкость которого $p(P) < \delta$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы повторяет доказательство аналогичной теоремы для интеграла на отрезке.

Чтобы определить интеграл Римана по схеме Римана, на каждом подмножестве $G_i \in P$ выберем произвольную точку $\xi_i \in G_i$. Объединение этих точек назовем **выборкой**, подчиненной разбиению P , и обозначим через $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_N\}$. **Интегральной суммой Римана** (отвечающей разбиению P и выборке Ξ) функции f называется

$$S_{P,\Xi}(f) = S_{P,\Xi} := \sum_{i=1}^N f(\xi_i) \mu(G_i).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1.2. **Кратным интегралом Римана по схеме Римана** *ограниченной функции f называется конечный предел*

$$I_R = I := \lim_{p(P) \rightarrow 0} S_{P,\Xi}(f) \in \mathbb{R},$$

т. е. такое число I , что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (\forall P : p(P) < \delta) \wedge (\forall \Xi) \Leftrightarrow |S_{P,\Xi}(f) - I| < \varepsilon, \quad \square. \quad (3.1)$$

ОБОЗНАЧЕНИЕ:

$$I = \int_G f(x) dx = \int_G \dots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1.1. Заметим, что: 1) символ dx не является обозначением дифференциала независимой переменной $x \in \mathbb{R}^n$; 2) символ $dx_1 \dots dx_n$ произведения дифференциалов координат не является таковым в полном смысле слова, хотя в некоторых случаях ведет себя как произведение (см. п. 3.5 ниже). Исходя из происхождения указанных обозначений, их можно понимать как меры “бесконечно малых” элементов разбиения измеримого множества G . Мы будем их называть **дифференциалами меры** независимой переменной x . \square

ТЕРМИНОЛОГИЯ: 1) при $n \geq 2$ интеграл называют **кратным**, при $n = 2$ – **двойным**, при $n = 3$ – **тройным**; 2) функцию f называют **интегрируемой**.

ТЕОРЕМА 3.1.2. (о совпадении интегралов по схемам Дарбу и Римана) Интеграл I_R существует только тогда, когда существует интеграл I_D ; при этом они совпадают: $I_R = I_D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО повторяет доказательство аналогичной теоремы об интегрировании на отрезке, но сейчас мы опираемся на ограниченность функции f как на *условие*, заложенное в определении 3.1.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1.2. Ранее мы установили, что существование интеграла Римана по схеме Римана *на отрезке* влечет ограниченность подынтегральной функции. Для интеграла на *измеримом* множестве G это утверждение в общем случае неверно даже при $n = 1$. Поэтому ограниченность функции f присутствует в определении 3.1.2. \square

ЗАДАЧА 3.1.2. Постройте контрпример неограниченной функции, интегрируемой по схеме Римана на измеримом множестве $G \subset \mathbb{R}^1$. (Указание: в качестве множества G возьмите сходящуюся числовую последовательность.)

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1.3. При $n = 1$ отличие определения 3.1.2 от определения интеграла Римана на отрезке состоит, во-первых, в том, что понятие измеримого множества $G \subset \mathbb{R}^1$ шире понятия отрезка. Во-вторых, согласно определению интеграла на отрезке, $\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx$, т. е. интеграл Римана на *ориентированном* отрезке есть криволинейный интеграл второго рода по ориентированной кривой $[a, b]$. Интеграл Римана на отрезке как на измеримом множестве есть интеграл первого рода $\int_{[a,b]} f(x)dx$ по неориентированной кривой $[a, b]$. \square

Точнее, имеет место

ЛЕММА 3.1.4. (о преемственности) Интеграл Римана от ограниченной функции f на измеримом множестве $[a, b]$ ($a < b$) существует в смысле определения 3.1.2 только тогда, когда существует интеграл Римана в смысле определения, данного для отрезка $[a, b]$ ($a < b$); при этом интегралы совпадают:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dx, \text{ где } a < b.$$

ЗАДАЧА 3.1.3. Докажите лемму.

3.2. Классы интегрируемых функций

ТЕОРЕМА 3.2.1. Если функция f непрерывна на компактном измеримом множестве, то она интегрируема на нем.

ЗАДАЧА 3.2.1. Докажите теорему 3.2.1. (Указание: доказательство такое же, как у аналогичной теоремы об интеграле по отрезку.)

Докажем более общую теорему, продемонстрировав удобство применения критерия п. 2 теоремы 3.1.1.

ТЕОРЕМА 3.2.2. Пусть функция f ограничена на компактном измеримом множестве G и множество $\Gamma \subset G$ ее точек разрыва имеет жорданову меру ноль: $\mu(\Gamma) = 0$. Тогда f интегрируема на G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $M := \sup_{x \in G} |f(x)|$. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число. В силу ранее доказанной леммы, существует открытое измеримое подмножество D , которое обладает такими свойствами: $\Gamma \subset D$, $\mu(D) < \varepsilon$. В силу открытости D , на измеримом компактном дополнении $G \setminus D$ функция f непрерывна и, стало быть, интегрируема. В силу п. 2 теоремы 3.1.1, существует такое разбиение P' множества $G \setminus D$, что $V_{P'}(f) < \varepsilon$. Пересечение $G_D = D \cap G$ двух измеримых множеств является измеримым и его мера удовлетворяет оценке: $\mu(G_D) \leq \mu(D) < \varepsilon$. Добавим к разбиению P' подмножество G_D , получим разбиение $P = P' \cup G_D$ всего множества G . Используя полученные выше оценки, имеем:

$$V_P(f) = V_{P'}(f) + v(f, G_D)\mu(G_D) < \varepsilon + 2M\varepsilon = (1 + 2M)\varepsilon.$$

Остается еще раз сослаться на п. 2 теоремы 3.1.1. ■

СЛЕДСТВИЕ 3.2.1. Пусть функция f ограничена на компактном измеримом подмножестве $G \subset \mathbb{R}^n$ и множество ее точек разрыва $\Gamma \subset G$ представляет собой конечное объединение $\Gamma = \cup_{i=1}^m Gr(g_i)$ графиков непрерывных функций меньшего числа переменных, т. е. $Def(g_i) \subset \mathbb{R}^{k_i}$, где $k_i < n$. Тогда функция f интегрируема на G .

Доказательство следует из леммы о нулевой $(n+1)$ -мере графика непрерывной функции, определенной на подмножестве пространства \mathbb{R}^n . ■

3.3. Свойства кратного интеграла

Свойства кратного интеграла связаны с изменением подынтегральной функции и с изменением множества, по которому осуществляется интегрирование.

ТЕОРЕМА 3.3.1. (зависимость от подынтегральной функции)
Пусть G – измеримое множество. Справедливы утверждения:

1) **О связи меры и интеграла:**

$$\int_G dx = \int_G 1 \cdot dx = \mu(G);$$

2) **Линейность интеграла:** пусть функции f, g интегрируемы на G , α, β – произвольные числа, тогда существует интеграл

$$\int_G (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_G f(x) dx + \beta \int_G g(x) dx.$$

3) **Интегрируемость произведения и частного:** пусть функции f, g интегрируемы на G , тогда их произведение fg , а если $\inf_G |g| > 0$, то и частное f/g интегрируемы на G .

4) **Интегрируемость модуля функции:** Если функция f интегрируема на G , то и функция $|f|$ интегрируема на G , при этом

$$\left| \int_G f(x) dx \right| \leq \int_G |f(x)| dx.$$

- 5) **Интегрирование неравенств:** если функции f, g интегрируемы на G и $f \leq g$ на G , то

$$\int_G f(x)dx \leq \int_G g(x)dx.$$

- 6) **Теорема о среднем:** (а) Пусть функции f, g интегрируемы на G , функция $g(x) \geq 0$, а $m \leq f(x) \leq M$ на G . Тогда существует такое число $\lambda \in [m, M]$, что

$$\int_G f(x)g(x)dx = \lambda \int_G g(x)dx. \quad (3.2)$$

(б) Если, дополнительно, G – замыкание области, а f непрерывна на G , то

$$\exists x^0 \in G : \int_G f(x)g(x)dx = f(x^0) \int_G g(x)dx;$$

в частности, при $g(x) \equiv 1$

$$\int_G f(x)dx = f(x^0) \mu(G).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА пунктов 1-6(а) аналогичны доказательствам тех же свойств интеграла на отрезке.

Доказательство п. 6(б). Поскольку G – измеримое множество, то оно ограничено; по условию G замкнуто. Следовательно, G – компактное множество. Согласно доказанной нами теореме, непрерывная функция достигает на компактном множестве своих нижней и верхней граней. Поэтому существуют точки x^1, x^2 , в которых $m = \inf_G f = f(x^1)$, $M = \sup_G f = f(x^2)$. Итак: $\forall x \in G \hookrightarrow f(x^1) \leq f(x) \leq f(x^2)$. Согласно п. 6 (а), существует число $\lambda \in [f(x^1), f(x^2)]$, для которого выполнено равенство (3.2). Если $\lambda = f(x^i)$, где i равно 1 или 2, то утверждение доказано. Если же $\lambda \in (f(x^1), f(x^2))$, то из определения точных граней и в силу непрерывности функции f : 1) в окрестности точки x^1 найдется точка x^3 , принадлежащая внутренности G^0 множества G , в которой $f(x^3) < \lambda$, 2) в окрестности точки x^2 найдется точка $x^4 \in G^0$, в которой $f(x^4) > \lambda$ (обоснуйте это утверждение). Поскольку внутренность G^0 , будучи областью, является линейно-связным множеством, на G^0 справедлива теорема о промежуточных значениях непрерывной функции: существует точка $x^0 \in G^0$, в которой $f(x^0) = \lambda$. ■

ТЕОРЕМА 3.3.2. (зависимость от множества интегрирования)
Справедливы утверждения:

- 1) Если функция f интегрируема на измеримом множестве G , то она **интегрируема на любом измеримом подмножестве** $G' \subset G$.
- 2) Если функция $f : \mathbb{R}^n \supset G_1 \cup G_2 \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема на G_1 и на G_2 , тогда она интегрируема на объединении $G_1 \cup G_2$ и имеет место формула

$$\int_{G_1 \cup G_2} f(x) dx = \int_{G_1} f(x) dx + \int_{G_2} f(x) dx - \int_{G_1 \cap G_2} f(x) dx.$$

В частности, имеет место **аддитивность интеграла**: если функция f интегрируема на подмножествах $G_1, G_2 \subset \mathbb{R}^n$, которые пересекаются по подмножеству нулевой меры (т.е. $\mu(G_1 \cap G_2) = 0$), то интеграл на объединении этих множеств равен сумме интегралов:

$$\int_{G_1 \cup G_2} f(x) dx = \int_{G_1} f(x) dx + \int_{G_2} f(x) dx.$$

- 3) Пусть функция f интегрируема на G , а $\{G_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность измеримых множеств $G_i \subset G$ таких, что $\lim_{i \rightarrow \infty} \mu(G_i) = \mu(G)$. Тогда имеет место **непрерывность интеграла по множеству**:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{G_i} f(x) dx = \int_G f(x) dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО п. 1. Дополним разбиение P' множества G' мелкости $p(P')$ до разбиения P множества G с сохранением мелкости: $p(P) = p(P')$. Это можно сделать, присоединив к элементам разбиения P' все элементы разбиения *измеримого* дополнения $P \setminus P'$ с мелкостью, которая не превосходит $p(P')$. Для разности сумм Дарбу справедлива оценка:

$$V_{P'}(f) = \sum_{i=1}^{N'} v(G'_i, f) \mu(G_i) \leq \sum_{j=1}^N v(G_j, f) \mu(G_j) = V_P(f),$$

поскольку все слагаемые неотрицательные и правая сумма содержит все слагаемые из левой суммы. В силу интегрируемости f на G , при $p(P) \rightarrow 0$ разность $V_P(f) \rightarrow 0$ (п. 3 теоремы 3.1.1). Значит, и разность $V_{P'}(f) \rightarrow 0$ при $p(P') \rightarrow 0$. Что, согласно п. 3 теоремы 3.1.1, доказывает интегрируемость f на G' .

Доказательство п. 2. Обозначим пересечение $E_0 = G_1 \cap G_2$ и дополнения $E_i = G_i \setminus E_0$ ($i = 1, 2$). Все введенные множества измеримы и, в силу п. 1, функция f интегрируема на каждом из них. Пусть P_k ($k = 0, 1, 2$) – произвольные разбиения множеств E_k . Поскольку множества E_k не имеют общих точек, объединение разбиений $P := P_0 \cup P_1 \cup P_2$ является разбиением объединения $E = G_1 \cup G_2 = E_0 \cup E_1 \cup E_2$. В силу п. 2 теоремы 3.1.1, разбиения P_k можно выбрать такими, чтобы разности $V_{P_k}(f) < \varepsilon/3$, где $\varepsilon > 0$ – произвольное. Тогда разность $V_P(f) = V_{P_0} + V_{P_1}(f) + V_{P_2}(f) < \varepsilon$, что доказывает существование интеграла на объединении E . Теперь можно составить интегральную сумму Римана, подчиненную разбиению $P = P_0 \cup P_1 \cup P_2$ и перейти к пределу при условии, что мелкость стремиться к нулю:

$$S_{P,\Xi}(f) := S_{P_0,\Xi_0}(f) + S_{P_1,\Xi_1}(f) + S_{P_2,\Xi_2}(f) \xrightarrow{p \rightarrow 0} \int_{E_0} f dx + \int_{E_1} f dx + \int_{E_2} f dx.$$

С другой стороны,

$$S_{P_0 \cup P_1,\Xi}(f) := S_{P_0,\Xi_0}(f) + S_{P_1,\Xi_1}(f) \xrightarrow{p \rightarrow 0} \int_{E_0 \cup E_1} f dx = \int_{G_1} f dx,$$

$$S_{P_0 \cup P_2,\Xi}(f) := S_{P_0,\Xi_0}(f) + S_{P_2,\Xi_2}(f) \xrightarrow{p \rightarrow 0} \int_{E_0 \cup E_2} f dx = \int_{G_2} f dx,$$

что доказывает утверждение.

Доказательство п. 3 следует из аддитивности интеграла и оценок

$$\begin{aligned} \left| \int_G f(x) dx - \int_{G_i} f(x) dx \right| &= \left| \int_{G \setminus G_i} f(x) dx \right| \leq \sup_G |f(x)| \mu(G \setminus G_i) = \\ &= \sup_G |f(x)| (\mu(G) - \mu(G_i)) \rightarrow 0 \text{ при } i \rightarrow \infty. \blacksquare \end{aligned}$$

Из п. 2 теоремы 3.3.2 получаем:

СЛЕДСТВИЕ 3.3.1. (интегрирование и множество меры ноль)

- 1) Если функция f ограничена и интегрируема на измеримом множестве G , то при изменении ее значений на подмножестве $G' \subset G$ меры ноль (с сохранением ограниченности) ее интегрируемость сохраняется, а величина интеграла не меняется.
- 2) Пусть функция f определена и ограничена на замыкании \bar{G} измеримого множества. Тогда, если интегралы

$$\int_G f(x)dx, \int_{\bar{G}} f(x)dx, \int_{\text{int}G} f(x)dx$$

существуют, то все три одновременно, и при этом они равны.

ЗАДАЧА 3.3.1. Докажите следствие 3.3.1.

3.4. Элементарное множество

В этом пункте мы обобщим теорему о площади криволинейной трапеции и заодно подготовимся к теореме о *повторном* интеграле. Напомним, подграфиком непрерывной неотрицательной функции ψ , определенной на замкнутом измеримом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, мы называем множество

$$\text{UnderGr}(\psi) = \text{UGr}(\psi) := \{(x, y) \in G \times \mathbb{R}^+_0 : 0 \leq y \leq \psi(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Было доказано, что подграфик – измеримое множество. Следующее понятие является обобщением понятия подграфика

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4.1. Множество $F \subset \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ называется **элементарным** относительно оси $x_{n+1} = y$, если существует такое измеримое замкнутое множество $G \subset \mathbb{R}^n$ и такие непрерывные функции $\varphi, \psi : G \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющие оценке $\varphi(x) \leq \psi(x)$ на G , что

$$F = \{(x_1, \dots, x_n, y) = (x, y) : x \in G \wedge (\varphi(x) \leq y \leq \psi(x))\}. \quad \square$$

ТЕОРЕМА 3.4.1. (о мере элементарного множества) Элементарное множество измеримо и

$$\mu(F) = \int_G (\psi(x) - \varphi(x))dx. \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы построим два объединения цилиндров: объединение A – вписанное в F , а B – описанное около F . Затем покажем, что меры A и B есть суммы Дарбу интеграла (3.3).

Для произвольного разбиения $P(G) = \{G_i\}_{i=1}^N$ обозначим

$$m_i^\varphi = \inf_{x \in G_i} \varphi(x), \quad M_i^\varphi = \sup_{x \in G_i} \varphi(x), \quad m_i^\psi = \inf_{x \in G_i} \psi(x), \quad M_i^\psi = \sup_{x \in G_i} \psi(x);$$

$$A_i = \begin{cases} G_i \times [M_i^\varphi, m_i^\psi] & \text{при } M_i^\varphi \leq m_i^\psi, \\ \emptyset & \text{при } M_i^\varphi > m_i^\psi, \end{cases} \quad B_i = G_i \times [m_i^\varphi, M_i^\psi];$$

$$A = \bigcup_{i=1}^N A_i, \quad B = \bigcup_{i=1}^N B_i.$$

ЗАДАЧА 3.4.1. Придумайте (нарисуйте) плоское элементарное множество и такое разбиение $P(G)$, чтобы при некотором i в самом деле выполнялось неравенство $M_i^\varphi > m_i^\psi$.

Поскольку мы доказали, что мера цилиндра с измеримым основанием равна произведению меры меры основания на высоту, то

$$\mu(A_i) = \begin{cases} \mu(G_i)(m_i^\psi - M_i^\varphi) & \text{при } M_i^\varphi \leq m_i^\psi, \\ 0 & \text{при } M_i^\varphi > m_i^\psi, \end{cases} \quad \mu(B_i) = \mu(G_i) \cdot (M_i^\psi - m_i^\varphi).$$

По определению, при $i \neq j$ множества G_i, G_j пересекаются по подмножеству нулевой меры. Поэтому цилиндры A_i и A_j (а также B_i и B_j) также пересекаются по подмножеству нулевой меры (докажите). Следовательно,

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^N \mu(A_i) \geq \sum_{i=1}^N \mu(G_i) \cdot (m_i^\psi - M_i^\varphi) = S_{*P}(\psi) - S_P^*(\varphi).$$

Т. е. мера множества A оценивается снизу разностью *интегральных сумм*. Поскольку $A \subset F$, а функции φ и ψ интегрируемы на G , то для нижней меры $\mu_*(F)$ (которая всегда существует) получаем нижнюю оценку:

$$\mu_*(F) \geq \mu(A) = S_{*P}(\psi) - S_P^*(\varphi) \Rightarrow$$

$$\mu_*(F) \geq \lim_{P(P) \rightarrow 0} (S_{*P}(\psi) - S_P^*(\varphi)) = \int_G (\psi(x) - \varphi(x)) dx.$$

Аналогично рассуждая, получаем верхнюю оценку для верхней меры: $\mu^*(F) \leq \int_G (\psi(x) - \varphi(x)) dx$. Что доказывает теорему. ■

3.5. Сведение кратного интеграла к повторному

Сначала рассмотрим частный случай, когда множество, по которому осуществляется интегрирование, является цилиндром.

ТЕОРЕМА 3.5.1. (о повторном интеграле на цилиндре) Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ – измеримое множество, функция f задана на цилиндре $cyl(G) := G \times [a, b]$ и интегрируема на нем. Пусть для любой точки $x = (x_1, \dots, x_n) \in G$ существует интеграл $\int_a^b f(x, y) dy$. Тогда функция $g(x) := \int_a^b f(x, y) dy$ интегрируема на G и

$$\begin{aligned} & \int_{cyl(G)} \dots \int f(x_1, \dots, x_n, y) dx_1 \dots dx_n dy = \\ & = \int_G \dots \int \left(\int_a^b f(x_1, \dots, x_n, y) dy \right) dx_1 \dots dx_n = \\ & = \int_G \dots \int dx_1 \dots dx_n \int_a^b f(x_1, \dots, x_n, y) dy. \end{aligned}$$

Полученный интеграл называют **повторным**.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P(G) = \{G_i\}_{i=1}^N$ – произвольное разбиение мелкости $p(P) = \delta$, а $\Xi = \{\xi_i\}_{i=1}^N$ – произвольная выборка, подчиненная разбиению P . Пусть $Q([a, b]) = \{[y_{j-1}, y_j]\}_{j=1}^K$ – произвольное разбиение отрезка $[a, b]$ мелкости $p(Q) = \sigma$. Введенные разбиения порождают специальное разбиение $P(G) \times Q([a, b]) = \{P_i \times [y_{j-1}, y_j]\}$ и специальную выборку $\{(\xi_i, y_{j-1})\}$ ($i = 1, \dots, N$; $j = 1, \dots, K$) цилиндра $cyl(G)$. Из теоремы Пифагора следует, что мелкость ν специального разбиения равна $\nu = \sqrt{\delta^2 + \sigma^2}$.

