Оглавление

Глава 1

Тригонометрические ряды Фурье. Введение

Тригонометрический ряд Фурье (ТРФ) (Жан Батист Жозеф Фурье 1768 – 1830) – это специальный функциональный ряд, который является бесконечномерным аналогом разложения вектора по ортогональному базису. Роль такого базиса выполняют синусы и косинусы всевозможных осцилляций с данным периодом. Развитие теории ТРФ приводит к методам функционального анализа. ТРФ являются мощнейшим инструментом в уравнениях математической физики, поскольку ряд Фурье ведёт себя прозрачно при дифференцировании, интегрировании и сдвиге функции по аргументу.

1.1. Вспомогательные понятия и утверждения

Напомним, что символ $\sum_{k=1}^{\infty} c_k(x)$ называется функциональным рядом, порожденным последовательностью функций $c_k(x)$, где $x \in X \subset \mathbb{R}$ (X – *общая* для всех функций область определения). Суммы $S_n := \sum_{k=1}^{n} c_k(x)$ называются *частичными* суммами ряда. При фиксированном аргументе x сходимость *числового* ряда $S_n(x)$ $(n \to \infty)$ называется сходимостью функционального ряда в точке x. Если ряд сходится в каждой точке $x \in X$, то сходимость называется *поточечной*. В результате возникает предельная функция $S(x) := \lim_{n\to\infty} S_n(x)$. Поточечно сходящийся ряд сходится *равномерно*, если $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$ на X.

Ценность равномерной сходимости в том, что она "сохраняет" важные свойства слагаемых ряда: непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость.

ТРФ применяют для исследования функций более широкого класса, чем непрерывные. Для нас исходным будет следующий класс:

Определение 1.1.1. Функция f называется **абсолютно интегрируемой** (АИ) на конечном (полубесконечном, бесконечном) интервале (a, b), если

1) функция f имеет на (a, b) не более конечного числа особенностей, т. е. существуют точки $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_I = b$ такие, что для любого $i \in \{1, \ldots, I-1\}$ и любого отрезка $[\alpha, \beta] \subset \subset (a, b) \wedge [\alpha, \beta] \not\ni x_i$ интеграл Римана $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ существует в собственном смысле;

2) несобственный интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$ сходится. $\boxtimes$

Замечание 1.1.1. Во-первых, мы пока не акцентируем внимание на концах отрезка, поскольку значения функции в конечном количестве точек не влияют на ее интегрируемость. Во-вторых, требование сходимости *несобственного* интеграла $\int_a^b |f(x)|dx$ влечет сходимость *несобственного* интеграла $\int_a^b f(x)dx$ только при выполнении п. 1. Однако только сходимости $\int_a^b |f(x)|dx$ не достаточно, поскольку она не гарантирует существование интеграла $\int_\alpha^\beta f(x)dx$. (Приведите контрпример.) $\boxminus$

Функциональное пространство всех АИ на (a, b) функций обозначим через $L_R^1(a, b) = L_R(a, b)$. Это традиционное обозначение, которое напоминает, что описываемые функции абсолютно интегрируемы в первой степени по *Риману*. (Существуют пространства функций, интегрируемых, во-первых, с другими степенными показателями и, во-вторых, в другом смысле (например, по Лебегу).) Далее, мы понимаем $L_R(a, b)$ именно как *векторное* пространство, элементы которого, т. е. функции f, g, ..., являются векторами с *поточечными* операциями сложения и умножения на число:

$$\forall f, g \in L_R(a, b)\, \forall \alpha \in \mathbb{R} \hookrightarrow\ (f+g)(x) := f(x)+g(x),\ \ (\alpha\cdot f)(x) := \alpha\cdot f(x).$$

Задача 1.1.1. Какая функция является нулевым вектором? Проверьте: 1) векторные операции не выводят за пределы пространства $L_R(a, b)$; 2) выполнены все аксиомы векторного пространства.

Произведение АИ функций в общем случае не является АИ. Например, функция $f(x) = x^{-1/2}$ принадлежит пространству $L_R(0,1)$, а ее квадрат $f^2(x) = x^{-1}$ — нет. Потребность в умножении функций вынуждает нас предъявить более жесткие требования ко второму сомножителю:

Лемма 1.1.1. *(об умножении) Если функция $f \in L_R(a,b)$, а функция $g(x)$ — непрерывна и ограничена на (a,b), то произведение $f(x)g(x) \in L_R(a,b)$.*

Замечание 1.1.2. Функция g не обязательно непрерывна вплоть до концов интервала; например, $g(x) = \sin(1/x)$ $(x \in (0,1))$. $\boxminus$

Доказательство. Из п. 1 определения 1.1.1 и непрерывности функции g следует, что для любого $i \in \{1, \dots, I-1\}$ и любого отрезка $[\alpha,\beta] \subset (a,b) \wedge [\alpha,\beta] \not\ni x_i$ интеграл Римана $\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx$ существует в собственном смысле. Значит, п. 1 определения выполнен и для функции $f(x)g(x)$. Из ограниченности функции $|g(x)|$ и сходимости интеграла $\int_a^b |f(x)|dx$ следует, согласно признаку сравнения несобственных интегралов, сходимость интеграла $\int_a^b |f(x)g(x)|dx$. $\blacksquare$

Периодичность тригонометрических функций вынуждает нас сосредоточиться на исследовании именно периодических функций. Нам понадобится

Лемма 1.1.2. *(о сдвиге при интегрировании на периоде) Если функция f является T-периодической и АИ на $(0,T)$, то для любого числа α справедливо*

$$\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx. \tag{1.1}$$

Доказательство. Утверждение буквально очевидно: если разбить отрезок интегрирования на два подотрезка согласно рис. 1.1 и допустить, что криволинейные трапеции измеримы, то

$$\Theta_1 = \Theta_2 \ \wedge \ \Theta = \Theta_1 \cup \Theta_3 \Rightarrow$$

$$\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)dx = \mu(\Theta_3 \cup \Theta_2) = \mu(\Theta_1 \cup \Theta_3) = \mu(\Theta) = \int_0^T f(x)dx.$$

Аналитическое доказательство таково. В силу периодичности, фунция f является АИ на любом интервале вида (mT, nT), где $m, n \in \mathbb{Z}$ и $m < < n$. Поскольку любой конечный интервал можно погрузить в интервал указанного типа, то функция f является АИ на любом конечном интервале.

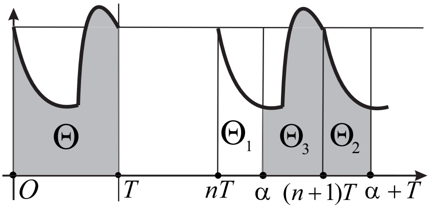

Рис. 1.1

Учитывая это замечание и используя периодичность, получаем

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)dx = \int_{\alpha}^{T} f(x)dx + \int_{T}^{\alpha+T} f(x)dx =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{T} f(x)dx + \int\limits_{0}^{\alpha} f(t+T)d(t+T) = \int\limits_{\alpha}^{T} f(x)dx + \int\limits_{0}^{\alpha} f(t)dt = \int\limits_{0}^{T} f(x)dx. \blacksquare$$

1.2. Ортогональная система тригонометрических функций

Звуки умертвив,
Музы́ку я разъял, как труп. Поверил
Я алгеброй гармонию.

А.С. Пушкин. Моцарт и Сальери

В качестве отправной точки рассмотрим арифметическое евклидово пространство $\mathbf{V}^n$ со стандартным скалярным произведением $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) := f_1 g_1 + \ldots + f_n g_n$. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ – произвольный ортогональный базис (т. е. $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$ при $i \neq j$). Тогда координаты вектора $\mathbf{f}$ в разложении $\mathbf{f} = \xi_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \xi_n \mathbf{e}_n$ получаются, если обе части разложения скалярно умножить на $\mathbf{e}_i$: $\xi_i = (\mathbf{f}, \mathbf{e}_i)/(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i)$.

Аналогом евклидового пространства $\mathbf{V}^n$ для нас является функциональное пространство $L^2_R(-\pi, \pi)$ **АИ с квадратом** функций, т. е. таких функций $f \in L_R(-\pi, \pi)$, квадрат которых $f^2 \in L_R(-\pi, \pi)$. В силу определения, $L^2_R(-\pi, \pi) \subset L_R(-\pi, \pi)$. Важно, что функции из $L^2_R(-\pi, \pi)$ можно поточечно умножать $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$ и при этом верна

Лемма 1.2.1. *Если $f, g \in L^2_R(-\pi,\pi)$, то произведение $f \cdot g \in L_R(-\pi,\pi)$.*

Доказательство. Пусть $\{x_i\}$ $(i = 0, \ldots, I)$ – множество всех особых точек функций f и g. Для любого отрезка $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ такого, что $[\alpha, \beta] \not\ni x_i$ $(i = 0, \ldots, I)$, существование собственного интеграла $\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx$ вытекает из интегрируемости по Риману произведения двух интегрируемых функций. Существование несобственного интеграла $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)g(x)|dx$ вытекает из неравенства $2|f(x)g(x)| \le f^2(x) + g^2(x)$ и условия $f^2,\ g^2 \in L_R(-\pi,\pi)$. ■

Задача 1.2.1. Опираясь на лемму 1.2.1, докажите что пространство $L^2_R(-\pi,\pi)$ замкнуто относительно векторных операций. Точнее, $\forall f, g \in L^2_R(-\pi,\pi)$ и $\forall \mu,\ \nu \in \mathbb{R}$ выполнено $\mu f + \nu g \in L^2_R(-\pi,\pi)$.

Среди функций пространства $L^2_R(-\pi,\pi)$ мы выделим вспомогательный, очень удобный при интегрировании класс:

Определение 1.2.1. Функцию $f \in L^2_R(-\pi,\pi)$ называют **кусочно-постоянной** (КП), если существует конечное разбиение интервала $(-\pi,\pi)$ на промежутки $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$, на каждом из которых функция постоянна. Не исключено, что промежуток вырождается в точку $[x_i, x_i]$. (Типичный график КП функции изображен на рис. 1.2.) ⊠

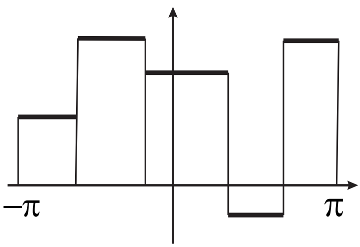

Рис. 1.2

Рассмотрим две КП функции f и g, у которых разбиения на промежутки постоянства совпадают и равны между собой по длине:

$$f(x) = f_i,\ g(x) = g_i \text{ при } x \in (x_i, x_{i+1}),\ x_{i+1} - x_i = \frac{2\pi}{n},\ i = 0, \ldots, n-1.$$

Для выбранных функций сумма типа скалярного произведения отличается от интеграла только коэффициентом:

$$(f_1 g_1 + \ldots + f_n g_n) \cdot \frac{2\pi}{n} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

Это наблюдение порождает

Определение 1.2.2. (Неопределенным) скалярным произведением произвольных функций $f, g \in L^2_R(-\pi, \pi)$ называется интеграл

$$(f, g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx. \tag{1.2}$$

Интегральной евклидовой (полу)нормой функции $f \in L^2_R(-\pi, \pi)$ называют число

$$||f||_2 := (f, f)^{1/2} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\ dx\right)^{1/2}. \ \boxtimes \tag{1.3}$$

Лемма 1.2.2. *Определение 1.2.2 "почти" корректно. Точнее, указанный интеграл (1.2): 1) существует для любых функций $f, g \in$ $\in L^2_R(-\pi, \pi)$, 2) линеен по каждому сомножителю, 3) коммутативен относительно сомножителей, 4)* ***неотрицателен*** *при $f(x) = g(x)$.*

Задача 1.2.2. Докажите лемму 1.2.2.

Обсуждение 1.2.1. Чтобы формула (1.2) определяла "настоящее" скалярное произведение, а формула (1.3) определяла норму, не хватает ***строгой положительности***: $||f||_2 > 0$ при $f(x) \neq 0$ (отсюда термин "полунорма"). Например, функция равная нулю всюду, кроме конечного числа точек, отлична от нуля, а ее интегральная полунорма равна нулю. Обсуждение этой идеологически сложной проблемы мы отложим в конец теории. $\boxminus$

Теперь мы введем аналог ортогонального базиса:

Определение 1.2.3. Тригонометрической системой (ТС) называют счетную совокупность функций

$$1 \equiv \cos(0x),\ \sin x,\ \cos x,\ \ldots\ \cos kx,\ \sin kx, \ldots, \text{ где } k \in \mathbb{N}, \tag{1.4}$$

упорядоченную по росту осцилляции (количеству нулей) на периоде. $\boxtimes$

В основе теории РФ лежит наблюдение

Теорема 1.2.1. *(об ортогональности ТС) Справедливы утверждения:*

1) *Любые две функции из ТС ортогональны в смысле скалярного произведения (1.2).*

2) Интегральные евклидовы нормы функций из ТС равны

$$||1||_2 = \sqrt{2\pi},\ ||\cos kx||_2 = ||\sin kx||_2 = \sqrt{\pi},\ k \in \mathbb{N}.$$

Доказательство основано на известных тригонометрических тождествах

$$\cos nx \cdot \cos mx = \frac{1}{2}(\cos(n+m)x + \cos(n-m)x),$$

$$\sin nx \cdot \sin mx = \frac{1}{2}(\cos(n-m)x - \cos(n+m)x),$$

$$\sin nx \cdot \cos mx = \frac{1}{2}(\sin(n+m)x + \sin(n-m)x).$$

Задача 1.2.3. Завершите доказательство теоремы 1.2.1.

Продолжая аналогию с вычислением координаты ξ_i, дадим

Определение 1.2.4. 1) Функциональный ряд (т. е. символ)

$$TS := a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad (trigonometric\ series) \quad (1.5)$$

называется **тригонометрическим рядом** (ТР).

2) **Тригонометрическими коэффициентами Фурье** (или просто КФ) абсолютно интегрируемой на $(-\pi, \pi)$ функции f называются числа

$$a_0 := \frac{1}{2\pi}(f, 1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_k := \frac{1}{\pi}(f, \cos kx) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx,$$

$$b_k := \frac{1}{\pi}(f, \sin kx) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx,\ k \in \mathbb{N}. \qquad (1.6)$$

3) Функциональный ряд (т. е. символ) вида (1.5) называется **тригонометрическим рядом Фурье** (или просто РФ) функции f, если его коэффициенты вычислены по формулам (1.6).

Обозначение: если коэффициенты вычислены по формулам (1.6), то мы пишем

$$f(x) \sim FS(f) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx\cos kx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx\sin kx,$$

указывая, что тригонометрический ряд $FS(f)$ (Fourier series) порожден функцией f. ⊠

Лемма 1.2.3. *(корректность определения 1.2.4) Для любой функции $f \in L_R(-\pi,\pi)$ коэффициенты Фурье (1.6) (а следовательно и ряд Фурье как символ) существуют.*

Доказательство немедленно вытекает из леммы 1.2.1.

Обсуждение 1.2.2. Определение 1.2.4 имеет фундаментальную физическую интерпретацию. Исследуя колебания однородной струны, Даниил Бернулли (1700 — 1782) развил теорию "чистых колебаний" синусоидального типа $y = A\sin(\alpha + kx)$, где $A > 0$, $\alpha \in S^1$, $k \in \mathbb{N}$. Их общепринятое название **гармонические** колебания; A называют **амплитудой**, α – **фазой**, k – **частотой** гармонического колебания. По Бернулли звук, издаваемый струной, состоит

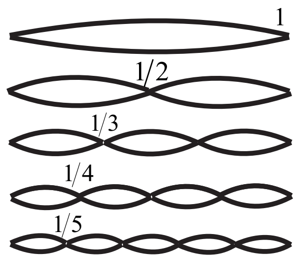

Рис. 1.3

из *основного тона* ($k = 1$) и *обертонов* ($k > 1$) (рис. 1.3). Поскольку $a_k\cos kx + b_k\sin kx = A\sin(\alpha + kx)$ (где $A = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$, $\sin\alpha = a_k/A$, $\cos\alpha = b_k/A$), то представление функции тригонометрическим рядом означает, что "произвольное" колебание есть сумма (в общем случае бесконечная) гармонических колебаний – в этом состоит принцип **суперпозиции**. Метод разложения функции в тригонометрический ряд окончательно закрепился после работ Фурье о распространении тепла в твердом теле. Раздел математического анализа, в котором изучают ряды Фурье и их обобщения, называют гармоническим анализом или Фурье-анализом. ⊟

1.3. Основные задачи классической теории рядов Фурье

Существование символьного тригонометрического ряда $FS(f)$ еще не означает, что полученный ТР сходится хотя бы поточечно, а если сходится, то не факт, что он сходится к той функции, которой порожден. Следует различать два типа утверждений. Первый тип возникает, когда данная АИ функция f порождает свой символьный ряд Фурье $FS(f)$. Второй тип утверждений возникает, когда дан тригонометрический ряд, возможно порождающий функцию $f(TS)$.

Перечислим задачи первого типа:

1) Сходится ли ряд $FS(f)$ в данной точке? поточечно? равномерно? Каковы условия (необходимые, достаточные) каждого вида сходимости?

2) Если ряд $FS(f)$ сходится поточечно, то к какой функции?

3) Какова “скорость” сходимости? (Это понятие нуждается в уточнениии.)

4) Какими свойствами обладает функция $FS(f)$ (периодичность, непрерывность, интегрируемость, дифференцируемость)?

Замечание 1.3.1. Поскольку слагаемые ТР 2π-периодичны, поточечно (равномерно) сходящийся на $[-\pi, \pi]$ ТР поточечно (равномерно) сходится на всей числовой оси и является 2π-периодической функцией. Поэтому АИ на $(-\pi, \pi)$ функцию f мы будем доопределять (переопределять) в точках $\pm\pi$ и впредь понимать как 2π-периодическую на всей числовой оси. $\boxminus$

Задачи второго типа:

1) Сходится ли TS поточечно? равномерно? Каковы условия (необходимые, достаточные) сходимости?

2) Если TS сходится, то к какими свойствами обладает функция $f(TS)$?

Как видим, задачи обоих типов – это задачи о сходимости специального функционального ряда, а именно тригонометрического. Классическая постановка задачи предполагает обязательный поточечный и локальный анализ сходимости. Однако следует постоянно учитывать, порождены ли эти задачи данной функцией, или данным ТР. Чтобы продемонстрировать тонкость возникающих вопросов, попробуем ответить на следующий: что будет, если по данному ТР мы восстанавливаем его РФ? На этот вопрос частично отвечает

Теорема 1.3.1. *Если ряд (1.5) равномерно сходится на* $[-\pi, \pi]$, *то функция* $f(TS)$:

1) *непрерывна на* $\mathbb{R}$;

2) 2π*-периодична на* $\mathbb{R}$;

3) *ее коэффициенты Фурье совпадают с коэффициентами исходного ТР, т. е. справедливо равенство* $FS(f(TS)) = TS$.

Другими словами: если ТР сходится равномерно, то он является РФ для своей суммы.

Доказательство. Пункт 1 следует из теоремы о равномерной сходимости ряда, члены которого – непрерывные функции. Пункт 2 — из 2π-периодичности слагаемых ТР. Наконец, умножим тождество (1.5) на $\cos mx$ или $\sin mx$ ($m \in \mathbb{N}$). Полученные ряды также будут сходиться равномерно на $[-\pi, \pi]$ к функциям $f(x) \cdot \cos mx$ и $f(x) \cdot \sin mx$ соответственно (обоснуйте). Проинтегрируем их почленно (обоснуйте допустимость почленного интегрирования!) и воспользуемся свойством ортогональности тригонометрической системы (теорема 1.2.1) – получим, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx dx = \pi a_m,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx = b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx dx = \pi b_m.$$

Если же почленно проинтегрировать само тождество (1.5), то получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi a_0.$$

Все равенства совпадают с п. 2 определения 1.2.4. ■

Замечание 1.3.2. Из определения 1.2.4 следует, что всякий РФ некоторой АИ функции является ТР. В обратную сторону это утверждение в общем случае неверно: *поточечно* сходящийся ТР может не быть РФ никакой АИ функции. ⊟

1.4. Теорема Римана об осцилляции

В связи с теоремой 1.3.1 возникает вопрос о равномерной сходимости тригонометрического ряда.

Лемма 1.4.1. *(необходимое условие равномерной сходимости ТР) Если ТР (1.5) равномерно сходится на* $[-\pi, \pi]$, *то* $a_k^2 + b_k^2 \to 0$ *при* $k \to \infty$.

Задача 1.4.1. Докажите лемму 1.4.1. Воспользуйтесь равенством $a_k \cos kx + b_k \sin kx = A \sin(\alpha + kx)$, где $A = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$, и доказанной нами теоремой: если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k(x)$ сходится равномерно на $X \subset \mathbb{R}$, то $c_k(x) \rightrightarrows 0$ при $k \to \infty$).

Обсуждение 1.4.1. Тригонометрический ряд является функциональным рядом, у которого слагаемые имеют *стандартный вид* – это косинусы и синусы определенной осцилляции с коэффициентами. Поэтому все свойства ТР сводятся к свойствам числовой последовательности коэффициентов $a_0, a_1, b_1, \ldots$, что существенно облегчает исследование ТР и, следовательно, РФ. $\boxminus$

Учитывая лемму 1.4.1, вопрос о равномерной сходимости РФ следует сформулировать так: какой должна быть функция f, чтобы коэффициенты ее РФ стремились к нулю? На него отвечает

Теорема 1.4.1. *(Римана) Если функция* $f \in L_R(a, b)$, *то*

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f(x) \cos kx dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f(x) \sin kx dx = 0, \quad k \in \mathbb{R}. \tag{1.7}$$

Доказательство достаточно дать для случая $k \to +\infty$. Чтобы понять, в чем смысл утверждения, рассмотрим сначала постоянную функцию $f(x) = 1$. Тогда

$$\Big|\int_a^b 1 \cdot \cos kx \; dx\Big| = \frac{1}{k} |\sin kb - \sin ka| \le \frac{2}{k} \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Но если взять последовательность $f_k(x) = \cos kx$ функций, то $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \; dx = \pi$. То есть смысл теоремы таков: *фиксированная* функция из пространства $L_R(a, b)$ при умножении на сильно осциллирующую функцию $\cos kx$ ведет себя как постоянная. Поэтому доказательство будет основано на аппроксимации данной функции кусочно-постоянными функциями.

Рассмотрим сначала случай, когда (a, b) – конечный интервал, а функция $f(x)$ интегрируема по Риману на $[a, b]$. Согласно критерию интегрируемости, существует разбиение отрезка интегрирования, для которого разность верхней и нижней сумм Дарбу сколь угодно мала: $\sum_{i=1}^{N}(M_i - m_i)\Delta x_i < \varepsilon/2$. Выделим указанную разность в исследуемом интеграле:

$$\Big|\int_a^b f(x)\cos kx\ dx\Big| =$$

$$= \Big|\sum_{i=1}^{N}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(f(x) - m_i)\cdot\cos kx\ dx + \sum_{i=1}^{N} m_i \int_{x_{i-1}}^{x_i}\cos kx\ dx\Big| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{N}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(x) - m_i|\cdot|\cos kx|\ dx + \sum_{i=1}^{N}\frac{|m_i|}{k}|\sin kx_{i-1} - \sin kx_i| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{N}(M_i - m_i)\Delta x_i + 2N\frac{M}{k}, \quad \text{где } M = \sup_{[a,b]}|f(x)|.$$

Число M постоянно, а число $N = N(\varepsilon)$ зафиксировано после выбора разбиения отрезка $[a, b]$. Поэтому существует $k_0 = k_0(\varepsilon)$, что для всех $k > k_0$ справедлива оценка $2NM/k < \varepsilon/2$. Для таких k выполняется неравенство $\left|\int_a^b f(x)\cos kx\ dx\right| < \varepsilon$, что доказывает утверждение.

Рассмотрим общий случай, т. е. f АИ и имеет на данном интервале конечное количество особенностей. Без ограничения общности считаем, что особенность одна — в b. В силу сходимости несобственного интеграла $\int_a^{\to b}|f(x)|dx$, для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $b' \in (a, b)$, что f интегрируема по Риману на $[a, b']$ и $\int_{b'}^{\to b}|f(x)|dx < \varepsilon/2$. Поскольку для функций, интегрируемых по Риману, теорема доказана, то существует $k_0 = k_0(\varepsilon, b')$, что для всех $k > k_0$ справедлива оценка $\left|\int_a^{b'} f(x)\cos kx\ dx\right| < \varepsilon/2$. Для тех же значений k выполняется оценка

$$\Big|\int_a^{\to b} f(x)\cos kx\ dx\Big| \leq \Big|\int_a^{b'} f(x)\cos kx\ dx\Big| + \Big|\int_{b'}^{\to b} f(x)\cos kx\ dx\Big| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \int_{b'}^{\to b}|f(x)|\ dx < \varepsilon. \ \blacksquare$$

Следствие 1.4.1. *Коэффициенты Фурье a_k, b_k функции $f \in$ $\in L_R(-\pi, \pi)$ стремятся к нулю при $k \to \infty$.*

Замечание 1.4.1. Мы показали, что для произвольной АИ функции, во-первых, символический РФ существует (лемма 1.2.3) и, во-вторых, для полученного ТР выполнено необходимое условие равномерной сходимости. Но отсюда вовсе не следует, что ряд сходится хотя бы поточечно. Так, существуют непрерывные и 2π-периодические функции, ряды Фурье которых расходятся в некоторых точках. $\boxminus$

Глава 2

Сходимость ряда Фурье в точке

Хотя мы пришли к идее РФ в пространстве $L^2_R(-\pi, \pi)$ с *интегральной* нормой (1.3), оказывается, РФ является тонким инструментом *локального* исследования функции.