Нам надо доказать существование повторного интеграла $\int_G dx \int_a^b f(x, y) dy$. С этой целью мы сравним значение данного кратного интеграла с произвольной интегральной суммой Римана повторного интеграла; по ходу мы воспользуемся специальной интегральной суммой Римана данного кратного интеграла:

$$\Delta := \left| \int_{cyl(G)} \dots \int f(x_1, \dots, x_n, y) dx_1 \dots dx_n dy - \sum_{i=1}^N \left(\int_a^b f(\xi_i, y) dy \right) \mu(G_i) \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{cyl(G)} \dots \int f(x, y) \, dx dy - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^K f(\xi_i, y_{j-1}) \mu(G_i) (y_j - y_{j-1}) \right| +$$

$$+ \left| \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^K f(\xi_i, y_{j-1}) \mu(G_i) (y_j - y_{j-1}) - \sum_{i=1}^N \left(\int_a^b f(\xi_i, y) dy \right) \mu(G_i) \right|$$

(мы воспользовались леммой о мере цилиндра). Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку интеграл $\int_{cyl(G)} f(x, y) dx dy$ существует, то его *любая* интегральная сумма сходиться к нему при единственном условии, что мелкость ν стремиться к нулю. Значит, первое слагаемое Δ_1 в оценке меньше, чем $\varepsilon/2$, если σ и δ выбраны достаточно малыми. Второе слагаемое Δ_2 оценивается так:

$$\Delta_2 \leq \sum_{i=1}^N \left| \sum_{j=1}^K f(\xi_i, y_{j-1})(y_j - y_{j-1}) - \int_a^b f(\xi_i, y) dy \right| \mu(G_i).$$

Но $\sum_{j=1}^K f(\xi_i, y_{j-1})(y_j - y_{j-1})$ есть интегральная сумма интеграла $\int_a^b f(\xi_i, y) dy$, который, согласно условию, существует. Следовательно, для каждого $i = 1, \dots, N$ существует такая мелкость σ_i разбиения Q_i отрезка $[a, b]$, что

$$\left| \sum_{j=1}^K f(\xi_i, y_{j-1})(y_j - y_{j-1}) - \int_a^b f(\xi_i, y) dy \right| < \frac{\varepsilon}{2\mu(G)}.$$

Из N мелкостей σ_i выберем наименьшую, что обеспечит оценку

$$\Delta_2 \leq \frac{\varepsilon}{2\mu(G)} \sum_{i=1}^N \mu(G_i) = \frac{\varepsilon}{2\mu(G)} \cdot \mu(G) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 < \varepsilon$. Поскольку ε произвольно, то, согласно определению 3.1.2, существует интеграл

$$\int_G \dots \int \left(\int_a^b f(x_1, \dots, x_n, y) dy \right) dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \int_G \dots \int dx_1 \dots dx_n \int_a^b f(x_1, \dots, x_n, y) dy =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{p(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \left(\int_a^b f(\xi_i, y) dy \right) \mu(G_i) = \\
&= \int_{\text{cyl}(G)} \dots \int f(x_1, \dots, x_n, y) dx_1 \dots dx_n dy. \blacksquare
\end{aligned}$$

Обобщением теоремы 3.5.1 является

ТЕОРЕМА 3.5.2. (о повторном интеграле на элементарном множестве) Пусть $F \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – элементарное множество относительно оси x_{n+1} , т. е.

$$F = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) : (x_1, \dots, x_n) \in G \wedge$$

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) \leq x_{n+1} \leq \psi(x_1, \dots, x_n)\},$$

где $G \subset \mathbb{R}^n$ – измеримое замкнутое множество, а функции φ и ψ непрерывны на G и всюду удовлетворяют оценке $\varphi \leq \psi$. Пусть функция f задана на множестве F и интегрируема на нем. Пусть для любой точки $(x_1, \dots, x_n) \in G$ существует интеграл

$$g(x_1, \dots, x_n) := \int_{\varphi(x_1, \dots, x_n)}^{\psi(x_1, \dots, x_n)} f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) dx_{n+1}.$$

Тогда функция g интегрируема на G и

$$\begin{aligned}
&\int_F \dots \int f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) dx_1 \dots dx_n dx_{n+1} = \\
&= \int_G \dots \int dx_1 \dots dx_n \int_{\varphi(x_1, \dots, x_n)}^{\psi(x_1, \dots, x_n)} f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) dx_{n+1}.
\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на замене элементарного множества F цилиндром с основанием G . Пусть

$$a = \min_G \varphi(x_1, \dots, x_n),$$

$$b = \max_G \psi(x_1, \dots, x_n),$$

$$\text{cyl}(G) := G \times [a, b] \supset F.$$

Доопределим функцию f с множества F на цилиндр $\text{cyl}(G)$ нулем (рис. 3.1):

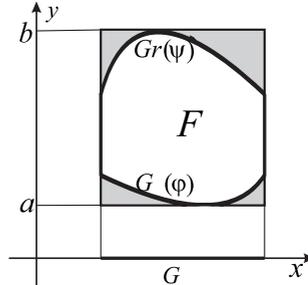


Рис. 3.1

$$\tilde{f}: \text{cyl}(G) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f} = \begin{cases} f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}), & (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in F, \\ 0, & (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \notin F. \end{cases}$$

Поскольку \tilde{f} интегрируема на измеримых множествах F и $\text{cyl}(G) \setminus F$, то, в силу аддитивности интеграла и определения функции \tilde{f} , получаем:

$$\int_{\text{cyl}(G)} \tilde{f}(x) dx = \int_F \tilde{f}(x) dx + \int_{\text{cyl}(G) \setminus F} \tilde{f}(x) dx = \int_F \tilde{f}(x) dx = \int_F f(x) dx.$$

Но на цилиндре справедлива теорема 3.5.1. Поэтому, и опять же в силу определения функции \tilde{f} , получаем

$$\begin{aligned} \int_{\text{cyl}(G)} \tilde{f}(x) dx &= \int \dots \int_G dx_1 \dots dx_n \int_a^b \tilde{f}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) dx_{n+1} = \\ &= \int \dots \int_G dx_1 \dots dx_n \int_{\varphi(x_1, \dots, x_n)}^{\psi(x_1, \dots, x_n)} f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) dx_{n+1}. \blacksquare \end{aligned}$$

3.6. Обсуждение теоремы 3.5.2

Кто славы, денег и чинов
Спокойно в очередь добился

А.С. Пушкин.
Евгений Онегин. Глава VIII

Если в условиях теоремы 3.5.2 множество G в свою очередь является элементарным относительно оси x_n и еще раз выполнены условия теоремы 3.5.2, то интеграл $\int_G g(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$ можно заменить повторным:

$$\int \dots \int_F f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) dx_1 \dots dx_n dx_{n+1} =$$

$$= \int \dots \int_{\tilde{G}} dx_1 \dots dx_{n-1} \int_{\tilde{\varphi}(x_1, \dots, x_{n-1})}^{\tilde{\psi}(x_1, \dots, x_{n-1})} dx_n \int_{\varphi(x_1, \dots, x_n)}^{\psi(x_1, \dots, x_n)} f(x_1, \dots, x_{n+1}) dx_{n+1}.$$

Чтобы проверить, является ли множество G элементарным относительно оси x_n , нужно *спроектировать* его на дополнительное подпространство \mathbb{R}^{n-1} вдоль выбранной оси x_n ; получим проекцию $\tilde{G} \subset \mathbb{R}^{n-1}$, которую следует рассмотреть как возможную область определения тех функций $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$, графики которых ограничивают элементарное множество G . На практике особенно важен случай, когда удастся кратный интеграл свести к цепочке одномерных. В этом случае есть надежда на применение формулы Ньютона-Лейбница.

Если множество, по которому осуществляют интегрирование, не является элементарным, то нужно попытаться разбить его на элементарные подмножества. Для множеств, граница которых состоит из конечного количества гладких поверхностей, такое разбиение всегда возможно.

Не исключено, что теорему 3.5.2 можно применить к разным координатам. В этом случае говорят об *изменении порядка интегрирования* в повторном интеграле. Если F – плоское множество, и теорема 3.5.2 применима по каждой оси, то (см. рис. 3.2)

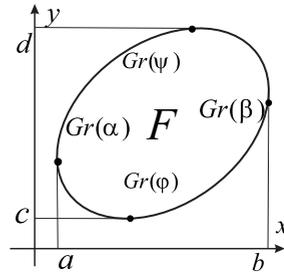


Рис. 3.2

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx. \quad (3.4)$$

Формула (3.4) понадобится нам для вычисления несобственных интегралов.

Теорема 3.5.2 является частным случаем теоремы Тонелли-Фубини (Леонид Тонелли (1885—1946), Гвидо Фубини (1879—1943)). Идея перехода от кратного интеграла к повторному чрезвычайно плодотворна. Она восходит, по сути, к Архимеду, чей метод можно сформулировать так (см. рис. 3.3):

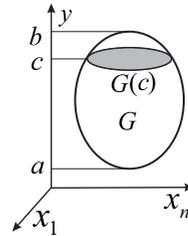


Рис. 3.3

ТЕОРЕМА 3.6.1. Пусть $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – замкнутое измеримое множество, проекция которого на ось $y := x_{n+1}$ есть отрезок $[a, b]$. Пусть для произвольного $c \in [a, b]$ сечение множества G n -мерной плоскостью $y = c$ есть измеримое n -мерное подмножество $G(c)$. Пусть функция f интегрируема на G и для любого $c \in [a, b]$ существует интеграл $\int_{G(c)} f(x_1, \dots, x_n, c) dx_1 \dots dx_n$. Тогда функция $h(y) := \int_{G(y)} f(x_1, \dots, x_n, y) dx_1 \dots dx_n$ интегрируема на $[a, b]$ и

$$\begin{aligned} \int \dots \int_G f(x_1, \dots, x_n, y) dx_1 \dots dx_n dy &= \\ &= \int_a^b dy \int_{G(y)} f(x_1, \dots, x_n, y) dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

По сравнению с теоремой 3.5.2 в последней изменился порядок интегрирования.

ЗАДАЧА 3.6.1. Докажите теорему 3.6.1. Затем методом индукции выведите формулу объема n -мерного шара с центром в начале координат (предупреждение: формула выглядит по-разному в зависимости от четности n).

Глава 4

Замена переменных в кратном интеграле

Замена переменных не только важный технический прием, который позволяет найти конкретные кратные интегралы. Это ключевая процедура в теории многомерных поверхностей и, следовательно, в теории интегрирования по поверхностям. Она лежит в основе дифференциальной геометрии и топологии, теории обыкновенных дифференциальных уравнений (особенно динамических систем) и уравнений математической физики. Существенно, что в этой процедуре используются понятия линейной алгебры и математического анализа.

Прежде всего нам понадобятся

4.1. Геометрические свойства меры Жордана

Сейчас мы будем активно использовать возможности аффинного пространства $(\mathbb{R}^n, \mathbf{V}^n)$: векторные операции и точно-векторные операции, связывающие точки пространства \mathbb{R}^n и векторы евклидова пространства \mathbf{V}^n (“вычитание” точек $\mathbf{a} := \overrightarrow{x^2 - x^1}$ и откладывание вектора $x^2 := x^1 + \mathbf{a}$). При необходимости мы будем переходить от точки $x \in \mathbb{R}^n$ к ее радиус-вектору $\mathbf{x} = x^T \in \mathbf{V}^n$ и возвращаться к точке $x = \mathbf{x}^T$. Напомним, что:

1) **сдвигом** точечного пространства \mathbb{R}^n на вектор $\mathbf{a} \in \mathbf{V}^n$ называется его преобразование $Tr_{\mathbf{a}}(x) = Tr(x) := x + \mathbf{a}$;

2) **движением** пространства \mathbb{R}^n называется преобразование Mot , сохраняющее расстояние между произвольными точками; **ортогональной** называется матрица Ort , которая сохраняет скалярное произведение любых двух векторов из \mathbf{V}^n : $(Ortx, Orty) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$; известно, что произвольное движение есть суперпозиция: $Mot(x) = ((Tr \circ Ort)\mathbf{x})^T = (Ortx + \mathbf{a})^T$;

3) **симметрическая** матрица $Simm$ действует как растяжение с коэффициентами λ_i ($i = 1, \dots, n$) вдоль n ее собственных *попарно ортогональных* направлений, т. е. в каноническом ортонормированном базисе матрица преобразуется к диагональному виду: $Diag(x_1, x_2, \dots, x_n)^T := (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n)^T$; **гомотетией** Hom_λ с коэффициентом $\lambda \neq 0$ мы называем преобразование, порожденное диагональной матрицей, у которой все коэффициенты растяжения равны $\lambda = \lambda_1 = \dots = \lambda_n$;

4) **аффинным** преобразованием называется композиция, порожденная квадратной матрицей L и сдвигом Tr : $Aff(x) = ((Tr \circ L)\mathbf{x})^T = (Lx + \mathbf{a})^T$.

Многомерным (n -мерным) **параллелепипедом**, построенном на векторах $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n$, называется множество

$$\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n : x = (\alpha_1 \mathbf{v}^1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}^n)^T, \alpha_i \in [0, 1], i = 1, \dots, n\}.$$

Задача 4.1.1. Проверьте определение параллелепипеда для случаев $n = 1, 2, 3$.

Кроме аффинных нас интересуют преобразования более широкого класса:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1.1. Пусть $U, V \subset \mathbb{R}^n$ – открытые подмножества. Биекция $F : U \rightarrow V$ называется **диффеоморфизмом**, если она и обратное отображение непрерывно дифференцируемы: $F \in C^1(U)$ и $F^{-1} \in C^1(V)$. \boxtimes

Задача 4.1.2. Опираясь на теорему 1.3.1 об обратном отображении, докажите:

- 1) непрерывно дифференцируемая биекция $F : U \rightarrow V$ открытых подмножеств является диффеоморфизмом только в том случае, когда в каждой точке $x \in U$ производная отображения невырождена, т. е. $\det DF(x) \neq 0$;
- 2) композиция двух диффеоморфизмов является диффеоморфизмом.

Нас интересует влияние диффеоморфизма на измеримость и на саму меру $\mu(X)$ измеримого множества X . Предварительно докажем несколько подготовительных утверждений.

ЛЕММА 4.1.1. (о сохранении меры при сдвиге) Мера измеримого множества не меняется при сдвиге: $\mu(Tr(X)) = \mu(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сразу следует из того, что сдвиг преобразует клетку в равную ей клетку. ■

ЛЕММА 4.1.2. (об изменении меры при гомотетии) При гомотетии Hom_λ мера изменяется в $|\lambda|^n$ раз: $\mu(Hom_\lambda(X)) = |\lambda|^n \cdot \mu(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сразу следует из того, что гомотетия преобразует клетку в клетку, причем мера клетки изменяется в $|\lambda|^n$. ■

ЛЕММА 4.1.3. (о сохранении меры шара при движении) Мера шара при движении не меняется

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, нами доказано, что n -мерный шар – измеримое множество. Во-вторых, любой шар с центром в точке x^0 является образом шара того же радиуса с центром в начале координат при сдвиге на вектор x^0 . Поэтому все шары одинакового радиуса имеют одинаковую меру. ■

ЛЕММА 4.1.4. (о связи меры шара с его радиусом) Мера n -мерного шара пропорциональна n -й степени его радиуса, причем коэффициент пропорциональности зависит только от размерности n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Два шара $Ball^n(1, O)$, $Ball^n(R, O) \subset \mathbb{R}^n$ радиусов $R_1 = 1$ и $R_2 = R$ с центром в начале координат гомотетичны с коэффициентом гомотетии $\lambda = R$. Согласно лемме 4.1.2, отношение мер шаров равно R^n . Поэтому $\mu(Ball^n(R, O)) = \mu(Ball^n(1, O)) \cdot R^n$. ■

Пусть $Q^n(a, O) := [-a, a]^n \subset \mathbb{R}^n$ клетка-куб со стороной $2a > 0$, центр которой совпадает с точкой O . По аналогии с двумерным и трехмерным случаями, шар $Ball^n(a\sqrt{n}, O)$ назовем описанным около куба, а шар $Ball^n(a, O)$ – вписанным в куб.

ЗАДАЧА 4.1.3. Убедитесь, что $Ball^n(a, O) \subset Q^n(a, O) \subset Ball^n(a\sqrt{n}, O)$, причем вершины куба принадлежат сфере описанного шара, а центры граней куба – сфере вписанного шара.

ЛЕММА 4.1.5. (о связи мер шара и куба) Отношения мер

$$\Gamma_n := \frac{\mu(Ball^n(a\sqrt{n}, O))}{\mu(Q^n(a, O))} > 1, \quad \gamma_n := \frac{\mu(Ball^n(a, O))}{\mu(Q^n(a, O))} \in (0, 1)$$

описанного шара и куба и вписанного шара и куба соответственно есть величины постоянные, зависящие только от размерности пространства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сразу следует из леммы 4.1.4.

Напомним, что клеточным мы называем множество, являющиеся объединением клеток, которые попарно не пересекаются по внутренним точкам; такое объединение мы назвали стыковкой клеток.

ЛЕММА 4.1.6. Пусть X – измеримое множество. Пусть $K_{int} \subset X \subset K_{ext}$ – вписанное в X и описанное около X клеточные множества. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ существуют клеточные множества Q_{int} и Q_{ext} , являющиеся стыковкой клеток-кубов и обладающие свойствами:

$$Q_{int} \subset K_{int} \subset X \subset K_{ext} \subset Q_{ext},$$

$$\mu(K_{int}) - \mu(Q_{int}) < \varepsilon, \quad \mu(Q_{ext}) - \mu(K_{ext}) < \varepsilon.$$

Другими словами, измеримость множества и его меру можно определить, пользуясь только клеточными множествами, состыкованными из клеток-кубов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что существует такая положительная постоянная $c > 0$, что все координаты всех точек множество X удовлетворяют оценке снизу: $x_i \geq c$ (обоснуйте применив сдвиг множества X на вектор с достаточно большими положительными координатами).

Возьмем произвольное натуральное N . В каждом ребре $[a, b] = [a_0, a_1 a_2 \dots, b_0, b_1 b_2 \dots]$ каждой клетки из вписанного клеточного множества K_{int} заменим конец a по избытку на число $a_0, a_1 \dots a_N + 10^{-N}$, а конец b по недостатку на число $b_0, b_1 \dots b_N$. В результате мы получим клетки, которые, во-первых, принадлежат исходным и, во-вторых, допускают разбиение на мелкие клетки-кубы со сторонами 10^{-N} . Стыкуя все мелкие кубы по всем клеткам, мы получим клеточное множество $Q_{int} \subset K_{int}$. Если натуральное N достаточно велико, то $\mu(K_{int}) - \mu(Q_{int}) < \varepsilon$.

Чтобы получить клеточное множество Q_{ext} , в каждом ребре $[a, b] = [a_0, a_1 a_2 \dots, b_0, b_1 b_2 \dots]$ каждой клетки из описанного клеточного множества K_{ext} заменим конец a по недостатку на число $a_0, a_1 \dots a_N$, а конец b по избытку на число $b_0, b_1 \dots b_N + 10^{-N}$. В результате мы получим клетки, которые, во-первых, содержат исходные и, во-вторых, допускают разбиение на мелкие клетки-кубы со сторонами 10^{-N} . Стыкуя все мелкие кубы по всем клеткам, мы получим клеточное множество $Q_{ext} \supset K_{ext}$. Если натуральное N достаточно велико, то $\mu(Q_{ext}) - \mu(K_{ext}) < \varepsilon$. ■

ЛЕММА 4.1.7. (о сохранении измеримости при диффеоморфизме) Пусть $F : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ – диффеоморфизм областей, $X \subset U$ есть измеримое компактное подмножество. Тогда образ $Y := F(X)$ – измеримое множество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из цепочки утверждений:

- 1) При диффеоморфизме внутренность множества преобразуется во внутренность его образа, а граница множества – в границу образа:

$$F(X^0) = (F(X))^0, \quad F(\partial X) = \partial(F(X)).$$

- 2) Существует такая конечная совокупность кубов-клеток $\{Q_i\}_{i=1}^N$, объединение которых содержит границу ∂X и сумма мер этих кубов сколь угодно мала, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \{Q_i\}_{i=1}^N : \partial X \subset \bigcup_{i=1}^N Q_i \wedge \sum_{i=1}^N \mu(Q_i) < \varepsilon.$$

- 3) Существует такая конечная совокупность шаров $\{B_i\}_{i=1}^N$, что каждый шар содержит соответствующий куб из предыдущего утверждения и сумма мер этих шаров сколь угодно мала, точнее

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \{B_i\}_{i=1}^N : \forall i \in \{1, \dots, N\} \leftrightarrow Q_i \subset B_i \wedge \sum_{i=1}^N \mu(B_i) < \Gamma_n \varepsilon,$$

где коэффициент $\Gamma_n > 1$ определен в лемме 4.1.5.

- 4) Существует такая конечная совокупность шаров $\{\hat{B}_i\}_{i=1}^N$, объединение которых содержит образ границы $F(\partial X)$ и сумма мер этих шаров сколь угодно мала.

Наметим доказательства сформулированных утверждений.

П. 1. Диффеоморфизм, в частности, есть непрерывная в обе стороны биекция. Остается воспользоваться теоремой о прообразе открытого множества непрерывного отображения.

П. 2. В силу измеримости X , его граница ∂X имеет меру ноль. Значит, она принадлежит клеточному множеству сколь угодно малой меры. В силу леммы 4.1.6, ∂X можно погрузить в клеточное множество, составленное из клеток-кубов, мера которого сколь угодно мала.

П. 3. Опишем около каждой клетки-куба шар и воспользуемся леммой 4.1.5.

П. 4. следует из неравенства (1.4) Лагранжа о диаметре образа выпуклого множества.

Теперь, из критерия измеримости следует, что образ $Y = F(X)$ измерим. ■

ЗАДАЧА 4.1.4. Дайте подробные доказательства пунктов 1-4.

ЛЕММА 4.1.8. *(о заполнении измеримого множества шарами)* В любое измеримое множество X положительной меры можно вложить конечное не пересекающееся объединение $B := \cup_i B_i \subset X$ шаров B_i одинакового (достаточно малого) радиуса, обладающее свойством $\mu(B)/\mu(X) \geq \chi = \chi(n) > 0$, где коэффициент $\chi \in (0, 1)$ зависит только от размерности пространства n . Т. е. шарами одинакового малого радиуса можно заполнить некую гарантированную χ -ю по мере часть множества X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем вложенное в X клеточное множество $K = \cup_j K_j \subset X$, мера которого не меньше половины $\mu(X)$. В каждую клетку K_j вложим такое клеточное множество $C_j = \cup_l Q_{j,l}$, составленное из одинаковых достаточно малых n -мерных кубов $Q_{j,l}$, чтобы мера $\mu(C_j)$ была не меньше половины меры $\mu(K_j)$. Тогда клеточное множество $C = \cup C_j \subset X$ имеет меру $\mu(C) \geq (1/4)\mu(X)$. Теперь в каждый куб $Q_{j,l}$ впишем шар $B_{j,l}$. В силу леммы 4.1.5, отношение γ_n мер шара и описанной клетки-куба зависит только от размерности n . Объединение $B := \cup_{j,l} B_{j,l} \subset X$ и для отношения мер верна нижняя оценка: $\mu(B)/\mu(X) \geq (1/4)\gamma_n = \chi(n)$. ■

Фундаментальной является

ТЕОРЕМА 4.1.1. *(о сохранении меры при движении)* Мера инвариантна относительно преобразования движения Mot , т. е. для любого измеримого множества X его образ $Mot(X)$ измерим и мера $\mu(Mot(X)) = \mu(X)$. В частности, мера инвариантна относительно ортогональных преобразований.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай, когда $\mu(X) > 0$. В силу леммы 4.1.8, заполним шарами одинакового радиуса гарантированную χ -ю по мере часть $B_1 \subset X$ данного множества. Затем так же поступим с дополнением $X_1 := X \setminus B_1$ – заполним шарами одинакового (возможно, меньшего) радиуса его гарантированную χ -ю по мере часть $B_2 \subset X_1$. На следующем шаге возьмем дополнение $X_2 := X \setminus (B_1 \cup B_2)$. И т. д. Очевидно, что для произвольного $k \in \mathbb{N}$ имеет место вложение: $U_k := \cup_{i=1}^k B_i \subset X$. По индукции нетрудно доказать, что

$\mu(X \setminus U_k) < \mu(X)(1 - \chi)^k$ (докажите). Таким образом, существует такое конечное объединение $U_k = \cup_{i=1}^k B_i \subset X$ шаров (возможно, разного радиуса), что разность мер $0 \leq \mu(X) - \mu(U_k) \leq \varepsilon$ может быть сколь угодно мала.

Применим к измеримому множеству X произвольное движение Mot – получим множество $Y := Mot(X)$. Поскольку движение есть диффеоморфизм всего пространства на себя, то, согласно лемме 4.1.7, множество Y измеримо. Допустим, что $\mu(X) > \mu(Y)$. Рассмотрим такое объединение шаров $\cup_{i=1}^k B_i \subset X$, чтобы $\mu(\cup_{i=1}^k B_i) > \mu(Y)$. Поскольку $Mot(\cup_{i=1}^k B_i) \subset Mot(X) = Y$, то $\mu(Mot(\cup_{i=1}^k B_i)) \leq \mu(Y)$. Но, в силу аддитивности меры и доказанного в лемме 4.1.3 сохранения меры шара при движении, $\mu(Mot(\cup_{i=1}^k B_i)) = \mu(\cup_{i=1}^k B_i) > \mu(Y)$. Противоречие. Следовательно, при любом движении мера множества не убывает.