2.1. Ядро Дирихле и принцип локализации

Сходимость (любого вида) РФ означает сходимость его частичных сумм

$$FS_n(f, x) := a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \tag{2.1}$$

где коэффициенты a_k, b_k вычисляются по формулам (1.6). Всюду ниже, учитывая замечание 1.3.1, мы будем понимать функции и ряды, заданные на $(-\pi, \pi)$, продолженными 2π-периодически на всю числовую ось. В исследовании частичных сумм РФ ключевую роль играет следующее понятие

Определение 2.1.1. Ядром Дирихле порядка n $(n = 0, 1, 2 \ldots)$ называют функцию

$$D_n(t) := \frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \ldots + \cos nt. \quad \boxtimes \tag{2.2}$$

Лемма 2.1.1. *Ядро Дирихле*

1) является четной, непрерывной, 2π-периодической функцией;

2) для всех n оно удовлетворяет условию

$$\int_0^\pi D_n(t)dt = \frac{\pi}{2};$$

3) задается формулами

$$D_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} \quad \text{\textit{при}} \quad t \neq 2\pi m;$$

$$D_n(t) = n + \frac{1}{2} \quad \text{\textit{при}} \quad t = 2\pi m \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

Обсуждение 2.1.1. Из формулы п. 3 следует, что при больших значениях n ядро Дирихле сильно осциллирующая функция, амплитуда которой не меньше, чем $1/2$, и которая в точках $2\pi m$ принимает наибольшее значение $n + 1/2 \to \infty$ с ростом порядка ядра (на рис. 2.1 изображен график ядра Дирихле при $n = 10$). Ниже мы увидим, как все перечисленные свойства ядра связаны со сходимостью РФ. ⊟

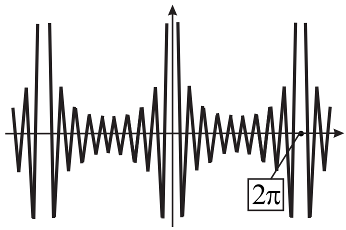

Рис. 2.1

Доказательство. Первое утверждение следует сразу из определения. Второе получается почленным интегрированием суммы (2.2). Третье утверждение вытекает из цепочки преобразований:

$$\text{при } t \neq 2\pi m \text{ произведение } 2\sin\frac{t}{2}\cdot D_n(t) = \sin\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{t}{2}\cos kt =$$

$$= \sin\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\sin(k+\frac{1}{2})t - \sin(k-\frac{1}{2})t) = \sin(n+\frac{1}{2})t.$$

Если $t = 2\pi m$, то ответ получаем подстановкой. ■

Лемма 2.1.2. *(об интегральных представлениях частичной суммы РФ) Пусть функция f 2π-периодическая и $f \in L_R(-\pi,\pi)$. Тогда для частичных сумм ее ряда Фурье справедливы представления*

$$FS_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt = \tag{2.3}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t)) D_n(t) dt. \tag{2.4}$$

Второе представление (2.4) называется ***интегралом Дирихле****.*

Обсуждение 2.1.2. Ценность полученных формул в том, что частичная сумма ряда представлена в виде одного слагаемого, т. е. функциональный ряд заменен на функциональную последовательность. Полученное подынтегральное выражение представляет собой произведение двух сомножителей: первый – исследуемая функция, второй – ядро Дирихле, которое вообще от функции f не зависит. Интеграл (2.3) от произведения двух функций, где в одном из сомножителей имеется *сдвиг аргумента*, называют **сверткой** этих функций. $\boxminus$

Доказательство. Зафиксируем произвольное $x \in \mathbb{R}$. Воспользовавшись 2π-периодичностью функции f, сдвинем на x отрезок интегрирования в определении (1.6) коэффициентов ряда Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(s) ds, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(s) \cos ks ds,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(s) \sin ks ds, \;\; k \in \mathbb{N}.$$

Следовательно,

$$FS_n(f,x) = \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(s) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx \cos ks + \sin kx \sin ks \right) ds =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(s) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(s-x) \right) ds = \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(s) D_n(s-x) ds.$$

Применив замену $t = s - x$, мы сразу получим формулу (2.3). Воспользуемся четностью ядра Дирихле – после несложных преобразований получаем формулу (2.4):

$$FS_n(f,x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} f(x+t) D_n(t) dt + \int_0^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^\pi f(x-t) D_n(-t) dt + \int_0^\pi f(x+t) D_n(t) dt \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t) D_n(t) dt. \blacksquare$$

В дальнейшем мы будем применять формулу (2.4) с учетом п. 3 леммы 2.1.1. С ее помощью мы выделим сейчас существенную часть частичной суммы РФ:

Лемма 2.1.3. *(о локализации интеграла Дирихле) Пусть функция f 2π-периодическая и $f \in L_R(-\pi, \pi)$. Тогда для любых фиксированных $\delta \in (0, \pi]$ и $x \in \mathbb{R}$ справедливо представление*

$$FS_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta (f(x+t) + f(x-t)) D_n(t) dt + \varepsilon(n; x, \delta), \tag{2.5}$$

где $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon(n; x, \delta) = 0$.

Обсуждение 2.1.3. Из формулы (2.5) следует, что с ростом количества слагаемых в частичной сумме РФ вся информация о частичной сумме в точке x локализуется в сколь угодно малой δ-окрестности этой точки. $\boxminus$

Доказательство. Разобьем промежуток интегрирования на два: $[0, \delta]$ и $[\delta, \pi]$. Оценим второе слагаемое, применив формулу (2.4) и п. 3 леммы 2.1.1:

$$\varepsilon(x, n, \delta) := \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi (f(x+t) + f(x-t)) D_n(t) dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_\delta^\pi \frac{f(x+t) + f(x-t)}{\sin \frac{t}{2}} \sin(n + \frac{1}{2}) t \ dt.$$

На $[\delta, \pi]$ функция $\sin \frac{t}{2}$ непрерывна и отделена от нуля значением $|\sin(\delta/2)| > 0$, функция $f(x+t) + f(x-t)$ абсолютно интегрируема. Поэтому (лемма 1.1.1) функция $(f(x+t)+f(x-t))/\sin(t/2)$ также АИ. Из теоремы Римана 1.4.1 следует утверждение леммы. $\blacksquare$

Теперь мы можем сформулировать

Теорема 2.1.1. *(принцип локализации) Справедливы утверждения:*

1) Пусть функция f 2π-периодическая и $f \in L_R(-\pi, \pi)$. Тогда для любого фиксированного $\delta \in (0, \pi]$ в любой фиксированной точке $x \in \mathbb{R}$ совпадают пределы частичных сумм ряда Фурье и δ-локализованных интегралов Дирихле, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} FS_n(f, x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\delta (f(x+t) + f(x-t))D_n(t)dt;$$

если один из пределов отсутствует, то автоматически отсутствует и другой.

2) Пусть функции f и g 2π-периодические и обе АИ на $(-\pi, \pi)$. Пусть функции совпадают $f(x) \equiv g(x)$ в некоторой δ-окрестности фиксированной точки $x \in \mathbb{R}$. Тогда в точке x ряды Фурье функций f и g сходятся или расходятся одновременно, а если сходятся, то к одинаковым значениям.

Обсуждение 2.1.4. Хотя коэффициенты РФ определяются с помощью интегралов *на всем интервале* $(-\pi, \pi)$, оказалось, что наличие сходимости РФ в фиксированной точке (а в случае сходимости ряда — и его сумма) зависят только от поведения функции *в сколь угодно малой окрестности* исследуемой точки. Значит, РФ можно использовать для локального исследования функции подобно тому, как мы использовали ряд Тейлора. $\boxminus$

Доказательство. Пункт 1 сразу следует из леммы 2.1.3, а п. 2 следует из п. 1. ■

2.2. Достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке

Предложены разные подходы к исследованию сходимости РФ в точке. Мы обсудим подход, в основе которого лежит

Теорема 2.2.1. *(Улисс Ди́ни, 1845 – 1918) Пусть 2π-периодическая функция $f \in L_R(-\pi, \pi)$. Пусть $A \in \mathbb{R}$ такое, что при некотором $\delta > 0$ сходится несобственный интеграл*

$$\int_{0\leftarrow}^{\delta} \frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2A|}{t} dt < \infty. \tag{2.6}$$

Тогда РФ функции f сходится в точке x к числу A.

Обсуждение 2.2.1. Непосредственно проверить выполнение условий Дини непросто — для этого надо, по крайней мере, правильно выбрать число A. Однако описан (см. ниже) широкий класс функций, для которых условия теоремы выполнены, а число A не только найдено, но и связано со свойствами функции f в точке x. ⊟

Доказательство. В силу АИ функции f на $(-\pi, \pi)$ и непрерывности функции $1/t$ на $[\delta, \pi]$, подынтегральная функция АИ на (δ, π). Следовательно, подынтегральная функция АИ на $(0, \pi)$. В силу пунктов 2 и 3 леммы 2.1.1 и формулы (2.4), верно:

$$FS_n(f,x) - A = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)-2A}{2\sin\frac{t}{2}} \sin(n+\frac{1}{2})t\ dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)-2A}{t} \cdot \frac{t}{2\sin\frac{t}{2}} \cdot \sin(n+\frac{1}{2})t\ dt. \qquad (2.7)$$

Первый слева сомножитель является АИ согласно условию теоремы. Второй сомножитель всюду непрерывен и ограничен поскольку в нуле он имеет устранимую особенность: $\lim\limits_{t\to+0} t(2\sin t/2)^{-1} = 1$. Следовательно, произведение дробей есть АИ функция (лемма 1.1.1). Третий сомножитель "сильно осциллирующий" при $n \to \infty$ синус. В силу теоремы 1.4.1 Римана об осцилляции, интеграл стремится к нулю при $n \to \infty$. То есть $\lim\limits_{n\to+\infty} FS_n(f,x) = A$. ■

Обсуждение 2.2.2. В доказательстве существенно использованы свойства ядра Дирихле, перечисленные в лемме 2.1.1: свойство 2 позволяет представить постоянную A в интегральном виде, а свойство 3 обосновывает абсолютную интегрируемость подынтегральной функции и обнуляет интеграл в результате предельного перехода $n \to \infty$. ⊟

Теорема Дини порождает вопрос: как связано число A со значением $f(x)$? Ответ на него зависит от поведения функции в точке x. Ниже описан достаточно широкий класс функций, применяющихся в теории РФ и в теории дифференциальных уравнений, для которых число A существует и известно.

Определение 2.2.1. функций, **регулярных по Липшицу–Гельдеру** (Рудольф Липшиц 1832–1903, Отто Гельдер 1859–1937).

1) Функция f называется **ЛГ-регулярной в точке x слева (справа)** с показателем $\alpha \in (0,1]$, если существует конечный

предел слева (справа) $f(x \mp 0) \in \mathbb{R}$ и такие положительные постоянные $C = C(x) > 0$, $\delta = \delta(x) > 0$, что для любой точки $y \in (x - \delta, x)$ $(y \in (x, x + \delta))$ справедливо неравенство

$$|f(y) - f(x \mp 0)| \leq C|y - x|^{\alpha}. \tag{2.8}$$

2) Функция f называется **ЛГ-регулярной в точке** x с показателем $\alpha \in (0, 1]$, если существуют такие положительные постоянные $C = C(x) > 0$, $\delta = \delta(x) > 0$, что для любой точки $y \in U_{\delta}(x)$ справедливо неравенство

$$|f(y) - f(x)| \leq C|y - x|^{\alpha}. \quad \boxtimes \tag{2.9}$$

Регулярность означает, что функция изменяется не быстрее степенной с некоторым положительным показателем. Вот некоторые

Примеры 2.2.1. ЛГ-регулярностей.

1) Функция

$$f_1(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, \text{ при } x < 0, \\ 1, \text{ при } x = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{x}}, \text{ при } x > 0 \end{cases}$$

абсолютно интегрируема на $(-\pi, \pi)$ и ЛГ-регулярна слева в точке $x = 0$ с показателем $\alpha = 1/2$.

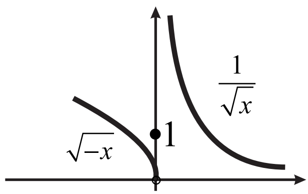

Рис. 2.2

2) Функция

$$f_2(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, \text{ при } x < 0, \\ 1, \text{ при } x = 0, \\ 2 + x, \text{ при } x > 0 \end{cases}$$

абсолютно интегрируема на $(-\pi, \pi)$ и ЛГ-регулярна в точке $x = 0$ и слева с показателем $\alpha = 1/2$, и справа с показателем $\alpha = 1$.

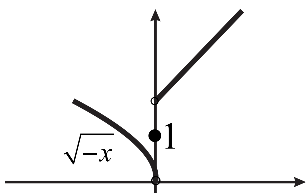

Рис. 2.3

3) Функция

$$f_3(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, \text{ при } x < 0, \\ 0, \text{ при } x = 0, \\ x, \text{ при } x > 0 \end{cases}$$

абсолютно интегрируема на $(-\pi, \pi)$ и ЛГ-регулярна в точке $x = 0$ с показателем $\alpha = 1/2$; в той же точке *справа* функция регулярна с показателем $\alpha = 1$.

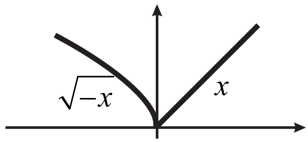

Рис. 2.4

4) Функция

$$f_4(x) = \begin{cases} x \sin(1/x), \text{ при } x \neq 0, \\ 0, \text{ при } x = 0 \end{cases}$$

абсолютно интегрируема на $(-\pi, \pi)$ и ЛГ-регулярна в точке $x = 0$ с показателем $\alpha = 1$.

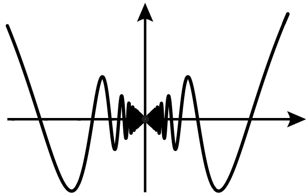

Рис. 2.5

В приложениях часто встречаются следующие типы точек.

Определение 2.2.2. Точка $x \in \mathbb{R}$ называется:

1) **точкой скачка производной** для функции f, если в ней функция f непрерывна и существуют конечные односторонние производные
$$f'_{\pm}(x) := \lim_{t \to +0} \frac{f(x \pm t) - f(x)}{\pm t} \in \mathbb{R},$$
где все знаки берутся или только верхние, или только нижние;

2) **точкой разрыва и скачка производной** для функции f, если в ней функция f претерпевает разрыв первого рода и существуют конечные **обобщенные односторонние производные**
$$f'_{\pm}(x \pm 0) := \lim_{t \to +0} \frac{f(x \pm t) - f(x \pm 0)}{\pm t} \in \mathbb{R},$$
где все знаки берутся или только верхние, или только нижние; $\boxtimes$

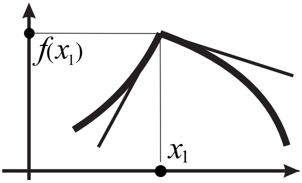

Рис. 2.6

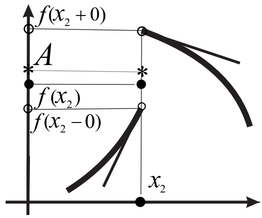

Рис. 2.7

На рис. 2.6 точка x_1 – точка скачка производной, на рис. 2.7 точка x_2 – точка разрыва и скачка производной. В обоих случаях графики имеют односторонние касательные в точках $(x_i, f(x_i \pm 0))$ $(i = 1, 2)$.

Некоторые свойства введенных понятий описывает

Лемма 2.2.1. *Справедливы утверждения:*

1) *Если функция регулярна (в каком-то смысле) с показателем α, то она регулярна (в том же смысле) с любым меньшим показателем.*

2) *Функция регулярна в точке только тогда, когда она непрерывна в ней и регулярна и слева, и справа в ней (рис. 2.4–2.5).*

3) *В точке скачка производной функция регулярна с показателем единица (рис. 2.6). Обратное, в общем случае не имеет места: регулярная в точке с показателем единица функция может не иметь даже односторонних производных (конечных или бесконечных, рис. 2.5).*

4) *В точке разрыва и скачка производной функция регулярна и слева, и справа с показателем единица (рис. 2.7).*

Доказательство. Пункт 1 следует из неравенства

$$\forall t \in (0,1) \ \wedge \ (\forall\ \alpha_1, \alpha_2 :\ 0 < \alpha_2 < \alpha_1) \ \Rightarrow \ t^{\alpha_1} < t^{\alpha_2}.$$

Доказательство п. 2. Если функция регулярна в точке x, то

$$\lim_{y\to x} |f(y) - f(x)| = \lim_{y\to x} |y - x|^{\alpha} = 0 \ \Rightarrow \ \lim_{y\to x} f(y) = f(x).$$

Значит, функция непрерывна в точке x, и оценка (2.9) означает истинность обеих оценок (2.8). Если же функция непрерывна в точке x, то

$f(x) = f(x \mp 0)$ и обе оценки (2.8) означают истинность оценки (2.9). (Сравните пример 2.2.1.2 с примерами 2.2.1.3–2.2.1.4, рис. 2.3 – 2.5.)

Учитывая, непрерывность функции в точке скачка производной и утверждение п. 2 леммы, для доказательства п. 3 достаточно установить односторонние регулярности функции в точке с показателем единица. Пусть существует правая производная (с левой рассуждения те же), тогда существует такое $\delta > 0$ и функция $\varepsilon(t)$, где $t \in (0, \delta)$, что

$$f(x+t) = f(x) + f'_+(x) \cdot t + \varepsilon(t) \cdot t, \text{ причем } \varepsilon(t) \overset{t \to +0}{\longrightarrow} 0.$$

Следовательно,

$$|f(x+t) - f(x)| \leq (|f'_+(x)| + 1) \cdot t$$

для всех достаточно малых положительных чисел $t = y - x$.

Функция из примера 2.2.1.4 регулярна в точке $x = 0$ с показателем один и коэффициентом $C(0) = 1$, поскольку для любого $y \neq 0$ верно $|f(y) - f(0)| \leq |y|$. Однако в точке ноль функция f не имеет производной ни конечной, ни бесконечной.

Замечание 2.2.1. Функция из примера 2.2.1.4 дифференцируема всюду, кроме точки ноль. Поэтому она, в силу п. 4 леммы, всюду регулярна с показателем один. Однако коэффициент $C(x)$ в неравенстве (2.9) неограничен в любой проколотой окрестности точки ноль. $\boxminus$

Для доказательств п. 4 следует повторить выкладки из доказательства п. 3, заменив в них $f(x)$ на $f(x \mp 0)$. ■

Теперь мы применим теорему Дини к ЛГ-регулярным точкам.

Теорема 2.2.2. *(о сходимости РФ к полусумме односторонних пределов) Пусть 2π-периодическая функция $f \in L_R(-\pi, \pi)$. Пусть точка x ЛГ-регулярна и слева, и справа (в частности, пусть x точка разрыва и скачка производной). Тогда РФ функции f сходится в точке x к числу $A = (f(x+0) + f(x-0))/2$ (рис. 2.7).*

Доказательство. Покажем, что для значения $A = (f(x+0) + f(x-0))/2$ интеграл Дини (2.6) сходится. В самом деле, для любого $\delta' \in (0, \delta)$ интеграл Дини на отрезке $[\delta', \delta]$ (не содержащем ноль) существует как собственный в силу АИ функции f и непрерывности функции $1/t$.

Пусть точка x регулярна с показателями $\alpha_i > 0$ и коэффициентами $C_i > 0$ $(i = 1, 2)$ справа и слева соответственно. Из определения 2.2.1.1

получаем для всех $t \in (0, \delta)$ оценку подынтегральной функции из интеграла Дини:

$$\frac{|f(x+t)+f(x-t)-2A|}{t} \leq \frac{|f(x+t)-f(x+0)|}{t} + \frac{|f(x-t)-f(x-0)|}{t} \leq$$

$$\leq \frac{C_1 t^{\alpha_1}}{t} + \frac{C_2 t^{\alpha_2}}{t} \leq \frac{2Ct^{\alpha}}{t} = 2Ct^{\alpha-1},$$

где $C = \max\{C_1, C_2\}$, $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\} > 0$. Поскольку показатель $\alpha - 1 > -1$, несобственный интеграл $\int_{0\leftarrow}^{\delta} t^{\alpha-1} dt$ сходится. В силу признака сравнения сходится и интеграл Дини. Остается сослаться на теорему 2.2.1.

Если же x точка разрыва и скачка производной, то, в силу п. 4 леммы 2.2.1, она регулярна и справа, и слева. ■

Следствие 2.2.1. *(о сходимости РФ к значению функции в точке) Пусть 2π-периодическая функция $f \in L_R(-\pi, \pi)$. Пусть точка x ЛГ-регулярна (в частности, пусть x – точка скачка производной). Тогда РФ функции f сходится в точке x к ее значению $f(x)$.*

Доказательство. В условиях следствия 2.2.1 выполнены все требования теоремы 2.2.2, поэтому, в силу непрерывности f в точке x, РФ сходится к числу $A = (f(x+0) + f(x-0))/2 = f(x)$. ■

Задача 2.2.1. Подготовьте функции f_i ($i = 1, \ldots, 4$) из примеров 2.2.1 к разложению в ряд Фурье. С этой целью:

1) Сузьте область определения функций на интервал $(-\pi, \pi)$ и *переопределите* значения на концах так, чтобы выполнялось условие 2π-периодичности $f_i(-\pi) = f_i(\pi)$. Убедитесь, что у всех переопределенных функций $\tilde{f}_i$ существуют коэффициенты Фурье.

2) *Доопределите* функции $\tilde{f}_i$, где $i = 1, \ldots, 4$, на всю числовую ось по 2π-периодичности и убедитесь, что для каждой из этих функций ее ряд Фурье $FS(\tilde{f}_i)$ сходится в каждой точке действительной оси. Сравните графики функций $\tilde{f}_i$ и $FS(\tilde{f}_i)$.

2.3. Специальные случаи рядов Фурье

Лемма 2.3.1. *Если функция $f \in L_R(-\pi, \pi)$ четна, то ее КФ $b_k = 0$ ($k \in \mathbb{N}$). Если функция нечетна, то ее КФ $a_k = 0$ ($k \in \mathbb{N}_0$).*

Доказательство. Во-первых, заметим, что для четной функции f подынтегральная функция $f(x)\cos kx$ коэффициента a_k $(k \in \mathbb{N}_0)$ четна, а подынтегральная функция $f(x)\sin kx$ коэффициента b_k $(k \in \mathbb{N})$ нечетна. Если же функция f нечетна, то подынтегральная функция $f(x)\cos kx$ коэффициента a_k $(k \in \mathbb{N}_0)$ нечетна, а подынтегральная функция $f(x)\sin kx$ коэффициента b_k $(k \in \mathbb{N})$ четна. Поэтому достаточно доказать, что для четной функции $g \in L_R(-\pi,\pi)$ выполняется равенство $\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx = 2\int_0^{\pi} g(x)dx$, а для нечетной функции $g \in L_R(-\pi,\pi)$ выполняется равенство $\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx = 0$.

Указанные равенства доказаны нами для функций, интегрируемых по Риману. Чтобы доказать их для абсолютно интегрируемых функций, из отрезка $[-\pi,\pi]$ удалим ε-окрестности особых точек, которых конечное количество и которые расположены *симметрично* относительно точки ноль. На оставшемся объединении отрезков, которое тоже симметрично относительно точки ноль, интегральные равенства справедливы. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем требуемые интегральные равенства. ■

Из леммы 2.3.1 следует, что функцию, заданную на полупериоде $[0,\pi]$, можно раскладывать или только по косинусам, или только по синусам. Пусть функция $f \in L_R(0,\pi)$. Продолжим ее четным образом: $f(x) := f(-x)$, если $x \in (-\pi,0)$. Затем продолжим ее на $\mathbb{R}$ с периодом 2π. Как определена функция в точке $x=0$ не принципиально, так как на сходимость РФ одна точка не влияет. Полученная функция АИ на $(-\pi,\pi)$, поэтому ей отвечает (символьный) РФ по косинусам. Если же мы захотим продолжить функцию f нечетным образом, то сначала нам нужно переопределить ее в нуле: $f(0) := 0$. После чего полагаем $f(x) := -f(-x)$ для $x \in (-\pi,0)$ и продолжаем на всю ось с периодом 2π. Полученной функции отвечает РФ по синусам. Сходимость описанных рядов можно выяснить с помощью утверждений п. 2.2.

Пример 2.3.1. Пусть $f(x) = x^2 + 1$ на $[0,\pi]$. Продолжая функцию нечетным образом, мы получаем функцию, которая непрерывно дифференцируема всюду, кроме двух (с точностью до 2π-периодичности) точек $x_1 = 0$ и $x_2 = \pi$ разрыва и скачка производных. В особых точках РФ по синусам сходится к нулю, во всех остальных точках интервала $(0,\pi)$ – к $f(x)$ (рис. 2.8). Если же продолжить функцию f четным образом, то мы получаем функцию, которая непрерывно дифференцируема всюду, кроме одной точки π скачка производных; значит, РФ по косинусам сходится к данной функции на всем отрезке $[0,\pi]$ (рис. 2.9).

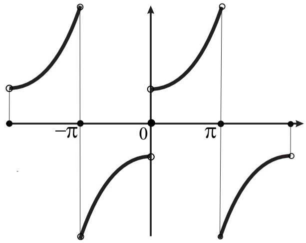

Рис. 2.8

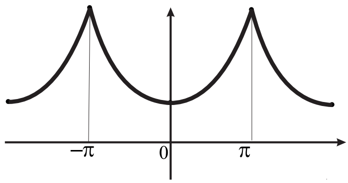

Рис. 2.9

Если функция задана на четверти периода $[0, \pi/2]$, то ее можно продолжить двумя симметричными способами на $(\pi/2, \pi)$, а затем каждое из продолжений продолжить двумя способами на $(-\pi, 0)$ – всего четыре способа. Все случаи описаны в таблице и проиллюстрированы (рис. 2.10–2.13):

$x \in (0, \pi/2)$	$x \in (0, \pi)$	обнуление, $k \in \mathbb{N}$	система
$f(\pi - x) = f(x)$	$f(-x) = f(x)$	$a_{2k-1} = b_k = 0$	$\{\cos 2(k-1)x\}$
$f(\pi - x) = f(x)$	$f(-x) = -f(x)$	$a_{k-1} = b_{2k} = 0$	$\{\sin(2k-1)x\}$
$f(\pi - x) = -f(x)$	$f(-x) = f(x)$	$a_{2(k-1)} = b_k = 0$	$\{\cos(2k-1)x\}$
$f(\pi - x) = -f(x)$	$f(-x) = -f(x)$	$a_{k-1} = b_{2k-1} = 0$	$\{\sin 2kx\}$

Задача 2.3.1. Докажите справедливость хотя бы одного из утверждений в столбце «обнуление».

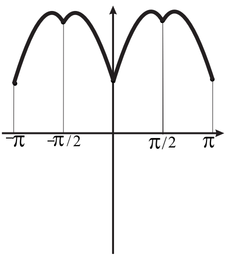

Рис. 2.10 $a_{2k-1} = b_k = 0$

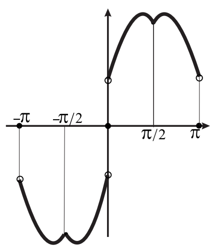

Рис. 2.11 $a_{k-1} = b_{2k} = 0$

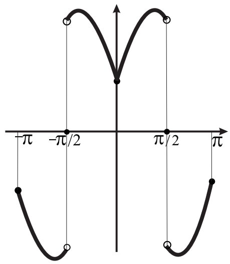

Рис. 2.12 $a_{2(k-1)} = b_k = 0$

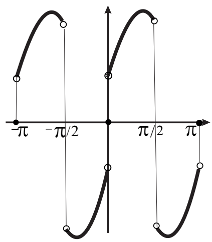

Рис. 2.13 $a_{k-1} = b_{2k-1} = 0$

Если функция f $2l$-периодична ($l > 0$) и $f \in L_R(-l,l)$, то после замены $x \to \pi x/l$ из тригонометрической системы (1.4) получаем систему

$$1 \equiv \cos(0x),\ \sin\frac{\pi x}{l},\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \ldots\ \cos\frac{\pi k x}{l},\ \sin\frac{\pi k x}{l}, \ldots,\ \text{где } k \in \mathbb{N},$$

а из формул (1.6) коэффициентов Фурье получаем формулы

$$a_0 := \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx,\ a_k := \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi k x}{l}dx,\ b_k := \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi k x}{l}dx.$$

После чего все утверждения переносятся без изменений на случай $2l$-периодичности.

Используя формулы Эйлера, связывающие тригонометрические функции с комплексной экспонентой, мы получаем следующие выражение для частичной суммы ряда Фурье:

$$FS_n(f,x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2} + b_k\frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}\right) =$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k - ib_k}{2}e^{ikx} + \frac{a_k+ib_k}{2}e^{-ikx}\right) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}\ ,$$

где $c_0 = a_0$, $c_k = (a_k - ib_k)/2$, $c_{-k} = (a_k + ib_k)/2$ ($k \in \mathbb{N}$).