Допустим, что существует такое движение Mot и такое множество X , что $\mu(Mot(X)) > \mu(X)$. Тогда обратное преобразование Mot^{-1} , которое также является движением, преобразует $Mot(X)$ в X с уменьшением меры, что противоречит только что доказанному. ■

ЗАДАЧА 4.1.5. Докажите теорему 4.1.1 для случая $\mu(X) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1.1. Из теоремы 4.1.1 следует, что мера плоских множеств совпадает с их площадью, а мера трехмерных – с их объемом, если понимать площадь и объем в духе классической евклидовой геометрии. □

Следующее утверждение является фундаментальным в теории интегрирования.

ТЕОРЕМА 4.1.2. (геометрический смысл модуля определителя)
Справедливы утверждения:

- 1) Аффинное преобразование $Aff(x) = (Lx + \mathbf{a})^T$, задаваемое матрицей L и вектором сдвига \mathbf{a} , изменяет меру произвольного измеримого множества по правилу: $\mu(Aff(X)) = |\det L| \cdot \mu(X)$.
- 2) Мера n -мерного параллелепипеда Π , построенного на векторах $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n$, равна модулю определителя матрицы, столбцы которой образованы координатами векторов \mathbf{v}^i в произвольном ортонормированном базисе: $\mu(\Pi) = |\det(\mathbf{v}^1 \dots \mathbf{v}^n)|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим невырожденный случай $\det L \neq 0$. Пусть, пока, L – симметрическая матрица. Обозначим через $\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_n\}$ ортонормированные собственные векторы этой матрицы.

В базисе $\{\mathbf{g}^i\}_{i=1}^n$ данная матрица преобразуется к диагональному виду $Diag$, где на i -м месте стоит собственное значение λ_i . Наконец, пусть Ort – ортогональная матрица, которая векторы \mathbf{g}^i преобразует в векторы $\mathbf{e}^i = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T$ стандартного базиса $\{\mathbf{e}^i\}_{i=1}^n$. Тогда $L = Ort^{-1} \cdot Diag \cdot Ort$. Диагональная матрица $Diag$ преобразует клетку в клетку, размеры которой изменяются по каждой оси в $|\lambda_i|$ раз. Поэтому $Diag$ изменяет меру клетки в $|\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n| = |detL|$ раз. Следовательно, матрица $Diag$ изменяет меру любого измеримого множества в $|detL|$ раз. Ортогональные матрицы Ort и Ort^{-1} меру не меняют. Значит, симметрическая невырожденная матрица L изменяет меру в $|detL|$ раз.

Пусть L – произвольная невырожденная матрица. Из курса линейной алгебры известно, что она представима в виде произведения ортогональной и симметрической матриц (полярное разложение). Значит, и в этом случае преобразование L изменяет меру в $|detL|$ раз. Остается вспомнить, что сдвиг сохраняет меру. П. 1 доказан.

Утверждение п. 2 есть следствие того факта, что параллелепипед есть образ единичного куба при его отображении матрицей $(\mathbf{v}^1 \dots \mathbf{v}^n)$.

■

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1.2. Утверждение п. 2 для случая $n = 2$ есть известное из аналитической геометрии правило нахождения площади параллелограмма, а при $n = 3$ – правило нахождения объема параллелепипеда с помощью смешанного произведения.

ЗАДАЧА 4.1.6. Докажите теорему 4.1.2 для случая вырожденного преобразования L .

4.2. Геометрический смысл модуля якобиана

ТЕОРЕМА 4.2.1. Пусть $F : \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ – диффеоморфизм областей. Пусть $x^0 \in U$, а $t > 0$. Рассмотрим n -мерный клетку-куб с вершиной в точке x^0 и ребром длины t :

$$Q(x^0, t) = \{x = x^0 + \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n : 0 \leq h_i \leq t, i = 1, \dots, n\}.$$

Пусть постоянная $t^0 > 0$ такая, что $Q(x^0, t^0) \subset U$. Тогда:

- 1) Для любого $t \in (0, t^0)$ образ куба $F(Q(x^0, t))$ является измеримым множеством и справедливо предельное равенство:

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\mu(F(Q(x^0, t)))}{\mu(Q(x^0, t))} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\mu(F(Q(x^0, t)))}{t^n} = |detDF(x^0)|, \quad (4.1)$$

т. е. модуль якобиана диффеоморфизма в точке x^0 равен коэффициенту изменения меры в данной точке.

2) Если замыкание подмножества $\overline{W} \subset U$, то предел (4.1) равномерен на \overline{W} , т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \forall x^0 \in \overline{W} \wedge \forall t < \delta \hookrightarrow |\nu(x^0, t)| < \varepsilon, \text{ где}$$

$$\nu(x^0, t) := |\det DF(x^0)| - \frac{\mu(F(Q(x^0, t)))}{t^n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обсудим идею доказательства. В окрестности точки x^0 отображение F представимо в виде

$$F(x) = F(x^0 + \mathbf{h}) = F(x^0) + DF(x^0)\mathbf{h} + \eta(x^0, \mathbf{h}),$$

где $\mathbf{V}^n \ni \eta(x^0, \mathbf{h}) = o(|\mathbf{h}|)$ при $|\mathbf{h}| \rightarrow 0$. Если отбросить остаточный член η , то оставшееся аффинное отображение $\mathbf{h} \rightarrow F(x^0) + DF(x^0)\mathbf{h}$ изменяет меру в точности в $|\det DF(x^0)|$ раз (п. 1 теоремы 4.1.2). Т. е. смысл теоремы в том, что в пределе невырожденное дифференцируемое отображение искажает меру так же, как его производная.

Приступим к доказательству. Во-первых, из леммы 4.1.7 следует измеримость образа $F(Q(x^0, t))$. Рассмотрим n -мерный векторный клетку-куб с ребром длины t : $Q(t) = \{\mathbf{h} \in \mathbf{V}^n : 0 \leq h_i \leq t, i = 1, \dots, n\}$. Из п. 1 теоремы 4.1.2 следует, что предельное равенство (4.1) достаточно доказать для отображения

$$\widehat{F} : Q(t^0) \rightarrow \mathbf{V}^n,$$

$$\widehat{F}(\mathbf{h}) := (DF(x^0))^{-1} \circ (F(x^0 + \mathbf{h}) - F(x^0)) = \mathbf{h} + \sigma(\mathbf{h}), \quad (4.2)$$

где $\sigma(\mathbf{h}) = (DF(x^0))^{-1}\eta(x^0, \mathbf{h}) = o(|\mathbf{h}|)$ при $|\mathbf{h}| \rightarrow 0$.

Пусть $\sigma_{max}(t) := \max_{\mathbf{h} \in Q(t)} |\sigma(\mathbf{h})|$ (определение корректно в силу непрерывности отображения σ). Из определения отображения \widehat{F} следует, что образ куба $\widehat{F}(Q(t))$ целиком содержится в кубе $Q_{ext}(t)$ с ребром $[-\sigma_{max}(t), t + \sigma_{max}(t)]$ и целиком содержит куб $Q_{int}(t)$ с ребром $[\sigma_{max}(t), t - \sigma_{max}(t)]$ (рис. 4.1).

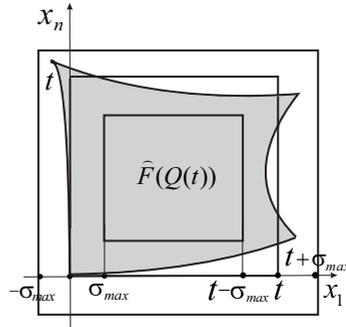


Рис. 4.1

Следовательно

$$(t - 2\sigma_{max}(t))^n \leq \mu(\widehat{F}(Q(t))) \leq (t + 2\sigma_{max}(t))^n \Leftrightarrow$$

$$t^n \left(1 - 2\frac{\sigma_{max}(t)}{t}\right)^n \leq \mu(\widehat{F}(Q(t))) \leq t^n \left(1 + 2\frac{\sigma_{max}(t)}{t}\right)^n.$$

Максимум $\sigma_{max}(t) = \max_{\mathbf{h} \in Q(t)} |\sigma(\mathbf{h})|$ достигается при каком-то значении $\mathbf{h}^*(t) \in Q(t)$. Если для всех допустимых $t > 0$ верно $|\mathbf{h}^*(t)| > 0$, то полученную двустороннюю оценку можно записать так:

$$t^n \left(1 - 2\frac{|\sigma(\mathbf{h}^*(t))|}{|\mathbf{h}^*(t)|} \frac{|\mathbf{h}^*(t)|}{t}\right)^n \leq \mu(\widehat{F}(Q(t))) \leq$$

$$\leq t^n \left(1 + 2\frac{|\sigma(\mathbf{h}^*(t))|}{|\mathbf{h}^*(t)|} \frac{|\mathbf{h}^*(t)|}{t}\right)^n.$$

Если же при некотором $\hat{t} > 0$ верно $|\mathbf{h}^*(\hat{t})| = 0$, то $|\sigma(\mathbf{h}^*(t))| \equiv 0$ для всех $t \in [0, \hat{t}]$; в этом случае положим $|\sigma(\mathbf{h}^*(t))|/|\mathbf{h}^*(t)| := 0$. В результате дробь $|\sigma(\mathbf{h}^*(t))|/|\mathbf{h}^*(t)|$ определена для всех достаточно малых $t > 0$. Но $|\mathbf{h}^*(t)|$ не больше диагонали n -мерного куба со стороной t , значит, $|\mathbf{h}^*(t)| \leq \sqrt{n} \cdot t$. Следовательно, при $t \rightarrow +0$ верно, что $|\mathbf{h}^*(t)| \rightarrow +0$, $|\sigma(\mathbf{h}^*(t))| = o(|\mathbf{h}^*(t)|)$ и

$$1 \leftarrow \left(1 - 2\frac{|\sigma(\mathbf{h}^*(t))|}{|\mathbf{h}^*(t)|} \sqrt{n}\right)^n \leq \frac{\mu(\widehat{F}(Q(t)))}{t^n} \leq$$

$$\leq \left(1 + 2\frac{|\sigma(\mathbf{h}^*(t))|}{|\mathbf{h}^*(t)|} \sqrt{n}\right)^n \rightarrow 1. \quad (4.3)$$

Но и определитель $\det D\widehat{F}(0) = \det(id) = 1$. Значит, равенство (4.1) доказано.

Докажем второе утверждение. Поскольку теперь мы рассматриваем произвольную точку $x^0 \in \overline{W}$, то возвращаемся от вспомогательного отображения \widehat{F} к исходному F (см. (4.2)). С этой целью умножим двустороннюю оценку (4.3) на $|\det DF(x^0)|$ и раскроем скобки с помощью бинома Ньютона. Из теоремы 4.1.2 и определения малого отображения σ следует, что исследуемая разность допускает оценку

$$\left| |\det DF(x^0)| - \frac{\mu(F(Q(x^0, t)))}{t^n} \right| \leq$$

$$\leq |\det DF(x^0)| \sum_{k=1}^n C_n^k 2^k \left(\frac{|\sigma(\mathbf{h}^*(t))|}{|\mathbf{h}^*(t)|} \sqrt{n} \right)^k \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq |\det DF(x^0)| \sum_{k=1}^n C_n^{k2^k} \left(\frac{\|DF^{-1}(x^0)\| \cdot |\eta(x^0, \mathbf{h}^*(t))|}{|\mathbf{h}^*(t)|} \sqrt{n} \right)^k \leq \\
&\leq \frac{|\eta(x^0, \mathbf{h}^*(t))|}{|\mathbf{h}^*(t)|} \left(C_1 + C_2 \frac{|\eta(x^0, \mathbf{h}^*(t))|}{|\mathbf{h}^*(t)|} + \dots + \right. \\
&\quad \left. + C_n \left(\frac{|\eta(x^0, \mathbf{h}^*(t))|}{|\mathbf{h}^*(t)|} \right)^{n-1} \right), \tag{4.4}
\end{aligned}$$

где положительные коэффициенты C_k ($k = 1, \dots, n$) непрерывно зависят от определителя $\det DF(x^0)$ и нормы $\|DF^{-1}(x^0)\|$ пока $x^0 \in \overline{W}$. Поскольку F есть диффеоморфизм на области U , на компактном множестве $\overline{W} \subset U$ коэффициенты C_k ограничены.

Обозначим через $Ball(r, \mathbf{0}) \subset \mathbf{V}^n$ шар радиуса r с центром в нуле. Радиус r выбран настолько малым, чтобы точки $x + \mathbf{h} \in U$ при $(x, \mathbf{h}) \in \overline{W} \times \overline{Ball}(r, \mathbf{0})$ (компактность множества \overline{W} гарантирует, что такой радиус существует).

Исследуем числовую функцию от двух n -мерных переменных

$$\begin{aligned}
&\omega : \overline{W} \times \overline{Ball}(r, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}, \\
\omega(x, \mathbf{h}) &:= \frac{|\eta(x, \mathbf{h})|}{|\mathbf{h}|} = \frac{|F(x + \mathbf{h}) - F(x) - DF(x)\mathbf{h}|}{|\mathbf{h}|} \\
&\text{при } \mathbf{h} \neq \mathbf{0} \wedge \omega(x, \mathbf{0}) := 0.
\end{aligned}$$

Мы утверждаем, что функция ω всюду непрерывна. Собственно, в доказательстве нуждается непрерывность в точках вида $(x^0, \mathbf{0})$. Докажем, что $\lim \omega(x, \mathbf{h}) = \omega(x^0, \mathbf{0}) = 0$ при $(x, \mathbf{h}) \rightarrow (x^0, \mathbf{0})$. С этой целью осуществим оценку сверху:

$$\begin{aligned}
\omega(x, \mathbf{h}) &= \frac{|F(x + \mathbf{h}) - F(x) - DF(x)\mathbf{h}|}{|\mathbf{h}|} \leq \\
&\leq \frac{|(F(x + \mathbf{h}) - F(x^0 + \mathbf{h})) - (F(x) - F(x^0)) - (DF(x)\mathbf{h} - DF(x^0)\mathbf{h})|}{|\mathbf{h}|} + \\
&\quad + \frac{|F(x^0 + \mathbf{h}) - F(x^0) - DF(x^0)\mathbf{h}|}{|\mathbf{h}|} \leq \\
&\leq \frac{|(F(x + \mathbf{h}) - F(x^0 + \mathbf{h})) - (F(x) - F(x^0))|}{|\mathbf{h}|} + \\
&\quad + \| (DF(x) - DF(x^0)) \| + \frac{|\eta(x^0, \mathbf{h})|}{|\mathbf{h}|}.
\end{aligned}$$

Последнее слагаемое не зависит от переменной x и стремится к нулю при $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ в силу определения отображения $\eta(x^0, \mathbf{h})$. Второе слагаемое не зависит от переменной \mathbf{h} и стремится к нулю при $x \rightarrow x^0$ в силу непрерывной дифференцируемости отображения F . Первое слагаемое зависит от пары переменных (x, \mathbf{h}) . Для его исследования введем дифференцируемое отображение $\Delta F(x, \mathbf{h}) := F(x + \mathbf{h}) - F(x^0 + \mathbf{h})$. Его производная по второму аргументу в точке (x, \mathbf{h}) равна: $D_2(\Delta F)(x, \mathbf{h}) = DF(x + \mathbf{h}) - DF(x^0 + \mathbf{h})$. Заметим, что

$$\Delta F(x, \mathbf{h}) - \Delta F(x, \mathbf{0}) = (F(x + \mathbf{h}) - F(x^0 + \mathbf{h})) - (F(x) - F(x^0)).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \frac{|(F(x + \mathbf{h}) - F(x^0 + \mathbf{h})) - (F(x) - F(x^0))|}{|\mathbf{h}|} = \frac{|\Delta F(x, \mathbf{h}) - \Delta F(x, \mathbf{0})|}{|\mathbf{h}|} \leq \\ & \leq \frac{\|D_2(\Delta F)(x, \theta \mathbf{h})\| \cdot |\mathbf{h}|}{|\mathbf{h}|} = \|DF(x + \theta \mathbf{h}) - DF(x^0 + \theta \mathbf{h})\|, \text{ где } \theta \in (0, 1). \end{aligned}$$

Но $\|DF(x + \theta \mathbf{h}) - DF(x^0 + \theta \mathbf{h})\| \rightarrow 0$ при $(x, \mathbf{h}) \rightarrow (x^0, \mathbf{0})$, опять же в силу непрерывной дифференцируемости F .

Значит, функция ω непрерывна на компактном множестве $\overline{W} \times \overline{Ball}(r, \mathbf{0})$. Из теоремы Кантора следует, что она равномерно непрерывна. Поэтому выражение в скобках в оценке (4.4) равномерно ограничено на $\overline{W} \times \overline{Ball}(r, \mathbf{0})$. Теперь, из равномерной непрерывности функции ω , в силу оценки (4.4), следует второе утверждение теоремы 4.2.1. ■

4.3. Формула замены переменной в кратном интеграле

Нам потребуется вспомогательная

ЛЕММА 4.3.1. *(о погружении множества нулевой меры в клетки-кубы) Пусть клетка-куб $Q_a = [0, a]^n \subset \mathbb{R}^n$ содержит множество нулевой меры $\Upsilon \subset Q$. Пусть $\cup_{i=1}^{k_n} q_i(k) = Q_a$ – разбиение куба на “малые” клетки-кубы со стороной a/k $k \in \mathbb{N}$. Обозначим через $I_k(\Upsilon)$ объединение всех таких номеров i кубов q_i , которые пересекаются с Υ . Тогда*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 : \forall k > k_0 \Leftrightarrow \mu\left(\bigcup_{i \in I_k(\Upsilon)} q_i\right) < \varepsilon.$$

ОБСУЖДЕНИЕ 4.3.1. По определению, множество нулевой меры может быть погружено в клеточное множество сколь угодно малой меры. В лемме сформулировано более тонкое свойство: если клетку, которая содержит множество меры ноль, разбивать на равные “малые” кубы так, чтобы мелкость разбиения стремилась к нулю, то автоматически множество нулевой меры будет погружено в клеточное множество сколь угодно малой меры. \square

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Погрузим множество Υ в некоторое фиксированное клеточное множество $C = \cup_{j=1}^N C_j \subset Q_a$ меры $\varepsilon/2$. Покажем, что C можно погрузить в клеточное множество из малых клеточных кубов, мера которого меньше ε .

Для этого оценим меру объединения $\cup_{i \in I_k(\Upsilon)} q_i(k)$ всех тех малых кубов $q_i(k)$, которые могут пересечься с C . Пусть $C_j \cap q_i(k) \neq \emptyset$, где клетка C_j имеет размеры $c_j^{(l)}$ ($l = 1, \dots, n$). Тогда клетка-куб $q_i(k)$ наверняка целиком принадлежит “раздутой” клетке C'_j с размерами $c_j^{(l)} + 2a/k$ (рис. 4.2). Мера последней равна

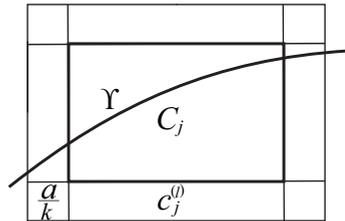


Рис. 4.2

$$\mu(C'_j) = \left(c_j^{(1)} + \frac{2a}{k}\right) \dots \left(c_j^{(n)} + \frac{2a}{k}\right) = c_j^{(1)} \dots c_j^{(n)} + P_j^{(n)} \left(\frac{2a}{k}\right), \quad (4.5)$$

где $c_j^{(1)} \dots c_j^{(n)} = \mu(C_j)$, а $P_j^{(n)}(2a/k)$ – многочлен по переменной $2a/k$ степени n , у которого все коэффициенты положительны, а свободный член равен нулю. Поэтому $P_j^{(n)}(2a/k) = (1/k)R_j^{(n-1)}(1/k)$, где $R_j^{(n-1)}(1/k)$ – многочлен по степеням $1/k$ степени $n-1$ с положительными коэффициентами, которые определяются константами $c_j^{(i)}$ и a . Значит, $R_j^{(n-1)}(1/k) < R_j$, где R_j некоторая константа. Получаем, что

$$\Upsilon \subset \bigcup_{i \in I_k(\Upsilon)} q_i(k) \subset \bigcup_{j=1}^N C'_j$$

и

$$\mu\left(\bigcup_{i \in I_k(\Upsilon)} q_i\right) \leq \mu\left(\bigcup_{j=1}^N C'_j\right) \leq \sum_{j=1}^N \mu(C'_j) \leq \mu(C) + \sum_{j=1}^N \frac{1}{k} R_j < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

если натуральное k выбрано достаточно большим. ■

Перейдем к основному утверждению:

ТЕОРЕМА 4.3.1. (о замене переменных в интеграле) Пусть $F : \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ – диффеоморфизм областей. Пусть $X \subset U$ – измеримое компактное подмножество, а $Y = F(X)$. Пусть $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция. Тогда

$$\int_Y f(y) dy = \int_X f(F(x)) |det DF(x)| dx. \quad (4.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что оба интеграла в равенстве (4.6) существуют: подынтегральные функции непрерывны, множество X измеримо по условию, а множество $Y = F(X)$ измеримо в силу леммы 4.1.7. Поэтому любые последовательности разбиений множеств X и Y , у которых мелкости стремятся к нулю, устремляют интегральные суммы Римана к соответствующим интегралам из (4.6).

Погрузим множество X в клетку-куб Q_a . Рассмотрим разбиение куба $Q_a = \cup_{i=1}^{k^n} q_i(k)$ на малые клеточки со стороной a/k $k \in \mathbb{N}$. Все клетки разбиваются на три класса: 1) не пересекающиеся с $\bar{X} = X$, 2) пересекающиеся с границей ∂X , 3) целиком принадлежащие внутренности $Int(X)$ (рис. 4.3).

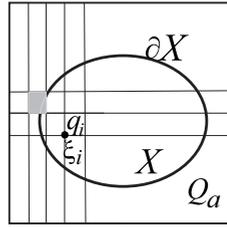


Рис. 4.3

Клетки из первого класса нас не интересуют. Объединение $\cup_{i \in I_k(\partial X)} q_i$ всех клеток из второго класса имеет сколь угодно малую меру, если k достаточно велико (лемма 4.3.1). Выберем в каждой клетке q_i , где $i \in I_k(\partial X)$, произвольную точку $\xi_i \in q_i \cap X$, составим для этих клеток интегральную сумму Римана и оценим ее модуль, опираясь на лемму 4.3.1:

$$\left| \sum_{i \in I_k(\partial X)} f(F(\xi_i)) |det DF(\xi_i)| \mu(q_i \cap X) \right| \leq \max_{y \in Y} |f(y)| \cdot \max_{x \in X} |det DF(x)| \cdot \mu \left(\bigcup_{i \in I_k(\partial X)} q_i \right) \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty; \quad (4.7)$$

в оценке (4.7) мы воспользовались непрерывностью функции f , непрерывностью производной DF , компактностью множества X и компактностью образа $Y = F(X)$.

Обозначим через $J_k(Int(X))$ объединение всех таких номеров i кубов q_i , которые принадлежат третьему классу, т. е. $q_i \subset Int(X)$. Выберем в каждой клетке $q_i \subset Int(X)$ точку $\xi_i \in q_i$ с минимальным набором координат. (Если $n = 2$, то это будет точка в левом нижнем углу, см. рис. 4.3. Такой выбор точки $\xi_i \in q_i$ позволит нам использовать теорему 4.1.2.) Тогда, с учетом (4.7), для интегральной суммы Римана получим предельное равенство:

$$\begin{aligned}
 & \int_X f(F(x)) |detDF(x)| dx = \\
 & = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{i \in I_k(\partial X)} f(F(\xi_i)) |detDF(\xi_i)| \mu(q_i \cap X) + \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{i \in J_k(Int(X))} f(F(\xi_i)) |detDF(\xi_i)| \mu(q_i) \right) = \\
 & = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i \in J_k(Int(X))} f(F(\xi_i)) |detDF(\xi_i)| \mu(q_i). \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

Таким образом, интеграл по X является пределом интегральной суммы Римана только по *внутренним* кубам разбиения.

Перейдем к интегралу в левой части равенства (4.6). Отображение F порождает разбиение множества $Y = \cup_{i=1}^{k^n} (F(q_i(k)) \cap Y)$ на “криволинейные” кубы. Из компактности множества X , непрерывной дифференцируемости отображения F и неравенства (1.4) следует, что мелкость разбиения множества Y стремится к нулю при $k \rightarrow +\infty$. Поэтому интеграл по Y является пределом интегральной суммы Римана:

$$\begin{aligned}
 & \int_Y f(y) dy = \\
 & = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{i \in I_k(\partial X)} f(F(\xi_i)) \mu(F(q_i \cap X)) + \sum_{i \in I(Int(X))} f(F(\xi_i)) \mu(F(q_i)) \right).
 \end{aligned}$$

Для первой суммы, с учетом п. 2 теоремы 4.2 и леммы 4.3, получаем оценку

$$\left| \sum_{i \in I_k(\partial X)} f(F(\xi_i)) \mu(F(q_i \cap X)) \right| \leq \sum_{i \in I_k(\partial X)} |f(F(\xi_i))| \mu(F(q_i)) \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \max_{y \in Y} |f(y)| \sum_{i \in I(\partial X)} (|\det DF(\xi_i)| + \nu(\xi_i, 1/k)) \mu(q_i) \leq \\ &\leq \max_{y \in Y} |f(y)| \cdot (\max_{x \in X} |\det DF(x)| + \varepsilon) \cdot \mu\left(\bigcup_{i \in I_k(\partial X)} q_i\right) \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Для второй суммы получаем

$$\begin{aligned} &\sum_{i \in J_k(\text{Int}(X))} f(F(\xi_i)) \mu(F(q_i)) = \\ &= \sum_{i \in J_k(\text{Int}(X))} f(F(\xi_i)) (|\det DF(\xi_i)| + \nu(\xi_i, 1/k)) \mu(q_i). \end{aligned}$$

Но, в силу п. 2 теоремы 4.2.1, $|\nu(\xi_i, 1/k)| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ равномерно по всем $\xi_i \in X$. Поэтому

$$\begin{aligned} &\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i \in J_k(\text{Int}(X))} f(F(\xi_i)) \mu(F(q_i)) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i \in J_k(\text{Int}(X))} f(F(\xi_i)) |\det DF(\xi_i)| \mu(q_i). \end{aligned}$$

Сравнивая с (4.8), получаем утверждение теоремы. ■

Формула (4.6) замены переменной позволяет усилить теорему 4.2.1 о модуле якобиана:

СЛЕДСТВИЕ 4.3.1. *В условиях теоремы 4.2.1 рассмотрим $\Omega_t \subset U$ – множество измеримых областей, зависящих от числового параметра $t \in (0, \delta)$ и удовлетворяющих условиям: 1) диаметр $\text{diam}(\Omega_t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +0$, 2) пересечение $\bigcap_{t \in (0, \delta)} \Omega_t = x^0$. Тогда*

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\mu(F(\Omega_t))}{\mu(\Omega_t)} = |\det DF(x^0)|. \quad (4.9)$$

Можно сказать, что “дифференциал меры” зависимой переменной $y = F(x)$ выражается линейно через “дифференциал меры” независимой переменной с коэффициентом $|\det DF(x^0)|$. Подчеркивая аналогию дифференциала меры с обычным дифференциалом, заметим, что в случае композиции диффеоморфизмов $F_2 \circ F_1$ коэффициент искажения меры равен произведению коэффициентов, поскольку справедливо $|\det D(F_2 \circ F_1)(x^0)| = |\det DF_2(y^0)| \cdot |\det DF(x^0)|$.

ЗАДАЧА 4.3.1. Докажите формулу (4.9), воспользовавшись формулой меры $\mu(F(\Omega)) = \int_{F(\Omega)} dy$, формулой (4.6) и теоремой о среднем для непрерывной подынтегральной функции.

4.4. Геометрический смысл знака якобиана

Я на правую руку надела
Перчатку с левой руки.

А.А. Ахматова

Обсуждаемый вопрос связан с понятием ориентации пространства. В основе лежит

ЛЕММА 4.4.1. (о двух классах базисов) Множество всех базисов n -мерного пространства разбивается на два непересекающихся класса по следующему отношению: два базиса $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ и $\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_n\}$ принадлежат одному классу только тогда, когда матрица невырожденного линейного преобразования $A(\mathbf{e}_i) := \mathbf{g}_i$ имеет положительный определитель: $\det A > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Указанное отношение является отношением эквивалентности поскольку оно:

- 1) рефлексивно: $id(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i$ и $\det(id) = 1 > 0$;
- 2) симметрично: если $A^{-1}(\mathbf{g}_i) = \mathbf{e}_i$, то $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} > 0$;
- 3) транзитивно: если $B(\mathbf{g}_i) = \mathbf{h}_i$ и $\det B > 0$, то $(B \cdot A)(\mathbf{e}_i) = \mathbf{h}_i$ и $\det(B \cdot A) = \det B \cdot \det A > 0$.

Остается только заметить, что для знака определителя невырожденной матрицы есть в точности две возможности – или быть положительным, или отрицательным. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.4.1. Задать **ориентацию** в \mathbb{R}^n означает произвольно выбрать один из двух классов эквивалентных базисов и назвать его **правым**, а второй класс – **левым**. ☒

ОБСУЖДЕНИЕ 4.4.1. Во-первых, заметим, что в классе правых (левых) базисов имеются ортонормированные базисы. Во-вторых, чтобы поменять ориентацию базиса достаточно поменять местами два соседних базисных вектора (в том числе первый с последним). На плоскости традиционно правым называют ортонормированный базис $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$, в котором поворот по меньшему углу от первого вектора ко второму осуществляется *против часовой стрелки*. В трехмерном пространстве традиционно правым называют базис $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, в котором третий вектор определяется по *правилу буравчика*.

Заметим, что *выбор* поворота на плоскости против часовой стрелки возможен только в том случае, когда: 1) плоскость погружена в трехмерное пространство, 2) *выбрана* нормаль \mathbf{n} к плоскости, 3) мы рассматриваем плоскость *против* направления нормали; базис $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{n}\}$ на рис. 4.4 правый. \square

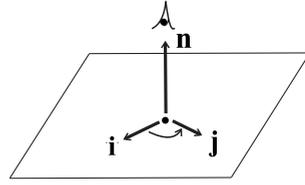


Рис. 4.4

Теперь мы можем перейти к основному вопросу:

ТЕОРЕМА 4.4.1. (о знаке якобиана) Пусть $F : \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ – диффеоморфизм областей. Если в какой-либо точке $x_0 \in U$ определитель $\det DF(x_0) > 0$, тогда в каждой точке $x \in U$ линейное преобразование $DF(x)$ сохраняет ориентацию; если же $\det DF(x_0) < 0$, то в каждой точке $x \in U$ преобразование $DF(x)$ меняет ее на противоположную.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на *постоянстве знака якобиана*. Допустим, что в двух точках он противоположный. Соединим эти точки непрерывной кривой в U ; тогда получим, в силу непрерывности определителя, такую точку $x \in U$, в которой $\det DF(x) = 0$. Последнее противоречит определению диффеоморфизма. Остается сослаться на определение 4.4.1. \blacksquare

В дальнейшем мы обсудим понятие ориентации кривых и поверхностей.

Глава 5

Формула Грина

Формула Джорджа Грина (1793-1841) является первым многомерным аналогом формулы Ньютона-Лейбница. Она связывает интегрирование по плоской замкнутой кривой с интегрированием по ее внутренности.

5.1. Ориентация замкнутой кривой

Из предосторожности,
он обошел вокруг дома,
будто гуляя.

*М.Ю. Лермонтов.
Герой нашего времени*

В этом пункте мы обсудим (не приводя всех доказательств) согласование ориентации плоскости с ориентацией плоской замкнутой кривой.

Пусть $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ – плоская замкнутая кусочно-гладкая кривая (ЗКГК). Напомним (см. рис 5.1), что такая кривая непрерывна и состоит из конечного количества гладких дуг:

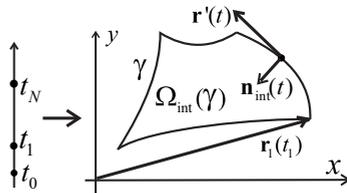


Рис. 5.1

- 1) каждая из дуг задана вектор-функцией $\mathbf{r}_i \in C^1[t_{i-1}, t_i]$, $\forall t \in (t_{i-1}, t_i) \hookrightarrow \mathbf{r}'_i(t) \neq \mathbf{0}$ ($i = 1, \dots, N$);
- 2) дуги правильно состыкованы в *концах*: $\mathbf{r}_i(t_i) = \mathbf{r}_{i+1}(t_i)$ ($i = 1, \dots, N-1$), $\mathbf{r}_N(t_N) = \mathbf{r}_1(t_0)$; существуют односторонние производные $\mathbf{r}'_i(t_{i-1} + 0) \neq \mathbf{0}$ и $\mathbf{r}'_i(t_i - 0) \neq \mathbf{0}$;
- 3) вектор-функция $\mathbf{r}(t) := \mathbf{r}_i(t)$ для $t \in [t_{i-1}, t_i]$ инъективна.

Примем без доказательства “очевидное” (но трудно доказываемое) утверждение

ЛЕММА 5.1.1. (*Жордана о разбиении плоскости*) *Замкнутая кусочно-гладкая кривая γ разбивает плоскость \mathbb{R}^2 на две области – ограниченную $\Omega_{int}(\gamma)$ и неограниченную $\Omega_{ext}(\gamma)$ и является их общей границей:*

$$\mathbb{R}^2 = \Omega_{int}(\gamma) \cup \Omega_{ext}(\gamma) \cup \gamma, \quad \partial\Omega_{int}(\gamma) = \partial\Omega_{ext}(\gamma) = \gamma.$$

*Ограниченная область $\Omega_{int}(\gamma)$ называется **внутренностью кривой**, неограниченная $\Omega_{ext}(\gamma)$ – **внешностью кривой**.*

Из теоремы о существовании обратного отображения следует, что в любой точке гладкости $t \neq t_i$ существует такой вектор **внутренней нормали** $\mathbf{n}_{int}(t) \perp \mathbf{r}'(t)$, что точка $\mathbf{r}(t) + \varepsilon \mathbf{n}_{int}(t) \in \Omega_{int}$ для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Мы знаем, что параметризация кривой уже задает ее ориентацию – порядок точек, порожденный ростом параметра. Оказывается, с помощью $\mathbf{n}_{int}(t)$ ориентацию замкнутой кривой можно **согласовать** с ориентацией всей плоскости:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1.1. Назовем ориентацию замкнутой кусочно-гладкой кривой **положительной** относительно внутренней $\Omega_{int}(\gamma)$, если в каждой точке гладкости базис $\{\mathbf{r}'(t), \mathbf{n}_{int}(t)\}$ правый. \square

ЛЕММА 5.1.2. (*о корректности определения положительной ориентации*) *Если ориентация ЗКГК, порожденная ростом параметра t , положительная в одной точке гладкости, то она положительная в каждой точке гладкости.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы для случая гладкой кривой сразу следует из компактности кривой и непрерывности вектор-функции $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ (обоснуйте). Случай кусочно-гладкой кривой примем без доказательства.

Перейдем к уточнению понятия линейной связности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1.2. Плоская область G называется **односвязной**, если любая замкнутая кусочно-гладкая кривая $\gamma \subset G$ принадлежит области *вместе со своей внутренностью*: $\Omega_{int}(\gamma) \subset G$. \square

ОБСУЖДЕНИЕ 5.1.1. Множество G , будучи областью, уже линейно связно. Односвязность, интуитивно, означает, что область не имеет дырок. \square

ПРИМЕРЫ 5.1.1. односвязных областей: 1) полуплоскость, 2) открытый круг, 3) внутренность многоугольника, 4) введенная в лемме 5.1.1 область $\Omega_{int}(\gamma)$ (рис. 5.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1.3. Пусть замкнутые кусочно-гладкие кривые γ_j ($j = 1, \dots, N - 1$) попарно не пересекаются, принадлежат внутренности кусочно-гладкой кривой γ и не принадлежат внутренности друг друга:

$$\forall j \neq k \ (j, k = 1, \dots, N-1) \Leftrightarrow \gamma_j \cap \gamma_k = \emptyset, \ \gamma_j \subset \Omega_{int}(\gamma), \ \gamma_i \not\subset \Omega_{int}(\gamma_k)$$

(в этом случае замыкания внутренностей $\bar{\Omega}_{int}(\gamma_j) \subset \Omega_{int}(\gamma)$, рис. 5.2).

Область

$$\Omega_{int}(\gamma, N) := \Omega_{int}(\gamma) \setminus \bigcup_{j=1}^{N-1} \bar{\Omega}_{int}(\gamma_j),$$

в которой $N - 1$ “дырок” $\bar{\Omega}_{int}(\gamma_j)$, называется **N -связной**, или, проще, **многосвязной**. \square

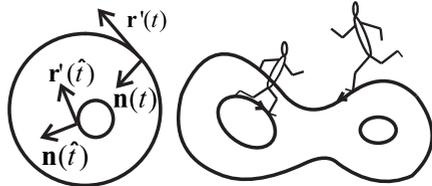


Рис. 5.2

Граница N -связной области

$$\partial\Omega_{int}(\gamma, N) = \gamma \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 \dots \cup \gamma_{N-1}$$

состоит из N связных компонент. Например, кольцо R является двусвязной областью: $\partial R = S_{int}^1 \cup S_{ext}^1$ (рис. 5.2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1.4. Граница $\gamma \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 \dots \cup \gamma_{N-1}$ многосвязной области называется ориентированной **положительно**, если:

1) замкнутая кривая γ ориентирована *положительно* относительно своей внутренности $\Omega_{int}(\gamma)$;

2) для каждого $j = 1, \dots, N-1$ замкнутая кривая γ_j ориентирована отрицательно относительно своей внутренности $\Omega_{int}(\gamma_j)$.

Образно говоря, *правым* мы называем такое *направление обхода границы* многосвязной области, при которой *область остается слева* (см. рис. 5.2). \boxtimes

5.2. Формула Грина

Мы всё ходим вокруг да около
и никак не договоримся
до настоящей сути.

А.П. Чехов

Рассказ неизвестного человека

Напомним понятие криволинейного интеграла второго рода (КИВР). Пусть: $G \subset \mathbb{R}^2$ – область, содержащая кривую $\gamma = AB$, которая задана гладкой вектор-функцией $\mathbf{R}(s) = (x(s), y(s))$ от натурального параметра $s \in [0, S]$ ($\overrightarrow{OA} = \mathbf{R}(0)$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{R}(S)$); $d\mathbf{R}(s) = (dx(s), dy(s))^T$ – дифференциал; $\mathbf{f}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))^T$ ($(x, y) \in G$) – непрерывное векторное поле. КИВР по γ – это определенный интеграл

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy := \int_0^S (\mathbf{f}(\mathbf{R}(s)), d\mathbf{R}(s)).$$

Для кусочно-гладких кривых КИВР определяется как сумма интегралов по гладким дугам. Если кривая задана явно $y = \varphi(x)$, то из формулы замены переменной следует, что

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy = \int_a^b (P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x))dx. \quad (5.1)$$

ТЕОРЕМА 5.2.1. (формула Грина для односвязной области)
Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ – односвязная область, вектор-функция $\mathbf{f}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))^T$ принадлежит классу $C^1(G)$, $\gamma \subset G$ – положительно ориентированная замкнутая кусочно-гладкая кривая, ограничивающая область $\Omega \subset G$ (т. е. $\gamma = \partial\Omega$). Тогда справедлива **формула Грина**

$$\oint_{\partial\Omega} Pdx + Qdy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy. \quad (5.2)$$

ОБСУЖДЕНИЕ 5.2.1. Сравним формулу (5.2) с формулой Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a), \text{ где } F \in C^1[a, b].$$

Последнюю мы привыкли трактовать так: интеграл непрерывной функции f по отрезку равен “интегралу” от ее первообразной F по *ориентированной границе отрезка*. Поскольку на *отрезке* любая непрерывная функция имеет первообразную, кажется, что только такая трактовка представляет интерес. Однако в случае функции нескольких переменных понятие первообразной отсутствует, но сохраняется понятие дифференцирования; точнее сказать, понятие *дифференциального оператора*. Формулы Ньютона-Лейбница и Грина единообразно следует понимать так: интегрирование данной функции по краю можно заменить интегрированием по внутренности, применив к данной функции специальный дифференциальный оператор. \square

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку формула Грина линейна относительно векторного поля \mathbf{f} , достаточно доказать ее для одномерных полей $\mathbf{f}_1 = (P, 0)^T$ и $\mathbf{f}_2 = (0, Q)^T$.

Предположим, дополнительно, что область Ω элементарна относительно обеих координатных осей. Т. е. существуют такие кусочно-гладкие функции $\varphi(x), \psi(x)$ ($x \in [a, b]$) и $\alpha(y), \beta(y)$ ($y \in [c, d]$), что (см. рис. 5.3)

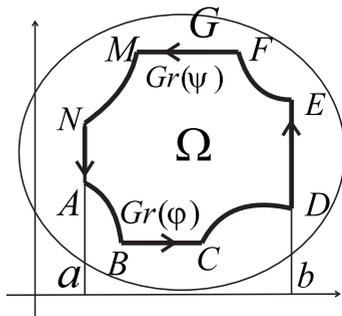


Рис. 5.3

$$\Omega = \{(x, y) : x \in (a, b), \varphi(x) < y < \psi(x)\} =$$

$$= \{(x, y) : y \in (c, d), \alpha(y) < x < \beta(y)\}.$$

Переходя от двойного интеграла к повторному, получаем для второго слагаемого

$$\begin{aligned} - \int \int_{\Omega} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy &= - \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy = \\ &= \int_a^b P(x, \varphi(x)) dx - \int_a^b P(x, \psi(x)) dx = \\ &= \int_{\widehat{ABCD}} P dx + \int_{\widehat{DE}} P dx + \int_{\widehat{EFMN}} P dx + \int_{\widehat{NA}} P dx = \int_{\partial \Omega} P dx. \end{aligned}$$

Переходя от интегралов по отрезку $[a, b]$ к криволинейным интегралам, мы учли, во-первых, формулу (5.1) (взяв $Q \equiv 0$) и, во-вторых, что на вертикальных отрезках DE и NA криволинейный интеграл обнуляется, поскольку дифференциал $dx \equiv 0$ (отрезок DE задается явно как график функции $x = \psi(y) \equiv b$, значит $dx = 0 \cdot dy \equiv 0$).

Аналогично доказывается, что $\int \int_{\Omega} (\partial Q / \partial x) dx dy = \int_{\partial \Omega} Q dy$. Что доказывает формулу (5.2).

Теперь рассмотрим случай, когда область Ω не является элементарной, но кусочно-гладкой кривой \widetilde{AC} ее можно разбить на две подобласти Ω_1 и Ω_2 , каждая из которых является элементарной относительно обеих осей (рис. 5.4). Поскольку $\int_{\widetilde{CA}} P dx + Q dy = - \int_{\widetilde{AC}} P dx + Q dy$, КИВР (в силу аддитивности) представим как сумма интегралов, к каждому из которых можно применить формулу (5.2):

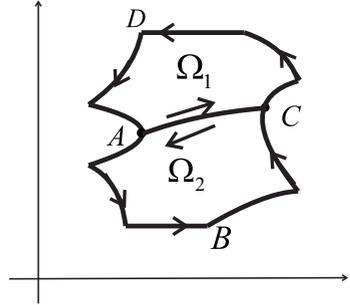


Рис. 5.4

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial \Omega} P dx + Q dy &= \int_{\widetilde{ABC}} P dx + Q dy + \int_{\widetilde{CDA}} P dx + Q dy = \\
 &= \left(\int_{\widetilde{ABC}} P dx + Q dy + \int_{\widetilde{CA}} P dx + Q dy \right) + \\
 &+ \left(\int_{\widetilde{AC}} P dx + Q dy + \int_{\widetilde{CDA}} P dx + Q dy \right) = \\
 &= \int_{\partial \Omega_1} P dx + Q dy + \int_{\partial \Omega_2} P dx + Q dy = \\
 &= \int \int_{\Omega_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \int \int_{\Omega_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \\
 &= \int \int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.
 \end{aligned}$$

Индукцией утверждение теоремы доказывается в том случае, когда Ω можно разбить кусочно-гладкими дугами на конечное количество областей, которые элементарны относительно обеих осей.

Доказательство формулы Грина для общего случая опускаем в виду его громоздкости. ■

ТЕОРЕМА 5.2.2. (формула Грина для многосвязной области)
 Пусть, по-прежнему, G – односвязная область, а вектор-функция $\mathbf{f}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))^T$ принадлежит классу $C^1(G)$. Пусть $\Omega \subset G$ – N -связная область, ограниченная кусочно-гладкими замкнутыми кривыми: внешней γ и внутренними γ_i ($i = 1, \dots, N-1$). Пусть граница $\partial\Omega = \gamma \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_{N-1}$ ориентирована положительным образом. В этом случае формула (5.2) остается верной:

$$\int_{\gamma \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_{N-1}} P dx + Q dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy. \quad (5.3)$$

ДОКАЖЕМ утверждение для двусвязной области (т. е. $N = 2$). С помощью кусочно-гладких дуг \widehat{AB} , \widehat{CD} область Ω разбивается на две односвязные области Ω_1 и Ω_2 ; доказательство существования таких дуг опускаем, ограничившись рис. 5.5. Для каждой области Ω_i ($i = 1, 2$) запишем формулу (5.2) Грина и сложим полученные равенства. Воспользовавшись ориентированностью КИВР

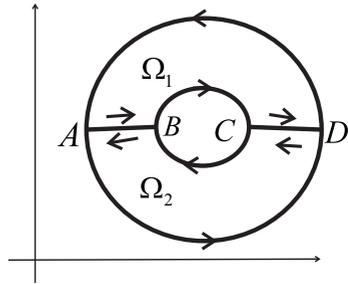


Рис. 5.5

$$\int_{\widehat{AB}} = -\int_{\widehat{BA}}, \quad \int_{\widehat{CD}} = -\int_{\widehat{DC}},$$

получим формулу (5.3). (Воспользовавшись рис. 5.5, дайте подробное доказательство утверждения).

Индукцией формула Грина доказывается для произвольного $N \in \mathbb{N}$. ■

Из формулы Грина сразу получаем

СЛЕДСТВИЕ 5.2.1. (о площади плоской области) Площадь (мера) плоской области Ω , которая ограничена кусочно-гладкой кривой $\partial\Omega$, вычисляется по формулам

$$S(\Omega) = \iint_{\Omega} dx dy := \int_{\partial\Omega} x dy = -\int_{\partial\Omega} y dx = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} x dy - y dx. \quad (5.4)$$

ЗАДАЧА 5.2.1. Докажите формулы (5.4).

Глава 6

Поверхностные интегралы

Поверхностные интегралы первого и второго рода (ПИПР и ПИВР) являются двумерными аналогами криволинейных интегралов первого и второго рода.