Теперь сам РФ и его коэффициенты, учитывая определение (1.6), приобретают вид:

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},\ \text{где } c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx. \qquad (2.10)$$

Замечание 2.3.1. Поскольку в нашем рассмотрении функция f и ее коэффициенты Фурье *действительные*, получаем, что коэффициенты c_k комплексно сопряженные: $\bar{c}_k = c_{-k}$, где $k \in \mathbb{Z}$. $\boxminus$

Глава 3

Равномерная сходимость ряда Фурье

В общей теории функциональных рядов мы выяснили, как равномерная сходимость функционального ряда влияет на свойства предельной функции и возможность почленных действий с рядом (переход к пределу, интегрирование, дифференцирование). В этой главе мы опишем класс функций, к которым ряд Фурье сходится равномерно. После чего изучим возможность применять к рядам Фурье операции дифференцирования и интегрирования.

3.1. Сходимость ряда Фурье к кусочно-гладкой функции

Определение 3.1.1. Заданная на отрезке $[a, b]$ функция f называется **кусочно-гладкой**, если она непрерывна на нем и существует такое его разбиение $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b\}$, что на каждом подотрезке $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \ldots, k)$ функция $f \in C^1([x_{i-1}, x_i])$. ⊠

Замечание 3.1.1. Другими словами, функция является кусочно-гладкой, если в конечном количестве точек она испытывает скачок производной (определение 2.2.2), а в остальных точках является непрерывно дифференцируемой.

График кусочно-гладкой функции является кусочно-гладкой кривой (докажите), но обратное утверждение в общем случае неверно. Так, график функции $y = \sqrt{x}$ $(x \in [0, 1])$ является гладкой кривой, но в точке ноль функция не имеет *конечной* односторонней производной. ⊟

Лемма 3.1.1. *(об интегрировании кусочно-гладких функций по частям) Если функции f и g кусочно-гладкие, то для них верна формула интегрирования по частям:*

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Производные $f'(x)$ и $g'(x)$ в особых точках x_i можно доопределить произвольно: поскольку их конечное количество, то доопределение на результат интегрирования не повлияет.

Доказательство. В силу определения 3.1.1, существует разбиение $\{x_i\}_0^k$ отрезка $[a,b]$, для которого

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)g(x)dx.$$

Применяя к каждому отрезку формулу интегрирования по частям (что законно) и учитывая непрерывность функций f и g, получаем:

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = \sum_{i=1}^k \left(f(x)g(x)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g'(x)dx \right) =$$

$$= f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx. \quad \blacksquare$$

Теорема 3.1.1. *Ряд Фурье 2π-периодической и кусочно-гладкой на $[-\pi,\pi]$ функции сходится к ней равномерно на $\mathbb{R}$.*

Доказательство теоремы.

1. Сравним значение частичной суммы ряда Фурье со значением функции f в точке x. С этой целью воспользуемся формулой (2.7), заменив константу A на значение $f(x)$:

$$FS_n(f,x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})t\ dt = \ldots$$

Поскольку знаменатель обнуляется в точке ноль, целесообразно расписать исследуемый интеграл на два

$$\ldots = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\delta_n} + \int_{\delta_n}^\pi\right] \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})t\ dt,$$

где $\delta_n \in (0,\pi)$ нам предстоит определить для каждого $n \in \mathbb{N}$.

2. Введем обозначение

$$g(t,x) := \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

Оценим модуль функции $g(t,x)$ на прямоугольнике $[-\pi, pi] \times [-\pi,\pi]$:

$$|g(t,x)| \le \left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\cdot\frac{t/2}{\sin\frac{t}{2}}\right| + \left|\frac{f(x-t)-f(x)}{t}\cdot\frac{t/2}{\sin\frac{t}{2}}\right|.$$

Поскольку производная f' кусочно-непрерывна, то $|f'(x)| \le C_1$, где C_1 – некоторая положительная постоянная. В силу неравенства Лагранжа, $|f(x \pm t) - f(x)| \le C_1 t$. Далее, $\sin\tau \ge 2\tau/\pi$ пока $\tau \in [0,\pi/2]$; поэтому $\sin(t/2) \ge t/\pi$ пока $t \in [0,\pi]$. Следовательно

$$|g(t,x)| \le \frac{C_1\pi}{2}\cdot 2 = C_1\pi.$$

3. Оценим модуль производной

$$|g'_t(t,x)| =$$

$$= \frac{|(f'(x+t)-f'(x-t))\sin\frac{t}{2} - \frac{(1)}{2}(f(x+t)+f(x-t)-2f(x))\cos\frac{t}{2}|}{2\sin^2(t/2)}.$$

Учитывая предыдущие оценки, мы получаем:

$$|g'_t(t,x)| \le \frac{1}{2}\left[\frac{2C_1\pi}{t} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2C_1 t\pi^2}{t^2}\right] \le \frac{C_2}{t},$$

где C_2 – некоторая положительная постоянная.

4. Оценим первый интеграл, полученный в п. 1, учитывая оценку из п. 2:

$$\left|\int_0^{\delta_n} g(t,x)\sin(n+\frac{1}{2})t\ dt\right| \le C_1\pi\delta_n.$$

Чтобы оценить второй интеграл, возьмем его по частям, сославшись на лемму 3.1.1:

$$\left|\int_{\delta_n}^{\pi} g(t,x)\sin(n+\frac{1}{2})t\ dt\right| =$$

$$= \left|-g(t,x)\frac{\cos(n+\frac{1}{2})t}{n+\frac{1}{2}}\right|_{\delta_n}^{\pi} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_{\delta_n}^{\pi} g'_t(t,x)\cos(n+\frac{1}{2})t\ dt\Bigg| \le \ldots$$

Поскольку $\cos(n+\frac{1}{2})\pi = 0$, то, в силу предыдущих оценок,

$$\ldots \leq \frac{1}{n}\left(C_1\pi + C_2\int_{\delta_n}^{\pi}\frac{dt}{t}\right) \leq \frac{1}{n}\left(C_1\pi + C_2\ln\frac{\pi}{\delta_n}\right).$$

5. Теперь положим $\delta_n = \frac{1}{n}$. В силу оценок предыдущего пункта доказательства, получаем

$$|FS_n(f,x) - f(x)| \leq \frac{1}{\pi}\left(\frac{C_1\pi}{n} + \frac{C_1\pi + C_2\ln(\pi n)}{n}\right) \leq C_3\frac{\ln n}{n},$$

где $n \geq 2$, а C_3 – некоторая положительная постоянная. Поскольку полученная оценка НЕ зависит от $x \in [-\pi,\pi]$, а $\ln n/n \to 0$ при $n \to \to \infty$, то теорема доказана. ∎

3.2. Дифференцирование и интегрирование ряда Фурье

Сейчас мы ответим на вопрос: будет ли ряд, полученный после почленных операций, рядом Фурье, а если ответ утвердительный, то для какой функции?

Теорема 3.2.1. *(о почленном дифференцировании РФ) Пусть функция f 2π-периодическая и кусочно-гладкая на $[-\pi,\pi]$. Пусть*

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx + b_k\sin kx$$

ее разложение в РФ. Тогда ряд Фурье ее производной f' получается формальным дифференцированием:

$$f' \sim \sum_{k=1}^{\infty} -ka_k\sin kx + kb_k\cos kx.$$

Обсуждение 3.2.1. Ряд Фурье данной функции сходится к ней равномерно в силу теоремы 3.1.1. Ряд, полученный формальным дифференцированием, является символическим РФ – мы не можем даже утверждать, что он сходится поточечно. ⊟

Доказательство. Поскольку производная f' кусочно-непрерывная функция, у нее существует символический РФ, т. е. у нее определены коэффициенты Фурье α_k, β_k. Найдем связь между коэффициентами Фурье функций f и f'. Обоснуем возможность интегрирования по частям в формулах (1.6). Поскольку функция f непрерывна, а f' – кусочно-непрерывна, отрезок интегрирования разбивается на конечное количество подотрезков точками разрыва производной f'. На каждом из подотрезков применяется формула интегрирования по частям, после чего полученные равенства складываются: лишние слагаемые взаимно уничтожаются в силу непрерывности и периодичности f, а к интегралам на подотрезках применяется свойство аддитивности интеграла Римана (проверьте все выкладки на одной особой точке). Итак:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\ dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi k} f(x)\cos kx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos kx\ dx = \frac{1}{k}\alpha_k.$$

Аналогично для $k \in \mathbb{N}$ справедливо $a_k = -\beta_k/k$. Получаем, что

$$\alpha_k = kb_k,\ \ \beta_k = -ka_k \text{ для всех } k \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Из условия периодичности $f(-\pi) = f(\pi)$ следует, что

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\ dx = \frac{1}{2\pi}(f(\pi) - f(-\pi)) = 0.$$

Поэтому РФ производной есть

$$f' \sim \sum_{k=1}^{\infty} k(b_k\cos kx - a_k\sin kx) = (a_0)' + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)'. \ \blacksquare$$

Теорема 3.2.2. *(о почленном интегрировании РФ) Пусть функция f кусочно-непрерывная на $[-\pi,\pi]$ и*

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx + b_k\sin kx$$

ее РФ. Тогда для любого $x \in [-\pi,\pi]$ справедлива формула почленного интегрирования РФ:

$$\int_0^x f(t)dt - \int_0^x a_0 dt = \int_0^x f(t)dt - a_0 x = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x (a_k\cos kt + b_k\sin kt)\ dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} \sin kx + \frac{b_k}{k}(1 - \cos kx) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-b_k}{k} \cos kx + \frac{a_k}{k} \sin kx,$$

где ряд в правой части сходится равномерно.

Обсуждение 3.2.2. В теореме 3.2.2, в противоположность теореме 3.2.1, исходный РФ является символическим и в общем случае не является сходящимся. После интегрирования мы получаем равномерно сходящийся РФ функции $F(x) = \int_0^x f(t)dt - a_0 x$. ⊟

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(x) := \int_0^x (f(t) - a_0)dt$. Она непрерывна и $F(\pi) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ dt - 2\pi a_0 = 0$ (в силу определения коэффициента a_0). Кроме того, ее можно дифференцировать всюду, кроме конечного количества точек разрыва функции f, и $F'(x) = f(x) - a_0$. В точках разрыва существуют односторонние производные $F'_{\pm}(x_i) = f(x_i \pm 0) - a_0$ (докажите это утверждение). Итак, функция F кусочно-гладкая и к ней применимы теорема 3.1.1 и теорема 3.2.1:

1) функция $F(x)$ равна сумме своего РФ:

$$F(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos kx + B_k \sin kx,$$

   где A_k, B_k – КФ функции $F(x)$;

2) коэффициенты Фурье функций F и $f(x) - a_0$ связаны соотношениями:

$$A_k = -\frac{b_k}{k}, \quad B_k = \frac{a_k}{k} \text{ для всех } k \in \mathbb{N}.$$

Чтобы найти A_0, положим $x = 0$, тогда $F(0) = 0$ и

$$0 = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \;\Rightarrow\; A_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}.$$

Остается подставить полученные выражения в формулу РФ функции F. Отметим, что находить коэффициент Фурье A_0 проще по формуле $A_0 = (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx$. ■

3.3. Порядок убывания коэффициентов Фурье

Мы покажем, что порядок убывания коэффициентов Фурье определяется порядком гладкости функции.

Опишем новый класс функций:

Определение 3.3.1. Заданная на отрезке $[a, b]$ функция называется **разрывно кусочно–гладкой**, если она кусочно-непрерывна на нем, принадлежит классу C^1 на интервалах непрерывности, а ее точки разрыва являются точками скачка производной согласно п. 2 определения 2.2.2. ⊠

Лемма 3.3.1. *(о порядке убывания КФ разрывно кусочно–гладкой функции) Пусть функция f разрывно кусочно–гладкая на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда коэффициенты Фурье функции f убывают "обратно пропорционально" их номеру, а именно:*

$$|a_k| + |b_k| = O\left(\frac{1}{k}\right) \;\Leftrightarrow\; \exists C > 0 : \;\forall k \in \mathbb{N} \;\hookrightarrow\; |a_k| + |b_k| < \frac{C}{k}. \quad (3.2)$$

Доказательство. Из кусочной непрерывности f и f' следует их ограниченность:

$$\exists C_0, C_1 > 0 : \;\forall x \in [-\pi, \pi] \;\hookrightarrow\; |f(x)| < C_0,\; |f'(x)| < C_1.$$

Если $-\pi = x_0 < x_1 < \ldots < x_I = \pi$ – точки разрывов функции f, то, как было показано выше, на каждом интервале непрерывности f можно применить интегрирование по частям к функции f:

$$|b_k| = \Big|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\; dx\Big| = \frac{1}{\pi k}\Big|\sum_{i=1}^{I}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\; d\cos kx\Big| =$$

$$= \frac{1}{\pi k}\Big|\sum_{i=1}^{I}\left(f(x)\cos kx\Big|_{x_{i-1}+0}^{x_i-0} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)\cos kx\; dx\right)\Big| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi k}\left(2C_0 I + 2\pi C_1\right).$$

Значит, $b_k = O\left(\frac{1}{k}\right)$. Оценка $a_k = O\left(\frac{1}{k}\right)$ доказывается аналогично. ■

Теорема 3.3.1. *(о порядке убывания КФ и остатка РФ)*

1) Пусть у 2π-периодической функции f:
1) производные порядков q и $q+1$ кусочно-непрерывны на $[-\pi,\pi]$ $(q = 0, 1, \ldots)$;
2) сама функция и все ее предыдущие производные до порядка $q-1$ включительно непрерывны на $[-\pi,\pi]$ и удовлетворяют условию периодичности $f^{(i)}(-\pi) = f^{(i)}(\pi)$ $(i = 0, 1, \ldots, q-1)$.

Тогда имеет место следующая оценка убывания КФ функции f с ростом номера:

$$|a_k| + |b_k| = O\left(\frac{1}{k^{q+1}}\right) \Leftrightarrow$$

$$\exists C > 0 : \ \forall k \in \mathbb{N} \ \hookrightarrow \ |a_k| + |b_k| < \frac{C}{k^{q+1}}. \qquad (3.3)$$

2) Если в условиях п. 1 $q \geq 1$, то справедлива следующая оценка убывания остатка РФ $r_n(x) := \sum_{n+1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |r_n(x)| = O\left(\frac{1}{n^q}\right).$$

Замечание 3.3.1. Если в условии 1) показатель $q = 0$, то условие 2) не имеет смысла. $\boxminus$

Доказательство п. 1. Заметим, что при $q = 0$ функция и ее первая производная кусочно–непрерывны, т. е. функция разрывно кусочно–гладкая. Значит, мы находимся в условиях леммы 3.3.1 – утверждение леммы 3.3.1 есть п. 1 теоремы. Рассмотрим общий случай $q \in \mathbb{N}$. Вплоть до порядка дифференцирования $q-1$ к функции $g_p(x) = f^{(p)}(x)$ $(p = 0, 1, \ldots, q-1)$ можно применять теорему 3.2.1 о почленном дифференцировании. Обозначим через $a_k^{(p)}, b_k^{(p)}$ коэффициенты Фурье функции $g_p(x)$, тогда (согласно (3.1))

$$|a_k| + |b_k| = \frac{1}{k}(|a_k^{(1)}| + |b_k^{(1)}|) = \frac{1}{k^2}(|a_k^{(2)}| + |b_k^{(2)}|) = \ldots = \frac{1}{k^q}(|a_k^{(q)}| + |b_k^{(q)}|).$$

С другой стороны, применяя к функции $g_q(x) = f^{(q)}(x)$ лемму 3.3.1, получаем (см. (3.2)) оценку $|a_k^{(q)}| + |b_k^{(q)}| = O(1/k)$. Что доказывает (3.3).

Из полученной оценки (3.3) следует искомая оценка остатка РФ:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |r_n(x)| \leq C \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{q+1}} \leq C \int_n^{\infty} \frac{dt}{t^{q+1}} = \frac{C}{q}\frac{1}{n^q} = O\left(\frac{1}{n^q}\right). \ \blacksquare$$

Глава 4

Усреднение ряда Фурье методом Фейера

И поверишь ли, друг? чем больше я размышляю,
тем больше склоняюсь в пользу законов средних.

М.Е. Салтыков-Щедрин. История одного города

Мы приняли к сведению, что РФ непрерывной функции может расходиться в некоторых точках. Оказывается, существуют методы усреднения, которые улучшают сходимость последовательности. В частности, мы рассмотрим метод, который из РФ конструирует функциональную последовательность, равномерно сходящуюся к данной непрерывной функции.

4.1. Предварительные утверждения

Рассмотрим две числовые последовательности: данную $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и последовательность средних арифметических $\sigma_n := (a_1 + \ldots + a_n)/n$ ее первых членов.

Лемма 4.1.1. *(Коши о сходимости средних арифметических) Если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходящаяся, то к этому же пределу сходится последовательность средних арифметических:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \sigma_n = a.$$

Доказательство. По произвольному $\varepsilon > 0$ выберем номер n_0, для которого $|a_k - a| < \varepsilon/2$ для всех $k > n_0$. Оценим разность

$$|\sigma_n - a| = \left|\frac{a_1 + \ldots + a_{n_0} + a_{n_0+1} + \ldots + a_n}{n} - a\right| =$$

$$= \left|\frac{a_1 + \ldots + a_{n_0} - n_0 a}{n} + \frac{(a_{n_0+1} - a) + \ldots + (a_n - a)}{n}\right| \leq$$

$$\leq \frac{|a_1 + \ldots + a_{n_0} - n_0 a|}{n} + \frac{|(a_{n_0+1} - a) + \ldots + (a_n - a)|}{n}.$$

Поскольку номер n_0 зафиксирован, числитель первой дроби $|a_1 + \ldots + a_{n_0} - n_0 a| = const$. Значит, существует такой номер m_0, что для всех $n > m_0$ верно: $|a_1 + \ldots + a_{n_0} - n_0 a|/n < \varepsilon/2$. Оценим вторую дробь:

$$\frac{|(a_{n_0+1} - a) + \ldots + (a_n - a)|}{n} \leq \frac{|a_{n_0+1} - a| + \ldots + |a_n - a|}{n} \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{n - n_0}{n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Значит, для всех $n > \max\{n_0, m_0\}$ имеет место оценка $|\sigma_n - a| < \varepsilon$. ■

В обратную сторону утверждение неверно!

Пример 4.1.1. расходящейся последовательности, у которой последовательность средних арифметических сходится:

$$a_n = (-1)^n, \quad \sigma_1 = \frac{-1}{1},\ \sigma_2 = \frac{0}{2},\ \sigma_3 = \frac{-1}{3}, \ldots \to 0.$$

Применим метод усреднения к последовательности частичных сумм РФ и соответствующих ядер Дирихле:

Определение 4.1.1. Пусть $f \in L_R(-\pi, \pi)$.

1) **Суммами Фейера** (Липот Фейер, 1880 – 1959) $\Sigma_n(f, x)$ функции f называют средние арифметические сумм Фурье $FS_n(f, x)$ этой же функции:

$$\Sigma_n(f, x) := \frac{FS_0(f, x) + \ldots + FS_n(f, x)}{n + 1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

2) **Ядрами Фейера** называют средние арифметические ядер Дирихле $D_n(x)$:

$$\Phi_n(t) := \frac{D_0(t) + \ldots + D_n(t)}{n + 1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad \boxtimes$$

Замечание 4.1.1. Суммы Фейера НЕ являются *частичными* суммами какого-либо тригонометрического ряда, поскольку в них коэффициенты при $\cos kx$ и $\sin kx$ ($k \in \mathbb{N}$) *зависят* от номера: $\sum_n(f,x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k(n)\cos kx + b_k(n)\sin kx$. Суммы Фейера являются элементами функциональной *последовательности.* ⊟

Для ядер Фейера и сумм Фейера имеют место аналоги лемм 2.1.1 и 2.1.2.

Лемма 4.1.2. *Ядро Фейера*

1) для всех n удовлетворяет неизменному условию нормировки

$$\int_0^{\pi} \Phi_n(t)dt = \frac{\pi}{2};$$

2) вычисляется по формулам:

$$\Phi_n(t) = \frac{\sin^2 \frac{(n+1)t}{2}}{2(n+1)\sin^2 \frac{t}{2}} \text{ при } t \neq 2\pi m,$$

$$\Phi_n(t) = \frac{n+1}{2} \text{ при } t = 2\pi m \quad (m \in \mathbb{Z});$$

3) является четной, неотрицательной, непрерывной, 2π-периодической функцией;

4) равномерно стремится к нулю вне произвольной окрестности нуля:

$$\forall \delta \in (0,\pi] \;\hookrightarrow\; \max_{t\in[\delta,\pi]} \Phi_n(t) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Обсуждение 4.1.1. Сравнивая ядра Фейера с ядрами Дирихле, мы видим, что сохранились нормировка, четность, периодичность, непрерывность, выраженный максимум в точках $2\pi m$ того же первого порядка по n. Однако осциллируемость неубывающей амплитуды сменилась неотрицательной колеблемостью, амплитуда которой обратно пропорциональна номеру n ядра (график ядра Фейера на рис. 4.1). Оказывается, измененные свойства ядра улучшают сходимость! ⊟

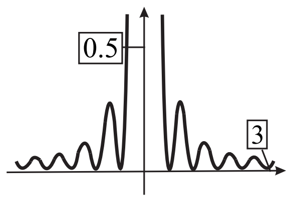

Рис. 4.1

Лемма 4.1.3. *(об интегральном представлении суммы Фейера) Пусть f – 2π-периодическая функция и $f \in L_R(-\pi,\pi)$. Тогда для ее сумм Фейера справедливо представление*

$$\Sigma_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x+t)+f(x-t))\Phi_n(t)dt. \tag{4.1}$$

Замечание 4.1.2. Интегральное представление сумм Фейера имеет такой же вид, что и представление (2.4) частичных сумм РФ. $\boxminus$

Доказательство леммы 4.1.2. Пункт 1: усреднение константы есть константа (убедитесь самостоятельно). Пункт 2 доказывается по определению тем же методом, что и формула ядра Дирихле. Пункты 3 и 4 сразу следуют из п. 2. ■

Доказательство леммы 4.1.3 следует из определения ядер Фейера, формулы Дирихле (2.4) и линейности интеграла. ■

4.2. Аппроксимация непрерывной периодической функции

Теорема 4.2.1. *(Фейера об аппроксимации) Непрерывная 2π-периодическая функция f аппроксимируется своими суммами Фейера равномерно на всей оси:*

$$\Sigma_n(f,x) \rightrightarrows f(x) \text{ на } \mathbb{R} \text{ при } n\to\infty.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.2.1 Дини. Воспользуемся свойством нормировки, неотрицательностью ядра Фейера (п. 1 и 3 леммы 4.1.2) и интегральным представлением (4.1) сумм Фейера, чтобы оценить разность суммы Фейера и значение функции:

$$\Delta_n(x) := |\Sigma_n(f,x)-f(x)| = \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{\pi}(f(x+t)+f(x-t)-2f(x))\Phi_n(t)\,dt\right| \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|\Phi_n(t)\,dt.$$

Пусть $\delta \in (0,\pi)$. Введем в рассмотрение интегралы

$$Int_{<\delta} := \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|\Phi_n(t)dt,$$

$$Int_{>\delta} := \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} |f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|\Phi_n(t)dt.$$

Тогда $\Delta_n = Int_{<\delta} + Int_{>\delta}$. Параметр δ имеет техническое назначение. Нам предстоит так подобрать номер n, чтобы получить оценку малости разности Δ_n не взирая на δ.

Обозначим супремум колебания функции на δ-отрезке через

$$\omega(\delta) := \sup_{|x_1-x_2|\le\delta} |f(x_2)-f(x_1)|, \text{ где } x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Как мы уже отмечали при доказательстве леммы **??**, непрерывная и периодическая функция f равномерно непрерывна на всей оси. Поэтому $\lim_{\delta\to 0}\omega(\delta) = 0$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Оценим $Int_{<\delta}$, сравнив значение функции $f(x)$ с отклонениями $f(x\pm t)$:

$$Int_{<\delta} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} |(f(x+t)-f(x)) + (f(x-t)-f(x))|\Phi_n(t)dt \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} (|f(x+t)-f(x)| + |f(x-t)-f(x)|)\Phi_n(t)dt \le$$

$$\le \frac{2\omega(\delta)}{\pi}\int_0^{\delta} \Phi_n(t)\ dt \le \frac{2\omega(\delta)}{\pi}\int_0^{\pi} \Phi_n(t)\ dt \le \omega(\delta) < \frac{\varepsilon}{2},$$

если $\delta = \delta(\varepsilon)$ достаточно мало. (Мы еще раз воспользовались неотрицательностью и свойством нормировки ядра Фейера.)

Чтобы оценить $Int_{>\delta}$, воспользуемся 2π-периодичностью и непрерывностью функции f и введем $M := \max\limits_{\mathbb{R}} |f(x)| = \max\limits_{[-\pi,\pi]} |f(x)|$. Тогда

$$Int_{>\delta} \le \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} |f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|\Phi_n(t)dt \le$$

$$\le \frac{4M}{\pi}\cdot \max_{t\in[\delta,\pi]} \Phi_n(t)\cdot\pi \le \frac{\varepsilon}{2}$$

для уже выбранного δ, если $n = n(\delta(\varepsilon)) = n(\varepsilon)$ достаточно велико (в силу п. 4 леммы 4.1.2).

Мы показали, что $\Delta_n(x) < \varepsilon$ для всех достаточно больших n равномерно для всех $x \in \mathbb{R}$. ■

Обсуждение 4.2.1. Еще раз обращаем внимание, что доказательство теоремы Фейера опирается на доказанные свойства ядра Фейера: неограниченно растущий максимум в окрестности нуля, неотрицательность, “почти обнуление” вне малой окрестности нуля и неизменность нормировки при всех n. Именно эти свойства лежат в основе понятия δ-функции Дирака, которую мы рассмотрим позже. ⊟

4.3. Аппроксимация непрерывных функций многочленами

В качестве следствия теоремы Фейера мы докажем аппроксимационные теоремы Вейерштрасса.

Определение 4.3.1. Тригонометрическим многочленом (ТМ) степени n называют сумму

$$T_n(x) := A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos kx + B_k \sin kx$$

при условии $A_n^2 + B_n^2 > 0$. ⊠

Теорема 4.3.1. *(Первая теорема Вейерштрасса об аппроксимации тригонометрическим многочленом) Пусть функция $f \in C^0[-\pi, \pi]$ и удовлетворяет условию периодичности $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой ТМ $T_n(x)$, который равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$ аппроксимирует $f(x)$ с точностью до ε, т. е.*

$$\max_{x \in [-\pi,\pi]} |f(x) - T_n(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Благодаря условию периодичности функцию f можно непрерывно доопределить на всю числовую ось. Теперь в качестве искомого многочлена можно взять сумму Фейера $\Sigma_n(f, x)$ функции f с достаточно большим n. В самом деле, сумма Фейера является линейной комбинацией сумм Фурье, значит это ТМ. А из теоремы 4.2.1 Фейера следует, что с помощью номера n можно добиться произвольной ε-аппроксимации. ■

Теорема 4.3.2. *(Вторая теорема Вейерштрасса об аппроксимации многочленами) Пусть функция $f \in C^0[a, b]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой многочлен $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, который равномерно на отрезке $[a, b]$ аппроксимирует $f(x)$ с точностью до ε, т. е.*

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Замена независимой переменной

$$x = a + \frac{b-a}{\pi} t, \quad t \in [0, \pi], \quad x \in [a, b]$$

преобразует данную функцию в функцию $\varphi(t) := f(x(t))$, которая определена и непрерывна на $[0, \pi]$. Продолжим функцию φ на $[-\pi, 0]$ четным образом – получим функцию $\varphi(t)$ непрерывную на $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяющую условию периодичности $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$. В силу первой теоремы Вейерштрасса, существует такой ТМ $T_m(t)$, что

$$\max_{t\in[-\pi,\pi]} |\varphi(t) - T_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ТМ $T_m(t)$ есть конечная линейная комбинация косинусов и синусов (судя по предложенному доказательтству первой теоремы Вейерштрасса, комбинация только косинусов, но это обстоятельство несущественно). Каждое из слагаемых ТМ раскладывается равномерно на $[-\pi, \pi]$ в ряд Маклорена (это следует из теоремы Абеля о равномерной сходимости степенного ряда). Поэтому весь ТМ $T_m(t)$ аппроксимируется равномерно на $[-\pi, \pi]$ частичными суммами $Q_n(t)$ указанного ряда Маклорена с любой точностью:

$$\max_{t\in[-\pi,\pi]} |Q_n(t) - T_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно,

$$\max_{t\in[-\pi,\pi]} |\varphi(t) - Q_n(t)| < \varepsilon.$$

Осуществляя обратную замену $t = \pi(x - a)/(b - a)$, получаем

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - Q_n\left(\frac{\pi(x-a)}{b-a}\right)| < \varepsilon.$$

Но $P_n(x) := Q_n(\pi(x - a)/(b - a))$ – это многочлен той же степени n. Он дает нам искомую аппроксимацию. ■

Подводя итоги изучению рядов Фурье методами классического анализа, отметим, что:

1) всякой 2π-периодической абсолютно интегрируемой на периоде функции f можно сопоставить формальный ряд Фурье, коэффициенты которого, в силу теоремы Римана об осцилляции, стремятся к нулю с ростом номера;

2) если в точке x функция f регулярна по Липшицу–Гельдеру, то ее ряд Фурье сходится в этой точке к значению функции $f(x)$;

3) если 2π-периодическая функция кусочно-гладкая, то ряд Фурье сходится к ней равномерно на всей оси;

4) чем глаже функция, тем быстрее убывают ее коэффициенты Фурье: если q-я и $(q+1)$-я производные кусочно-непрерывны, а все предыдущие производные непрерывны, то коэффициенты Фурье убывают обратно пропорционально номеру в степени $q+1$;

5) для непрерывной 2π-периодической функции усреднение методом Фейера частичных сумм ее ряда Фурье порождает последовательность тригонометрических полиномов, которая сходится к функции равномерно на всей оси.

Глава 5

Метрические и нормированные пространства

Происхождение рядов Фурье связано с разложением вектора в конечномерном евклидовом пространстве. Ортогональную систему тригонометрических функций мы обнаружили в функциональном пространстве $L^2_R(-\pi, \pi)$. Разложение в ряд Фурье мы применяли к функциям, обладающим разными свойствами: абсолютно интегрируемым, непрерывным, кусочно-гладким, разрывно кусочно-гладким и др. Сейчас мы переходим к изучению рядов Фурье с точки зрения функциональных пространств. То есть. мы применим к ним методы функционального анализа. Параграф имеет обзорный характер. Доказательства лишь намечены, многие даны в виде задач. Его цель – *ознакомить* с первоначальными многочисленными понятиями и утверждениями, лежащими в основе функционального анализа.

5.1. Метрические пространства

Начнем с обсуждения одной из самых простых структур.

Определение 5.1.1. **Метрическим пространством** называется множество M, на котором определена **метрика**, т. е. функция, сопоставляющая произвольной паре элементов $(x, y) \in M \times M$ неотрицательное число $\rho(x, y) \geq 0$ и удовлетворяющая для любых $x, y, z \in M$ аксиомам:

1) тождественности: $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$;

2) симметричности: $\rho(x, y) = \rho(y, x)$

3) неравенству треугольника: $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Значение $\rho(x, y)$ называется **расстоянием** между элементами. ⊠

Обозначение. Если важно напомнить, в какой метрике рассматривается множество M, метрическое пространство обозначают (M, ρ).

Примеры 5.1.1. метрических пространств:

1) числовая прямая $\mathbb{R}$ с $\rho(x, y) = |x - y|$;

2) множество $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел с $\rho(x, y) = |x - y|$;

3) комплексная прямая $\mathbb{C}$ с $\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$;

4) евклидова плоскость, на которой расстояние между точками A и B равно длине соединяющего их отрезка: $\rho(A, B) = |AB|$;

5) окружность, на которой расстояние между точками равно длине соединяющего их отрезка (хорды): $\rho_1(A, B) = |AB|$;

6) окружность, на которой расстояние между точками равно длине меньшей дуги окружности, соединяющей точки: $\rho_2(A, B) = |\widetilde{AB}|$.

Поскольку в примерах 5 и 6 метрика определяется по-разному, это разные метрические пространства: $(S^1, \rho_1) \neq (S^1, \rho_2)$ (рис. 5.1).

Задача 5.1.1. Во всех примерах проверьте выполнение аксиом метрического пространства.

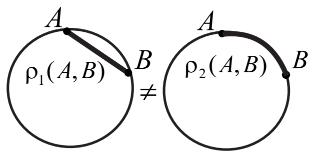

Рис. 5.1

В метрическом пространстве вводятся понятия **шара и сферы**.

Задача 5.1.2. Самостоятельно дайте определения открытого (замкнутого) шара $Ball(x, R)$ ($\overline{Ball}(x, R)$) с центром в точке x радиуса R и сферы $S(x, R)$. Опишите и изобразите шар и сферу в приведенных примерах 1–6.

Открытый шар $Ball(x,\varepsilon) = U_\varepsilon(x)$ мы традиционно называем ε-**окрестностью** точки x, а шар без центра $Ball(x,R)\setminus\{x\} = \overset{\circ}{U}_\varepsilon(x)$ — **проколотой окрестностью** точки x.

Пусть $X \subset M$ – подмножество метрического пространства M. Как и в теории арифметических n-мерных пространств $\mathbb{R}^n$, вводятся понятия дополнения $X^C \subset M$ к X и типов точек по отношению к X (внутренняя, предельная, изолированная, граничная). Затем определяются типы подмножеств (открытое, замкнутое, ограниченное, компактное) и подмножества, порожденные X (внутренность X^0, замыкание $\overline{X}$, граница ∂X).

Задача 5.1.3. Сформулируйте (или повторите) все названные определения.

Нам понадобится

Лемма 5.1.1. *(о метрическом подпространстве) Любое подмножество $M_1 \subset M$ метрического пространства является метрическим пространством с **индуцированной** метрикой:*

$$\forall x,y \in M_1 \;\hookrightarrow\; \rho_1(x,y) := \rho(x,y).$$

*Подмножество $(M_1,\rho) \subset (M,\rho)$ называют **метрическим подпространством**.*

Примеры 2 и 5 иллюстрируют это определение: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ – метрическое подпространство, окружность с метрикой $\rho_1(A,B) = |AB|$ является метрическим подпространством евклидовой плоскости. Окружность с метрикой из примера 6 НЕ является метрическим подпространством плоскости.

Задача 5.1.4. Докажите лемму 5.1.1.

Определение 5.1.2. Метрические пространства (M_1,ρ_1) и (M_2,ρ_2) называют **изометричными** (т. е. метрически эквивалентными), если между ними существует биекция F, *сохраняющая* расстояние (**изометрия**):

$$F : M_1 \;\leftrightarrow\; M_2,\; \forall x,y \in M_1 \;\hookrightarrow\; \rho_1(x,y) = \rho_2(F(x),F(y)). \;\boxtimes$$

Задача 5.1.5. Докажите, что: 1) евклидова плоскость и комплексная плоскость изометричны; 2) любые две окружности с метриками 5 и 6 неизометричны (примените к каждой окружности аксиому 3 из определения 5.1.1)

Задача 5.1.6. Докажите, что изометрия является отношением эквивалентности. Откуда следует, что множество всех метрических пространств разбивается на непересекающиеся классы. Теория метрических пространств изучает именно классы, а не каждое пространство в отдельности.

Понятие предела и непрерывного отображения метрических пространств строится по той же схеме, что и для арифметических пространств.

Определение 5.1.3. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ точек метрического пространства называется **сходящейся** к точке $x \in M$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$. Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. $\boxtimes$

Задача 5.1.7. Докажите, что сходящаяся последовательность имеет *единственный* предел.

Без изменений формулируется определение предела отображения:

Определение 5.1.4. Пусть $F : X \to Y$ – отображение метрических пространств. Отображение имеет **предел** (по Коши) в точке $x_0 \in X$, если существует такая точка $y_0 \in Y$, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \ F(\overset{\circ}{U}_{\delta} (x_0)) \subset U_{\varepsilon}(y_0). \ \boxtimes$$

Задача 5.1.8. Дайте определение предела в точке по Гейне и определения **непрерывности отображения** в точке и на всем X (воспользуйтесь соответствующими определениями из теории отображений конечномерных пространств). Можно ли определить понятие производной отображения, пользуясь только метрической структурой?

Пример 5.1.1. Метрика ρ метрического пространства M является непрерывной функцией, точнее: отображение $M \times M \ni (x, y) \to \to \rho(x, y) \in \mathbb{R}_0^+$ непрерывно.

Задача 5.1.9. Докажите сформулированное в примере утверждение. (Указание: переформулируйте его в терминах определения предела по Коши).

Определение 5.1.5. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ точек метрического пространства называется **фундаментальной**, если она удовлетворяет условию Коши: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) : \ \forall n, m > N \ \hookrightarrow \ \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$. $\boxtimes$

Лемма 5.1.2. *(необходимое условие сходимости) Если последовательность сходящаяся, то она фундаментальна.*

Задача 5.1.10. Докажите лемму 5.1.2.

Определение 5.1.6. Метрическое пространство называется **полным**, если любая его фундаментальная последовательность является сходящейся. ⊠

Примеры 5.1.2. Кроме $\mathbb{Q}$, все приведенные примеры являются полными метрическими пространствами.

Задача 5.1.11. Докажите неполноту $\mathbb{Q}$ и полноту остальных примеров метрических пространств.

Полнота пространства играет важнейшую роль в проблеме *существования* математического объекта. Такими объектами являются, например, решения функциональных (дифференциальных, интегральных и других) уравнений. Предложена стандартная процедура, позволяющая от неполного пространства перейти к полному. Сейчас мы только наметим ее этапы.

Определение 5.1.7. Метрическое подпространство $(M_1, \rho) \subset$ $\subset (M, \rho)$ называется **плотным** в M, если в любой окрестности произвольной точки пространства M имеется точка, принадлежащая подпространству M_1:

$$\forall x \in M \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x' \in M_1 : \ \rho(x, x') < \varepsilon. \ \boxtimes$$

Пример 5.1.2. $\mathbb{Q}$ плотно в $\mathbb{R}$.

Определение 5.1.8. *Полное* метрическое пространство (M, ρ) называется **пополнением** своего подпространства $(M_1, \rho) \subset (M, \rho)$, если (M_1, ρ) плотно в (M, ρ). ⊠

Пример 5.1.3. $\mathbb{R}$ есть пополнение $\mathbb{Q}$.

Задача 5.1.12. Докажите: если M – полное пространство, то M является пополнением M_1 только тогда, когда M есть замыкание M_1 $(M = \overline{M}_1)$.

Теорема 5.1.1. *(о возможности пополнения) У всякого метрического пространства существует пополнение, причем единственное с точностью до изометрии.*

Доказательство. Мы только наметим основные этапы в доказательстве теоремы 5.1.1. Если пространство полное, то оно совпадает со своим пополнением. В неполном пространстве M рассматривают множество M_{sec} всех фундаментальных последовательностей $\{x_n\}$ и разбивают (**факторизуют**) M_{sec} на классы эквивалентности $\{x_n\}^*$ по принципу "неограниченного сближения":

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0.$$

(Докажите, что это отношение эквивалентности.) Оказывается, множество M^*_{sec} классов $\{x_n\}^*$ является метрическим пространством, если определить в нем метрику так:

$$\rho^*(\{x_n\}^*, \{y_n\}^*) = \lim_{n\to\infty} \rho(\{x'_n\}, \{y'_n\}),$$

где $\{x'_n\} \in \{x_n\}^*$, $\{y'_n\} \in \{y_n\}^*$ – *произвольные* представители взятых классов. Более того, во-первых, пространство M^*_{sec} является полным. Во-вторых, метрическое подпространство $M^*_{insec} \subset M^*_{sec}$ тех классов последовательностей, представители которых сходятся к элементам из M, является плотным в M^*_{sec}. В-третьих, M^*_{insec} изометрично самому M. Наконец, любое пополнение M изометрично M^*_{sec}. (Конечно, эти утверждения надо доказать!) ■

Пример 5.1.4. Построенное нами в начале курса множество действительных чисел в виде бесконечных периодических и непериодических десятичных дробей изометрично пополнению метрического пространства $\mathbb{Q}$ по изложенной выше схеме.

Исключительной по важности и красоте является теорема Банаха о неподвижной точке, в котором использована *только метрическая* структура. Ранее мы доказали эту теорему для замкнутых подмножеств арифметических пространств.

Теорема 5.1.2. *Пусть M – **полное** метрическое пространство, отображение $F : M \to M$ является сжимающим с коэффициентом k, т. е.*

$$\exists k \in (0,1) : \;\forall x, y \in M \;\hookrightarrow\; \rho(F(x), F(y)) \le k\rho(x, y).$$

Тогда:

1) *существует причем единственная неподвижная точка x^*: $F(x^*) = x^*$;*

2) *неподвижная точка является пределом итерационного процесса, который можно запустить с любой точки $x_0 \in M$:*

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ полагаем } x_n := F(x_{n-1}), \text{ тогда } x^* = \lim_{n\to\infty} x_n;$$

3) *погрешность на n-м шаге оценивается сверху по первому шагу как убывающая геометрическая прогрессия с коэффициентом k:*

$$\rho(x_n, x^*) \leq \frac{k^n}{1-k}\, \rho(x_0, F(x_0)).$$

Задача 5.1.13. Докажите теорему Банаха (повторите доказательство для случая $M = \mathbb{R}^n$).

5.2. Нормированные пространства

Сейчас исходным объектом изучения будет действительное линейное (= векторное) пространство L, т. е. множество, элементы которого можно складывать и умножать на действительные числа, оставаясь в L. Указанные операции обязаны удовлетворять неоднократно упоминавшимся аксиомам (назовите их).

Примеры 5.2.1. линейных пространств:

1) арифметическое вещественное пространство $\mathbf{V}^n$ столбцов $(x_1, \ldots, x_n)^T$;

2) пространство n-мерных квадратных матриц $A = (a_{ij})$ с поэлементными операциями сложения и умножения на число;

3) пространство последовательностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ с покоординатными операциями сложения и умножения на число;

4) функциональное пространство $C[a, b]$ всех непрерывных на $[a, b]$ функций с поточечными операциями сложения функций и умножения на число.

Мы различаем линейные пространства L **конечномерные** (т. е. имеющие конечный **базис**) и **бесконечномерные** (т. е. такие, у которых для произвольного $n \in \mathbb{N}$ существует n линейно независимых векторов из L).

Определение 5.2.1. Линейное пространство L называется **нормированным**, если на нем определена **норма**, т. е. неотрицательная функция $x \to ||x|| \geq 0$, удовлетворяющая для любых $x, y \in L$ аксиомам:

1) тождественности: $||x|| = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0$;

2) однородности: $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ верно $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$;

3) неравенству треугольника: $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$. $\boxtimes$

Примеры 5.2.2. нормированных пространств:

1) a) пространство $\mathbf{V}^n$ с нормой $||x||_T := \sum_{i=1}^n |x_i|$ (“геометрия такси”),

   b) пространство $\mathbf{V}^n$ с евклидовой нормой $||x||_E := \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$

   c) пространство $\mathbf{V}^n$ с нормой $||x||_{\max} := \max\limits_{i=1,\ldots,n} \{|x_i|\}$;

2) a) пространство n-мерных квадратных матриц $A = (a_{ij})$ с евклидовой нормой $||A||_E := \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2\right)^{1/2}$;

   b) пространство матриц с нормой коэффициента растяжения $||A|| := \max_{||x||=1} ||Ax||$, где $|| \cdot ||$ – некоторая норма в $\mathbf{V}^n$;

3) a) пространство l_1 последовательностей $\{x_n\}$, у которых ограничена сумма модулей координат (т. е. $\sum_{n=1}^\infty |x_n| < C$) и нормой $||x||_1 := \sum_{n=1}^\infty |x_n|$;

   b) пространство l_2 последовательностей $\{x_n\}$, у которых ограничена сумма вадратов координат (т. е. $\sum_{n=1}^\infty x_n^2 < C$) и нормой $||x||_2 := \left(\sum_{n=1}^\infty x_n^2\right)^{1/2}$;

   c) пространство $l_{\sup}$ последовательностей $\{x_n\}$ с равномерно ограниченными координатами (т. е. для каждой последовательности существует такая постоянная $C > 0$, что $|x_n| < C$) и нормой $||x||_{\sup} := \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \{|x_n|\}$;

4) a) функциональное пространство $C[a, b]$ с **равномерной нормой** $||f||_C := \max_{[a,b]} |f(x)|$;

   b) функциональное пространство $L^2C[a, b]$ непрерывных функций с интегральной нормой $||f||_{L^2} = \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{1/2}$;

c) функциональное пространство $LC[a,b]$ непрерывных функций с интегральной нормой $||f||_L := \int_a^b |f(x)|dx$;

d) функциональное пространство $CP[a,b]$ всех многочленов $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ с равномерной нормой $||p||_C := \max_{[a,b]} |p(x)|$.

Задача 5.2.1. Докажите, что в каждом примере предложенная функция удовлетворяет аксиомам нормы (или см. ниже лемму 5.3.1).

Обсуждение 5.2.1. Обращаем внимание, что на одном и том же линейном пространстве норму можно вводить по-разному. Во-первых, мы получаем, согласно определению 5.2.1, разные нормированные пространства. Во-вторых, в бесконечномерных пространствах разные нормы приводят (как мы убедимся ниже) к разным топологическим свойствам. ⊟

Каждое нормированное пространство является метрическим, если в нем положить по определению

$$\rho(x,y) := ||x - y||.$$

Задача 5.2.2. Докажите, что определенная выше функция ρ удовлетворяет аксиомам 1–3 из определения 5.1.1.

Теперь на нормированные пространства переносятся без изменений следующие понятия метрического пространства: шар, сфера, сходимость последовательности, ее фундаментальность, полнота пространства. Сходимость по норме $|| \cdot ||_C$ называется **равномерной**, а сходимости по нормам $|| \cdot ||_L$ и $|| \cdot ||_{L^2}$ называются сходимостями **в среднем** и **среднеквадратичном** соответственно.

Примеры 5.2.3. сфер в нормированных пространствах.

1) На рис. 5.2 изображены единичные сферы $S_T = \{x : \ ||x||_T = 1\}$, $S_E = \{x : \ ||x||_E = 1\}$ и $S_{\max} = \{x : \ ||x||_{\max} = 1\}$ в пространствах из примеров 5.2.2 1a – 1c (при $n = 2$) соответственно.

2) Сфера $S_C(f,R) = \{g : \ ||f - g||_C = R\} \subset C[a,b]$ с центром в точке f и радиусом R представляет собой множество всех непрерывных функций, графики которых находятся внутри R-трубки графика f и хотя бы в одной точке выходят на границу этой трубки (рис. 5.3).

3) Единичная сфера $S_L = \{g : \ ||g||_L = 1\} \subset LC[a,b]$ с центром в нуле представляет собой множество всех непрерывных функций, графики модулей которых ограничивают криволинейные трапеции площади один (рис. 5.4).

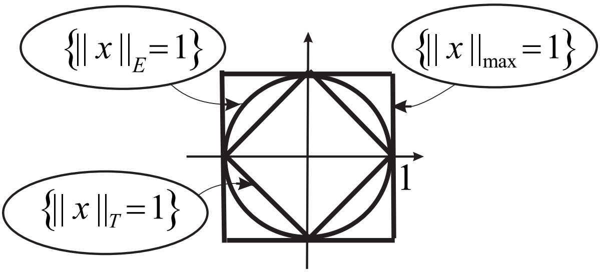

Рис. 5.2

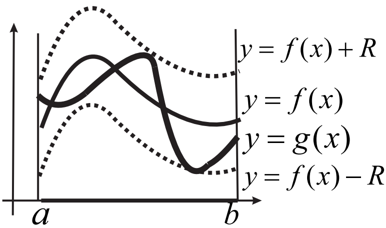

Рис. 5.3

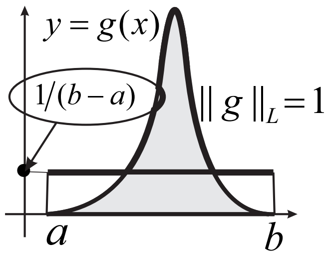

Рис. 5.4

Полные нормированные пространства играют настолько важную роль в функциональном анализе и его приложениях (теории дифференциальных уравнений и уравнений математической физики), что им присвоено имя основного их исследователя:

Определение 5.2.2. Полное нормированное пространство называется **банаховым**. ⊠

Примеры 5.2.4. 1) Конечномерные нормированные пространства полны, 2) пространство $C[a,b]$ полное, 3) пространства $CP[a,b]$, $LC[a,b]$ и $L^2C[a,b]$ неполные (доказательства ниже).

В нормированном пространстве присутствует две структуры: линейная и метрическая. Их согласованность выражается в следующем утверждении:

Лемма 5.2.1. *В нормированном пространстве L линейные операции и функция нормы непрерывны. Точнее, непрерывны следующие отображения:*

отображение сдвига $T_a: \ L \to L, \ T_a(x) := x + a,$

гомотетия $Hom_\lambda: \ L \to L, \ Hom_\lambda(x) := \lambda \cdot x,$
функция нормы $N: \ L \to \mathbb{R}_0^+, \ N(x) := ||x||.$

Задача 5.2.3. Докажите лемму 5.2.1.

Ситуация, когда в одном линейном пространстве введено две и более норм, типична в функциональном анализе и его приложениях. Поэтому нужно уметь их сравнивать.

Определение 5.2.3. О двух нормах $||\cdot||_1, \ ||\cdot||_2$, заданных на одном и том же линейном пространстве L, говорят $||\cdot||_2$ **не слабее** $||\cdot||_1$, если существует такая постоянная $M > 0$, что

$$\forall x \in L \ \hookrightarrow \ ||x||_1 \le M||x||_2. \ \boxtimes$$

Пример 5.2.1. На пространстве непрерывных на $[a, b]$ функций норма $||f||_C$ не слабее, чем $||f||_{L^2}$ с $M = \sqrt{b-a}$, а норма $||f||_{L^2}$ не слабее, чем $||f||_L$ с тем же $M = \sqrt{b-a}$ (докажите).

Лемма 5.2.2. *(о сходимости в разных нормах) Пусть* $||\cdot||_2$ *не слабее* $||\cdot||_1$*. Если последовательность* $\{x_n\}$ *сходится по норме* $||\cdot||_2$ *к* x_0*, то она тем более сходится по норме* $||\cdot||_1$ *к* x_0*.*

Доказательство следует из оценки:

$$||x_n - x_0||_1 \le M||x_n - x_0||_2 \to 0 \text{ при } n \to \infty. \ \blacksquare$$

Следствие 5.2.1. *Если последовательность* $\{f_n\}$ *непрерывных на* $[a, b]$ *функций сходится равномерно к (непрерывной) функции* f*, то она же сходится к* f *в среднеквадратичном и в среднем.*

Определение 5.2.4. Две нормы $||\cdot||_1, \ ||\cdot||_2$, заданные на одном и том же линейном пространстве L, называются **эквивалентными**, если существуют такие постоянные $M > m > 0$, что

$$\forall x \in L \ \hookrightarrow \ m||x||_2 \le ||x||_1 \le M||x||_2. \ \boxtimes$$

Задача 5.2.4. Докажите, что введенное отношение в самом деле является эквивалентностью (т. е. рефлексивно, симметрично и транзитивно). Откуда следует, что множество всех норм разбивается на классы.

Задача 5.2.5. Докажите геометрический критерий эквивалентности норм: две нормы $||\cdot||_1$ и $||\cdot||_2$ в одном и том же линейном пространстве эквивалентны только тогда, когда сущетвуют такие $R >$ $> r > 0$, что

$$Ball_2(r) = \{||x||_2 \leq r\} \subset Ball_1(1) =$$
$$= \{||x||_1 \leq 1\} \subset Ball_2(R) = \{||x||_2 = R\},$$

причем можно взять $R = 1/m$, $r = 1/M$ из определения 5.2.4. То есть единичному шару по первой норме принадлежит шар по второй норме достаточно малого радиуса r, и наоборот: единичный шар по первой норме вложен в шар по второй норме достаточно большого радиуса R. Проиллюстрируйте это утверждение на пространствах 1a – 1c при $n = 2$ из примеров 5.2.2 (рис. 5.2).

Задача 5.2.6. Докажите, что на пространстве непрерывных на $[a, b]$ функций нормы $||f||_C$, $||f||_{L^2}$ и $||f||_L$ попарно не эквивалентны. (Указание: учитывая, что норма $||f||_C$ не слабее, чем норма $||f||_{L^2}$, достаточно предъявить последовательность непрерывных функций, у которых норма $||f_n||_{L^2} \to 0$ при $n \to \infty$, а норма $||f_n||_C = const > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.)

В конечномерном пространстве проблемы разных норм нет, поскольку

Лемма 5.2.3. *В конечномерном пространстве любые две нормы эквивалентны.*

Доказательство основано на двух наблюдениях: 1) введение базиса позволяет ограничиться только арифметическими пространствами, 2) поскольку теория непрерывных функций разработана нами в евклидовой норме $|| \cdot ||_E$, мы будем сравнивать произвольную норму с евклидовой.

Зафиксируем в n-мерном нормированном пространстве L с нормой $|| \cdot ||$ произвольный базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Сопоставим вектору $x = x_1e_1 +$ $+ \ldots + x_ne_n \in L$ вектор $\tilde{x} := (x_1, \ldots x_n)^T \in \mathbf{V}^n$ с евклидовой нормой $||\tilde{x}||_E = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{1/2}$. Определенное отображение является линейным изоморфизмом. С помощью неравенства Коши–Буняковского получаем оценку сверху:

$$||x|| = ||x_1e_1 + \ldots + x_ne_n|| \leq |x_1| \cdot ||e_1|| + \ldots + |x_n| \cdot ||e_n|| \leq$$
$$\leq \left(\sum_{k=1}^n ||e_k||^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{1/2} = M \cdot ||\tilde{x}||_E,$$

где постоянная $M = \left(\sum_{k=1}^n ||e_k||^2\right)^{1/2}$ НЕ зависит от вектора x.