6.1. Кусочно-гладкие поверхности

Как ни крой, швы наружу выйдут

Напомним (см. п. 1.6), что простой гладкой (двумерной) поверхностью в трехмерном пространстве (ППП) мы называем образ $M = Im(\Phi) \subset \mathbb{R}^3$ инъективного гладкого отображения Φ плоской области $G \subset \mathbb{R}^2$; причем в каждой точке $(u, v) \in G$ ранг матрицы производной максимален: $rank(D\Phi(u, v)) = 2$. Нам удобно задавать поверхность отображением $\mathbf{r} : G \rightarrow \mathbf{V}^3$, где $\mathbf{r}(u, v) = \vec{O}\Phi(u, v)$ – радиус-вектор точки $\Phi(u, v)$ (рис. 6.1). В дальнейшем мы не различаем точку и ее радиус-вектор. Касательная плоскость $T_A M = Im(D\mathbf{r}(u, v))$ к M в точке $A = \mathbf{r}(u, v)$ порождена линейно независимыми векторами частных производных, т. е. пара $\{\mathbf{r}'_u(u, v), \mathbf{r}'_v(u, v)\}$ является базисом в $T_A M$. Трехмерность объемлющего пространства позволяет использовать, кроме скалярного, векторное и смешанное произведения. Так, ортогональное дополнение $N_A M$ представляет собой одномерное подпространство, порожденное векторным произведением $\mathbf{N}(A) := \mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)$. Из курса аналитической геометрии известно, что площадь (мера) параллелограмма $Par(u, v)$, построенного на векторах $\mathbf{r}'_u(u, v), \mathbf{r}'_v(u, v)$, равна модулю векторного произведения: $\mu(Par(u, v)) = |\mathbf{N}(A)|$.

Нам понадобятся расширения понятия ПГП.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1.1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – плоская область, замыкание которой $\bar{\Omega} \subset G$, а граница $\partial\Omega$ является кусочно-гладкой замкнутой кривой. Образ $\bar{\Theta} := \mathbf{r}(\bar{\Omega})$ называется **ПГП с краем** или **куском**. **Краем ПГП** называется образ границы плоской области: $\partial\Theta := \mathbf{r}(\partial\Omega)$. Точки, не принадлежащие краю, называют **точками гладкости** (рис. 6.1). \boxtimes

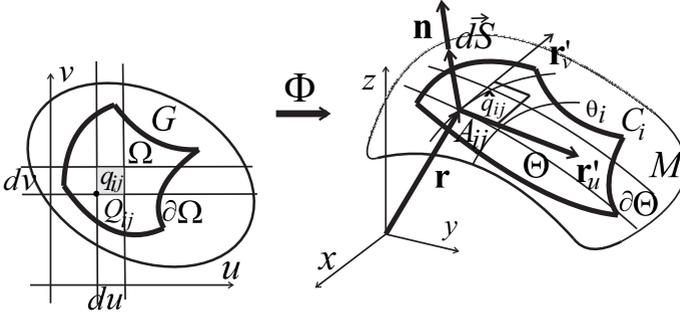


Рис. 6.1

ПРИМЕРЫ 6.1.1. кусок: многоугольник, сферический сегмент с краем. Чтобы параметризовать сферический сегмент Θ , применим

стереографическую проекцию:

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus \{N\}, \quad \Phi(A') = A.$$

Область Ω – открытый круг с центром в южном полюсе сферы, граница $\partial\Omega$ – окружность, край сферического сегмента является параллель $\partial\Theta$ ($B' \in \partial\Omega$, $B \in \partial\Theta$).

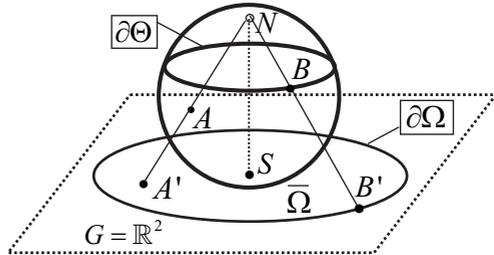


Рис. 6.2

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1.1. (о крае и границе) Поскольку $\bar{\Omega} \subset G$, кусок принадлежит ПГП $M = \mathbf{r}(G)$, а его край $\partial\Theta$ является пространственной кусочно-гладкой замкнутой кривой, т. е. конечным объединением краевых дуг $\partial\Theta = \cup_i \theta_i$, которые правильно состыкованы в концах C_i . Край поверхности совпадает с ее границей в том случае, когда

поверхность плоская, т. е. принадлежит выделенной фиксированной плоскости. Заметим, что поверхность, принадлежащая пространству, не имеет внутренних точек – она вся состоит из граничных точек! Традиционно край поверхности обозначают как границу. \square

“Правильно сшитые” куски приводят к следующему понятию:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1.2. Кусочно-гладкой поверхностью (КГП) называется конечное объединение кусков $\Pi = \cup_{i=1}^I \bar{\Theta}_i$, которое удовлетворяет условиям:

- 1) два произвольных куска могут пересекаться или по нескольким общим краевым дугам $\theta_{ij} \subset \bar{\Theta}_i$ (**соседние куски**) и нескольким общим концам дуг C_{ij} , или только по нескольким общим концам дуг;
- 2) для любых двух произвольных кусков $\bar{\Theta}_i, \bar{\Theta}_k$ существует связывающий их набор *соседних* кусков: $\bar{\Theta}_i$ соседствует с $\bar{\Theta}_{i_1}$, который соседствует с $\bar{\Theta}_{i_2}$, и т. д., который соседствует с $\bar{\Theta}_k$;
- 3) три различных куска могут пересекаться не более, чем в концах дуг. \boxtimes

Возможные случаи правильно сшитых кусков и неправильно сшитых изображены на рис. 6.3. Для всех точек гладкости кусков Θ_i определено понятие касательной плоскости к КГП и понятие нормали к ней. “Реализацией” понятия КГП является одежда, сшитая из нескольких кусков ткани.

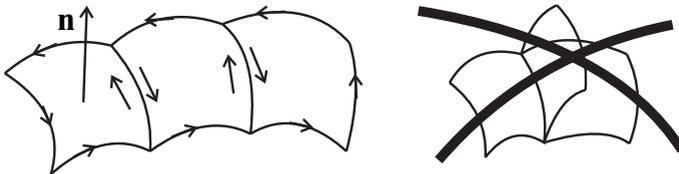


Рис. 6.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1.3. Край КГП, если он не пуст, есть (конечное) объединение тех краевых дуг, которые НЕ являются общими для соседних кусков. \boxtimes

ОБСУЖДЕНИЕ 6.1.1. В силу определения, край КГП является кусочно-гладкой кривой. Примем без доказательства, что край КГП есть конечное объединение *замкнутых* кусочно-гладких кривых. \square

ПРИМЕРЫ 6.1.2. кусочно-гладких поверхностей: двугранный угол, поверхность многогранника, коническая поверхность с краем, цилиндрическая поверхность с краем $\overline{Cyl} = S^1 \times [0, 1]$ (край – несвязное объединение двух окружностей), лист Мебиуса с краем. (Модель листа Мебиуса можно легко сделать: надо взять достаточно длинную бумажную полоску и склеить противоположные концы полоски в кольцо, предварительно перевернув один из них. А что собой представляет край листа Мебиуса?).

Задача 6.1.1. Разрежьте перечисленные КГП на куски.

6.2. Поверхностный интеграл первого рода

ПИПР можно определить по аналогии с криволинейным интегралом первого рода: сначала конструктивно определить площадь поверхности в духе определения длины кривой (как супремум площадей вписанных многогранных поверхностей), затем определить интегральную сумму Римана и т. д. Однако такой путь является весьма сложным. Поэтому мы дадим только мотивацию ПИПР и сразу его аналитическое определение.

Пусть Θ – ПГП с краем, параметризованная инъекцией замыкания $\bar{\Omega}$ (см. определение 6.1.1). Погрузим $\bar{\Omega}$ в “большой” квадрат со стороной a ; разобьем стороны квадрата на k отрезков длины a/k – в результате квадрат разобьется на k^2 малых квадратов q_{ij} с вершинами Q_{ij} ($i, j = 0, \dots, k - 1$). Рассмотрим только те малые квадраты, которые целиком принадлежат Ω . Объединение образов $\cup_{q_{ij} \subset \Omega} \mathbf{r}(q_{ij}) \subset \Theta$ есть “почти” разбиение ПГП с краем на малые “криволинейные параллелограммы”. Касательные к сторонам криволинейных параллелограммов суть векторы $\mathbf{r}'_u(Q_{ij})$ и $\mathbf{r}'_v(Q_{ij})$ (рис. 6.1). Наряду с малыми криволинейными параллелограммами рассмотрим малые параллелограммы \hat{q}_{ij} , построенные на дифференциалах $\mathbf{r}'_u(Q_{ij})(du)$ и $\mathbf{r}'_v(Q_{ij})dv$, где $du = dv = a/k$. Каждый такой параллелограмм лежит в своем касательном пространстве $T_{A_{ij}}\Theta$, где $A_{ij} = \mathbf{r}(Q_{ij})$. Удобно прикрепить его именно к точке A_{ij} – получим “чешую” $\cup_{i,j} \hat{q}_{ij}$, которая “близка” к ПГП при больших $k \gg 1$. Площади малых параллелограммов равны $\mu(\hat{q}_{ij}) = |\mathbf{r}'_u(Q_{ij}) \times \mathbf{r}'_v(Q_{ij})| dudv$. Назовем **дифференциалом площади** поверхности M в точке $A = \mathbf{r}(Q)$ ($Q \in G$) именно полученное выражение $dS := |\mathbf{r}'_u(Q) \times \mathbf{r}'_v(Q)| dudv$. Заметим, что согласно данному определению, дифференциал площади зависит от параметризации поверхности; ниже будет показано, что это не так – он инвариантен относительно замены параметризации.

Описанная конструкция мотивирует

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2.1. Пусть $f : \bar{\Theta} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция. **Поверхностным интегралом первого рода** от функции f по ПГП Θ называется двойной интеграл

$$\iint_{\Theta} f(x, y, z) dS := \iint_{\Omega} f(\mathbf{r}(u, v)) \cdot |\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)| dudv. \quad \boxtimes \quad (6.1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2.1. Определение (6.1) сконструировано по принципу формулы (4.6) замены переменной в интеграле: вместо модуля якобиана стоит модуль векторного произведения частных производных. Отметим аналогию в обозначениях поверхностного интеграла первого рода и криволинейного интеграла первого рода. \square

ЛЕММА 6.2.1. (*корректность определения 6.2.1*) Интеграл (6.1) существует. Его вид не меняется при замене параметризации поверхности Θ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения области Ω , поверхности Θ и функции f следует, что подынтегральная функция непрерывна на измеримом компактном множестве $\bar{\Omega}$. Что влечет (см. теорему 3.2.2) существование интеграла (6.1).

Другая параметризация $\hat{\mathbf{r}} : H \rightarrow M$ порождена некоторым диффеоморфизмом $F : H \rightarrow G$ плоских областей: $\hat{\mathbf{r}}(s, t) = \mathbf{r}(F(s, t))$, где $(s, t) \in H$ (см. обсуждение 1.6.1). Диффеоморфизм F порождает $\Xi := F^{-1}(\Omega)$ – плоскую область с кусочно-гладкой границей $\partial\Xi = F^{-1}(\partial\Omega)$. После замены переменных интеграл (6.1) примет вид

$$\begin{aligned} \iint_{\Theta} f(x, y, z) dS &= \iint_{\Omega} f(\mathbf{r}(u, v)) \cdot |\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)| dudv = \\ &= \iint_{\Xi} f(\mathbf{r}(F(s, t))) \cdot |\mathbf{r}'_u(F(s, t)) \times \mathbf{r}'_v(F(s, t))| \cdot |\det DF(s, t)| dsdt. \end{aligned}$$

С другой стороны (согласно дифференцированию сложного отображения, линейности векторного произведения и его антикоммутативности) получаем

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}}'_s(s, t) \times \hat{\mathbf{r}}'_t(s, t) &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \frac{\partial F_1}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \frac{\partial F_2}{\partial s} \right) \times \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \frac{\partial F_2}{\partial t} \right) = \\ &= \frac{\partial F_1}{\partial s} \frac{\partial F_2}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t} \frac{\partial F_2}{\partial s} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial F_1}{\partial s} \frac{\partial F_2}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) - \frac{\partial F_1}{\partial t} \frac{\partial F_2}{\partial s} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) = \det DF(s, t) \cdot (\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v).$$

Следовательно,

$$|\hat{\mathbf{r}}'_s(s, t) \times \hat{\mathbf{r}}'_t(s, t)| = |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| \cdot |\det DF(s, t)|. \quad (6.2)$$

Значит

$$\int \int_{\Xi} f(\hat{\mathbf{r}}(s, t)) \cdot |\hat{\mathbf{r}}'_s(s, t) \times \hat{\mathbf{r}}'_t(s, t)| \, ds dt = \int \int_{\Theta} f(x, y, z) dS. \quad \blacksquare$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2.2. Из равенства (6.2) следует, что дифференциал площади поверхности

$$dS := |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| \, dudv = |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| (|\det DF(s, t)| \, ds dt) = |\hat{\mathbf{r}}'_s(s, t) \times \hat{\mathbf{r}}'_t(s, t)| \, ds dt$$

инвариантен относительно замены переменных! Сравните этот результат с формулой (4.9) и комментарием к ней. \square

Частным случаем параметризации поверхности является ее явное задание, т. е. задание поверхности как графика гладкой функции $z = \varphi(x, y)$, где $(x, y) \in \Omega$ (см. замечание 1.6.2). В этой параметризации $\mathbf{r}(x, y) := (x, y, \varphi(x, y))$. Определение (6.1) приобретает вид:

СЛЕДСТВИЕ 6.2.1.

$$\begin{aligned} & \int \int_{\Theta} f(x, y, z) dS = \\ & = \int \int_{\Omega} f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + (\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2} \, dx dy. \end{aligned} \quad (6.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, $\mathbf{r}'_x = (1, 0, \varphi'_x)^T$, $\mathbf{r}'_y = (0, 1, \varphi'_y)^T$, $\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = (-\varphi'_x, -\varphi'_y, 1)^T$. Поэтому $|\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y| = \sqrt{1 + (\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2}$. \blacksquare

Имея в виду принцип аддитивности, дадим

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2.2. Для КГП $\Pi = \cup_{i=1}^I \bar{\Theta}_i$ положим

$$\int \int_{\Pi} f(x, y, z) dS := \sum_{i=1}^I \int \int_{\Theta_i} f(x, y, z) dS. \quad \boxtimes \quad (6.4)$$

Поскольку интеграл (6.1) по ПГП определен как кратный интеграл, а интеграл (6.4) по КГП определен как *сумма* интегралов по ПГП, то, в конечном итоге, имеет место утверждение, которое мы примем без доказательства:

ТЕОРЕМА 6.2.1. *Поверхностный интеграл первого рода, во-первых, не зависит от разбиения поверхности на куски u , во-вторых, обладает свойством аддитивности.*

Опираясь на мотивацию, изложенную выше, и аддитивность ПИПР, мы можем дать

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2.3. **Площадью (плоской мерой) простой гладкой поверхности Θ** называют интеграл

$$\mu(\Theta) := \int \int_{\Theta} dS = \int \int_{\Omega} |\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)| dudv.$$

Площадью кусочно-гладкой поверхности $\Pi = \cup_{i=1}^I \bar{\Theta}_i$ полагаем сумму $\mu(\Pi) := \sum_{i=1}^I \mu(\Theta_i)$. \boxtimes

В качестве косвенного подтверждения естественности определения 6.2.3 докажем, что

ЛЕММА 6.2.2. *Площадь инвариантна относительно ортогонального преобразования $O : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения векторного произведения следует, что ортогональное преобразование сохраняет его модуль:

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \leftrightarrow |O(\mathbf{a}) \times O(\mathbf{b})| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|.$$

Поэтому, а также в силу линейности преобразования O и правила дифференцирования сложного отображения, получаем:

$$\begin{aligned} \mu(O(\Theta)) &:= \int_{\Omega} |(O\mathbf{r})'_u \times (O\mathbf{r})'_v| dudv = \int \int_{\Omega} |O(\mathbf{r}'_u) \times O(\mathbf{r}'_v)| dudv = \\ &= \int \int_{\Omega} |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| dudv = \mu(\Theta). \blacksquare \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 6.2.1. Воспользовавшись сферическими координатами, докажите, что площадь сферы радиуса R равна $4\pi R^2$.

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПИПР. Если подынтегральная функция $f(x, y, z) \geq 0$, ПИПР равен массе тонкого слоя (пленки, мембраны) с поверхностной плотностью f . Для знакопеременной функции f ПИПР можно трактовать как сумарный заряд тонкого слоя с поверхностной плотностью зарядов f .

Вычисление ПИПР приводит к необходимости каждый раз находить модуль векторного произведения. Можно воспользоваться известной из аналитической геометрии формулой, которая выражает модуль векторного произведения через скалярное:

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \hookrightarrow |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{\mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2}.$$

Мы получаем следующую формулу для вычисления ПИПР:

$$\int \int_{\Theta} f(x, y, z) dS := \int \int_{\Omega} f(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \sqrt{(\mathbf{r}'_u)^2 (\mathbf{r}'_v)^2 - (\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v)^2} dudv.$$

ОБСУЖДЕНИЕ 6.2.1. Дифференциал параметризации гладкой поверхности имеет вид $d\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}'_u du + \mathbf{r}'_v dv$. Его скалярный квадрат

$$d\mathbf{r}^2 = (\mathbf{r}'_u du + \mathbf{r}'_v dv)^2 = (\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_u) du^2 + 2(\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v) dudv + (\mathbf{r}'_v, \mathbf{r}'_v) dv^2$$

называется **первой квадратичной формой** поверхности. Коэффициенты первой квадратичной формы обычно обозначают через

$$E(u, v) := (\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_u) = (\mathbf{r}'_u)^2, \quad F(u, v) := (\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v), \quad G(u, v) := (\mathbf{r}'_v, \mathbf{r}'_v) = (\mathbf{r}'_v)^2$$

Формула (6.1) приобретает вид

$$\int \int_{\Theta} f(x, y, z) dS := \int \int_{\Omega} f(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \sqrt{EG - F^2} dudv. \quad \square$$

ЗАДАЧА 6.2.2. Запишите матрицу первой квадратичной формы и убедитесь, что форма положительно определена. Дайте геометрическое доказательство положительной определенности первой квадратичной формы.

6.3. Ориентация кусочно-гладкой поверхности

Всё-то еж он ежится,
Всё-то он щетинится.

А.С. Пушкин. Сказка о медведихе

Напомним те виды поверхностей, которые мы уже ввели: простая гладкая поверхность (без края и с краем), гладкая поверхность, кусочно-гладкая поверхность (у которой может быть край). Целесообразно ввести подвиды кусочно-гладких поверхностей:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.3.1. Кусочно-гладкую поверхность Θ мы называем **гладкой поверхностью с краем**=ГПК, если разность $\Theta \setminus \partial\Theta$ является гладкой поверхностью. \boxtimes

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.3.2. **Замкнутой гладкой (кусочно-гладкой) поверхностью**=ЗГП (ЗКГП) называют линейно связную ГП (КГП), которая является границей некоторой ограниченной трехмерной области. \boxtimes

ПРИМЕРЫ 6.3.1. ГПК: полусфера с краем, прямое произведение отрезка на окружность $[a, b] \times S^1$ – цилиндрическая поверхность с краем; ЗГП: сфера (граница шара), тор (граница “бублика”); ЗКГП: поверхности многогранников. Заметим, что граница ограниченной трехмерной области не обязана быть линейно связным множеством (удалим из открытого шара концентрический замкнутый шар меньшего радиуса, граница полученной области – объединение двух концентрических сфер).

ОБСУЖДЕНИЕ 6.3.1. Требования, которые определение 6.3.2 предъявляет к поверхности являются весьма жесткими: с одной стороны – локальное требование гладкости, с другой – глобальное требование быть линейно связной границей некоторой области. Примем без доказательства, что замкнутая поверхность не имеет края. Не трудно проверить, что замкнутые поверхности являются компактными множествами (докажите). Нетривиальным является обратное утверждение: кусочно-гладкие компактные линейно связные поверхности без края в трехмерном пространстве являются замкнутыми. Уже в четырехмерном пространстве двумерные компактные поверхности без края могут не быть границами (точнее, краями) какой-то трехмерной поверхности. Например, проективная плоскость, бутылка Клейна (Феликс Христиан Клейн, 1849-1925). \boxminus

ЗАМЕЧАНИЕ 6.3.1. Замкнутая поверхность, конечно, замкнутое подмножество пространства; однако не наоборот. \boxminus

Сейчас мы введем понятие ориентации поверхности, а потом согласуем с ней ориентацию края (если край существует, сравните с определением 5.1.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.3.3. Гладкая поверхность Θ (с краем или без) называется **ориентируемой**, если на множестве ее точек гладкости существует *непрерывное поле единичных нормалей*, т. е. определено такое непрерывное отображение $\mathbf{n} : \Theta \rightarrow \mathbf{V}^3$, что для любой точки $A \in \Theta$ справедливо: 1) $|\mathbf{n}(A)| = 1$, 2) $\mathbf{n}(A) \perp T_A\Theta$. \boxtimes

Если непрерывное поле единичных нормалей существует, то умножив его на минус один, мы получим второе непрерывное поле единичных нормалей. Без доказательства примем “очевидное” утверждение:

ЛЕММА 6.3.1. *Если гладкая поверхность ориентируема, то существует в точности два непрерывных векторных поля единичных нормалей, отличающиеся знаком.*

Выбор одного из названных полей задает ориентацию поверхности. В результате поверхность становится **ориентированной**.

ЛЕММА 6.3.2. *Простые ГП (с краем или без) и замкнутые ГП ориентируемы.*

Доказательство очевидно для простых поверхностей. Для них (см. п. 6.1) непрерывное поле единичных нормалей имеет вид

$$\mathbf{n}(A) = \pm \frac{\mathbf{N}(A)}{|\mathbf{N}(A)|} = \pm \frac{\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)}{|\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)|}, \quad (6.5)$$

где именно *выбор* знака перед дробью задает ориентацию ППП.

Можно доказать, что у гладкой замкнутой (линейно связной!) поверхности Θ , ограничивающей область V , в каждой точке $A \in \Theta$ из двух единичных нормалей $\pm \mathbf{n}(A)$ одна и только одна является *внутренней* (т. е. $\mathbf{n}_{int}(t) \perp T_A\Theta$ и точка $A + \varepsilon \mathbf{n}_{int}(t) \in V$ для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$, см. п. 5.1). Поле внутренних нормалей (как и поле внешних, рис. 6.4) определяет ориентацию. \blacksquare

ЗАМЕЧАНИЕ 6.3.2. Одного требования гладкости не достаточно для ориентируемости. Существуют неориентируемые гладкие поверхности! Самым известным примером является лист Мебиуса (докажите его неориентируемость, см. рис. 6.5). \square

Пусть $\bar{\Theta}$ – ППП с краем. Опишем процедуру согласования ориентации Θ с ориентацией ее края $\partial\Theta$. Пусть граница прообраза $\partial\Omega$ ориентирована ее параметризацией $\mathbf{a}(t) = (u(t), v(t))$ ($t \in [0, T]$). Пусть $Q = \mathbf{a}(t_0)$ – произвольная точка гладкости, т. е. Q не совпадает с концом дуги. Тогда край ППП параметризован вектор-функцией $\mathbf{R}(t) := \mathbf{r}(\mathbf{a}(t))$, а точка $A = \mathbf{r}(Q)$ также не совпадает с концом дуги. Таким

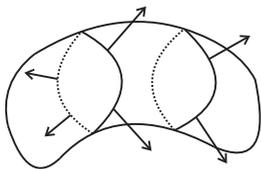


Рис. 6.4

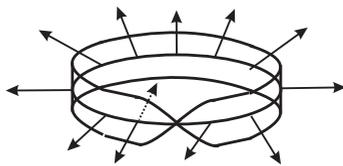


Рис. 6.5

образом, в точке A определен касательный к краю $\partial\Theta$ вектор $\vec{\tau}(A) := (\mathbf{r}(\mathbf{a}))'(t_0) = D\mathbf{r}(Q) \cdot (\mathbf{a}'(t_0))$. Далее, в точке Q определен вектор внутренней нормали $\mathbf{n}_{int}(Q)$ к кривой γ . Поскольку $\bar{\Omega} \subset G$ (см. определение 6.1.1), то к вектору $\mathbf{n}_{int}(Q)$ можно применить линейное отображение $D\mathbf{r}(Q) : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_A M$. Получим вектор $\vec{\nu}(A) := D\mathbf{r}(Q) \cdot \mathbf{n}_{int}(Q)$. Наконец, в точке A определены в точности два вектора единичной нормали $\vec{\beta}(A) := \pm \mathbf{n}(A) \perp T_A M$. Поскольку отображение производной $D\mathbf{r}(Q)$ имеет ранг два, а векторы $\mathbf{a}'(Q)$ и $\mathbf{n}_{int}(Q)$ перпендикулярны, векторы $\vec{\tau}(A)$ и $\vec{\nu}(A)$ образуют базис в касательной плоскости $T_A M$. Следовательно, тройка $\{\vec{\tau}(A), \vec{\nu}(A), \vec{\beta}(A)\}$ образует базис в \mathbf{V}^3 (рис. 6.6).

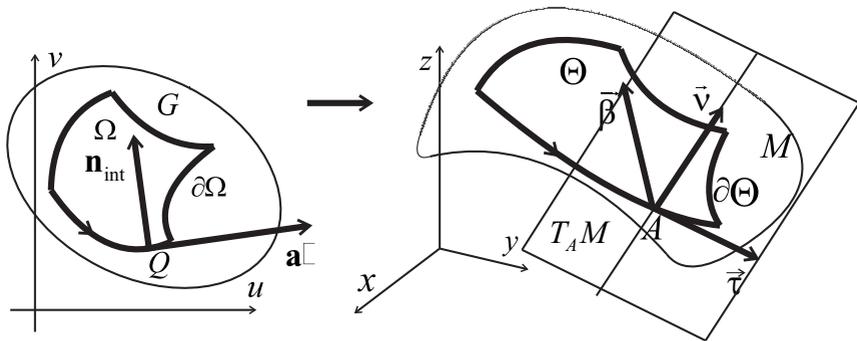


Рис. 6.6

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.3.4. (согласование ориентации ПГП с краем с ориентацией ее края) Назовем ориентацию края $\partial\Theta$ **положительной** относительно ПГП $\bar{\Theta}$, если в любой точке гладкости $A \in \partial\Theta$ базис $\{\vec{\tau}(A), \vec{\nu}(A), \vec{\beta}(A)\}$ правый. \square

ЛЕММА 6.3.3. (о корректности определения положительной ориентации края) Если ориентация края ПГП положительная в од-

ной точке гладкости края, то она положительная в каждой точке гладкости края.

Примем утверждение леммы без доказательства. Сравните определение 6.3.4 и лемму 6.3.3 с определением 5.1.1 и леммой 5.1.2.

Принципиальным при вычислении ПИВР является

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.3.5. Кусочно-гладкая поверхность называется **ориентируемой**, если ее куски можно ориентировать **согласованно**, т. е. так, что положительные ориентации краев соседних кусков *противоположны* (рис. 6.3). \square

ОБСУЖДЕНИЕ 6.3.2. Теперь понятно, что пункты 2 и 3 в определении 6.1.2 КГП предназначены для введения понятия *согласования ориентации* всех кусков. Чтобы ориентировать КГП нужно в одном куске ориентировать край; после чего *разнести ориентацию* по принципу противоположности по всем кускам. Если это получится, значит, во-первых, поверхность ориентируемая и, во-вторых, она нами ориентирована. \square

Задача 6.3.1. Разрежьте на куски цилиндрическую поверхность с краем и ориентируйте ее. Попробуйте эту же процедуру осуществить с листом Мебиуса.

6.4. Поверхностный интеграл второго рода

Пусть на области $W \subset \mathbb{R}^3$ задано непрерывное векторное поле

$$\mathbf{f}: W \rightarrow \mathbf{V}^3, \quad (x, y, z) \rightarrow \mathbf{f}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))^T.$$

Пусть $\Theta \subset W$ – ПГП, ориентированная непрерывным полем единичных нормалей $\mathbf{n}(x, y, z)$. Назовем **векторным дифференциалом площади** произведение $\vec{dS} := \mathbf{n} dS$, где dS – дифференциал площади поверхности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.4.1. Поверхностным интегралом второго рода от непрерывного векторного поля $\mathbf{f} = (P, Q, R)^T$ по ПГП Θ называется поверхностный интеграл первого рода

$$\int \int_{\Theta} (\mathbf{f}, \vec{dS}) := \int \int_{\Theta} (\mathbf{f}(x, y, z), \mathbf{n}(x, y, z)) dS. \quad (6.6)$$

Первое обозначение являются символическим (оно аналогично обозначению криволинейного интеграла второго рода); второе обозначение является ПИПР, в котором подынтегральная функция $f(x, y, z) := (\mathbf{f}(x, y, z), \mathbf{n}(x, y, z))$ (см. формулу (6.1)). \square

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПИВР. Если интерпретировать поле \mathbf{f} как стационарное (т. е. неизменное по времени) поле скоростей жидкости, то выражение $(\mathbf{f}(x, y, z), \mathbf{n}(x, y, z))dS$ равно объему жидкости, протекающему через “малую” площадку dS за единицу времени. Указанный объем положительный только если скорость образует с вектором нормали острый угол. Таким образом, ПИВР равен **ориентированному объему жидкости**, протекающей через поверхность за единицу времени. В общем случае ПИВР интерпретируют как **ориентированный поток** векторного поля.

ЛЕММА 6.4.1. *(корректность определения 6.4.1) Интеграл (6.6) существует. Его вид не меняется при замене параметризации поверхности Θ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование интеграла следует из непрерывности функции $f(x, y, z) := (\mathbf{f}(x, y, z), \mathbf{n}(x, y, z))$. Поле нормалей $\mathbf{n}(x, y, z)$ не зависит от параметризации (см. формулу (6.5) и лемму 1.6.1 о корректности определения касательной плоскости). Теперь корректность поверхностного интеграла второго рода вытекает из корректности определения интеграла первого рода. \blacksquare

Чтобы получить удобную формулу для вычисления ПИВР, вспомним, что смешанное произведение трех векторов $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) := (\mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c})$. В произвольном орто-нормированном базисе $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \det(\mathbf{a}^T, \mathbf{b}^T, \mathbf{c}^T)$, где второе выражение в скобках означает квадратную матрицу 3×3 , заполненную по строкам координатами указанных векторов.

ТЕОРЕМА 6.4.1. *(о вычислении ПИВР) Пусть ППП Θ параметризована вектор-функцией $\mathbf{r} : \Omega \rightarrow \Theta$, где непрерывное поле единичных нормалей $\mathbf{n}(x, y, z)$ определяется формулой (6.5). Тогда*

$$\int \int_{\Theta} (\mathbf{f}(x, y, z), \mathbf{n}(x, y, z))dS = \pm \int \int_{\Omega} (\mathbf{f}, \mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v)dudv. \quad (6.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО немедленно следует из определения (6.1) ПИПР, определения (6.5) поля единичных нормалей и определения смешанного произведения:

$$\int \int_{\Theta} (\mathbf{f}(x, y, z), \mathbf{n}(x, y, z))dS =$$

$$\begin{aligned}
&= \pm \int \int_{\Omega} (\mathbf{f}, \frac{\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)}{|\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)|}) \cdot |\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)| \cdot dudv = \\
&= \pm \int \int_{\Omega} (\mathbf{f}, \mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v) dudv. \blacksquare
\end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 6.4.1. (о вычислении ПИВР в случае явного задания ПГП) Пусть ПГП Θ является графиком гладкой функции $z = \varphi(x, y)$, где $(x, y) \in \Omega$, а ориентирующее поле нормалей \mathbf{n} образует острый угол с осью Oz . Пусть поле $\mathbf{f}(x, y, z) = (0, 0, R(x, y, z))^T$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\int \int_{\Theta} (\mathbf{f}(x, y, z), \mathbf{n}(x, y, z)) dS = \\
&= \int \int_{\Theta} R(x, y, z) dx dy = \int \int_{\Omega} R(x, y, \varphi(x, y)) dx dy.
\end{aligned}$$

Доказательство. Воспользовавшись доказательством следствия 6.2.1, заполним определитель из формулы (6.7):

$$(\mathbf{a}, \mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & R(x, y, \varphi(x, y)) \\ 1 & 0 & \varphi'_x \\ 0 & 1 & \varphi'_y \end{pmatrix} = R(x, y, \varphi(x, y)).$$

Теперь убедимся, что поле нормалей, порожденное явным заданием поверхности, требуемое:

$$\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = (-\varphi'_x, -\varphi'_y, 1)^T \Rightarrow (\mathbf{k}, \mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y) = 1 > 0. \blacksquare$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.4.1. Описанный в следствии случай ориентации поверхности традиционно называют **интегрированием по верхней стороне** Θ^+ , а противоположную ориентацию называют **интегрированием по нижней стороне** Θ^- (рис. 6.7). В указанных обозначениях

$$\begin{aligned}
\int \int_{\Theta^+} R(x, y, z) dx dy &= - \int \int_{\Theta^-} R(x, y, z) dx dy = \\
&= \int \int_{\Omega} R(x, y, \varphi(x, y)) dx dy. \tag{6.8}
\end{aligned}$$

Находя ПИВР без проверки ориентации мы рискуем потерять знак. Проверку можно осуществить в любой точке поверхности. \square

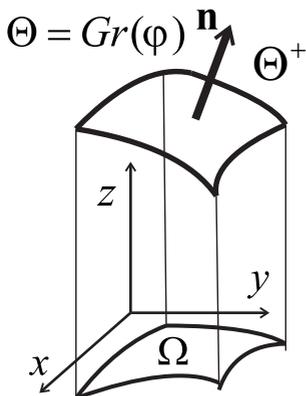


Рис. 6.7

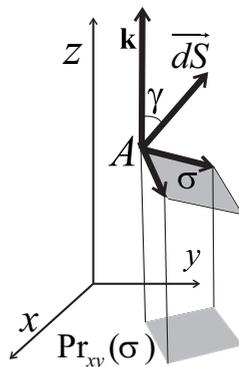


Рис. 6.8

ЗАМЕЧАНИЕ 6.4.2. (обозначение ПИВР) Общеупотребительным является еще одно символическое обозначение ПИВР:

$$\int \int_{\Theta} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy := \int \int_{\Theta} (\mathbf{f}, \mathbf{n}) dS.$$

Оно является не только исторически сложившимся, но имеет обобщение в теории интегрирования по ориентируемой поверхности произвольной размерности $n \in \mathbb{N}$. Ограничимся только объяснением происхождения этого обозначения. Пусть точка $A = \mathbf{r}(u, v) \in \Theta$, а $\sigma(A)$ – параллелограмм, построенный на касательных векторах $\mathbf{r}'_u du$ и $\mathbf{r}'_v dv$. Обозначим через α , β и γ углы, которые векторный дифференциал площади $\vec{dS}(A) = \pm(\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v) dudv$ образует с базисными векторами $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ соответственно (рис. 6.8). Тогда

$$(\mathbf{f}(A), \vec{dS}(A)) = P \cdot dS \cos \alpha + Q \cdot dS \cos \beta + R \cdot dS \cos \gamma.$$

Поскольку вектор $\vec{dS}(A) \perp T_A \Xi$, а базисные векторы $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ перпендикулярны координатным плоскостям $\{y, z\}$, $\{z, x\}$ и $\{x, y\}$ соответственно, то $\alpha(A), \beta(A), \gamma(A)$ – это двугранные углы между касательной плоскостью и соответствующими координатными плоскостями. Поэтому произведения $dS \cos \alpha, dS \cos \beta, dS \cos \gamma$ суть площади проекций параллелограмма σ на соответствующие координатные плоскости:

$$dS \cos \alpha = S(Pr_{yz}(\sigma)), \quad dS \cos \beta = S(Pr_{zx}(\sigma)), \quad dS \cos \gamma = S(Pr_{xy}(\sigma)).$$

Заменяв площади проекций на одноименные произведения дифференциалов $dydz, dzdx, dxdy$, мы лишь указали на соответствующую коор-

динату вектора \mathbf{f} . Отметим, что указание на ориентацию поверхности Θ в этом символическом обозначении ПИВР отсутствует. \square

Нам остается сделать последний шаг и дать

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.4.2. Пусть $\Pi = \cup_{i=1}^I \bar{\Theta}_i$ – кусочно-гладкой поверхностью. Положим, что

$$\int \int_{\Pi} (\mathbf{f}, d\vec{S}) := \sum_{i=1}^I \int \int_{\Theta_i} (\mathbf{f}, d\vec{S}). \quad \square \quad (6.9)$$

Можно показать, что в силу определения 6.1.2 КГП и определения 6.3.3 ориентации КГП, поверхностный интеграл второго рода на КГП: 1) не зависит от разбиения поверхности на куски, 2) обладает свойством аддитивности, 3) меняет знак при изменении ориентации поверхности.

Глава 7

Формула Остроградского-Гаусса

Формула Михаила Васильевича Остроградского (1801-1861) и Карла Фридриха Гаусса (1777-1855) получена ими независимо в первой четверти 19 века. Но впервые установлена за полвека до этого Лагранжем. Она является следующим после формулы Грина аналогом формулы Ньютона-Лейбница, т. е. связывает интегрирование по границе (трехмерной) области с интегрированием по самой области. Формула является ключевой в механике сплошных сред и теории поля.

7.1. Теорема Остроградского-Гаусса

Гамлет, перестань!

Ты повернул глаза зрачками в душу.

У. Шекспир - Б.Л. Пастернак

Введем в рассмотрение следующее понятие:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1.1. Пусть на области $U \subset \mathbb{R}^3$ задано гладкое векторное поле $\mathbf{f}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))^T$. Его **дивергенцией** называют числовую функцию

$$\operatorname{div} \mathbf{f} : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad \operatorname{div} \mathbf{f}(x, y, z) := \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}. \quad \boxtimes$$

ТЕОРЕМА 7.1.1. Пусть $\bar{G} \subset U \subset \mathbb{R}^3$ – замыкание ограниченной области, граница которой ∂G есть кусочно-гладкая замкнутая поверхность, ориентированная полем внешних нормалей $\mathbf{n}(x, y, z)$. Пусть векторное поле $\mathbf{f} \in C^1(U)$. Тогда поток этого поля через границу области ∂G равен интегралу по самой области от дивергенции поля:

$$\oiint_{\partial G} (\mathbf{f}, \mathbf{n}) dS = \iiint_G \operatorname{div} \mathbf{f} dV, \quad (7.1)$$

где dS – дифференциал площади поверхности ∂G , а $dV = dx dy dz$ – дифференциал объема. (Петля на обозначении ПИВР напоминает, что поверхность ∂G замкнутая.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай, когда замыкание \bar{G} элементарно относительно каждой оси (сравните с доказательством формулы Грина – теорема 5.2.1). Примерами областей, замыкания которых элементарны относительно всех осей, являются выпуклые области.

Прежде всего заметим, что требования, предъявленные к векторному полю \mathbf{f} и к области G гарантируют существование обоих интегралов в равенстве (7.1). Пусть G_z – ортогональная проекция множества G на плоскость $\{x, y\}$. Тогда

$$G = \{(x, y, z) : (x, y) \in G_z, \varphi(x, y) < z < \psi(x, y)\},$$

где φ и ψ – непрерывные функции на \bar{G}_z . Обозначим через $Gr(\varphi)$, $Gr(\psi)$ графики указанных функций. Согласно теореме 3.5.2 о повторном интеграле, формуле Ньютона-Лейбница и формуле (6.8),

$$\begin{aligned} \iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_{G_z} dx dy \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dz = \\ &= \iint_{G_z} R(x, y, \psi(x, y)) dx dy - \iint_{G_z} R(x, y, \varphi(x, y)) dx dy = \\ &= \iint_{Gr(\psi)^+} R(x, y, z) dx dy + \iint_{Gr(\varphi)^-} R(x, y, z) dx dy, \end{aligned}$$

где $Gr(\psi)^+$ верхняя, а $Gr(\varphi)^-$ нижняя стороны указанных графиков. Внешне ориентированная поверхность $\partial G = Gr(\psi)^+ + \cup Gr(\varphi)^- \cup Cyl_z$, где Cyl_z – цилиндрическая поверхность, образующие которой параллельны оси z . В произвольной точке $A \in Cyl_z$ вектор нормали $\mathbf{n}(A)$ к цилиндрической поверхности Cyl_z и вектор $\mathbf{f}_3(A) = (0, 0, R(A))^T$ перпендикулярны (рис. 7.1). Поэтому $\iint_{Cyl_z} (\mathbf{f}_3, \mathbf{n}) dS = \iint_{Cyl_z} R(x, y, z) dx dy = 0$. Окончательно получаем, что

$$\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \oiint_{\partial G} R(x, y, z) dx dy.$$

В силу элементарности \bar{G} относительно других осей, получаем равенства

$$\iiint_G \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \oiint_{\partial G} P(x, y, z) dy dz,$$

$$\iiint_G \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \oiint_{\partial G} R(x, y, z) dz dx.$$

Остается сложить полученные формулы и воспользоваться линейностью как тройного так и поверхностного интегралов.

Теперь рассмотрим случай, когда замыкание \bar{G} разбивается на конечное количество замыканий элементарных областей (сравните с завершением доказательства теоремы 5.2.1). Точнее, пусть $\bar{G} = \cup_{i=1}^I \bar{G}_i$, где замыкания \bar{G}_i элементарны по всем осям, не пересекаются по внутренностям, а пересечение границ $\partial_{ij} G := \partial G_i \cap \partial G_j$ (если оно не пусто) представляет собой КПП. Для каждой такого подмножества

$$\iiint_{G_i} \operatorname{div} \mathbf{f} dV = \oiint_{\partial G_i} (\mathbf{f}, \mathbf{n}) dS,$$

где поверхностный интеграл берется по внешней стороне границы ∂G_i . Суммируя, получаем:

$$\iiint_G \operatorname{div} \mathbf{f} dV = \sum_{i=1}^I \oiint_{\partial G_i} (\mathbf{f}, \mathbf{n}) dS.$$

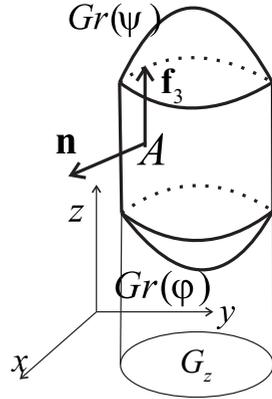


Рис. 7.1

В последней сумме интегралы по *общим* кускам границ $\partial_{ij}G$ берутся дважды с противоположными ориентациями. Поскольку ПИВР меняет знак при изменении ориентации поверхности, указанные слагаемые взаимно уничтожаются. В сумме остаются лишь те слагаемые, которые отвечают всем кускам внешне ориентированной границы ∂G . В силу аддитивности ПИВР, получаем

$$\sum_{i=1}^I \iint_{\partial G_i} (\mathbf{f}, \mathbf{n}) dS = \iint_{\partial G} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) dS.$$

Доказательство общего случая мы опускаем в виду его громоздкости. ■

Завершение доказательства теоремы 7.1.1 подсказывает, что требование замкнутости границы ∂G (т. е. ее линейной связности, см. определение 6.3.2) можно ослабить.

СЛЕДСТВИЕ 7.1.1. Пусть $U \subset \mathbb{R}^3$ – область, на которой определено гладкое векторное поле $\mathbf{f} \in C^1(U)$. Пусть множество G удовлетворяет следующим свойствам:

- 1) замыкание $\bar{G} \subset U \subset \mathbb{R}^3$;
- 2) замыкание $\bar{G} = \cup_{i=1}^I \bar{G}_i$, где G_i – области, ограниченные кусочно-гладкими замкнутыми поверхностями $\partial G_i = \cup_{j=1}^{J_i} \Theta_{ij}$ (Θ_{ij} – куски соответствующих границ ∂G_i);
- 3) для произвольных $i_1 \neq i_2$ замыкания \bar{G}_{i_1} и \bar{G}_{i_2} или не пересекаются, или их пересечение есть общий кусок границы $\Theta_{i_1 j_1} = \Theta_{i_2 j_2}$;
- 4) каждая граница ∂G_i ориентирована полем \mathbf{n} внешних нормалей.

Тогда поле \mathbf{n} ориентирует границу ∂G внешним образом и справедлива формула (7.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Граница ∂G есть объединение только тех кусков Θ_{ij} , которые не являются общими для каких-то двух границ ∂G_{i_1} и ∂G_{i_2} . На каждом таком куске уже задано поле \mathbf{n} внешних нормалей по отношению к G . Таким образом, граница ∂G ориентирована. Принимая во внимание, что общие куски ориентированы противоположным образом, и повторяя рассуждения из второй части доказательства теоремы 7.1.1 (теперь не для элементарных подмножеств, а для областей, ограниченных замкнутой поверхностью), мы получаем искомую формулу. ■

Задача 7.1.1. 1) Разбейте полноторий (бублик) на области, элементарные относительно всех осей.

2) Пусть \bar{Q} и $\bar{q} \subset Q$ два замкнутых куба с общим центром, ребра которых попарно параллельны (рис. 7.2). Разбейте разность $\bar{G} = \bar{Q} \setminus \bar{q}$ на замкнутые подмножества, ограниченные кусочно-гладкими замкнутыми поверхностями. Разбейте разность $G = \bar{Q} \setminus \bar{q}$ на элементарные относительно всех осей подмножества (указание на рис. 7.2).

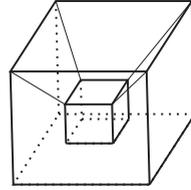


Рис. 7.2

3) Пусть $Ball(O, R)$ и $Ball(O, r)$ – открытые шары с общим центром O и радиусами $R > r > 0$. Разбейте замкнутое шаровое кольцо $\bar{G} = \overline{Ball(O, R)} \setminus \overline{Ball(O, r)}$ на замкнутые подмножества, ограниченные кусочно-гладкими замкнутыми поверхностями. Разбейте открытое шаровое кольцо $G = Ball(O, R) \setminus \overline{Ball(O, r)}$ на области, элементарные относительно всех осей.

Следствие 7.1.2. (нахождение объемов с помощью ПИВР) Объем (мера) области G , удовлетворяющей условиям теоремы 7.1.1, равен

$$V(G) = \mu(G) = \frac{1}{3} \oint_{\partial G} xdydz + ydzdx + zdx dy.$$

Задача 7.1.2. Докажите следствие 7.1.2.

7.2. Геометрический и физический смысл дивергенции

Отселе я вижу потоков рожденье
И первое грозных обвалов движенье.

А. С. Пушкин. Кавказ

Определение дивергенции дано нами в координатном виде. Возникает подозрение, что это понятие зависит от выбора системы координат. Оказывается, оно инвариантно относительно замены ПДСК, т. е. является геометрическим понятием.