Чтобы получить оценку снизу, рассмотрим на единичной сфере $S_E = \{\tilde{x} :\ ||\tilde{x}||_E = 1\} \subset \mathbf{V}^n$ функцию

$$N :\ S_E \to \mathbb{R}_0^+, \quad N(\tilde{x}) := ||x|| = ||x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n||.$$

Поскольку нулевой вектор $\tilde{0} \notin S_E$, функция $N(\tilde{x}) > 0$. Покажем, что функция N непрерывна; в силу полученной верхней оценки, имеем:

$$|N(\tilde{x}) - N(\tilde{y})| = |\ ||x|| - ||y||\ | \leq ||x - y|| \leq M||x - y||_E.$$

Из теоремы Вейерштрасса следует, что на *компактном* множестве S_E функция N достигает своего положительного минимума $m > 0$. Для произвольного вектора $x \neq 0$ получаем

$$||x|| = ||x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n|| = ||\tilde{x}||_E \cdot ||\frac{x_1}{||\tilde{x}||_E} e_1 + \ldots + \frac{x_n}{||\tilde{x}||_E} e_n||.$$

Но вектор $\tilde{y} := (\frac{x_1}{||\tilde{x}||_E}, \ldots, \frac{x_n}{||\tilde{x}||_E})^T \in S_E$, поэтому

$$||x|| = ||\tilde{x}||_E \cdot ||y|| = N(\tilde{y}) \cdot ||\tilde{x}||_E \geq m \cdot ||\tilde{x}||_E. \ \blacksquare$$

Следствие 5.2.2. *Всякое конечномерное нормированное пространство полное (докажите).*

Замечание 5.2.1. Из леммы 5.2.3 и следствия 5.2.2 вытекает, что “разные” нормированные пространства бывают только *бесконечномерными.* ⊟

Обсудим понятие нормированного *под*пространства. Если мы говорим об $L' \subset L$ как о **нормированном подпространстве**, то подразумеваем, что норма в нем индуцирована объемлющим пространством. При этом как L, так и L' могут, независимо друг от друга, быть полными или неполными.

Примеры 5.2.5. нормированных подпространств:

1) Подпространство $C_0[a, b] \subset C[a, b]$ непрерывных функций f, удовлетворяющих **однородным краевым условиям** $f(a) = f(b) = 0$, и подпространство $C_{per}[a, b] \subset C[a, b]$ непрерывных функций f, удовлетворяющих **периодическому краевому условию** $f(a) = f(b)$, являются полными в полном пространстве.

2) Подпространство полиномов = многочленов $CP[a, b] \subset C[a, b]$ является неполным в полном пространстве.

3) Обозначим через $PC[a,b]$ пространство кусочно-непрерывных функций с нормой $||f||_{sup} := \sup_{[a,b]} |f(x)|$; подпространство $C[a,b] \subset PC[a,b]$ является полным в неполном пространстве.

4) Обозначим через $LP[a,b]$ пространство полиномов с нормой $||\cdot||_L$; Подпространство $LP[a,b] \subset LC[a,b]$ является неполным в неполном пространстве.

Задача 5.2.7. Докажите, что подпространства $C_0[a,b] \subset$ $\subset C[a,b], C_{per}[a,b]$ (см. примеры 5.2.5) является полными.

Неполнота пространств, указанных в примерах 5.2.5, ниже будет доказана.

Определение 5.2.5. Нормированное подпространство $L_1 \subset L$ называется **плотным** в L, если оно является таковым как метрическое подпространство. ⊠

Пример 5.2.2. В пространстве $C[a,b]$ плотно подпространство $CP[a,b]$ всех многочленов. Из теоремы Вейерштрасса следует, что в любой ε-окрестности $U_\varepsilon(f) = \{g \in C[a,b] : \ ||g-f||_C < \varepsilon\}$ непрерывной функции f имеется многочлен $p \in U_\varepsilon(f)$.

Теперь логично дать

Определение 5.2.6. Банахово пространство L называется **пополнением** своего неполного подпространства $L_1 \subset L$, если L_1 плотно в L. ⊠

Пример 5.2.3. Пространство $C[a,b]$ является пополнением $CP[a,b]$ (доказательство ниже).

Для неполных нормированных пространств справедлива теорема, аналогичная теореме 5.1.1:

Теорема 5.2.1. *Всякое неполное нормированное пространство L_1 плотно в некотором банаховом пространстве L, т. е. неполное нормированное пространство всегда можно пополнить. Пополнение единственно с точностью до биекции, сохраняющей векторные операции и норму.*

Обсуждение 5.2.2. теоремы 5.2.1. Пространство L как метрическое получается из теоремы 5.1.1. Остается доказать, что в нем корректно (т. е. единственным образом и с сохранением преемственности) доопределяются векторные операции и норма. Доказательство опирается на лемму 5.2.1. ⊟

5.3. Пространства $C[a,b]$, $CP[a,b]$, $LC[a,b]$ и $L^2C[a,b]$

На примере названных пространств обсудим введенные выше понятия. Докажем, что

Теорема 5.3.1. *Нормированное пространство $C[a,b]$ полное.*

Доказательство. Фактически это переформулировка уже известных нам свойств *равномерной сходимости* – критерия Коши и теоремы о сохранении непрерывности при равномерной сходимости. Итак: функциональная последовательность $\{f_n\} \subset C[a,b]$ фундаментальна в $C[a,b]$ $\Leftrightarrow$ верен критерий Коши *равномерной* сходимости $\Leftrightarrow$ $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$ $\Rightarrow$ $f \in C[a,b]$. ■

Обсуждение 5.3.1. Теорема 5.3.1 демонстрирует возможности методов функционального анализа: понятие *равномерной сходимости последовательности функций* заменяется равносильным понятием *сходимости последовательности элементов в функциональном нормированном пространстве* или, другими словами, *сходимости по норме.* $\boxminus$

Из теоремы 5.3.1 и второй теоремы Вейерштрасса об аппроксимации получаем

Следствие 5.3.1. *Банахово пространство $C[a,b]$ является пополнением неполного нормированного пространства $CP[a,b]$.*

Вернемся к пространствам непрерывных функций с интегральными нормами $||\cdot||_L$ и $||\cdot||_{L^2}$. Докажем (см. задачу 5.2.1), что

Лемма 5.3.1. *Формулы $||f||_L = \int_a^b |f(x)|dx$ и $||f||_{L^2} = \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{1/2}$ задают в линейном пространстве непрерывных функций нормы.*

Доказательство выполнения пунктов 2 и 3 определения 5.2.1 следует из свойств собственного интеграла Римана. Доказательство п. 1 единообразное для обеих норм; докажем для нормы $||\cdot||_L$. Пусть $\int_a^b |f(x)|dx = 0$, но – от противного – найдется точка $x_0 \in [a,b]$, в которой $f(x_0) > 0$. В силу *непрерывности* f, существует δ-окрестность точки x_0 (полуокрестность, если точка – край отрезка), в которой $f(x) > f(x_0)/2$. Поэтому $\int_a^b |f(x)|dx > f(x_0)\delta/2 > 0$. ■

В отличие от $C[a,b]$

Лемма 5.3.2. *Нормированные пространства $LC[a,b]$ и $L^2C[a,b]$ не являются полными.*

Доказательство единообразное. Достаточно предоставить фундаментальную в $LC[a,b]$, но не сходящуюся последовательность. Пусть, что не принципиально, $a = -1, b = 1$. Положим: $f_n(x) :=$ $= \pm 1$ для $x \in [-1, -1/n] \cup [1/n, 1]$ и $f_n(x) := nx$ для $|x| \le 1/n$ (рис. 5.5). Найдем расстояние между точками последовательности с номерами m и n ($n > m$). Из геометрического смысла интеграла ясно, что

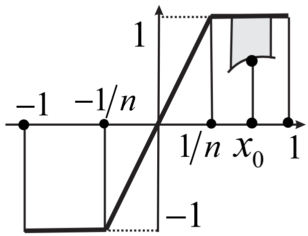

Рис. 5.5

$$||f_n - f_m||_L = 2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{m} \to 0 \text{ при } m \to \infty.$$

Значит, последовательность фундаментальная. Если допустить, что она сходится к *непрерывной* функции f, то для положительного аргумента это может быть только $f(x) = 1$, а для отрицательного – только $f(x) = -1$. Если допустить противное (т. е. существует точка $x_0 > 0$, в которой $|f(x_0) - 1| = \mu > 0$), то существует такое $\delta > 0$, что

$$||f - f_n||_L \ge \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f(x) - 1| dx > \frac{\mu}{2} \cdot 2\delta > 0.$$

Значит, функциональная последовательность сходится к функции f, которая на проколотом отрезке $[-1, 1] \backslash \{0\}$ совпадает с функцией $sign(x)$. Следовательно, функция f, при любом ее определении в нуле, имеет в нуле скачок. ■

Пополнение пространств с интегральной нормой столь важны в математическом анализе и его приложениях, что ему присвоено имя создателя:

Определение 5.3.1. Пополнение пространств $LC[a,b]$ и $L^2C[a,b]$ называются **пространствами Лебега** (Анри Леон Лебег, 1875–1941) и обозначаются $L(a,b)$ и $L^2(a,b)$ соответственно. ⊠

Обсуждение 5.3.2. Удобнее вводить пространства $L(a,b)$ и $L^2(a,b)$ иначе – как это сделал Лебег: 1) ввести «интегрирование по Лебегу», 2) определить $L(a,b)$ ($L^2(a,b)$) как пространство всех функций, которые интегрируемы на (a,b) по Лебегу (с квадратом), 3) определить интегральные нормы $||\cdot||_L$ и $||\cdot||_{L^2}$ как лебеговые интегралы. Сходимости в пространствах $L(a,b)$ и $L^2(a,b)$ называются **в среднем** и **среднеквадратичном** соответственно. $\boxminus$

5.4. Полные системы в нормированных пространствах

Понятие полной системы является "ослабленным" аналогом понятия базиса в конечномерном пространстве. (К полноте пространства понятие полноты системы не имеет отношения; однако оно связано с понятием плотности подпространства.) Под **системой векторов** $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ бесконечномерного нормированного пространства L мы понимаем последовательность, значения которой – векторы $e_k \in L$.

Определение 5.4.1. Система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ векторов называется **полной** в L, если для любого вектора $f \in L$ и произвольного $\varepsilon > 0$ существует конечная линейная комбинация $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$ $(\alpha_i \in \mathbb{R})$, которая аппроксимирует вектор f по норме пространства L с точностью до ε: $||\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n - f|| < \varepsilon$. $\boxtimes$

Обсуждение 5.4.1. Полнота системы означает, что любой вектор можно сколь угодно близко аппроксимировать конечной линейной комбинацией векторов системы. Полная система, как и базис, содержит фиксированные векторы. Однако, во-первых, линейная комбинация только *аппроксимирует* вектор, но не совпадает с ним. Во-вторых, коэффициенты при векторах системы в общем случае *меняются*, т. е. $\alpha_k = \alpha_k(\varepsilon)$. $\boxminus$

Лемма 5.4.1. *(о полноте системы и плотности) Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – система векторов в нормированном пространстве L. Обозначим через $E \subset L$ линейное подпространство, элементами которого являются всевозможные конечные линейные комбинации вида $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$. Система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна в L только тогда, когда нормированное подпространство E плотно в L.*

Задача 5.4.1. Докажите лемму 5.4.1

Теорема 5.4.1. *Примеры некоторых полных и неполных систем:*

1) Тригонометрическая система (1.4) полна в $C_{per}[-\pi,\pi]$ и неполна в $C[-\pi,\pi]$.

2) Система степенных одночленов $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ полна в $C[a,b]$.

3) Тригонометрическая система (1.4) полна в пространствах $LC[-\pi,\pi]$ и $L^2C[-\pi,\pi]$.

Доказательство. Полнота тригонометрической системы в пространстве $C_{per}[-\pi,\pi]$ сразу следует из первой теоремы Вейерштрасса 4.3.1 об аппроксимации непрерывной функции тригонометрическими многочленами.

Покажем, что непрерывную функцию $f(x) := x$ невозможно аппроксимировать тригонометрическими многочленами по *равномерной* норме (тем самым мы докажем неполноту тригонометрической системы в $C[-\pi,\pi]$). В силу периодичности, для любого тригонометрического многочлена $T_n(x)$ справедливо равенство $T_n(-\pi) = T_n(\pi)$. Поэтому тригонометрический многочлен не может приблизиться одновременно к значениям функции $f(x)$ на обоих концах отрезка:

$$||f - T_n(x)||_C = \max_{[\pi,\pi]} |f(x) - T_n(x)| \geq$$

$$\geq max\{|f(-\pi) - T_n(-\pi)|,\ |f(\pi) - T_n(\pi)|\} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(|f(-\pi) - T_n(-\pi)| + |f(\pi) - T_n(\pi)|\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(|f(-\pi) - T_n(\pi)| + |f(\pi) - T_n(\pi)|\right) \geq \frac{1}{2}|f(-\pi) - f(\pi)| = \pi.$$

Полнота системы степенных одночленов в $C[a,b]$ сразу следует из второй теоремы Вейерштрасса 4.3.2 об аппроксимации.

Наконец, покажем, что произвольную *непрерывную* функцию $f \in LC[-\pi,\pi]$ можно сколь угодно близко аппроксимировать по норме $||\cdot||_L$ тригонометрическими многочленами (для пространства $L^2C[-\pi,\pi]$ доказательство аналогичное). С этой целью для каждого $\delta \in (0,1)$ определим линейные функции

$$l_1(x) := \frac{f(-\pi+\delta)}{\delta}(x+\pi), \qquad l_2(x) := -\frac{f(\pi-\delta)}{\delta}(x-\pi)$$

и непрерывную функцию (рис. 5.6)

$$f_\delta = \begin{cases} l_1(x), \text{ при } x \in [-\pi, -\pi+\delta], \\ f(x), \text{ при } x \in [-\pi+\delta, \pi-\delta], \\ l_2(x), \text{ при } x \in [\pi-\delta, \pi]. \end{cases}$$

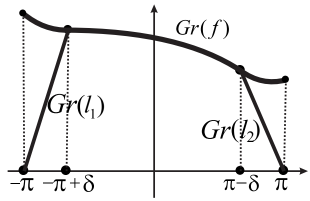

Рис. 5.6

Для произвольного $\varepsilon > 0$ возьмем $\delta < \varepsilon/(8||f||_C)$. Поскольку функция f_δ непрерывна и $f_\delta(-\pi) = f_\delta(\pi)$, в силу доказанного п. 1 теоремы, существует такой тригонометрический полином T_ε, что $||f_\delta - T_\varepsilon||_C < \varepsilon/(4\pi)$. Тогда расстояние от этого полинома до f по норме $||\cdot||_L$ допускает оценку:

$$||f - T_\varepsilon||_L \le ||f - f_\delta||_L + ||f_\delta - T_\varepsilon||_L \le$$

$$\le \int\limits_{-\pi}^{-\pi+\delta} |f(x)-l_1(x)|dx + \int\limits_{\pi-\delta}^{\pi} |f(x)-l_2(x)|dx + \frac{\varepsilon}{4\pi}2\pi \le 4||f||_C\cdot\delta + \frac{\varepsilon}{2} \le \varepsilon. \blacksquare$$

Задача 5.4.2. Докажите, что система степенных одночленов $\{x^k\}_{k=0}^\infty$ полна в пространствах $LC[-\pi,\pi]$ и $L^2C[-\pi,\pi]$.

Глава 6

Ряд Фурье в евклидовом пространстве

Здесь мы обсудим ряды Фурье с точки зрения функционального анализа как разложение вектора (функции) евклидового бесконечномерного (функционального) пространства по счетному ортогональному базису.

6.1. Бесконечномерное евклидово пространство

Напомним, что линейное пространство L называется **евклидовым**, если на нем определено скалярное произведение (x, y), аксиомы и свойства которого вы изучали в курсе линейной алгебры. Справедливы

$$\text{неравенство Коши–Буняковского} \quad (x, y)^2 \leq (x.x)(y, y), \quad \Longrightarrow$$

$$\text{неравенство треугольника} \quad \sqrt{(x+y, x+y)} \leq \sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)}. \quad (6.1)$$

Евклидово пространство автоматически является нормированным с нормой $||x|| := (x, x)^{1/2}$ и метрическим пространством с метрикой $\rho(x, y) = (x - y, x - y)^{1/2}$. Проверка аксиом нормы осуществляется с помощью неравенств (6.1), при этом они приобретают "привычный вид":

$$\text{неравенство Коши–Буняковского} \quad |(x, y)| \leq ||x|| \, ||y||, \quad \Longrightarrow$$

$$\text{неравенство треугольника} \quad ||x+y|| \leq ||x|| + ||y||. \tag{6.2}$$

Ценность евклидового пространства по сравнению с нормированным в том, что в нем можно измерять углы: $\cos\widehat{x,y} := (x,y)/(||x|| \cdot ||y||)$; значит, в нем определены все понятия классической евклидовой геометрии. В частности, для попарно ортогональных векторов x_i ($i = 1, \ldots, N$), т. е. $(x_i, x_j) = 0$ при $i \neq j$, справедлива теорема Пифагора Самосского (570–490 гг. до н. э.):

$$||x_1 + \ldots + x_N||^2 = ||x_1||^2 + \ldots + ||x_N||^2.$$

Заметим, что в n-мерном евклидовом пространстве можно выбрать не более, чем n линейно независимых попарно ортогональных векторов.

Задача 6.1.1. Докажите неравенства (6.2) и теорему Пифагора.

Примеры 6.1.1. евклидовых пространств:

1) арифметическое евклидово пространство $\mathbf{V}^n$ со скалярным произведением $(x,y) := \sum_{i=1}^n x_i y_i$ и нормой $||x||_E = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$;

2) n^2-мерное пространство n-мерных квадратных матриц $A = (a_{ij})$ со скалярным произведением $(A,B) := \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij} = Tr(AB)$ (Tr=trace – след матрицы) и нормой $||A||_2 = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2}$;

3) пространство l_2 последовательностей $\{x_n\}$, у которых ограничена сумма квадратов координат (т. е. $\sum_{n=1}^\infty x_n^2 < C$) со скалярным произведением $(x,y) = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$ и нормой $||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^\infty x_i^2}$;

4) функциональное пространство $L^2C[a,b]$ непрерывных функций со скалярным произведением $(f,g) := \int_a^b f(x)g(x)dx$ и нормой $||f||_2 = \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{1/2}$.

Примеры 1 и 2 – конечномерные, 3 и 4 – бесконечномерные, причем пространство $L^2C[a,b]$ неполное (лемма 5.3.2), а пространство l_2 – полное (обсуждение ниже).

Задача 6.1.2. Докажите, что в каждом примере выполнены аксиомы скалярного произведения.

Нормированные пространства $C[a,b]$, $L^2C[a,b]$, $L^1C[a,b]$ совпадают как множества, поэтому можно сравнивать нормы этих пространств:

Лемма 6.1.1. *(о сравнении норм) Для любого $f \in C[a,b]$ верно:*

1) *норма $||\cdot||_C$ не слабее нормы $||\cdot||_2$: $||f||_2 \le \sqrt{b-a}\ ||f||_C$;*

2) *норма $||\cdot||_2$ не слабее нормы $||\cdot||_1$: $||f||_1 \le \sqrt{b-a}\ ||f||_2$;*

3) *норма $||\cdot||_C$ сильнее нормы $||\cdot||_2$, норма $||\cdot||_2$ сильнее нормы $||\cdot||_1$.*

То есть. из равномерной сходимости следует сходимость в среднем квадратичном, а из нее – сходимость в среднем. Но не наоборот.

Доказательство первого утверждения:

$$||f||_2 = \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{1/2} \le \max_{[a,b]} |f(x)| \left(\int_a^b dx\right)^{1/2} \le \sqrt{b-a}\ ||f||_C.$$

Доказательство второго утверждения основано на неравенстве Коши–Буняковского:

$$||f||_1 = \int_a^b |f(x)|dx = \int_a^b |f(x)| \cdot 1\ dx =$$

$$= |(|f|, 1)| \le ||f||_2 \cdot ||1||_2 = \sqrt{b-a}\ ||f||_2.$$

Для доказательство третьего утверждения достаточно построить две последовательности непрерывных функций: 1) у которых норма $||f_n||_2 \to 0$, а норма $||f_n||_C \ge const > 0$ при $n \to \infty$, 2) у которых норма $||f_n||_1 \to 0$, а норма $||f_n||_2 \ge const > 0$ при $n \to \infty$. (Постройте такие последовательности!) ■

6.2. Ортогональные системы

Наличие понятия угла (в частности, прямого) в бесконечномерном евклидовом пространстве позволяет среди всех систем выбрать "наилучшие". Мы будем активно применять геометрическую интерпретацию, которая делает наглядной многие понятия, связанные с рядами Фурье.

Определение 6.2.1. Система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ векторов бесконечномерного евклидового пространства L называется **ортогональной**, если она не содержит нулевого вектора, и все векторы попарно ортогональны:

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, m \ne n \ \hookrightarrow\ (e_m, e_m) > 0 \ \wedge\ (e_m, e_n) = 0.\ \boxtimes$$

Обозначим через $L_n = Span\{e_1, \ldots, e_n\} \subset L$ линейную оболочку указанных векторов. Последняя является n-мерным евклидовым подпространством с ортогональным базисом $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Множество $L_n^\perp := \{h \in L : \ (h, e_k) = 0, \ k = 1, \ldots, n\}$ всех векторов, ортогональных L_n, образует линейное евклидово подпространство $L_n^\perp \subset L$, которое называется **ортогональным дополнением** к L_n. Итак:

$$\forall g \in L_n \ \wedge \ \forall h \in L_n^\perp \ \hookrightarrow \ (g, h) = 0.$$

Лемма 6.2.1. *(об ортогональном разложении) Произвольный вектор $f \in L$ единственным образом представим в виде $f = g_n + h_n$, где $g_n \in L_n$, а $h_n \in L_n^\perp$ (рис. 6.1). Векторы g_n и h_n называют **ортогональными проекциями** f на L_n и $L_n^\perp$ соответственно.*

Доказательство. Поскольку $g_n \in L_n$, то $g_n = \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n$, где координаты ξ_k предстоит найти. Допустим $f = \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n + h_n$. Умножим скалярно это равенство на e_k $(k = 1, \ldots, n)$. Учитывая ортогональность системы и ортогональность $(h_n, e_k) = 0$, получим $\xi_k = (f, e_k)/(e_k, e_k)$. Вывод: если ортогональное разложение существует, то координаты ξ_k и заодно вектор $g_n := \sum_{k=1}^n ((f, e_k)/(e_k, e_k)) \cdot e_k$ определяются единственным образом. Теперь положим $h_n := f - g_n$. Тогда $(h_n, e_k) = (f, e_k) - \xi_k(e_k, e_k) = 0$ для произвольного $k = 1, \ldots, n$. Значит, $h_n \in L_n^\perp$. Единственность h_n следует из единственности g_n. ■

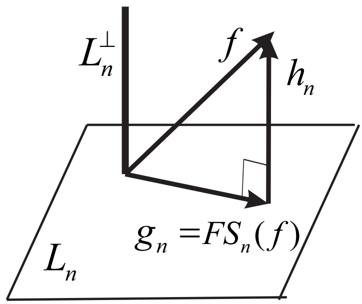

Рис. 6.1

Ориентируясь на формулы коэффициентов Фурье абсолютно интегрируемой функции, назовем:

1) числа $\xi_k := (f, e_k)/(e_k, e_k)$ – **коэффициентами Фурье** вектора f по данной ортогональной системе,

2) формальный ряд $\sum_{k=1}^\infty ((f, e_k)/(e_k, e_k)) \cdot e_k$ – **рядом Фурье** вектора f по данной ортогональной системе,

3) конечную сумму $FS_n(f) := \sum_{k=1}^n ((f, e_k)/(e_k, e_k)) \cdot e_k$ – **частичной суммой ряда Фурье** вектора f.

Из введенных определений сразу вытекает

Следствие 6.2.1. *(геометрическая интерпретация частичных сумм ряда Фурье)*

1) *Частичная сумма ряда Фурье $FS_n(f)$ есть ортогональная проекция вектора f на подпространство, образованное первыми n векторами ортогональной системы.*

2) *Справедливо равенство Пифагора:*

$$||f||^2 = ||FS_n(f)||^2 + ||f - FS_n(f)||^2. \tag{6.3}$$

Доказательство. Первое утверждение есть переформулировка леммы 6.2.1 в терминах Фурье. Равенство (6.3), в силу ортогональности векторов $FS_n(f) = g_n \perp h_n = f - FS_n(f)$, есть равенство Пифагора. ■

Из равенства (6.3) мы получаем **неравенство Бесселя**:

Следствие 6.2.2. *(Бессель Фридрих Вильгельм, 1784 – 1846) Для любой ортогональной системы векторов $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ и для любого вектора $f \in L$ справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, e_k)^2}{||e_k||^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^2 ||e_k||^2 \leq ||f||^2, \tag{6.4}$$

где ξ_k – коэффициенты Фурье вектора f по данной системе.

Доказательство. Из формулы (6.3), ортогональности системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ и теоремы Пифагора для n слагаемых следует, что для произвольного $n \in \mathbb{N}$

$$||f||^2 \geq ||FS_n(f)||^2 = \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 ||e_k||^2.$$

Отсюда следует, что: 1) *неотрицательный числовой ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^2 ||e_k||^2$ сходится, 2) при переходе к пределу нестрогая оценка сохраняется. ■

Мы хотим конечномерной проекцией $g \in L_n$ *приблизиться* к вектору f, поэтому нашей целью является *минимизация остатка* $h = f - g$. Следующая теорема объясняет почему ортогональная проекция $g_n = FS_n(f)$ "наилучшая".

Теорема 6.2.1. *(о минимальном свойстве коэффициентов Фурье) Справедливы и равносильны утверждения:*

1) $||f - FS_n(f)|| = \min\limits_{g \in L_n} ||f - g||$;

2) *Длина перпендикуляра* $h_n = f - FS_n(f)$, *"опущенного из точки"* f *на подпространство* L_n, *является кратчайшим расстоянием от данной точки до всевозможных точек* $g \in L_n$ *(рис. 6.2).*

Замечание 6.2.1. Второе утверждение есть геометрическая интерпретация первого; оно означает, что гипотенуза не меньше катета. Чтобы не загромождать изложение, мы не вводим точечно-векторное пространство; при желании это можно сделать по схеме конечномерного аффинного пространства. Впрочем, мы можем обойтись трехмерным подпространством, порожденным векторами $\{f, g, g_n\}$, где $g_n = FS_n(f)$. $\boxminus$

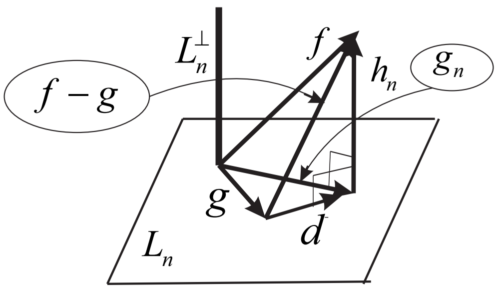

Рис. 6.2

Доказательство. Пусть $g \in L_n$ – произвольный вектор. Обозначим разность $d := FS_n(f) - g \in L_n$. В силу следствия 6.2.1, $h_n := (f - FS_n(f)) \perp L_n$. Значит, $d \perp h_n$. Поэтому к векторам h_n и d применима теорема Пифагора:

$$||f-g||^2 = ||(f - FS_n(f)) + d||^2 = ||h_n + d||^2 = ||h_n||^2 + ||d||^2 \geq ||h_n||^2. \blacksquare$$

6.3. Ортогональный базис

Ранее мы обсудили понятие полной *счетной системы* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ векторов бесконечномерного нормированного пространства. Сейчас мы перейдем к понятию *счетного базиса*.

Определение 6.3.1. Говорят, что вектор $f \in L$ нормированного пространства L **раскладывается по системе** $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L$, если существует такая числовая последовательность $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$, что **векторный**

ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$ сходится к f по норме L, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} ||f - \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k|| = 0.$$

В этом случае мы пишем $f = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$. ⊠

Определение 6.3.2. Система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ векторов нормированного пространства L называется **базисом** пространства L, если любой вектор $f \in L$ **раскладывается** по этой системе **единственным образом**. ⊠

Обсуждение 6.3.1. Очевидно, что базис всегда полная система векторов: из определений 6.3.1 и 6.3.2 следует, что

$$\forall f \in L \ \wedge \ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \xi_k \in \mathbb{R}\ (k = 1, \ldots, n): \ ||f - \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k|| < \varepsilon.$$

В обратную сторону утверждение в общем случае неверно. Полная система векторов аппроксимирует произвольный вектор с любой наперед выбранной погрешностью $\varepsilon > 0$, т. е. $||f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k|| < \varepsilon$. Однако с уменьшением погрешности не происходит стабилизации коэффициентов, т. е. от ε зависит не только количество слагаемых в аппроксимации, но и $\alpha_k = \alpha_k(\varepsilon)$. Поэтому НЕ возникает *ряд*, сходящийся к f. Именно существование ряда позволяет от *оценки* погрешности перейти к *предельному равенству* $f = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$. ⊟

Оказывается, в евклидовом пространстве для *ортогональной* системы понятия полноты и базисности тождественны. Прежде всего, справедлива

Теорема 6.3.1. *(о единственности разложения по ортогональной системе) Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортогональная система евклидового пространства L. Пусть вектор $f \in L$ раскладывается по этой системе, т. е. $f = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$. Тогда:*

1) *разложение единственно, а его коэффициенты являются коэффициентами Фурье: $\xi_k = (f, e_k)/(e_k, e_k)$;*

2) *$\forall n \in \mathbb{N}$ остаток $r_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k e_k \in L_n^{\perp}$.*

Доказательство. Выберем и зафиксируем $m \in \mathbb{N}$. Нас интересует коэффициент ξ_m. Поскольку ряд сходится, то для произвольного $n \in \mathbb{N}$ его остаток $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k e_k$ тоже сходится и для любого $\varepsilon > 0$

существует такой номер $n \in \mathbb{N}$, что $n > m$ и $||r_n|| < \varepsilon/||e_m||$. Поэтому, учитывая ортогональность системы, получаем:

$$(f, e_m) = (\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k + r_n, e_m) = \xi_m(e_m, e_m) + (r_n, e_m) \;\Rightarrow$$

$$|(f, e_m) - \xi_m(e_m, e_m)| = |(r_n, e_m)| \le ||r_n|| \cdot ||e_m|| < \varepsilon.$$

То есть неотрицательная *константа* $|(f, e_m) - \xi_m(e_m, e_m)|$ меньше сколь угодно малого положительного числа. Значит

$$(f, e_m) - \xi_m(e_m, e_m) = 0 \;\Leftrightarrow\; \xi_m = \frac{(f, e_m)}{(e_m, e_m)}.$$

Из первого пункта следует, что n-я сумма векторного ряда $\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k = FS_n(f)$ есть частичная сумма ряда Фурье вектора f. В силу *единственности* ортогонального разложения (лемма 6.2.1), получаем, что $r_n = h_n \in L_n^{\perp}$. ■

Замечание 6.3.1. Возникает желание "сразу доказать" теорему 6.3.1 почленным умножением равенства $f = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$ на e_m. Но ряд справа содержит *бесконечное* количество слагаемых! Поэтому почленное умножение нуждается в обосновании, которое будет не короче, чем предложенный метод доказательства. ⊟

Теперь мы обоснуем совпадение понятий полноты ортогональной системы и базиса.

Теорема 6.3.2. *(об ортогональной системе) Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортогональная система в евклидовом пространстве L. Следующие утверждения равносильны:*

1) *система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – базис в L;*

2) *система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна в L;*

3) *для каждого вектора $f \in L$ его ряд Фурье по системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к нему по норме $||\cdot||$ пространства L:*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k, \text{ где } \xi_k = \frac{(f, e_k)}{(e_k, e_k)}; \tag{6.5}$$

4) для каждого вектора $f \in L$ выполняется ***равенство Парсеваля*** *(Марк–Антуан Парсеваль, 1755 — 1836):*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, e_k)^2}{||e_k||^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^2 ||e_k||^2 = ||f||^2, \tag{6.6}$$

где ξ_k – коэффициенты Фурье вектора f по системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Замечание 6.3.2. В *ортонормированном* базисе (т. е. $||e_k|| = 1$) равенство Парсеваля приобретает совсем простой вид:

$$||f||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k)^2,$$

т. е. это бесконечномерный аналог теоремы Пифагора. Замечательно, что *числовое* равенство (6.6) *равносильно векторному* равенству (6.5). ⊟

Пример 6.3.1. В пространстве l_2 (пример 6.3.2.3) ортонормированная система $\{e_k := (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)\}$ (где единица стоит на k-м месте) является базисом, а коэффициенты Фурье вектора $\{x_n\} \in l_2$ – сами элементы последовательности $\{x_n\}$.

Доказательство П. 1 $\Rightarrow$ п. 2 приведено в обсуждении 6.3.1.

П.2 $\Rightarrow$ п. 3. Пусть ортогональная система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна в L. Значит,

$$\forall f \ \wedge \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \alpha_k \in \mathbb{R} \ (k = 1, \ldots, n): \ ||f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k|| < \varepsilon.$$

В силу минимального свойства коэффициентов Фурье ξ_k $(k = 1, \ldots, n)$ (см. п. 1 теоремы 6.2.1), тем более

$$||f - \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k|| \leq ||f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k|| < \varepsilon.$$

Значит, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N}$, что $||f - \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k|| < \varepsilon$. Последнее означает сходимость *ряда* Фурье к вектору f. (Еще раз обращаем внимание, что коэффициенты α_k в общем случае *зависят* от ε, а коэффициенты Фурье ξ_k НЕ зависят!)

П. 3 $\Rightarrow$ п. 1 следует из теоремы 6.3.1 о единственности разложения по ортогональной системе.

П. 3 $\Leftrightarrow$ п. 4. В силу ортогональности системы

$$||\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k||^2 = \sum_{k=1}^{n}\xi_k^2||e_k||^2.$$

По этой причине, а также в силу п. 2 теоремы 6.3.2 и теоремы Пифагора (6.3), имеют место равносильности:

$$(6.5) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}||f-\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k||^2 = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(||f||^2-||\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k||^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$||f||^2 - \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2||e_k||^2 = 0 \Leftrightarrow (6.6) \blacksquare$$

6.4. Гильбертовы пространства

Полнота бесконечномерного евклидового пространства столь важна, что такому пространству присвоено имя автора:

Определение 6.4.1. Полное бесконечномерное евклидово пространство называется **гильбертовым** (Давид Гильберт, 1862–1943). $\boxtimes$

Нас интересуют только гильбертовы пространства, обладающие ортогональным *счетным* базисом.

Примеры 6.4.1. 1) Пространство l_2 является гильбертовым. Доказательство этого факта не приводим. 2) Пространство $L^2C[a,b]$ не является полным.

Для евклидовых пространств без изменений определяются понятия плотности евклидового подпространства и понятие пополнения и справедлива теорема:

Теорема 6.4.1. *Всякое неполное евклидово пространство всегда можно пополнить. Пополнение единственно с точностью до биекции, сохраняющей векторные операции и скалярное произведение.*

В частности, пополнение $L^2(a,b)$ пространства $L^2C[a,b]$ мы теперь понимаем как гильбертово, а не банахово (см. определение 5.3.1) пространство. Его называют **пространством функций квадратично интегрируемых по Лебегу**.

В гильбертовом пространстве L корректен следующий вопрос: является ли заданная числовая последовательность $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ коэффициентами Фурье некоторого вектора $f \in L$? Полный ответ на него дает

Теорема 6.4.2. *(о коэффициентах Фурье, Фридьеш Рисс (1880–1956) – Эрнст Фишер (1875–1954)) Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ есть ортогональная система в гильбертовом пространстве L. Следующие утверждения о числовой последовательности $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ равносильны:*

1) *Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$ сходится к некоторому вектору $f \in L$ по норме пространства L.*

2) *Числовая последовательность $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ является коэффициентами Фурье некоторого вектора $f \in L$, т. е. $\xi_k = (f, e_k)/(e_k, e_k)$.*

3) *Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^2 ||e_k||^2 < +\infty$ сходится.*

Обсуждение 6.4.1. В пунктах 3 и 4 теоремы 6.3.2 дан вектор f, который порождает последовательность коэффициентов Фурье. А в пунктах 2 и 3 теоремы 6.4.2, наоборот, числовая последовательность порождает вектор. $\boxminus$

Доказательство. П. 1 $\Rightarrow$ п. 2. Это теорема 6.3.1 о единственности разложения по ортогональной системе. Более того, вектор f в п. 2 тот же, что и в п. 1.

П. 2 $\Rightarrow$ п. 3 следует из неравенства (6.4) Бесселя.

П. 3 $\Rightarrow$ п. 1. Именно здесь потребуется полнота пространства L. Рассмотрим последовательность $S_n := \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k$, которая порождена данной ортогональной системой и данной числовой последовательностью. Воспользовавшись определением фундаментальности по Коши, докажем, что S_n сходится к некоторому вектору $f \in L$. Для этого рассмотрим разность $S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} \xi_k e_k$. В силу ортогональности системы, получаем

$$||S_{n+p} - S_n||^2 = (S_{n+p} - S_n, S_{n+p} - S_n) = \sum_{k=n+1}^{n+p} \xi_k^2 ||e_k||^2.$$

Но, в силу критерия Коши сходимости *числового ряда*, из условия п. 3 следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N \in \mathbb{N} : \ \forall n \ \wedge \ \forall p \in \mathbb{N} \ \hookrightarrow \ \sum_{k=n+1}^{n+p} \xi_k^2 ||e_k||^2 < \varepsilon.$$

Значит, последовательность S_n фундаментальна в L; значит, в *полном* пространстве L она сходится к некоторому вектору f. ■

Следствие 6.4.1. *Все гильбертовы пространства со счетным ортогональным базисом изоморфны; в частности, они изоморфны пространству l_2. Т. е. между любыми двумя гильбертовыми пространствами L_1 и L_2 существует линейная биекция $F : L_1 \leftrightarrow L_2$, сохраняющая скалярное произведение: $\forall x_1, x_2 \in L_1 \hookrightarrow (x_1, x_2)_1 = (Fx_1, Fx_2)_2$.*

Доказательство. Ортогональные базисы всегда можно пронормировать, поэтому считаем, что базисы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L_1$ и $\{e'_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L_2$ ортонормированны. Искомая биекция F (отнюдь не единственная!) может быть определена так: $F(x) = y$ только тогда, когда векторы x и y имеют совпадающие коэффициенты Фурье в указанных базисах соответственно. ■

Задача 6.4.1. Завершите доказательство.

Глава 7

Ряды Фурье для функций из $L^2_R(-\pi, \pi)$

Мы возвращаемся к рядам Фурье в пространстве $L^2_R(-\pi, \pi)$, вооруженные теоремой 6.3.2 о полной ортогональной системе в евклидовом пространстве. Чтобы ее применить, нужно, во-первых, "превратить" пространство $L^2_R(-\pi, \pi)$ в евклидово: как было замечено в обсуждении 1.2.1, в $L^2_R(-\pi, \pi)$ интегральное *неопределенное скалярное произведение* 1.2 НЕ удовлетворяет условию *строгой положительности* (в отличие от пространства $L^2C[-\pi, \pi]$, которое является евклидовым, см. п. 4 в примерах 6.1.1). Во-вторых, нужно доказать, что тригонометрическая система полна в $L^2_R(-\pi, \pi)$.

7.1. Факторизация пространств $L^2_R(-\pi, \pi)$ и $L_R(-\pi, \pi)$

Чтобы добиться строгой положительности скалярного произведения 1.2, поступим как при доказательстве теоремы 5.1.1 о пополнении. Введем отношение эквивалентности между функциями из $L^2_R(-\pi, \pi)$:

$$f \sim g \;\Leftrightarrow\; \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g(x))^2 dx = 0.$$

Рефлексивность и симметричность отношения очевидны. Докажем транзитивность. Поскольку для любых $a, b \in \mathbb{R}$, справедлива оценка

$(a+b)^2 \le 2a^2 + 2b^2$, то верна импликация:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g(x))^2 dx = 0 \ \wedge \ \int_{-\pi}^{\pi} (g(x) - h(x))^2 dx = 0 \ \Rightarrow$$

$$0 \le \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - h(x))^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} ((f(x) - g(x)) + (g(x) - h(x)))^2 dx \le$$

$$\le 2\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g(x))^2 dx + 2\int_{-\pi}^{\pi} (g(x) - h(x))^2 dx = 0.$$

Определение 7.1.1. Оставив старое обозначение $L^2_R(-\pi, \pi)$, факторизуем пространство абсолютно интегрируемых с квадратом функций по введенному отношению эквивалентности, т. е. объявим элементами нового пространства *классы эквивалентности* $\{f\}$. ⊠

Лемма 7.1.1. *Определение 7.1.1 корректно, т. е. множество классов эквивалентности является евклидовым пространством, выполнение операций в котором осуществляется через произвольных представителей классов.*

Доказательство. Проверим, что векторные операции корректно определены. Чтобы сложить два класса, выбираем по одному произвольному представителю из каждого класса, затем представителей складываем, а по результату определяем окончательный класс. Убедимся, что ответ не зависит от выбора представителей:

$$f_1, f_2 \in \{f\},\ g_1, g_2 \in \{g\} \ \Rightarrow$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} ((f_1 + g_1) - (f_2 + g_2))^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} ((f_1 - f_2) + (g_1 - g_2))^2 dx \le$$

$$\le 2\int_{-\pi}^{\pi} (f_1 - f_2)^2 dx + 2\int_{-\pi}^{\pi} (g_1 - g_2)^2 dx = 0 + 0 = 0.$$

Чтобы умножить класс на число, выбираем произвольного представителя класса, умножаем его на число, а по результату определяем окончательный класс. (Самостоятельно проверьте, что умножение класса на число корректно.)

Остается убедиться в корректности определения скалярного произведения 1.2. В силу доказанной его линейности (лемма 1.2.2),

$$f_1, f_2 \in \{f\},\ g_1, g_2 \in \{g\} \ \Rightarrow$$

$$|(f_1, g_1) - (f_2, g_2)| = |((f_1, g_1) - (f_1, g_2)) + ((f_1, g_2) - (f_2, g_2))| \le$$

$$\leq |(f_1, g_1 - g_2)| + |(f_1 - f_2, g_2)|.$$

Нетрудно убедиться, что отсутствие положительной неопределенности скалярного произведения не влияет на истинность неравенства Коши–Буняковского. Поэтому

$$|(f_1, g_1 - g_2)| + |(f_1 - f_2, g_2)| \leq ||f_1||_2 \cdot ||g_1 - g_2||_2 + ||f_1 - f_2||_2 \cdot ||g_2|| = 0,$$

что доказывает требуемое. ■

Задача 7.1.1. Докажите, что в пространстве $L_R(-\pi, \pi)$ абсолютно интегрируемых функций формула $||f||_1 := \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx$ определяет *полу*норму, т. е. удовлетворяет всем аксиомам нормы, кроме аксиомы положительности (см. обсуждение 1.2.1). Проверьте, что факторизация пространства $L_R(-\pi, \pi)$ по отношению эквивалентности

$$f \sim g \;\Leftrightarrow\; \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|dx = 0$$

превращает пространство в нормированное.

Обсуждение 7.1.1. 1) Введенные выше классы эквивалентностей существенно изменяют наше понимание понятия функции. Так, все функции, отличающиеся друг от друга в конечном количестве точек, мы теперь считаем неразличимыми. Получается, что мы по своему усмотрению можем вообще игнорировать значения функции в конечном количестве точек. Мера Лебега позволяет игнорировать значения функции в счетном множестве точек. Эта идеология приводит к понятию обобщенной функции (см. ниже).

2) Можно показать, что пространства $L_R^2(-\pi, \pi)$ и $L_R(-\pi, \pi)$ неполны. Построение фундаментальных, но не сходящихся в этих пространствах последовательностей, выходит за рамки нашего курса. Отметим, что пополнение пространств $L_R^2(-\pi, \pi)$ и $L_R(-\pi, \pi)$ совпадает с пополнениями пространств непрерывных функций $L^2C[-\pi, \pi]$ и $LC[-\pi, \pi]$ соответственно. ⊟

7.2. Полнота тригонометрической системы в $L_R^2(-\pi, \pi)$

Нам потребуются две вспомогательные леммы. Понятно, что в определениях пространств с интегральной нормой пределы интегрирования можно заменить на любые числа a, b $(a < b)$.

Лемма 7.2.1. *(об аппроксимации функций из $L^2_R(a,b)$ кусочно-постоянными) Множество $L^2_{pc}(a,b)$ кусочно-постоянных на (a,b) функций (piecewise constant function, см. определение 1.2.1) является плотным подмножеством пространства $L^2_R(a,b)$, т. е.*

$$\forall f \in L^2_R(a,b)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\ c_\varepsilon(x) \in L^2_{pc}(a,b):\ ||f - c_\varepsilon||_2 < \varepsilon.$$

Доказательство. Во-первых, если функция $c(x)$ кусочно-постоянная, то $c \in L^2_R(a,b)$ и при любом доопределении $c(a)$ и $c(b)$ функция $c^2(x)$ интегрируема на $[a,b]$ по Риману. Во-вторых, подмножество $L^2_{pc}(a,b) \subset L^2_R(a,b)$ образует неполное нормированное подпространство в неполном нормированном пространстве $L^2_R(a,b)$ (докажите), однако для доказательства леммы нам этот факт не потребуется. Само доказательство аналогично доказательству теоремы 1.4.1 Римана об осцилляции. Осуществим его в три этапа.

1) Пусть f интегрируема по Риману на $[a,b]$. Тогда f ограничена на $[a,b]$: $C = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)| \in \mathbb{R}$. В силу критерия интегрируемости, для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $\{x_i\}_{i=0}^I \subset [a,b]$ $(x_0 = a,\ x_I = b)$, для которого

$$\sum_{i=1}^{I}(M_i - m_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon^2}{2C},\ \text{где}\ M_i = \sup_{[x_i,x_{i-1}]} f(x),\ m_i = \inf_{[x_i,x_{i-1}]} f(x).$$

Определим кусочно-постоянную функцию: при $x \in (x_i, x_{i-1})$ полагаем $c_\varepsilon(x) := m_i$, в точках разбиения x_i (i=1,...,I) значения $c_\varepsilon(x_i)$ задаем произвольно. Тогда

$$||f-c_\varepsilon||_2^2 = \int\limits_a^b (f-c_\varepsilon)^2 dx \le \sum_{i=1}^{I}(M_i-m_i)^2\Delta x_i < 2C\sum_{i=1}^{I}(M_i-m_i)\Delta x_i < \varepsilon^2.$$

2) Пусть функция f^2 интегрируема на $[a,b]$ и имеет одну особенность в конце отрезка, допустим, в точке b. Тогда, в силу определения абсолютной интегрируемости и п. 1), получаем

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists b' \in [a,b)\ \wedge\ \exists c_\varepsilon \in PC(a,b'):$$

$$\int_{b'}^{b} f^2(x)dx < \frac{\varepsilon^2}{2}\ \wedge\ \int_a^{b'} (f - c_\varepsilon)^2 dx < \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Доопределим функцию $c_\varepsilon(x) := 0$ при $x \in (b', b]$. Тогда на $[a,b]$ справедливо:

$$||f - c_\varepsilon||_2^2 = \int_a^{b'} (f - c_\varepsilon)^2 dx + \int_{b'}^{b} f^2(x)dx < \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2.$$

3) Рассмотрим общий случай: функция f имеет конечное количество особенностей x_i $(i = 0, \ldots, N)$, в число которых (для единообразия) мы включили $a = x_0$ и $b = x_N$. В этом случае весь отрезок можно разбить на $2N$ подотрезков $[a_{j-1}, a_j]$ $(j = 1, \ldots, 2N)$, где $a_{2i} = x_i$ и $a_{2(i-1)} < a_{2i-1} < a_{2i}$ $(i = 0, \ldots, N)$. На каждом подотрезке особенность одна – в одном из его концов. Согласно п. 2), на каждом подотрезке найдется кусочно-постоянная функция $c_\varepsilon^{(j)}$, для которой

$$\int_{a_{j-1}}^{a_j} (f - c_\varepsilon^{(j)})^2 dx < \frac{\varepsilon^2}{2N}, \ j = 1, \ldots, 2N.$$

Положим $c_\varepsilon(x) := c_\varepsilon^{(j)}$ при $x \in (a_{j-1}, a_j)$, а $c_\varepsilon(a_j)$ определим произвольно. В результате на $[a, b]$ получаем:

$$||f - c_\varepsilon||_2^2 = \sum_{j=1}^{2N} \int_{a_{j-1}}^{a_j} (f - c_\varepsilon^{(j)})^2 dx < 2N \cdot \frac{\varepsilon^2}{2N} = \varepsilon^2. \ \blacksquare$$

Обозначим через $L^2C_0[a, b] \subset L^2_R(a, b)$ неполное нормированное подпространство непрерывных функций g, удовлетворяющих *однородным краевым условиям* $g(a) = g(b) = 0$ (ранее в примере 5.2.5 мы рассмотрели полное подпространство $C_0[a, b] \subset C[a, b]$ функций, удовлетворяющих однородным краевым условиям).

Задача 7.2.1. Докажите, что подмножество $L^2C_0[a, b] \subset L^2_R(a, b)$ именно нормированное подпространство.

Лемма 7.2.2. *(об аппроксимации кусочно-постоянных функций функциями из $L^2C_0[a, b]$) Справедливо утверждение:*

$$\forall c \in L^2_{pc}(a, b) \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ g_\varepsilon(x) \in L^2C_0[a, b] : \ ||c - g_\varepsilon||_2 < \varepsilon.$$

Замечание 7.2.1. Пространство $L^2C_0[a, b]$ как множество не принадлежит пространству $L^2_{pc}(a, b)$, поэтому мы не можем обсуждать его плотность в $L^2_{pc}(a, b)$. Однако оба пространства являются нормированными подпространствами пространства $L^2_R(a, b)$. Именно это обстоятельство позволяет исследовать указанную аппроксимацию. $\boxminus$

Доказательство. Пусть $\{x_i\}_{i=0}^I \subset [a, b]$ – точки скачков кусочно-постоянной функции $y = c(x)$, причем $x_0 = a$, $x_I = b$. Рассмотрим δ-окрестности $(x_i - \delta, x_i + \delta)$ точек x_i (для концов отрезка это будут полуокрестности). Пусть $C = \max_{[a,b]}\{|c(x)|\}$. Возьмем $\delta < \varepsilon^2/(8C^2I)$

(число δ заведомо меньше, чем мелкость разбиения $\{x_i\}$, если ε достаточно мало). На координатной плоскости (x, y) рассмотрим ломаную G с вершинами (см. рис. 7.1)

$$A_0(a,0), A_0^+(x_0+\delta, c(x_0+\delta)), A_1^-(x_1-\delta, c(x_1-\delta)), A_1^+(x_1+\delta, c(x_1+\delta)), \ldots,$$

$$A_i^-(x_i-\delta, c(x_i-\delta)), A_i^-(x_i-\delta, c(x_i+\delta)), \ldots, A_I^-(x_I-\delta, c(x_I-\delta)), A_I(b,0).$$

Ломаная является графиком функции $g_\varepsilon \in C_0[a,b]$, которая отличается от кусочно-постоянной функции только в δ-окрестностях точек x_i. Тогда

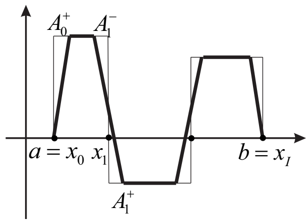

Рис. 7.1

$$||c - g_\varepsilon||_2^2 =$$

$$= \int_a^{a+\delta} (c-g_\varepsilon)^2 dx + \sum_{i=1}^{I-1} \int_{x_i-\delta}^{x_i+\delta} (c-g_\varepsilon)^2 dx +$$

$$+ \int_{b-\delta}^{b} (c - g_\varepsilon)^2 dx \le (2C)^2 2I\delta < \varepsilon^2. \ \blacksquare$$

Теперь мы докажем основное утверждение

Теорема 7.2.1. *Тригонометрическая система полна в евклидовом пространстве $L^2_R(-\pi, \pi)$.*

Доказательство. Для произвольной функции $f \in L^2_R(-\pi,\pi)$ и произвольного $\varepsilon > 0$, в силу леммы 7.2.1, существует такая кусочно-постоянная функция $c_{\varepsilon/3} \in L^2_{pc}(-\pi,\pi)$, что $||f - c_{\varepsilon/3}||_2 < \varepsilon/3$. В силу леммы 7.2.2, существует такая непрерывная функция $g_{\varepsilon/3} \in CL^2_0[-\pi,\pi]$, удовлетворяющая однородным краевым условиям, что $||c_{\varepsilon/3} - g_{\varepsilon/3}||_2 < \varepsilon/3$. Наконец, из п. 1 теоремы 5.4.1 следует, что существует такой тригонометрический многочлен $T_n(x)$, что $||g_{\varepsilon/3} - T_n||_C < \varepsilon/(3\sqrt{2\pi})$. Применяя неравенство треугольника, получаем

$$||f - T_n||_2 \le ||f - c_{\varepsilon/3}||_2 + ||c_{\varepsilon/3} - g_{\varepsilon/3}||_2 + ||g_{\varepsilon/3} - T_n||_2 <$$

$$< \frac{2\varepsilon}{3} + \sqrt{2\pi}||g_{\varepsilon/3} - T_n||_C < \varepsilon. \ \blacksquare$$

Попутно мы установили, что

Следствие 7.2.1. *Нормированное подпространство $L^2C[a,b]$ плотно в $L^2_R(a,b)$.*

Доказательство Из доказательства теоремы 7.2.1 следует, что пространство $L^2C_0[a,b]$ является плотным нормированным подпространством $L^2_R(a,b)$. Но $L^2C_0[a,b] \subset L^2C[a,b] \subset L^2_R(a,b)$, что уже доказывает следствие. Более того, оказалось, что аппроксимировать функции из $L^2_R(a,b)$ можно, используя только такие непрерывные функции, которые удовлетворяют однородным краевым условиям. (Этот факт, конечно, является следствием *интегральной* нормировки в пространстве $L^2_R(a,b)$.) ■

Из теоремы 1.2.1 (об ортогональности тригонометрической системы), теоремы 7.2.1 (о полноте тригонометрической системы) и теоремы 6.3.2 (об ортогональной системе) сразу вытекает

Теорема 7.2.2. *(об ортогональном тригонометрическом базисе) Справедливы следующие утверждения:*

1) *тригонометрическая система является ортогональным базисом в $L^2_R(-\pi,\pi)$;*

2) *для произвольной функции $f \in L^2_R(-\pi,\pi)$ ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится к ней по норме $||\cdot||_2$ пространства $L^2_R(-\pi,\pi)$:*

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \text{ в } L^2_R(-\pi,\pi) \;\Leftrightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f - a_0 - \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right)^2 dx = 0,$$

где $a_{k-1},\ b_k$ $(k \in \mathbb{N})$ – коэффициенты Фурье функции f по тригонометрической системе;

3) *для произвольной функции $f \in L^2_R(-\pi,\pi)$ выполняется равенство Парсеваля:*

$$\pi\left(2a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)\right) = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx. \tag{7.1}$$

7.3. Сводка сведений о функциональных пространствах

Для метода функционального анализа характерно одновременное использование нескольких пространств и подпространств, между которыми имеются многочисленные связи. Ниже в таблице собраны некоторые уже установленные нами связи. Обозначения: 1) знак $\cup$, читаемый снизу вверх, обозначает подпространство (замкнутое или незамкнутое) или принадлежность; 2) стрелки $\to$ или $\uparrow$ обозначают полную систему функций, стрелки $\leftrightarrows$ обозначают базис; 3) стрелка $\upharpoonleft$ означает аппроксимацию функций одного пространства функциями другого; 4) через $\{TC\}$ обозначена тригонометрическая система функций.