ТЕОРЕМА 7.2.1. (геометрический смысл дивергенции) Пусть векторное поле $\mathbf{f} \in C^1(\text{Ball}(A, R))$, где $\text{Ball}(A, R)$ – открытый шар с центром в точке A радиуса R . Тогда

$$\text{div}\mathbf{f}(A) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\oint_{\partial\text{Ball}(A,r)} (\mathbf{f}, \mathbf{n})dS}{\mu(\text{Ball}(A, r))}. \quad (7.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя формулу (7.1) и п. 6(b) теоремы 3.3.1 (теорема о среднем), получаем

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\oint_{\partial\text{Ball}(A,r)} (\mathbf{a}, \mathbf{n})dS}{\mu(\text{Ball}(A, r))} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{div}\mathbf{f}(\tilde{A}(r)) \iiint_{\text{Ball}(A,r)} dV}{\mu(\text{Ball}(A, r))} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \text{div}\mathbf{f}(\tilde{A}(r)) = \text{div}\mathbf{f}(A), \end{aligned}$$

где $\tilde{A}(r) \in \text{Ball}(A, r)$. ■

СЛЕДСТВИЕ 7.2.1. (инвариантность определения 7.1.1) Дивергенция векторного поля не зависит от выбора прямоугольной декартовой системы координат (ПДСК).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поток векторного поля и мера множества – геометрические понятия, т. е. инвариантные относительно замены ПДСК. ■

ОБСУЖДЕНИЕ 7.2.1. 1) Формулу (7.2) можно проинтерпретировать так: дивергенция является производной потока по объему. Отсюда название: дивергенция (от латинского *divergere* – обнаруживать расхождение) показывает насколько *расходятся* (в смысле отличаются) в исследуемой точке входящий и исходящий потоки.

2) МЕХАНИЧЕСКИЙ СМЫСЛ дивергенции: если интерпретировать поле \mathbf{f} как поле скоростей несжимаемой жидкости, то поток поля через замкнутую поверхность ∂G есть объем жидкости, которая вытекает и втекает через ∂G за единицу времени. Отличие потока от нуля означает, что внутри, т. е. в области G , имеются **источники** и **стоки** жидкости. Следовательно, дивергенцию $\text{div}\mathbf{f}(A)$ можно трактовать как мощность источников (стоков) в точке A или как их точечную плотность.

3) Для электростатического поля справедлива теорема Гаусса: *дивергенция электростатического поля в точке равна плотности электрического заряда в этой точке, умноженному на 4π .*

4) Если $t(x, y, z)$ – скалярное поле температур, то векторное поле градиента $\mathbf{grad} t = (\partial t/\partial x, \partial t/\partial y, \partial t/\partial z)^T$ порождает поток тепла (тепловой энергии). Согласно закону Фурье (Жан Батист Жозеф Фурье, 1768 – 1830), *дивергенция поля $\mathbf{grad} t$ равна (с точностью до коэффициента) плотности источников (потребителей) тепла.* \square

7.3. Соленоидальные векторные поля

Речь его течет гладко, ровно,
как вода из водосточной трубы.

А.П. Чехов. Оратор

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.3.1. Векторное поле \mathbf{f} класса гладкости $C^1(U)$ на области $U \subset \mathbb{R}^3$ называется **соленоидальным** (или трубчатым в переводе с греческого), если поток через любую замкнутую кусочно-гладкую поверхность $\partial G \subset U$ равен нулю:

$$\oiint_{\partial G} (\mathbf{f}(x, y, z), \mathbf{n}(x, y, z)) dS = 0. \quad \square$$

Из определения соленоидальности и физического смысла дивергенции следует, что речь идет о полях вне источников (зарядов). Несолоноидальное поле и возможный вид соленоидального поля даны на рис. 7.3. Визуально эти поля не всегда различимы. Важно уметь различать их аналитически.

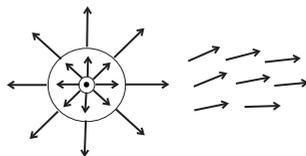


Рис. 7.3

По аналогии с односвязностью плоской области дадим

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.3.2. Область $U \subset \mathbb{R}^3$ называется **объемно односвязной**, если для любой замкнутой поверхности $\partial G \subset U$ внутренность $G \subset U$. \square

Образно говоря, объемно односвязная область не содержит *внутренних* полостей.

ПРИМЕРЫ 7.3.1. Объемно односвязными являются шар и полноторий. Шаровое кольцо и “сыр с дырками” не являются объемно односвязными областями.

ТЕОРЕМА 7.3.1. (критерий соленоидальности) Чтобы векторное поле \mathbf{f} класса гладкости $C^1(U)$ было соленоидальным на области $U \subset \mathbb{R}^3$ необходимо, а в случае объемной односвязности U и достаточно, чтобы его дивергенция равнялась нулю:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} \text{ соленоидально} & \iff \\ & \text{объемно односв. обл. } U \\ \operatorname{div} \mathbf{f}(x, y, z) = 0 & \text{ для всех } (x, y, z) \in U. \end{aligned}$$

Доказательство необходимости следует непосредственно из определения 7.3.1 и теоремы 7.2.1.

Если дивергенция в каждой точке равна нулю, то, согласно теореме 7.1.1 и определению 7.3.2 объемной односвязности, поток через любую замкнутую поверхность ∂G равен нулю. ■

СЛЕДСТВИЕ 7.3.1. (о локальной соленоидальности) Если дивергенция гладкого поля на области U равна нулю, то оно соленоидально на каждом шаре, принадлежащем U .

ЗАДАЧА 7.3.1. Докажите следствие 7.3.1.

ПРИМЕР 7.3.1. несоленоидального векторного поля, дивергенция которого равна нулю. Рассмотрим напряженность точечного электрического заряда, расположенного в начале координат. Это векторное поле, которое с точностью до коэффициента равно $\mathbf{f}(A) = (1/|\mathbf{r}|^3) \cdot \mathbf{r}$, где $\mathbf{r}(A) = \overrightarrow{OA} = (x, y, z)^T$. Заметим, что в начале координат, где расположен заряд, поле не определено. Возьмем шаровое кольцо $G := \{A \in \mathbb{R}^3 : 0 < R_1 < |\overrightarrow{OA}| < R_2\}$, которое является объемом односвязной областью. Для произвольного $R \in (R_1, R_2)$ сфера $S_R^2 = \{A : |\overrightarrow{OA}| = R\} \subset G$. Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathbf{r}_x}{|\mathbf{r}|^3} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) = \frac{-2x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}},$$

то $\operatorname{div} \mathbf{f}(A) = 0$. Однако поток через сферу, принадлежащую шаровому слою, равен

$$\iint_{S_R^2} (\mathbf{f}, \mathbf{n}) dS = \iint_{S_R^2} \left(\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}, \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \right) dS = \iint_{S_R^2} \frac{dS}{|\mathbf{r}|^2} = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi \neq 0.$$

Заметим, что поток через границу шарового слоя

$$\iint_{\partial G} (\mathbf{f}, \mathbf{n}) dS = \iint_{(S_{R_1}^2)^-} (\mathbf{f}, \mathbf{n}) dS + \iint_{(S_{R_2}^2)^+} (\mathbf{f}, \mathbf{n}) dS = -4\pi + 4\pi = 0,$$

что согласуется с теоремой 7.1.1 Остроградского-Гаусса.

ЗАДАЧА 7.3.2. Проверьте, что центральное поле $\mathbf{f}(A) = (1/|\mathbf{r}|^\alpha) \cdot \mathbf{r}$ имеет нулевую дивергенцию только в случае $\alpha = 3$.

Объясним происхождение термина “трубчатое” поле. Пусть $\gamma \subset U$ есть такая гладкая петля, что в каждой точке $A \in \gamma$ вектор $\mathbf{f}(A) \notin T_A\gamma$, т. е. петля НЕ касается векторного поля ни в одной своей точке (в частности, $\mathbf{f}(A) \neq \mathbf{0}$). Из каждой точки $A \in \gamma$ вдоль поля \mathbf{f} выпустим **фазовую кривую**, т. е. такую кривую $\mathbf{r}(t, A)$, что $\mathbf{r}(0, A) = A$ и $\mathbf{r}'_t(t, A) = \mathbf{f}(\mathbf{r}(t, A))$ (рис. 7.4). (Существование и единственность такой кривой доказывается в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений.)

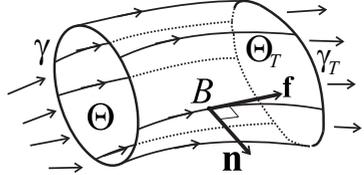


Рис. 7.4

Возьмем фиксированное значение $T > 0$, для которого определено $\mathbf{r}(T, A)$ для всех $A \in \gamma$. Объединение построенных фазовых кривых образует **фазовую трубку**

$$Cyl(\mathbf{f}; 0, T) := \bigcup_{t \in [0, T], A \in \gamma} \{\mathbf{r}(t, A)\}.$$

В каждой точке $B = \mathbf{r}(t, A) \in Cyl(\mathbf{f}; 0, T)$ вектор производной принадлежит касательной плоскости: $\mathbf{r}'_t(t, A) \in T_B Cyl(\mathbf{f}; 0, T)$. Поэтому единичный вектор нормали $\mathbf{n}(B)$ к фазовой трубке ортогонален вектору $\mathbf{r}'_t(t, A) = \mathbf{f}(\mathbf{r}(t, A)) = \mathbf{f}(B)$.

Множество всех точек $\gamma_T = \cup_{A \in \gamma} \{\mathbf{r}(T, A)\}$ образует вторую петлю. На обе петли натянем гладкие пленки Θ и Θ_T соответственно: $\partial\Theta = \gamma$, $\partial\Theta_T = \gamma_T$. Объединение $S := Cyl(\mathbf{f}; 0, T) \cup \Theta \cup \Theta_T$ является замкнутой КГП, который мы ориентируем полем внешних нормалей. В силу соленоидальности поля \mathbf{f} , поток

$$\oint_S (\mathbf{f}, \mathbf{n}) dS = 0 \Leftrightarrow \oint_{Cyl(\mathbf{f}; 0, T)} (\mathbf{f}, \mathbf{n}) dS + \iint_{\Theta^+} (\mathbf{f}, \mathbf{n}) dS + \iint_{\Theta_T^+} (\mathbf{f}, \mathbf{n}) dS = 0.$$

Но в каждой точке $B = \mathbf{r}(t, A) \in Cyl(\mathbf{f}; 0, T)$, как было отмечено, выполнено условие ортогональности $(\mathbf{f}(B), \mathbf{n}(B)) = 0$. Поэтому $\oint_{Cyl(\mathbf{f}; 0, T)} (\mathbf{f}, \mathbf{n}) dS = 0$. Значит, через боковую поверхность трубки поток равен нулю. Теперь, поменяв внешнюю нормаль на Θ на внут-

ренною, мы получаем:

$$\oiint_{\Theta^-} (\mathbf{f}, \mathbf{n}) dS = \oiint_{\Theta^+} (\mathbf{f}, \mathbf{n}) dS.$$

Вывод: поток, протекающий за единицу времени через сечение трубки, порожденной соленоидальным полем, один и тот же для всех сечений этой трубки.

Глава 8

Формула Стокса

Следующая в ряду формул Ньютона-Лейбница, Грина и Остроградского-Гаусса формула Стокса связывает интеграл по замкнутому контуру с интегралом по поверхности (пленке), натянутой на этот контур. Она носит имя сэра Джорджа Габриеля Стокса (1819 — 1903), который впервые ввел ее в курс математического анализа. Но ее автором является Уильям Томсон, барон Кельвин (1824 — 1907).

8.1. Теорема Стокса

Начнем с терминологии: криволинейный интеграл второго рода по замкнутой кривой называется **циркуляцией**. Мы уже имели дело с циркуляцией в теореме Грина.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.1.1. Пусть на области $U \subset \mathbb{R}^3$ задано гладкое векторное поле $\mathbf{f}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))^T$. Его **ротором** называют векторное поле, координаты которого вычисляются с помощью символического определителя:

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \operatorname{rot} \mathbf{f} := \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$
$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \quad \boxtimes \quad (8.1)$$

ТЕОРЕМА 8.1.1. Пусть $\bar{\Theta} \subset U \subset \mathbb{R}^3$ — кусочно-гладкая поверхность с кусочно-гладким краем $\partial\Theta$, причем ориентация поверхности

полем единичных нормалей $\mathbf{n}(x, y, z)$ согласована с ориентацией края. Пусть векторное поле \mathbf{f} принадлежит классу гладкости $C^1(U)$. Тогда циркуляция поля \mathbf{f} по кривой $\partial\Theta$ равна потоку поля $\mathit{rot}\mathbf{f}$ через поверхность Θ , т. е.

$$\oint_{\partial\Theta} (\mathbf{f}, \vec{\tau}) ds = \iint_{\Theta} (\mathit{rot}\mathbf{f}, \mathbf{n}) dS, \quad (8.2)$$

где $\vec{\tau}(x, y, z)$ – поле ориентирующих единичных касательных к кривой $\partial\Theta$, ds – дифференциал длины дуги кривой $\partial\Theta$, dS – дифференциал площади поверхности Θ . (Петля на обозначении КИВР напоминает, что кривая $\partial\Theta$, будучи краем, есть объединение замкнутых кривых, см. 6.1.1.)

ОБСУЖДЕНИЕ 8.1.1. Теорема Стокса является обобщением теоремы Грина. Отметим, что в теоремах Грина и Остроградского-Гаусса интегрирование по области заменялось интегрированием по ее границе; в теореме Стокса интегрирование по поверхности заменяется интегрированием по краю. Именно теорема Стокса явилась основой для дальнейшего обобщения на случай поверхности произвольной размерности n , принадлежащей пространству произвольной размерности $p > n$. Также отметим, что на фиксированную замкнутую кривую $\partial\Theta$ может быть натянута другая пленка $\hat{\Theta}$ (т. е. $\partial\Theta = \partial\hat{\Theta}$), но при этом поток ротора $\mathit{rot}\mathbf{f}$ не изменяется. \square

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть пока $\bar{\Theta} \subset U \subset \mathbb{R}^3$ – простая гладкая поверхность с кусочно-гладким краем $\partial\Theta$. Доказательство будет дано только для случая, когда поверхность $\bar{\Theta}$ имеет класс гладкости два. Т. е. существуют плоские области $\Omega \subset G \subset \mathbb{R}^2$ и отображение, задаваемое радиус-вектором

$$\mathbf{r} : G \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in C^2(G),$$

которым параметризована поверхность $\bar{\Theta} = \mathbf{r}(\bar{\Omega})$.

Мы рассмотрим три векторных поля: $\mathbf{f}_1 = (P, 0, 0)^T$, $\mathbf{f}_2 = (0, Q, 0)^T$, $\mathbf{f}_3 = (0, 0, R)^T$. Для каждого из них докажем формулу Стокса, после чего сложим полученные равенства. Доказательство осуществляется в три этапа: 1) заменяем циркуляцию по пространственной кривой $\partial\Theta$ на циркуляцию по плоской кривой $\partial\Omega$; 2) воспользовавшись формулой Грина, заменяем циркуляцию по $\partial\Omega$ интегрированием по плоской области Ω ; 3) “узнаем” в полученном интеграле по Ω ПИВР от ротора по Θ .

Без ограничения общности можно считать, что в \mathbb{R}^2 система координат (u, v) правая, а поверхность Θ ориентирована семейством единичных нормалей $\mathbf{n} = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v / |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|$. Пусть кусочно гладкий край $\partial\Omega$ параметризован против часовой стрелки вектор-функцией $(u(t), v(t))^T$ ($t \in [0, T]$). Тогда край $\partial\Theta$ параметризован вектор-функцией $\mathbf{r}(u(t), v(t)) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t)))^T$. Поэтому

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Theta} (\mathbf{f}_1, \vec{\tau}) ds &= \oint_{\partial\Theta} P dx = \int_0^T P(\mathbf{r}(u(t), v(t))) (x(u(t), v(t)))'_t dt = \\ &= \int_0^T P(\mathbf{r}(u(t), v(t))) (x'_u u'_t + x'_v v'_t) dt = \oint_{\partial\Omega} P(\mathbf{r}(u, v)) x'_u du + P(\mathbf{r}(u, v)) x'_v dv. \end{aligned}$$

Итак, мы заменили циркуляцию поля $\mathbf{f}_1 = (P, 0, 0)^T \subset \mathbf{V}^3$ по $\partial\Theta$ на циркуляцию плоского поля $\hat{\mathbf{f}}_1 := (Px'_u, Px'_v)^T$ по $\partial\Omega$.

Применим формулу Грина (5.2):

$$\begin{aligned} &\oint_{\partial\Omega} P(\mathbf{r}(u, v)) x'_u du + P(\mathbf{r}(u, v)) x'_v dv = \\ &= \iint_{\Omega} (P(\mathbf{r}(u, v)) x'_v)'_u - (P(\mathbf{r}(u, v)) x'_u)'_v dudv. \end{aligned}$$

Преобразуем подынтегральное выражение, воспользовавшись совпадением смешанных производных (вот для чего понадобилась гладкость класса C^2):

$$\begin{aligned} &(P(\mathbf{r}(u, v)) x'_v)'_u - (P(\mathbf{r}(u, v)) x'_u)'_v = \\ &= P(\mathbf{r}(u, v))'_u x'_v + Px''_{uv} - P(\mathbf{r}(u, v))'_v x'_u - Px''_{vu} = \\ &(P'_x x'_u + P'_y y'_u + P'_z z'_u) x'_v - (P'_x x'_v + P'_y y'_v + P'_z z'_v) x'_u = \\ &= -P'_y (x'_u y'_v - x'_v y'_u) + P'_z (x'_v z'_u - x'_u z'_v) = -P'_y \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} + P'_z \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Теперь, после второго этапа, получаем:

$$\oint_{\partial\Theta} (\mathbf{f}_1, \vec{\tau}) ds = \iint_{\Omega} \left(-P'_y \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} + P'_z \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix} \right) dudv.$$

С другой стороны, в силу определения 8.1.1 ротора векторного поля,

$$\operatorname{rot} \mathbf{f}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & 0 & 0 \end{vmatrix} = P_z \mathbf{j} - P_y \mathbf{k}.$$

Поэтому из формулы (6.7) вычисления ПИВР следует

$$\begin{aligned} \iint_{\Theta} (\operatorname{rot} \mathbf{f}_1, \mathbf{n}) dS &= \iint_{\Omega} (\operatorname{rot} \mathbf{f}_1, \mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v) dudv = \iint_{\Omega} \begin{vmatrix} 0 & P'_z & -P'_y \\ x'_u & y'_u & z_u \\ x'_v & x'_v & x'_v \end{vmatrix} dudv = \\ &= \iint_{\Omega} \left(-P'_y \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} + P'_z \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix} \right) dudv, \end{aligned}$$

что совпадает с результатом преобразований после второго этапа.

Для поля \mathbf{f}_1 справедливость формулы установлена. Аналогично доказывается формула для полей \mathbf{f}_2 и \mathbf{f}_3 . Остается сложить полученные формулы и воспользоваться линейностью операций скалярного и векторного произведений по каждому сомножителю и линейностью интегрирования относительно подынтегральной функции.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.1.1. Чтобы доказать теорему в предположении, что поверхность Θ только класса гладкости C^1 , нужно аппроксимировать (приблизить) Θ пленками Θ_n класса C^2 с тем же краем $\partial\Theta$ и перейти к пределу $\Theta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Theta$. Поскольку мы пока не владеем методами теории аппроксимации, доказательство опускаем. \square

Доказательство теоремы для кусочно-гладкой поверхности осуществляется по тому же принципу сложения *противоориентированных* слагаемых, что и доказательства теорем Грина 5.2.1 и Остроградского-Гаусса 7.1.1. Пусть КГП Θ составлена из конечного количества ПГП – кусков Θ_i . Тогда для каждого куска справедлива формула Стокса. Складывая все равенства, справа мы получим, в силу определения (6.9),

$$\sum_{i=1}^I \iint_{\Theta_i} (\operatorname{rot} \mathbf{f}, \mathbf{n}) dS = \iint_{\Theta} (\operatorname{rot} \mathbf{f}, \mathbf{n}) dS$$

поток ротора через всю поверхность Θ . В сумме криволинейных интегралов слева интегралы по *общим* кускам границ $\partial_{ij}\Theta$ берутся дважды с противоположными ориентациями. Поскольку КИВР меняет

знак при изменении ориентации кривой, указанные слагаемые взаимно уничтожаются. В сумме остаются лишь те слагаемые, которые отвечают всем кускам ориентированной границы $\partial\Theta$. В силу аддитивности КИВР, получаем

$$\sum_{i=1}^I \oint_{\partial\Theta_i} (\mathbf{f}, \vec{\tau}) ds = \oint_{\partial\Theta} (\mathbf{f}, \vec{\tau}) ds. \blacksquare$$

8.2. Геометрический и физический смысл ротора

Буря мглою небо кроет,
Вихри снежные крутя

А.С. Пушкин. Зимний вечер

Как и дивергенция, определение ротора дано нами в координатном виде. Однако это геометрическое понятие:

ТЕОРЕМА 8.2.1. Пусть векторное поле $\mathbf{f} \in C^1(\text{Ball}(A, R))$, где $\text{Ball}(A, R)$ – открытый шар с центром в точке A радиуса R . Пусть \mathbf{n} – фиксированный единичный вектор, $\text{Circ}(A, r, \mathbf{n})$ – круг с центром в точке A , радиуса r , лежащий в плоскости перпендикулярной вектору \mathbf{n} (рис. 8.1).

Тогда в точке A проекция ротора на направление \mathbf{n} есть предел:

$$(\text{rot}\mathbf{f}(A), \mathbf{n}) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\oint_{\partial\text{Circ}(A, r, \mathbf{n})} (\mathbf{f}, \vec{\tau}) ds}{\mu(\text{Circ}(A, r, \mathbf{n}))}, \quad (8.3)$$

где окружность $\partial\text{Circ}(A, r, \mathbf{n})$ ориентирована согласованно с вектором \mathbf{n} , а мера (площадь) круга $\mu(\text{Circ}(A, r, \mathbf{n})) = \pi r^2$.