$(b-a)\|\|f\|\|_C \ \geq$		$\sqrt{b-a}\ \|\|f\|\|_2 \ \geq$		$\|\|f\|\|_1$
$\{x^k\}_{k=0}^{\infty} \to$	$C[a,b]$ банахово	$\{TC\} \leftrightarrows$	$L^2_R(-\pi,\pi)$ евклидово неполное	$L_R(a,b)$ нормиров. неполное
$\cup$ $PC[a,b]$ пр-во мног-в	$\cup$ $C_{per}[-\pi,\pi]$ пр. пер. ф-й $\{TC\}\uparrow$	$\cup \ \upharpoonleft$ $L^2_{pc}(-\pi,\pi)$ пр-во кус.-пост.	$\cup$ $L^2C[-\pi,\pi]$ пр. непр. $\cup$ $L^2C_0[-\pi,\pi]$ одн. кр. усл.	$\cup$ $LC[a,b]$ пр. непр.

7.4. Многочлены Лежандра

Согласно теореме 6.3.2, любая полная ортогональная система является базисом. Одна только полнота системы не гарантирует ее базисности. Приведем пример.

Лемма 7.4.1. *(о системе одночленов) Система одночленов $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ полна в пространстве $L^2_R(-1,1)$, но не является в нем базисом.*

Доказательство. Из плотности вложения подпространства $CL^2[-1,1]$ в $L^2_R(-1,1)$ (следствие 7.2.1) следует, что

$$\forall f \in L^2_R(-1,1)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\ g \in CL^2[-1,1] : \|\|f-g\|\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из полноты системы $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ в $C^0[-1,1]$ (теорема 5.4.1 п. 2) следует, что существуют такие числа $\{\alpha_0(\varepsilon),\dots,\alpha_n(\varepsilon)\}$, что

$$\|\|g - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k\|\|_C < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}.$$

Для любой функции $h \in CL^2[-1,1]$ справедлива оценка $||h||_2 \leq \leq \sqrt{2}||h||_C$ (см. пример 5.2.1). Следовательно,

$$||f - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k||_2 \leq ||f-g||_2 + ||g - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k||_2 \leq$$

$$\leq ||f-g||_2 + \sqrt{2}||g - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k||_C < \varepsilon.$$

Полнота системы доказана.

Если же допустить, что система одночленов есть базис в $L_R^2(-1,1)$, то для произвольной функции $f(x) \in L_R^2(-1,1)$ существует такая последовательность $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ частичных сумм степенного ряда, что $||S_n(x) - f(x)||_2 \to 0$ при $n \to \infty$. Рассмотрим степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x a_k t^k dt$, полученный формальным интегрированием исходного степенного ряда. Покажем, что он сходится при $x = 1$ к числу $\int_0^1 f(x)dx$:

$$\Big|\int_0^1 (S_n(x) - f(x))dx\Big| \leq \int_0^1 |S_n(x) - f(x)|dx \leq \int_{-1}^1 |S_n(x) - f(x)|dx \leq$$

$$\leq \sqrt{2}\left(\int_{-1}^1 (S_n(x) - f(x))^2 dx\right)^{1/2} = \sqrt{2}||S_n(x) - f(x)||_2 \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Следовательно, радиус сходимости степенного ряда, полученного формальным интегрированием исходного ряда, не меньше единицы. Из теоремы о равномерной сходимости степенного ряда следует, что на любом отрезке $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ $(0 < \varepsilon < 1)$ исходный степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ сходится равномерно, причем к бесконечно дифференцируемой функции. Если же мы возьмем в качестве исходной функции, например, $f(x) = |x| \in L_R^2(-1,1)$, то получим противоречие. В самом деле, равенство двух *непрерывных* функций в пространстве $L_R^2(-1,1)$ означает их поточечное совпадение (см. доказательство леммы 5.3.2). Если же допустить, что $|x| \equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ на $(-1,1)$, то получим, что функция $|x|$ бесконечно дифференцируема. ■

Однако, как будет доказано ниже, *ортогонализация* системы одночленов превращает ее в базис в пространстве $L_R^2(-1,1)$. Так возникают многочлены Лежандра (Адриен Мари Лежандр, 1752 -— 1833). Найдем, кроме исходного $l_0(x) := 1$, еще два следующих многочлена, удовлетворяющих условию попарной ортогональности:

$$l_1(x) = x + \alpha \cdot 1 \;\Rightarrow\; \int_{-1}^1 1 \cdot (\alpha + x)dx = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = 0 \;\Rightarrow\; l_1(x) = x;$$

$$l_2(x) = x^2+\alpha x+\beta\cdot 1 \;\Rightarrow \begin{cases} \int\limits_{-1}^{1} 1\cdot(x^2+\alpha x+\beta)dx = 0, \\ \int\limits_{-1}^{1} x\cdot(x^2+\alpha x+\beta)dx = 0 \end{cases} \Rightarrow l_2(x) = x^2-\frac{1}{3}.$$

Оказывается, результат ортогонализации можно записать (с точностью до коэффициентов) в виде формулы Родрига (Бенжамен Олинд Родриг, 1795 – 1851), которую мы примем как определение:

Лемма 7.4.2. ***Многочлены Лежандра***

$$L_0(x) = 1,\; L_n(x) := \frac{1}{n!\;2^n}\;\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n,\; n\in\mathbb{N} \qquad (7.2)$$

обладают свойствами:

1) *имеют степень, совпадающую с номером n и ту же четность, что и четность n;*

2) $L_n(1) = 1,\; L_n(-1) = (-1)^n,\; |L_n(x)| < 1$ *при* $x \in (1,1),\; |L_{2n}(0)| \leq \leq \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$*;*

3) *многочлен с номером n имеет на интервале* $(-1,1)$ *в точности n нулей;*

4) *образуют ортогональную систему в* $L^2_R(1,1)$.

Графики первых шести многочленов см. на рис. 7.2–7.4.

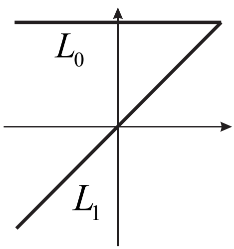

Рис. 7.2

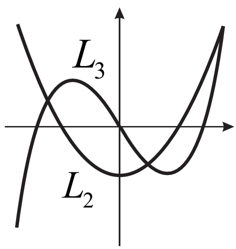

Рис. 7.3

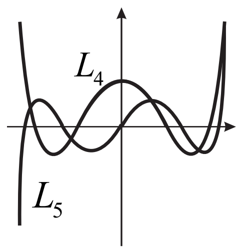

Рис. 7.4

Задача 7.4.1. Проверьте, что многочлены l_2 и L_2 отличаются коэффициентом.

Доказательство п. 1. Многочлен $(x^2-1)^n$ имеет степень $2n$ и является четным. После n дифференцирований его степень равна n. Каждое дифференцирование меняет его четность на противоположную.

Доказательство п. 4. Требуется доказать, что для произвольных $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n > m$ выполняется

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \cdot \frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m \, dx = 0.$$

Поскольку $(x^2-1)^n = (x-1)^n(x+1)^n$, то k-я производная при $k = 1, \ldots, n-1$ имеет вид $((x-1)^n(x+1)^n)^{(k)} = (x-1)^{n-k}g_k(x)$, где $g_k(x)$ – некоторый многочлен. Значит, $((x-1)^n(x+1)^n)^{(k)}|_{x=1} = 0$. Аналогично рассуждая, получаем что $((x-1)^n(x+1)^n)^{(k)}|_{x=-1} = 0$. Применим к интегралу I интегрирование по частям n раз. В силу доказанных краевых свойств, внеинтегральные слагаемые обнуляются и мы получаем

$$I = (-1)^n \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}(x^2-1)^m \, dx.$$

Но многочлен $(x^2-1)^m$ имеет степень $2m$, а $m+n > 2m$. Следовательно, $((x^2-1)^m)^{(m+n)} \equiv 0$. ■

Задача 7.4.2. Докажите п. 2 и 3 леммы 7.4.2.

Приступим к доказательству полноты системы многочленов Лежандра. Поскольку процесс ортогонализации на каждом шаге обратим, то справедлива

Лемма 7.4.3. *Любой алгебраический многочлен можно представить на отрезке $[-1,1]$ в виде конечной линейной комбинации многочленов Лежандра.*

Замечание 7.4.1. Утверждение леммы справедливо на произвольном промежутке (в том числе и на всей числовой оси), но доказательство требует дополнительных рассуждений. ⊟

Доказательство. Пусть $P_n[-1,1]$ – линейное пространство многочленов $p_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ степени не выше n, т. е. линейная оболочка одночленов $\{1, x, \ldots x^n\}$. Следовательно, размерность $dim P_n[-1,1] \leq n+1$. С другой стороны, поскольку многочлены Лежандра попарно ортогональны на $[-1,1]$, то набор функций

$\{L_0, \ldots, L_n\}$ линейно независим на отрезке $[-1,1]$. Но, в силу пункта 1 леммы 7.4.2, каждый многочлен $L_k \in P_n[-1,1]$ $(k = 0, \ldots, n)$. Значит размерность $dim P_n[-1,1] \geq n+1$. Последнее означает, что $dim P_n[-1,1] = n+1$, а набор $\{L_0, \ldots, L_n\}$ является в пространстве $P_n[-1,1]$ базисом. Следовательно, любой многочлен из $P_n[-1,1]$ представим, причем единственным образом, в виде линейной комбинации многочленов Лежандра степеней не выше n. ■

Переходим к основному утверждению:

Теорема 7.4.1. *(о полноте и базисности системы Лежандра) Система многочленов Лежандра полна в пространствах $C^0[-1,1]$ и $L^2_R(-1,1)$ и является базисом пространства $L^2_R(-1,1)$. Ряд Фурье произвольной функции $f \in L^2_R(-1,1)$ по системе многочленов Лежандра сходится к ней в смысле среднего квадратичного.*

Доказательство. Поскольку система $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ полна в $C^0[-1,1]$ (теорема 5.4.1 п. 2), а любой многочлен на отрезке $[-1,1]$ представим как конечная комбинация многочленов Лежандра (лемма 7.4.3), то система многочленов Лежандра полна в $C^0[-1,1]$. Аналогично, поскольку система $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ полна в $L^2_R(-1,1)$ (лемма 7.4.1), то из леммы 7.4.3 следует полнота многочленов Лежандра в $L^2_R(-1,1)$.

Но полнота системы полиномов Лежандра и их ортогональность гарантируют (теорема 6.3.2) базисность системы и разложение по ней в ряд Фурье произвольной функции $f \in L^2_R(-1,1)$. ■

Глава 8

Интегралы, зависящие от параметра

Мы изучим зависимость интегралов $I(t) := \int_a^b f(x,t)dx$ (собственных и несобственных) от параметра t. Такие интегралы возникают в теории дифференциальных уравнений, уравнениях математической физики, теории вероятностей. Их можно понимать как эффективный "способ конструирования" функций, обладающих определенными свойствами, которые не выражаются через элементарные функции. Например, Эйлеровы интегралы, интеграл Фурье, преобразование Фурье, интеграл вероятности и др. Наша цель показать, как "хорошие"свойства подынтегральной функции $f(x,t)$ от *двух* переменных порождают аналогичные свойства функции I, зависящей от одной переменной.

8.1. Собственные интегралы с параметром

Теорема 8.1.1. *(о непрерывности интеграла по параметру) Пусть функция $f(x,t)$ непрерывна на прямоугольнике $\Pi = [a,b] \times [c,d]$ как функция двух переменных. Тогда функция $I(t) = \int_a^b f(x,t)dx$ непрерывна на $[c,d]$; причем предельный переход по переменной t можно осуществлять под знаком интеграла:*

$$\forall t_0 \in [c,d] \;\hookrightarrow\; \lim_{t\to t_0} \int_a^b f(x,t)dx = \int_a^b \lim_{t\to t_0} f(x,t)dx = \int_a^b f(x,t_0)dx.$$

Доказательство. Во-первых, заметим, что для каждого фиксированного $t \in [c,d]$ интеграл $\int_a^b f(x,t)dx$ существует. Значит, функция $I(t)$ определена. Далее, непрерывная на компакте Π функция равномерно непрерывна, поэтому

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon):\ \forall (x_1,t_1),(x_2,t_2) \in \Pi \wedge (x_2-x_1)^2+(t_2-t_1)^2 < \delta^2 \hookrightarrow$$

$$|f(x_2,t_2) - f(x_1,t_1)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon):\ \forall t \in [c,d]\ \wedge\ |t-t_0| < \delta\ \hookrightarrow$$

$$|I(t) - I(t_0)| = \Big|\int_a^b (f(x,t) - f(x,t_0))dx\Big| \le$$

$$\le \int_a^b |f(x,t) - f(x,t_0)|dx < \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon. \blacksquare$$

Из теоремы о повторном интеграле сразу следует

Лемма 8.1.1. *(об интегрировании интеграла по параметру) Пусть существует кратный интеграл $\int_\Pi f(x,t)dxdt$. Пусть для каждого $t \in [c,d]$ существует собственный интеграл $\int_a^b f(x,t)dx$, а для каждого $x \in [a,b]$ существует собственный интеграл $\int_c^d f(x,t)dt$. Тогда*

$$\int_c^d dt \int_a^b f(x,t)dx = \int_\Pi f(x,t)dxdt = \int_a^b dx \int_c^d f(x,t)dt. \qquad (8.1)$$

В частности, если функция $f(x,t)$ непрерывна на прямоугольнике Π как функция двух переменных, то равенства (8.1) истинны.

Теорема 8.1.2. *(о дифференцировании интеграла по параметру) Пусть функция $f(x,t)$ и ее частная производная $f'_t(x,t)$ непрерывны на прямоугольнике $\Pi = [a,b]\times[c,d]$ как функции двух переменных. Тогда функция $I(t) = \int_a^b f(x,t)dx$ непрерывно дифференцируема на $[c,d]$, причем дифференцирование можно внести под знак интеграла:*

$$\forall t_0 \in [c,d]\ \hookrightarrow\ I'(t_0) = \int_a^b f'_t(x,t_0)dx.$$

Доказательство. При любом фиксированном $x \in [a,b]$ функция $f'_t(x,t)$ непрерывна по переменной t. Поэтому по переменной t применима формула Ньютона–Лейбница и

$$f(x,t) = f(x,t_0) + \int_{t_0}^{t} f'_s(x,s)ds.$$

Применяя равенство (8.1), получаем

$$I(t) := \int_a^b f(x,t)dx = \int_a^b \left(f(x,t_0) + \int_{t_0}^{t} f'_s(x,s)ds \right) dx =$$

$$= \int_a^b f(x,t_0)dx + \int_{t_0}^{t} \left(\int_a^b f'_s(x,s)dx \right) ds.$$

Дифференцируя по t полученное тождество и воспользовавшись теоремой 8.1.1 для функции $J(t) := \int_a^b f'_t(x,t)$ в точке t_0, получаем требуемое равенство. ∎

Следствие 8.1.1. *(формула дифференцирования интеграла по параметру) Пусть функции $\varphi,\ \psi \in C^1[c,d]$ и $\forall t \in [c,d]$ верно $\varphi(t), \psi(t) \in [a,b]$ (рис. 8.1). Пусть функция $f(x,t)$ и ее частная производная $f'_t(x,t)$ непрерывны как функции двух переменных на таком открытом прямоугольнике $(A,B)\times(C,D)$, что $[a,b]\times[c,d] \subset (A,B)\times(C,D)$. Тогда функция $I(t) := \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(x,t)dx$ дифференцируема на $[c,d]$ и*

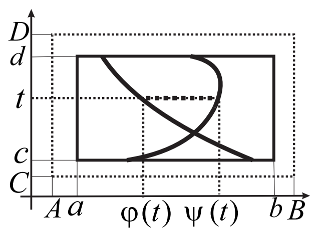

Рис. 8.1

$$I'(t) = f(\psi(t),t)\psi'(t) - f(\varphi(t),t)\varphi'(t) + \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f'_t(x,t)dx. \qquad (8.2)$$

Доказательство. Определим функцию трех переменных

$$J : \mathbb{R}^3 \supset U := (A,B)\times(A,B)\times(C,D) \to \mathbb{R}, \quad J(\varphi,\psi,t) := \int_{\varphi}^{\psi} f(x,t)dx.$$

В силу формулы Ньютона–Лейбница и теоремы 8.1.2, в каждой точке открытого параллелепипеда U существуют и непрерывны частные производные

$$J'_\varphi = -f(\varphi,t),\ J'_\psi = f(\psi,t),\quad J'_t = \int_{\varphi}^{\psi} f'_t(x,t)dx.$$

Значит, функция $J \in C^1(U)$. Функция одной переменной $I(t) = J(\varphi(t), \psi(t), t)$ является сложной функцией. В силу теоремы о дифференцировании суперпозиции отображений, функция $I(t)$ непрерывно дифференцируема, и ее производная вычисляется как раз по формуле (8.2). ■

8.2. Равномерная сходимость несобственных интегралов

Рассмотрим несобственный интеграл (НИ) $I(t) = \int_a^{\to b} f(x,t)dx$ с единственной особой точкой $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Параметр принадлежит промежутку $t \in \langle c, d\rangle$ с конечными или бесконечными концами. Функция $I(t)$ поддается исследованию, если сходимость интеграла обладает таким свойством:

Определение 8.2.1. Пусть для любого $t \in \langle c, d\rangle$ интеграл $\int_a^{\to b} f(x,t)dx$ сходится. НИ $\int_a^{\to b} f(x,t)dx$ называется **сходящимся равномерно на** $\langle c, d\rangle$, если (см. рис. 8.2)

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists b' \in (a,b):\ \forall \xi \in (b', b) \land \forall t \in \langle c, d\rangle \hookrightarrow$$

$$\Big|\int_\xi^{\to b} f(x,t)dx\Big| < \varepsilon. \boxtimes$$

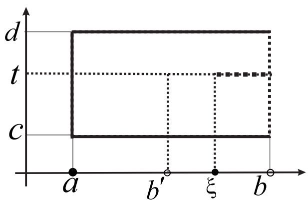

Рис. 8.2

Обсуждение 8.2.1. Равномерная сходимость НИ аналогична равномерной сходимости функционального ряда. При этом несобственный интеграл $\int_a^{\to b} f(x,t)dx$ – аналог функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$, собственный интеграл $\int_a^{\xi} f(x,t)dx$ – аналог частичной суммы $\sum_{k=1}^{n} a_k(x)$, несобственный интеграл $\int_\xi^{\to b} f(x,t)dx$ – остатка ряда $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x)$, а параметр t – аналог аргумента x. ⊟

Теорема 8.2.1. *(критерий Коши равномерной сходимости НИ) Пусть для любого $t \in \langle c, d\rangle$ и любого $b' \in (a,b)$ существует собственный интеграл $\int_a^{b'} f(x,t)dx$. НИ $\int_a^{\to b} f(x,t)dx$ сходится равномерно на $\langle c, d\rangle$ тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists b' \in (a,b):$$

$$\forall \xi, \xi' \in (b', b)\ \land\ \forall t \in \langle c, d\rangle\ \hookrightarrow\ \Big|\int_\xi^{\xi'} f(x,t)dx\Big| < \varepsilon. \qquad (8.3)$$

Доказательство. ($\Rightarrow$) Из определения 8.2.1 следует, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists b' \in (a,b):\ \forall \xi \in (b',b)\ \wedge\ \forall t \in \langle c,d\rangle\ \hookrightarrow\ \Big|\int_{\xi}^{\to b} f(x,t)dx\Big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому $\forall \xi, \xi' \in (b',b)$ и $\forall t \in \langle c,d\rangle\ \hookrightarrow$

$$\Big|\int_{\xi}^{\xi'} f(x,t)dx\Big| = \Big|\int_{\xi}^{\to b} f(x,t)dx - \int_{\xi'}^{\to b} f(x,t)dx\Big| \le$$

$$\le \Big|\int_{\xi}^{\to b} f(x,t)dx\Big| + \Big|\int_{\xi'}^{\to b} f(x,t)dx\Big| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

($\Leftarrow$) Из условия (8.3) следует, что для каждого фиксированного $t \in \in \langle c,d\rangle$ для НИ $\int_a^{\to b} f(x,t)dx$ выполнено условие Коши. Значит, НИ $\int_a^{\to b} f(x,t)dx$ сходится. Поэтому в условии (8.3) можно перейти к пределу при $\xi' \to b$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists b' \in (a,b):\ \forall \xi \in (b',b)\ \wedge\ \forall t \in \langle c,d\rangle\ \hookrightarrow\ \Big|\int_{\xi}^{\to b} f(x,t)dx\Big| \le \varepsilon.$$

Что совпадает с определением равномерной сходимости. ■

Замечание 8.2.1. Критерием Коши удобно пользоваться для доказательства *отсутствия* равномерной сходимости НИ. Запишем отрицание условия Коши:

$$\exists \varepsilon_0 > 0:\ \forall b' \in (a,b):\ \exists \xi, \xi' \in (b',b)\ \&\ \exists t \in \langle c,d\rangle:\ \Big|\int_{\xi}^{\xi'} f(x,t)dx\Big| \ge \varepsilon_0. \boxminus$$

Для доказательства равномерной сходимости НИ как правило применяют достаточные признаки.

Теорема 8.2.2. *(признак Вейерштрасса) Пусть функции*

$$f:[a,b)\times\langle c,d\rangle \to \mathbb{R}, \quad g:[a,b)\to\mathbb{R}$$

такие, что

1) $\forall \xi \in (a,b)\ \forall t \in \langle c,d\rangle$ существует интеграл Римана $\int_a^{\xi} f(x,t)dx$;

2) $\forall (x,t) \in [a,b)\times\langle c,d\rangle\ \hookrightarrow\ |f(x,t)| \le g(x)$;

3) интеграл $\int_a^{\to b} g(x)dx$ сходится.

Тогда интегралы $\int_a^{\to b} |f(x,t)|dx$ *и* $\int_a^{\to b} f(x,t)dx$ *сходятся равномерно на* $\langle c, d\rangle$.

Доказательство. Из признака сравнения для НИ (без параметра!) при каждом $t \in \langle c, d\rangle$ интеграл $\int_a^{\to b} f(x,t)dx$ сходится абсолютно. Поэтому и в силу неравенства $|f(x,t)| \leq g(x)$,

$$\Big|\int_\xi^{\to b} f(x,t)dx\Big| \leq \int_\xi^{\to b} |f(x,t)|dx \leq \int_\xi^{\to b} g(x)dx.$$

Из сходимости интеграла $\int_a^{\to b} g(x)dx$ следует, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists b' \in (a,b):\ \forall \xi \in (b', b)\ \hookrightarrow\ \int_\xi^{\to b} g(x)dx < \varepsilon.$$

Поскольку в последнем условии *отсутствует параметр* t, то

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists b' \in (a,b):\ \forall \xi \in (b', b)\ \wedge\ \forall t \in \langle c, d\rangle\ \hookrightarrow\ \Big|\int_\xi^{\to b} f(x,t)dx\Big| < \varepsilon. \blacksquare$$

Теорема 8.2.3. *(признак Дирихле) Пусть функции*

$$f,\ g : [a,b) \times \langle c, d\rangle \to \mathbb{R}$$

удовлетворяют условиям:

1) $\forall t \in \langle c, d\rangle$ *функция* f *непрерывна по* x *на* $[a,b)$;

2) $\forall t \in \langle c, d\rangle$ *функция* g *непрерывно дифференцируема по* x *на* $[a,b)$;

3) *первообразная* $F(x,t) := \int_a^x f(s,t)ds$ ***равномерно ограничена*** *на* $[a,b) \times \langle c, d\rangle$:

$$\exists C > 0:\ \forall (x,t) \in [a,b) \times \langle c, d\rangle\ \hookrightarrow\ |F(x,t)| < C;$$

4) *на* $[a,b) \times \langle c, d\rangle$ *производная* $g'_x(x,t) \leq 0$ *(т.е. для каждого* $t \in \in \langle c, d\rangle$ *функция* $g(x,t)$ *не возрастает по переменной* x *на* $[a,b)$*)*;

5) *функция* $g(x,t)$ *стремится к нулю при* $x \to b$ ***равномерно*** *по* $t \in \langle c, d\rangle$: $g(x,t) \underset{\langle c,d\rangle}{\rightrightarrows} 0$ *при* $x \to b$.

Тогда интеграл $\int_a^{\to b} f(x,t)g(x,t)dx$ *сходится равномерно на* $\langle c, d\rangle$.