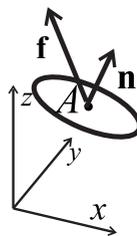


Рис. 8.1

ОБСУЖДЕНИЕ 8.2.1. Формулу (8.3) можно понимать так: проекция ротора поля \mathbf{f} на направление \mathbf{n} является производной циркуляции поля по малой петле, перпендикулярной \mathbf{n} , по площади, которую ограничивает эта петля. Если \mathbf{f} – поле скорости течения жидкости,

то $\text{rot} \mathbf{f}$ – вектор, пропорциональный вектору *угловой* скорости бесконечно малой частицы сплошной среды. Отсюда название: ротор от латинского *roto* – вращаю, или в старой терминологии **вихрь**. \square

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя формулу (8.2) и теорему о среднем 3.5 п. 6(b), получаем

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\oint_{\text{Circ}(A, r, \mathbf{n})} (\mathbf{f}, \vec{\tau}) ds}{\mu(\text{Circ}(A, r, \mathbf{n}))} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{(\text{rot} \mathbf{f}(\tilde{A}(r)), \mathbf{n}) \iint_{\text{Circ}(A, r, \mathbf{n})} dS}{\mu(\text{Circ}(A, r, \mathbf{n}))} =$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} (\text{rot} \mathbf{f}(\tilde{A}(r)), \mathbf{n}) = (\text{rot} \mathbf{f}(A), \mathbf{n}), \text{ где } \tilde{A}(r) \in \text{Circ}(A, r, \mathbf{n}). \blacksquare$$

СЛЕДСТВИЕ 8.2.1. (*инвариантность определения 8.1.1*) Ротор векторного поля не зависит от выбора прямоугольной декартовой системы координат.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Циркуляция векторного поля и мера множества, как было доказано, инвариантны относительно замены ПДСК. В силу формулы (8.3), этим же свойством обладает ротор. \blacksquare

8.3. Потенциальные векторные поля

Изучая понятие производной для числовых функций одной переменной, мы выяснили, что произвольная *непрерывная* на (a, b) функция $f(x)$ является производной другой функции: существует *первообразная* $F \in C^1(a, b)$, для которой $F'(x) = f(x)$; все первообразные имеют вид $F(x, C) = \int_{x_0}^x f(t) dt + C$, где $x_0 \in (a, b)$ – произвольная фиксированная точка, C – произвольная постоянная. В силу топологических причин этот вывод НЕ справедлив для функции нескольких переменных. Поскольку транспонирование производной функции $u(x, y, z)$ является вектором $(u')^T = \text{grad} u$, возникает важный вопрос: каковы условия, при которых векторное поле является полем градиента некоторой функции. Прежде всего нам потребуется

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.3.1. Пусть $U \subset \mathbb{R}^3$ – область, функция $u \in C^1(U)$, векторное поле $\mathbf{f} = (P, Q, R)^T \in C^0(U)$. Функция u называется **потенциалом** поля \mathbf{f} , если $\text{grad} u = \mathbf{f}$, т. е. $\partial u / \partial x = P$, $\partial u / \partial y = Q$, $\partial u / \partial z = R$. (В случае двух переменных останется два условия.) Само векторное поле в указанном случае называется **потенциальным**. \boxtimes

ТЕОРЕМА 8.3.1. (глобальный критерий существования потенциала) Пусть векторное поле $\mathbf{f} = (P, Q, R)^T \in C^0(U)$ непрерывно в некоторой области U . Следующие утверждения равносильны:

- 1) Циркуляция поля по любой замкнутой кусочно-гладкой кривой $\gamma \subset U$ (возможно, с самопересечениями) равна нулю, т. е.

$$\oint_{\gamma} (\mathbf{f}, ds) = \int_0^T (\mathbf{f}(\mathbf{r}(t)), \mathbf{r}'(t)) dt = 0,$$

где \mathbf{r} – кусочно-гладкая вектор-функция, удовлетворяющая условию периодичности $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(T)$ (рис. 8.2).

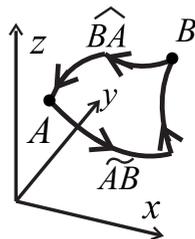


Рис. 8.2

- 2) Для произвольных точек $A, B \in U$ интеграл $\int_{\widehat{AB}} (\mathbf{f}, ds)$ НЕ зависит от кусочно-гладкой кривой $\widehat{AB} \subset U$ (возможно, с самопересечениями), а зависит только от самих точек A и B .
- 3) Векторное поле \mathbf{f} потенциально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. будет дано случая, когда у рассматриваемых кривых нет самопересечений.

1 \Rightarrow 2. Во-первых заметим, что, в силу определения области, существует непрерывная кривая, соединяющая произвольные точки $A, B \in U$ и принадлежащая U . Методами теории аппроксимации можно доказать, что существует бесконечное множество кусочно-гладких (и даже гладких) кривых, соединяющих точки A и B (доказательство будет дано позже). Поэтому формулировка п. 2 корректна. Пусть \widetilde{AB} и \widehat{AB} две такие ориентированные кривые. Обозначим через \widehat{BA} кривую \widehat{AB} с противоположной ориентацией. Тогда кривая $\gamma := \widetilde{AB} \cup \widehat{BA}$ является замкнутой и, в силу аддитивности КИВР, справедливо:

$$0 = \oint_{\gamma} (\mathbf{f}, ds) = \int_{\widetilde{AB}} + \int_{\widehat{BA}} = \int_{\widetilde{AB}} - \int_{\widehat{AB}},$$

что доказывает утверждение.

2 \Rightarrow 3. Мы предъявим функцию, которая является потенциалом. Пусть $A(x_0, y_0, z_0) \in U$ – фиксированная точка, $B(x, y, z) \in U$ – произвольная, $\widehat{AB} \subset U$ – произвольная кусочно-гладкая кривая, которая

их соединяет. В условиях п. 2, независимо от выбора кривой \widetilde{AB} , корректно определена функция

$$u : U \rightarrow \mathbb{R}, \forall B \in U \text{ значение } u(B) := \int_{\widetilde{AB}} (\mathbf{f}, d\mathbf{s}). \quad (8.4)$$

Покажем, что она дифференцируема на U и в произвольной точке $B \in U$ справедливо $\mathbf{grad}u(B) = \mathbf{f}(B)$. С этой целью докажем существование частной производной $\partial u(B)/\partial x$. В силу открытости U , существует такое $r = r(B) > 0$, что шар $\text{Ball}(B, r) \subset U$. Если модуль возмущения $|\Delta x| < r$, тогда точка $D(x + \Delta x, y, z) \in U$ вместе с отрезком $[BD]$ (рис. 8.3). Поэтому предел

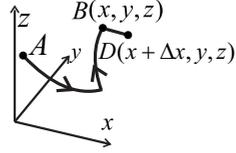


Рис. 8.3

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y, z) - u(x, y, z)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_{\widetilde{AD}} - \int_{\widetilde{AB}}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_{[BD]}}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} (\mathbf{f}(x + s, y, z), \mathbf{i}) ds}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x + \xi, y, z) \Delta x}{\Delta x} = P(x, y, z). \end{aligned}$$

Мы воспользовались аддитивностью интеграла, п. 2, теоремой о среднем (ξ лежит строго между x и $x + \Delta x$) и непрерывностью функции P . Следовательно, $\partial u(B)/\partial x = P(B)$. Аналогично $\partial u(B)/\partial y = Q(B)$, $\partial u(B)/\partial z = R(B)$. Поскольку функции P, Q, R непрерывны, то утверждение полностью доказано.

$3 \Rightarrow 1$. В силу потенциальности поля $\mathbf{f} = (P, Q, R)^T$, существует функция $u \in C^1(U)$, для которой

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = R.$$

Поэтому для произвольной параметризации $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$ циркуляция

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} (\mathbf{f}, d\mathbf{s}) &= \int_0^T (\mathbf{a}(\mathbf{r}(t)), \mathbf{r}'(t)) dt = \int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial u}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial u}{\partial z} z'(t) \right) dt = \\ &= \int_0^T (u(\mathbf{r}(t)))'_t dt = u(\mathbf{r}(T)) - u(\mathbf{r}(0)) = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Теперь мы можем дать

ТЕОРЕМА 8.3.2. (описание всех потенциалов) При выполнении любого из трех условий теоремы 8.3.1 справедливы следующие утверждения:

- 1) Для любой точки $A \in U$ функция (8.4) является потенциалом.
- 2) Для любого потенциала $u = u(A)$ поля \mathbf{f} имеет место формула Ньютона-Лейбница для КИВР:

$$\int_{\widehat{AB}} (\mathbf{f}, d\mathbf{s}) = u(B) - u(A).$$

- 3) Любые два потенциала отличаются на константу, т. е. все потенциалы описывает формула

$$u(B) := \int_{\widehat{AB}} (\mathbf{f}, d\mathbf{s}) + C,$$

где C – произвольная постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО п. 1 содержится в доказательстве п. 2 теоремы 8.3.1. Доказательство п. 2 осуществляется по той же схеме, что и доказательство п. 3 теоремы 8.3.1:

$$\int_{\widehat{AB}} (\mathbf{f}, d\mathbf{s}) = \int_{\alpha}^{\beta} (u(\mathbf{r}(t)))'_t dt = u(\mathbf{r}(\beta)) - u(\mathbf{r}(\alpha)) = u(B) - u(A).$$

Если u и v – два потенциала одного поля, то, в силу предыдущего пункта,

$$\int_{\widehat{AB}} (\mathbf{f}, d\mathbf{s}) = u(B) - u(A) = v(B) - v(A).$$

Значит, разность $u(B) - v(B) = u(A) - v(A) = \text{const} = C$ не зависит от точки $B \in U$. ■

8.4. Безвихревые векторные поля

Критерии потенциальности, сформулированные в пп. 1 и 2 теоремы 8.3.1 трудно проверяемые. Оказывается, в условиях гладкости поля \mathbf{f} проверить потенциальность поля можно с помощью локальной характеристики (а именно $\text{rot}\mathbf{f}$) и одного глобального топологического свойства области U . Этот подход аналогичен применению дивергенции и объемной односвязности при исследовании соленоидальности поля. Нам потребуется два определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.4.1. Векторное поле $f \in C^1(G)$ называется **безвихревым** на U , если тождественно $\text{rot}f(A) \equiv \mathbf{0}$ для любой точки $A \in U$. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.4.2. Область $U \subset \mathbb{R}^3$ называется **поверхностно односвязной**, если для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой $\gamma \subset U$ существует кусочно-гладкая поверхность $\Theta \subset U$, краем которой является кривая γ . \square

Образно говоря, поверхностно односвязная область вместе с любой своей петлей содержит некоторую пленку (не обязательно все), натянутую на эту петлю. Или иначе, поверхностно односвязная область не имеет *сквозных* отверстий, т. е. дырок.

ПРИМЕРЫ 8.4.1. поверхностно односвязных областей: пространство, из которого удалили точку или шар, сам шар, шаровое кольцо. Пространство, из которого удалили прямую (но не плоскость), или удалили окружность, или удалили полноторий, сам полноторий – не являются поверхностно односвязными областями (рис. 8.4 - 8.6, сравните объемно односвязные и поверхностно односвязные области).

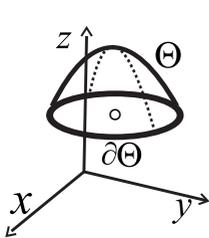


Рис. 8.4

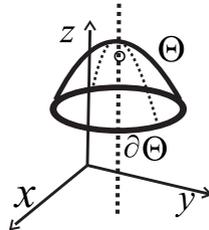


Рис. 8.5

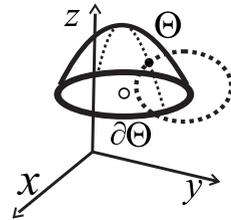


Рис. 8.6

ЗАМЕЧАНИЕ 8.4.1. Определение 8.4.2 нуждается в доказательстве корректности, а именно: у любой замкнутой КГК существует хотя бы одна кусочно-гладкая поверхность, для которой эта кривая является краем (т. е. доказательство теоремы типа Жордана). Попросту говоря: на любую петлю можно натянуть пленку, в чем мы убеждаемся, поместив проволочный контур в мыльную воду. Мы не будем доказывать это утверждение. \square

ТЕОРЕМА 8.4.1. (критерий потенциальности) Чтобы векторное поле f класса гладкости $C^1(U)$ было потенциальным на области

$U \subset \mathbb{R}^3$ необходимо, а в случае поверхностной односвязности U и достаточно, чтобы оно было безвихревым:

$$\mathbf{f} \text{ потенциально} \iff \forall A(x, y, z) \in U \hookrightarrow \operatorname{rot} \mathbf{f}(x, y, z) = \mathbf{0}.$$

U поверхн. односв.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО необходимости следует непосредственно из п. 1 теоремы 8.3.1 и теоремы 8.2.1 о геометрическом смысле ротора.

Пусть поле безвихревое. В силу п. 1 теоремы 8.3.1 для доказательства потенциальности достаточно проверить, что циркуляция по любой замкнутой кусочно-гладкой кривой (возможно с самопересечениями) равна нулю. Ограничимся случаем кривой γ без самопересечений. Из поверхностной односвязности следует, что существует кусочно-гладкая поверхность $\Theta \subset U$, для которой $\partial\Theta = \gamma$. Из формулы Стокса (8.2) и безвихревости поля следует, что циркуляция по γ равна нулю. ■

СЛЕДСТВИЕ 8.4.1. (о локальной потенциальности) Если гладкое поле безвихревое на области U , то оно потенциально на каждом шаре, принадлежащем U .

ЗАДАЧА 8.4.1. Докажите следствие 8.4.1.

ПРИМЕР 8.4.1. безвихревого, но непотенциального векторного поля. Рассмотрим поле $\mathbf{f} = (-y/(x^2 + y^2), x/(x^2 + y^2), 0)$ на толстостенном цилиндре $U = \{1 < x^2 + y^2 < 9, z \in \mathbb{R}\}$, который является поверхностно неодносвязной областью. На U ротор

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

Но циркуляция по окружности $S^1 = \{\mathbf{r}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 0), t \in [0, 2\pi]\} \subset U$ равна

$$\oint_{S^1} (\mathbf{f}, d\mathbf{r}) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-2 \sin t}{4} \cdot (-1) 2 \sin t + \frac{2 \cos t}{4} \cdot 2 \cos t \right) dt = 2\pi \neq 0.$$

Выпишем как выглядят условия потенциальности на плоскости. Пусть на области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ задано непрерывное векторное поле $\mathbf{f} = (P(x, y), Q(x, y))^T$. Содержание теорем 8.3.1 и 8.3.2 переносится на него без изменений. Теорема 8.4.1 получает следующую переформулировку:

ТЕОРЕМА 8.4.2. (критерий потенциальности плоского поля)
 Чтобы векторное поле $(P, Q) \in C^1(\Omega)$ было потенциальным на области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ необходимо, а в случае односвязности Ω и достаточно, чтобы оно было безвихревым в следующем смысле:

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} := \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 0 \text{ для всех } (x, y) \in \Omega. \quad (8.5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 8.4.2. Теорема является частным случаем теоремы 8.4.1, если положить в ней $P(x, y, z) = P(x, y)$, $Q(x, y, z) = Q(x, y)$, $R(x, y, z) \equiv 0$. \square

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если поле \mathbf{f} потенциально, то существует функция $u \in C^2(\Omega)$, для которой $P(x, y) = u'_x$, $Q(x, y) = u'_y$ при всех $(x, y) \in \Omega$. Следовательно смешанные производные второго порядка функции u существуют и совпадают, т.е. $P'_y = u''_{xy} = u''_{yx} = Q'_x$. Значит, условие (8.5) выполнено.

Пусть справедливо (8.5). В силу п. 1 теоремы 8.3.1, для доказательства потенциальности достаточно проверить, что циркуляция по любой замкнутой кусочно-гладкой кривой γ нулевая. Из односвязности следует, что внутренность $\operatorname{Int}(\gamma)$ принадлежит области Ω . Поэтому можно воспользоваться формулой Грина (5.2):

$$\oint_{\gamma} (\mathbf{f}, d\mathbf{r}) = \oint_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_{\operatorname{Int}(\gamma)} \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy = 0. \blacksquare$$

8.5. Элементы теории поля

Ранее мы ввели понятия скалярного $u = u(x, y, z)$ и векторного $\mathbf{f}(x, y, z)$ полей, как отображений из *точечной* области $U \subset \mathbb{R}^3$ в числовую прямую и в трехмерное *векторное* пространство соответственно. Было рекомендовано в каждой точке $A(x, y, z) \in U$ *откладывать* вектор $\mathbf{f}(A)$, порожденный именно этой точкой. Эта наивная рекомендация была призвана помочь отличать “настоящие” геометрические и физические понятия-векторы от вспомогательного векторного аппарата многомерного математического анализа. Уточним, чем скалярное поле отличается от числовой функции, а векторное поле – от вектор-функции.

Скалярное поле НЕ меняется после любой замены координат. Для визуализации СП применяют линии уровня, поверхности уровня, цветную раскраску.

ПРИМЕРЫ 8.5.1. скалярных полей: поле стационарных температур, плотностей, дивергенции, потенциал векторного поля и др. НЕ является скалярным полем значение первой координаты точки, второй координаты градиента ...

Векторное поле, во-первых, есть отображение

$$U \rightarrow U \times \mathbf{V}^3, \quad A \rightarrow (A, \mathbf{f}(A)).$$

Во-вторых, вторая, т. е. векторная, составляющая векторного поля при замене орто-нормированного базиса меняется по законам линейной алгебры: если новый базис выражается через старый с помощью невырожденной матрицы A , то новые координаты вектора выражаются через его старые координаты с помощью матрицы $(A^T)^{-1}$ – обратной к транспонированной.

При диффеоморфизме $F : U \rightarrow V$ векторное поле меняется по закону

$$(A, \mathbf{f}(A)) \rightarrow (F(A), DF(A)\mathbf{f}(A)),$$

т. е. точки преобразует само отображение F , а векторы – оператор производной $DF(A)$ в соответствующей точке. Векторное поле полезно интерпретировать как систему дифференциальных автономных уравнений; тогда векторное поле порождает **фазовый поток**.

ПРИМЕРЫ 8.5.2. векторных полей: поле скоростей сплошной среды при ламинарном течении, напряженность силового поля стационарной системы зарядов. Радиус-векторы точки НЕ являются векторным полем.

С одноименными полями можно производить алгебраические операции. Если поля физические, то учитывают размерности полей. Векторные поля *поточечно*: 1) складывают, 2) умножают на скалярное поле, 3) скалярно перемножают, 4) векторно перемножают и т. д.

Гладкие поля можно **дифференцировать** различными способами и получать новые поля.

ПРИМЕРЫ 8.5.3. дифференцирований:

- 1) Дифференцирование скалярного поля порождает векторное поле градиентов $\varphi \rightarrow \mathbf{grad}\varphi = (\varphi'_x, \varphi'_y, \varphi'_z)^T$.
- 2) Дифференцирование скалярного поля в присутствии другого поля порождает скалярное поле **производной Ли** (Мариус Софус Ли, 1842 – 1899): $\varphi \rightarrow (\mathbf{v}, \mathbf{grad}\varphi) = v_1 \cdot \varphi'_x + v_2 \cdot \varphi'_y + v_3 \cdot \varphi'_z =: \partial\varphi/\partial\mathbf{v}$.

- 3) Дифференцирование векторного поля порождает скалярное поле дивергенции $\mathbf{f} \rightarrow \operatorname{div} \mathbf{f} = \partial f_1 / \partial x + \partial f_2 / \partial y + \partial f_3 / \partial z$.
- 4) Дифференцирование векторного поля порождает векторное поле ротора $\mathbf{f} \rightarrow \operatorname{rot} \mathbf{f}$
- 5) Дифференцирование векторного поля в присутствии другого поля порождает векторное поле действия линейного отображения на вектор: $\mathbf{f} \rightarrow D\mathbf{f}(\mathbf{v})$.
- 6) Дальнейшее дифференцирование. Например, оператор Лапласа (Пьер-Симон маркиз де Лаплас, 1749 — 1827):

$$\varphi \rightarrow \mathbf{grad} \varphi \rightarrow \operatorname{div}(\mathbf{grad} \varphi) = \Delta \varphi := \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Важными частными случаями являются центральные поля, т. е. поля вида $\varphi(r)$ и $\alpha(r)\mathbf{r}$, где $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$, $r = |\mathbf{r}|$. Для них все дифференциальные операторы известны.

8.6. Оператор Гамильтона

Сэр Уильям Роуэн Гамильтон (1805 — 1865) ввел в обиход **символический вектор набла**, имеющий в ПДСК такое определение:

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)^T.$$

С помощью вектора набла основные дифференцирования полей интерпретируются как умножения:

- 1) $\nabla \varphi := \mathbf{grad} \varphi$,
- 2) $(\nabla, \mathbf{f}) := \operatorname{div} \mathbf{f}$,
- 3) $\nabla \times \mathbf{f} := \operatorname{rot} \mathbf{f}$,
- 4) $(\mathbf{v}, \nabla \varphi) := (\mathbf{v}, \mathbf{grad} \varphi) = \partial \varphi / \partial \mathbf{v}$,
- 5) $(\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{f} = D\mathbf{f}(\mathbf{v})$,
- 6) $(\nabla, \nabla) \varphi = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi$.

ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ВЫРАЖЕНИЙ С ВЕКТОРОМ НАБЛА:

- 1) Набла *линейный* оператор.
- 2) Набла *дифференциальный* оператор *первого* порядка.
- 3) Набла “*перемножается*” с полями как вектор на число, как скалярное произведение и как векторное произведение (см. выше).
- 4) Для набла, как для дифференциального оператора, выполняется *правило Лейбница* дифференцирования произведения.
- 5) Чтобы не забыть, на какое поле действует ∇ , над полем ставят стрелку.
- 6) Полезно применять известные из аналитической геометрии свойства векторных операций.
- 7) После преобразований поле, на которое действует набла, оказывается крайним справа, а сам оператор стоит следующий за ним. После чего можно записать результат.
- 8) В конце ответ рекомендуется записывать БЕЗ оператора набла.
- 9) Для конкретных полей (например, центральных) можно использовать смешанную технику – и операторную, и координатную.

ЗАПРЕТЫ:

- 1) Набла не участвует в операции сложения с векторами.
- 2) Перемножение с набла не является перестановочным, учитывая стрелки его действия.

ПРИМЕР 8.6.1. $(\mathbf{v}, \nabla) \downarrow \varphi = \partial\varphi/\partial\mathbf{v}$, $(\nabla, \downarrow \mathbf{v})\varphi = \varphi \operatorname{div}\mathbf{v}$.

В заключение приведем примеры упрощения выражения с помощью оператора Гамильтона.

ПРИМЕРЫ 8.6.1. 1) Найдем дивергенцию произведения скалярного и векторного полей:

$$\operatorname{div}(\varphi\mathbf{f}) = (\nabla, \varphi\mathbf{f}).$$

Согласно правила Лейбница и свойств скалярного произведения, получаем:

$$(\nabla, \varphi\mathbf{f}) = (\nabla, \downarrow \varphi \mathbf{f}) + (\nabla, \varphi \downarrow \mathbf{f}) = (\mathbf{f}, \nabla \downarrow \varphi) + \varphi(\nabla, \downarrow \mathbf{f}) = (\mathbf{f}, \mathbf{grad}\varphi) + \varphi \operatorname{div}\mathbf{f}.$$

2) Теперь найдем дивергенцию векторного произведения векторных полей:

$$\operatorname{div}(\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = (\nabla, \mathbf{f} \times \mathbf{g}) = (\nabla, \mathbf{f} \times \mathbf{g}) + (\nabla, \mathbf{f} \times \mathbf{g}).$$

Чтобы найти первое слагаемое, воспользуемся тем, что смешанное произведение не меняется при циклической перестановке входящих в него векторов:

$$(\nabla, \mathbf{f} \times \mathbf{g}) = (\mathbf{g}, \nabla \times \mathbf{f}) = (\mathbf{g}, \operatorname{rot} \mathbf{f}).$$

Во втором слагаемом в поменяем вначале местами векторы \mathbf{f} и \mathbf{g} , из-за чего знак векторного произведения сменится на обратный, а уж затем воспользуемся циклической перестановкой:

$$(\nabla, \mathbf{f} \times \mathbf{g}) = -(\nabla, \mathbf{g} \times \mathbf{f}) = -(\mathbf{f}, \nabla \times \mathbf{g}) = -(\mathbf{f}, \operatorname{rot} \mathbf{g}).$$

Окончательно получаем:

$$\operatorname{div}(\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = (\mathbf{g}, \operatorname{rot} \mathbf{f}) - (\mathbf{f}, \operatorname{rot} \mathbf{g}).$$