Доказательство. В силу признака Дирихле для НИ без параметра, для каждого $t \in \langle c, d\rangle$ интеграл $\int_a^{\to b} f(x,t)g(x,t)dx$ сходится. Поэтому к нему можно применить формулу интегрирования по частям: для произвольных $\xi \in (a,b)$ и $t \in \langle c, d\rangle$

$$\int_\xi^{\to b} f(x,t)g(x,t)dx = F(x,t)g(x,t)\Big|_{x=\xi}^{x\to b} - \int_\xi^{\to b} F(x,t)g'_x(x,t)dx.$$

Из условий 3 и 5 следует, что $\lim_{x\to b} F(x,t)g(x,t) = 0$. Из условий 4 и 5 следует, что функция $g(x,t) \geq 0$ на $[a,b) \times \langle c, d\rangle$. Поэтому

$$\Big|\int_\xi^{\to b} f(x,t)g(x,t)dx\Big| \leq Cg(\xi,t) - C\int_\xi^{\to b} g'_x(x,t)dx = 2Cg(\xi,t) \underset{\langle c,d\rangle}{\overset{\xi\to b-0}{\rightrightarrows}} 0. \blacksquare$$

8.3. Свойства несобственных интегралов с параметром

Теорема 8.3.1. *(о непрерывности НИ по параметру) Пусть функция $f : [a,b) \times [c,d] \to \mathbb{R}$ непрерывна как функция от двух переменных. Пусть интеграл $\int_a^{\to b} f(x,t)dx$ сходится равномерно на отрезке $[c,d]$. Тогда функция $I(t) = \int_a^{\to b} f(x,t)dx$ непрерывна на $[c,d]$.*

Доказательство. Пусть $t_0 \in [c,d]$ – произвольная точка. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Из равномерной сходимости интеграла $\int_a^{\to b} f(x,t)dx$ следует, что

$$\exists b'(\varepsilon) \in (a,b) : \ \forall t \in [c,d] \ \hookrightarrow \ \Big|\int_{b'}^{\to b} f(x,t)dx\Big| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

В силу непрерывности *собственного* интеграла $\int_a^{b'} f(x,t)dx$ по параметру (теорема 8.1.1),

$$\exists \delta = \delta(b'(\varepsilon)) = \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall t \in [c,d] : \ |t - t_0| < \delta \ \hookrightarrow$$

$$\Big|\int_a^{b'} f(x,t)dx - \int_a^{b'} f(x,t_0)dx\Big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому для любого ε и любого $t \in [c,d] \ \wedge \ |t - t_0| < \delta$ справедливо

$$|I(t) - I(t_0)| = \Big|\int_a^{\to b} f(x,t)dx - \int_a^{\to b} f(x,t_0)dx\Big| \leq$$

$$\leq \Big| \int_a^{b'} f(x,t)dx - \int_a^{b'} f(x,t_0)dx \Big| + \Big| \int_{b'}^{\to b} f(x,t)dx \Big| + \Big| \int_{b'}^{\to b} f(x,t_0)dx \Big| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Если точка $b \in \mathbb{R}$, то предыдущая оценка означает, что на плоскости (x,t) отрезок, соединяющий точки $M(b,t)$ и $N(b,t_0)$ мы заменили трехзвенной ломаной $M(b,t) \to P(b',t) \to \to Q(b',t_0) \to N(b,t_0)$ (см. рис. 8.3). ■

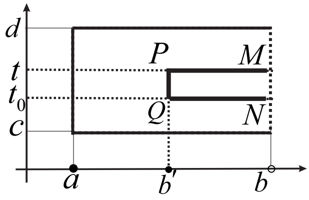

Рис. 8.3

Теорема 8.3.2. *(об интегрировании НИ по параметру) Пусть функция $f : [a,b) \times [c,d] \to \mathbb{R}$ непрерывна как функция от двух переменных. Пусть интеграл $\int_a^{\to b} f(x,t)dx$ сходится равномерно на отрезке $[c,d]$. Тогда*

$$\int_c^d \left(\int_a^{\to b} f(x,t)dx \right) dt = \int_a^{\to b} \left(\int_c^d f(x,t)dt \right) dx.$$

Замечание 8.3.1. Утверждение теоремы можно понимать как перестановку собственного и несобственного интегралов. ⊟

Доказательство. Сразу отметим, что интеграл в левой части равенства существует, поскольку функция $I(t) := \int_a^{\to b} f(x,t)dx$ непрерывна на $[c,d]$ (теорема 8.3.1). Более того, для произвольного $\xi \in (a,b)$ существует интеграл

$$\int_c^d \left(\int_\xi^{\to b} f(x,t)dx \right) dt = \int_c^d \left(\int_a^{\to b} f(x,t)dx \right) dt - \int_c^d \left(\int_a^{\xi} f(x,t)dx \right) dt,$$

поскольку функция $I(t;\xi) := \int_a^\xi f(x,t)dx$ непрерывна по t в силу теоремы 8.1.1.

Для произвольного $b' \in (a,b)$, в силу леммы 8.1.1, совпадают повторные собственные интегралы

$$\int_c^d \left(\int_a^{b'} f(x,t)dx \right) dt = \int_a^{b'} \left(\int_c^d f(x,t)dt \right) dx. \qquad (8.4)$$

Покажем, что в интеграле слева можно перейти к пределу при $b' \to$ $\to b$. Сравним значения функции $\varphi(b') := \int_c^d \left(\int_a^{b'} f(x,t)dx\right) dt$ с числом $\int_c^d \left(\int_a^{\to b} f(x,t)dx\right) dt$: по $\varepsilon > 0$ возьмем такое $b'(\varepsilon)$, чтобы в определении 8.2.1 равномерной сходимости НИ выполнялась оценка $|\int_\xi^{\to b} f(x,t)dx| < \varepsilon/(d-c)$ как только $\xi \in (b', b)$. Тогда

$$\Big|\int_c^d \left(\int_a^{\to b} f(x,t)dx\right) dt - \int_c^d \left(\int_a^{\xi} f(x,t)dx\right) dt\Big| =$$

$$= \Big|\int_c^d \left(\int_\xi^{\to b} f(x,t)dx\right) dt\Big| < \frac{\varepsilon}{d-c}(d-c) = \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\lim_{b'\to b} \int_c^d \left(\int_a^{b'} f(x,t)dx\right) dt = \int_c^d \left(\int_a^{\to b} f(x,t)dx\right) dt.$$

Но если в *тождестве* (8.4) существует предел в левой части при $b' \to b$, то существует предел в правой, и они совпадают. Остается заметить, что предел в правой части (8.4) при $b' \to b$ есть, по определению, несобственный интеграл:

$$\lim_{b'\to b-0} \int_a^{b'} \left(\int_c^d f(x,t)dt\right) dx = \int_a^{\to b} \left(\int_c^d f(x,t)dt\right) dx. \quad \blacksquare$$

Теорема 8.3.3. *(о дифференцировании НИ по параметру) Пусть функции f, $f'_t : [a,b) \times [c,d] \to \mathbb{R}$ непрерывны как функции от двух переменных. Пусть интеграл $\int_a^{\to b} f'_t(x,t)dx$ сходится равномерно на отрезке $[c,d]$ и при некотором $t_0 \in [c,d]$ сходится интеграл $\int_a^{\to b} f(x,t_0)dx$. Тогда интеграл $\int_a^{\to b} f(x,t)dx$ сходится равномерно на $[c,d]$, а функция $I(t) = \int_a^{\to b} f(x,t)dx$ непрерывно дифференцируема на $[c,d]$, причем дифференцирование можно внести под знак интеграла:*

$$\forall t \in [c,d] \ \hookrightarrow \ I'(t) = \int_a^{\to b} f'_t(x,t)dx.$$

Доказательство. При любом фиксированном $x \in [a,b)$ функция $f'_t(x,t)$ непрерывна по переменной t. Поэтому по переменной t применима формула Ньютона–Лейбница и

$$f(x,t) = f(x,t_0) + \int_{t_0}^t f'_s(x,s)ds.$$

Применяя теорему 8.3.2 к функции $f'_t(x,t)$, получаем

$$I(t) := \int_a^{\to b} f(x,t)dx = \int_a^{\to b} \left(f(x,t_0) + \int_{t_0}^{t} f'_s(x,s)ds \right) dx =$$

$$= \int_a^{\to b} f(x,t_0)dx + \int_a^{\to b} \left(\int_{t_0}^{t} f'_s(x,s)dx \right) ds =$$

$$= \int_a^{\to b} f(x,t_0)dx + \int_{t_0}^{t} \left(\int_a^{\to b} f'_s(x,s)dx \right) ds. \tag{8.5}$$

Воспользовавшись теоремой 8.3.1 для функции $J(t) := \int_a^{\to b} f'_t(x,t)dx$, продифференцируем по t полученное выражение функции $I(t)$ – получаем требуемое равенство. ■

Задача 8.3.1. Воспользовавшись представлением (8.5) функции $I(t)$, докажите, что НИ $I(t)$ сходится равномерно на $[c,d]$.

8.4. Замечательные несобственные интегралы

Исследование НИ предполагает прежде всего доказательство его сходимости. Исследование НИ с параметром состоит в том, чтобы установить, как именно зависит НИ от параметра – непрерывно, дифференцируемо, допускает ли НИ перестановку порядка интегрирования. Вычисление НИ возможно в исключительно редких случаях. Ниже в таблице приведены некоторые НИ (в том числе именные: Пьер-Симон, маркиз де Лаплас (1749 – 1827), Симеон Дени Пуассон (1781 – 1840), Огюстен Жан Френель (1788 – 1827)).

Часто интеграл с параметром после преобразований (замены переменной, интегрирования по частям) сводится к одному из табличных интегралов. Основным методом вычисления НИ является метод дифференцирования по параметру: после дифференцирования по параметру (под знаком НИ!), возможно, получается интеграл, берущийся в элементарных функциях. На втором этапе эту функцию интегрируют уже по параметру. В результате возникает постоянная интегрирования, которую находят с помощью специально подобранного значения параметра. Обоснование этого метода всегда нетривиально и опирается на теоремы 8.3.1–8.3.3.

Наименование	Интеграл
Вспомогательный	$\int_0^\infty e^{-\beta x}\cos\alpha x\ dx = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2},\ \beta>0$
Вспомогательный	$\int_0^\infty e^{-\beta x}\sin\alpha x\ dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2},\ \beta>0$
Вспомогательный	$\int_0^\infty e^{-\beta x}\frac{\sin\alpha x}{x}\ dx = arctg\frac{\alpha}{\beta},\ \beta>0$
Дирихле	$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}\ dx = sign(\alpha)\frac{\pi}{2}$
Лапласа	$\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\ dx = e^{-\lvert\alpha\rvert}\frac{\pi}{2}$
Лапласа	$\int_0^\infty \frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}\ dx = sign(\alpha)\ e^{-\lvert\alpha\rvert}\frac{\pi}{2}$
Лапласа	$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2\alpha x\ dx = e^{-\alpha^2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$
Эйлера–Пуассона	$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
Френеля	$\int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
Френеля	$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

8.5. Эйлеровы интегралы

Речь идет о специальных функциях, имеющих представление в виде НИ с параметрами, аргументами функций являются параметры. Полное исследование Эйлеровых интегралов осуществляется в комплексных переменных. Пока ограничимся вещественными. Гамма-функция применяется в статистических исследованиях, бета-функция нашла применение в теоретической физике.

Определение 8.5.1. Несобственный интеграл

$$\Gamma(p) = \int_{0\leftarrow}^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx, \quad p > 0 \tag{8.6}$$

называется **гамма-функцией Эйлера**. Несобственный интеграл

$$B(p,q) = \int_{0\leftarrow}^{\rightarrow 1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \quad p > 0,\ q > 0 \tag{8.7}$$

называется **бета-функцией Эйлера**.

Лемма 8.5.1. *Определения (8.6) и (8.7) корректны.*

Доказательство. Оба интеграла от знакопостоянных функций. В особой точке $+0$ интеграл (8.6) сходится при $p > 0$ в силу эквивалентности $x^{p-1}e^{-x} \sim x^{p-1}$. Для всех достаточно больших p справедлива оценка $x^{p-1}e^{-x} < e^{-x/2}$. Интеграл $\int_1^\infty e^{-x/2}dx$ сходится при любых p. Следовательно интеграл (8.6) сходится при $p > 0$.

При $x \to +0$ справедлива эквивалентность $x^{p-1}(1-x)^{q-1} \sim x^{p-1}$, а при $x \to 1-0$ – эквивалентность $x^{p-1}(x-1)^{q-1} \sim (1-x)^{q-1}$. Что доказывает сходимость интеграла (8.7) при $p, q > 0$. ■

Теорема 8.5.1. *(свойства гамма и бета функций)*

1) *формула понижения:* $\Gamma(p+1) = p\ \Gamma(p), \ \ p > 0$;

2) *вычисление факториала:* $\Gamma(n) = (n-1)!$ *для* $n \in \mathbb{N}$;

3) *формула дополнения:*

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}, \quad p \in (0,1);$$

4) *симметричность бета-функции:* $B(p,q) = B(q,p)$;

5) *выражение бета-функции через гамма-функцию:*

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)};$$

6) *вычисление биномиальных коэффициентов:*

$$C_n^k = \frac{1}{(n+1)B(n-k+1,k+1)}.$$

Замечание 8.5.1. Нетрудно доказать, что существует бесконечное множество гладких (и даже бесконечно дифференцируемых) функций $f(p)$ $(p > 0)$, для которых при $p = n \in \mathbb{N}$ верно равенство $f(n) = n!$. Ценность и уникальность гамма-функции, в частности, в том, что она *аналитическая*, т. е. допускающая представление в виде степенного ряда. График гамма-функции для положительных значений аргумента см. на рис. 8.4. ⊟

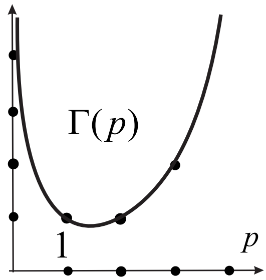

Рис. 8.4

Доказательство свойств 1 и 2. При $p > 0$ имеем

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{\infty} x^p e^{-x} dx = -\int_0^{\infty} x^p de^{-x} =$$

$$= -x^p e^{-x}\Bigg|_{x=0}^{x\to\infty} + \int_0^{\infty} p x^{p-1} e^{-x} dx = p\,\Gamma(p).$$

Поскольку $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$, то из формулы понижения сразу получаем свойство 2. ■

Задача 8.5.1. Докажите симметричность бета-функции (свойство 4).

Глава 9

Интеграл Фурье и преобразование Фурье

Непериодическую функцию, определенную на всей оси, невозможно представить в виде тригонометрического ряда Фурье. Оказывается, такую функцию (при дополнительных условиях) можно представить в виде несобственного интеграла с параметром — интеграла Фурье. Интеграл Фурье является непрерывным аналогом тригонометрического ряда Фурье. С интегралом Фурье связано преобразование Фурье — это непрерывный аналог последовательности коэффициентов Фурье в комплексной форме.

9.1. Интеграл Фурье: обсуждение и определение

Напомним, что функция f называется абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$ (АИ, $f \in L_R(\mathbb{R})$), если интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ имеет конечное количество особенностей и сходится абсолютно как несобственный.

Пусть f АИ на $\mathbb{R}$ функция. Для любого $n \in \mathbb{N}$ на $[-\sqrt{\pi}n, \sqrt{\pi}n]$ определены ее коэффициенты Фурье:

$$a_0 := \frac{1}{2\sqrt{\pi}n} \int\limits_{-\sqrt{\pi}n}^{\sqrt{\pi}n} f(t)dt, \ a_k := \frac{1}{\sqrt{\pi}n} \int\limits_{-\sqrt{\pi}n}^{\sqrt{\pi}n} f(t) \cos \frac{k\sqrt{\pi}t}{n} dt,$$

$$b_k := \frac{1}{\sqrt{\pi}n} \int\limits_{-\sqrt{\pi}n}^{\sqrt{\pi}n} f(t) \sin \frac{k\sqrt{\pi}t}{n} dt$$

и частичные суммы ряда Фурье (мы намеренно берем количество слагаемых n^2):

$$FS_{n^2}(f) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}n} \int\limits_{-\sqrt{\pi}n}^{\sqrt{\pi}n} f(t)dt \ +$$

$$+\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{\pi}n} \int\limits_{-\sqrt{\pi}n}^{\sqrt{\pi}n} f(t) \cos \frac{k\sqrt{\pi}t}{n} dt \cdot \cos \frac{k\sqrt{\pi}x}{n} +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}n} \int\limits_{-\sqrt{\pi}n}^{\sqrt{\pi}n} f(t) \sin \frac{k\sqrt{\pi}t}{n} dt \cdot \sin \frac{k\sqrt{\pi}x}{n} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}n} \int\limits_{-\sqrt{\pi}n}^{\sqrt{\pi}n} f(t)dt + \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\sqrt{\pi}n}^{\sqrt{\pi}n} f(t) \cos \frac{k\sqrt{\pi}}{n}(t-x)dt \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{n}.$$

Замечание 9.1.1. Осуществленное преобразование частичной суммы отличается от вывода интеграла Дирихле (2.3): в формуле Дирихле сначала идет суммирование, потом интегрирование, сейчас – наоборот. $\boxminus$

После замены $\omega := k\sqrt{\pi}/n$ при фиксированном x и фиксированном n сумму в полученном выражении можно интерпретировать как *интегральную сумму* на отрезке $[0, \sqrt{\pi}n]$ функции

$$\varphi(\omega; n, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{\pi}n}^{\sqrt{\pi}n} f(t) \cos \omega(t-x)dt$$

с разбиением отрезка интегрирования на равные подотрезки длины $\Delta\omega = \sqrt{\pi}/n$ и выборкой $\xi_k = \sqrt{\pi}k/n$ в концах разбиения. Пусть $n \to \to +\infty$. Тогда первое слагаемое, в силу АИ функции f на всей оси, устремится к нулю, а сумма "превратиться" в несобственный интеграл на полуоси. Мы кладем эти *эвристические* рассуждения в основу строгого определения:

Определение 9.1.1. Интегралом Фурье абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$ функции называется повторный несобственный интеграл

$$FI(f,x) := \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega(t-x)dt\right)d\omega. \ \boxtimes \qquad (9.1)$$

Обсуждение 9.1.1. Аналогично ряду Фурье, определение 9.1.1 является *символьной* записью. Оно определяет число (при фиксированном $x \in \mathbb{R}$) только в том случае, если существует НИ (9.1). Замена $\omega := k\sqrt{\pi}/n$ при $n \to +\infty$ превращает *дискретные частоты* $k \in \mathbb{N}$ в *непрерывно* меняющиеся от нуля до $+\infty$ частоты, а функциональный ряд по индексу суммирования k превращается в несобственный интеграл по переменной ω. По аналогии с рядом Фурье нас интересует, как интеграл Фурье связан с породившей его функцией f; в частности, возможность выразить *значение* функции f в точке x через ее интеграл Фурье $FI(f,x)$, т. е. справедливость числового равенства $f(x) = FI(f,x)$. $\boxminus$

9.2. Подготовительная лемма

Лемма 9.2.1. *(о перестановке повторных интегралов) Пусть функция $f(t)$ абсолютно интегрируема на интервале (a,b), где $-\infty \leq$ $\leq a < b \leq +\infty$, а функция $g(t,\omega)$ непрерывна и ограничена на “полосе” $(a,b)\times[c,d]$, где $c,d \in \mathbb{R}$. Тогда существуют и совпадают повторные интегралы*

$$\int_c^d\left(\int_a^b f(t)g(t,\omega)dt\right)d\omega = \int_a^b\left(\int_c^d f(t)g(t,\omega)d\omega\right)dt. \qquad (9.2)$$

Доказательство осуществляется в четыре этапа и аналогично доказательству теоремы 8.3.2.

1) Поскольку несобственный интеграл $\int_a^b f(t)dt$ имеет конечное количество особенностей, достаточно рассмотреть случай, когда точка $a \in \mathbb{R}$ и *единственной особенностью* является точка b (конечная или $+\infty$).

2) Переход к собственному интегрированию: пусть $b' \in (a,b)$ – произвольная точка. Рассмотрим функцию $\hat{f}(t,\omega) := f(t)$ как функцию от двух переменных на прямоугольнике $\Pi' := [a,b']\times[c,d]$. Поскольку f интегрируема в собственном смысле на $[a,b']$, то она же интегрируема в собственном смысле на Π' и $\int_{\Pi'}\hat{f}(t,\omega)dtd\omega = (d-c)\int_a^{b'} f(t)dt$.

Но функция $g(t,\omega)$, будучи непрерывной, также интегрируема на Π'. Следовательно произведение функций $f(t)g(t,\omega)$ интегрируемо в собственном смысле на Π'. При каждом фиксированном $\omega_0 \in [c,d]$ функция $\varphi(t) := f(t)g(t,\omega_0)$ интегрируема на $[a,b']$ как произведение интегрируемой на непрерывную. При каждом фиксированном $t_0 \in [a,b']$ функция $\psi(\omega) := f(t_0)g(t_0,\omega)$ интегрируема на $[c,d]$ как непрерывная. Откуда следует существование и совпадение трех интегралов – двукратного и двух повторных:

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^{b'} f(t)g(t,\omega)dt \right) d\omega = \iint\limits_{\Pi'} f(t)g(t,\omega)dtd\omega =$$

$$= \int\limits_a^{b'} \left(\int\limits_c^d f(t)g(t,\omega)d\omega \right) dt. \tag{9.3}$$

3) Покажем, что в интеграле слева можно перейти к пределу при $b' \to b$. Во-первых, для каждого $\omega_0 \in [c,d]$ НИ $\int_a^{\to b} f(t)g(t,\omega_0)dt$ сходится, поскольку произведение абсолютно сходящейся функции $f(t)$ на непрерывную ограниченную функцию $g(t,\omega_0)$ является абсолютно интегрируемой функцией. Во-вторых, сходимость НИ $\int_a^{\to b} f(t)g(t,\omega)dt$ равномерна относительно параметра $\omega \in [c,d]$. Согласно условию, на $\Pi := [a,b) \times [c,d]$ верна оценка $|g(t,\omega)| < C = const$. Из абсолютной интегрируемости функции $f(t)$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $b' \in (a,b)$, что для всех $\xi \in (b',b)$ верна оценка $\int_\xi^{\to b} |f(t)|dt < \varepsilon/C$. Тогда для всех $\xi \in (b',b)$

$$\Big| \int_\xi^{\to b} f(t)g(t,\omega)dt \Big| < C \int_\xi^{\to b} |f(t)|dt < \varepsilon.$$

Теперь, рассуждая по отношению к функции $f(t)g(t,\omega)$ как при доказательстве теоремы 8.3.2, мы можем перейти к пределу:

$$\lim_{b'\to b} \int_c^d \left(\int_a^{b'} f(t)g(t,\omega)dt \right) d\omega = \int_c^d \left(\int_a^{\to b} f(t)g(t,\omega)dt \right) d\omega.$$

4) Но если в тождестве (9.3) существует предел в левой части при $b' \to b$, то существует предел в правой части, они совпадают и предел в правой части есть, по определению, НИ $\int\limits_a^{\to b} \left(\int\limits_c^d f(t)g(t,\omega)d\omega \right) dt$. ■

9.3. Сходимость интеграла Фурье в точке

Аналогом доказанного ранее утверждения о сходимости ряда Фурье является

Теорема 9.3.1. *(о сходимости интеграла Фурье к полусумме односторонних пределов) Пусть функция f АИ на $\mathbb{R}$. Пусть x – точка разрыва и скачка производной. Тогда интеграл Фурье функции f сходится в точке x к числу $A = (f(x+0) + f(x-0))/2$.*

Из теоремы 9.3.1 сразу получаем

Следствие 9.3.1. *(о сходимости интеграла Фурье к значению функции в точке) Пусть функция f АИ на $\mathbb{R}$. Пусть x – точка гладкости функции или скачка производной. Тогда интеграл Фурье функции f сходится в точке x к ее значению: $f(x) = FI(f, x)$.*

Доказательство теоремы 9.3.1 осуществляется в шесть этапов.

1) В силу леммы 9.2.1, для произвольных фиксированных $x \in \mathbb{R}$ и $\lambda > 0$ существует *собственный интеграл*

$$FI(f; \lambda, x) := \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega(t-x) dt \right) d\omega. \tag{9.4}$$

Значит, нам нужно доказать, что в условиях теоремы

$$\lim_{\lambda \to +\infty} FI(f; \lambda, x) = \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)).$$

2) После замены $u = t - x$ получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega(t-x) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+u) \cos(\omega u) du =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} f(x+u) \cos(\omega u) du + \int_{0}^{+\infty} f(x+u) \cos(\omega u) du =$$

$$= \int_{0}^{+\infty} (f(x+u) + f(x-u)) \cos(\omega u) du.$$

3) Подставляя полученное выражение в формулу (9.4) и *меняя порядок интегрирования* (см. лемму 9.2.1), получаем:

$$FI(f; \lambda, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^\lambda \cos(\omega u) d\omega \right) (f(x+u) + f(x-u)) du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} (f(x+u)+f(x-u))\frac{\sin\lambda u}{u}du$$

(см. замечание 9.1.1 и сравните полученное выражение *собственного* интеграла (9.4) с *частичной* суммой ряда Фурье в виде интеграла Дирихле (2.4)).

4) Поскольку несобственный интеграл Дирихле $\int_0^{+\infty}(\sin\lambda u/u)du = \pi/2$ (см. таблицу в п. 8.4), то разность

$$FI(f;\lambda,x) - \frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0)) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \Big(\big(f(x+u)+f(x-u)\big) - \big(f(x+0)+f(x-0)\big)\Big)\frac{\sin\lambda u}{u}du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \big(f(x+u)-f(x+0)\big)\frac{\sin\lambda u}{u}du + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \big(f(x-u)-f(x-0)\big)\frac{\sin\lambda u}{u}du.$$

Остается показать, что каждый из полученных интегралов стремится к нулю при $\lambda \to +\infty$.

5) Рассмотрим только первый интеграл (второй исследуется аналогично); представим его в виде суммы трех интегралов:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \big(f(x+u)-f(x+0)\big)\frac{\sin\lambda u}{u}du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{1} \frac{f(x+u)-f(x+0)}{u}\sin\lambda u\ du +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_1^{+\infty} \frac{f(x+u)}{u}\sin\lambda u\ du - f(x+0)\frac{1}{\pi}\int_1^{+\infty}\frac{\sin\lambda u}{u}du.$$

6 а) Поскольку x – точка скачка производной, существует конечный предел

$$\lim_{u\to+0}\frac{f(x+u)-f(x+0)}{u} = f'_+(x).$$

Поэтому функция $(f(x+u)-f(x+0))/u$ не имеет по переменной u особенности в точке $+0$ и абсолютно интегрируема на отрезке $[0,1]$. В силу теоремы Римана об осцилляции,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{1} \frac{f(x+u)-f(x+0)}{u}\sin\lambda u\ du \to 0 \text{ при } \lambda\to+\infty.$$

6 б) Поскольку при условии $u \in [1, +\infty)$ справедлива оценка $|f(x+u)|/u \leq |f(x+u)|$, то функция $f(x+u)/u$ абсолютно интегрируема по u на $[1, +\infty)$. Опять же, в силу Римана об осцилляции, получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_{1}^{+\infty} \frac{f(x+u)}{u} \sin \lambda u \, du \to 0 \text{ при } \lambda \to +\infty.$$

6 в) Из сходимости несобственного интеграла Дирихле следует, что

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin \lambda u}{u} du \overset{v=\lambda u}{=} \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{\sin v}{v} dv \to 0 \text{ при } \lambda \to +\infty. \quad \blacksquare$$

При исследовании интеграла Фурье полезна

Лемма 9.3.1. *(о разложении на четную и нечетную составляющие) Для АИ на $\mathbb{R}$ функции f справедливы утверждения:*

1) ее интеграл Фурье равен

$$FI(f) = \int_{0}^{+\infty} (a(\omega)\cos(\omega x)) + b(\omega)\sin(\omega x))d\omega,$$

где

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)dt, \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\omega t)dt;$$

2) если функция f четная, то

$$FI(f) = \int_{0}^{+\infty} a(\omega)\cos(\omega x)dt, \text{ где } a(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)dt;$$

3) если функция f нечетная, то

$$FI(f) = \int_{0}^{+\infty} b(\omega)\sin(\omega x)dt, \text{ где } b(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(t)\sin(\omega t)dt.$$

Задача 9.3.1. Докажите лемму 9.3.1. Сформулируйте теорему 9.3.1 и следствие 9.3.1 в случае четной и нечетной функции f.

9.4. Преобразование Фурье: обсуждение и определение

Ряд Фурье сопоставляет периодической функции f последовательность *пар* ее коэффициентов Фурье: $f \sim \{(a_k, b_k)\}_{k=0}^{\infty}$ (считаем, что $b_0 = 0$). Каждая пара коэффициентов вполне характеризуется **амплитудой** $A_k := \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ и **фазой** $\varphi_k \in S^1$, где $a_k = A_k \cos\varphi_k$, $b_k = A_k \sin\varphi_k$. Последовательность пар $\{(A_k, \varphi_k)\}_{k=0}^{\infty}$ – это **спектральная характеристика** периодической функции в зависимости от *дискретной частоты* $k = 0, 1, 2, \ldots$. Комплексная форма ряда Фурье сопоставляет периодической функции "двустороннюю" последовательность коэффициентов $\{c_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ (в комплексной форме частоты k принимают все целые значения). Из формул (2.10) следует, что $A_k = 2|c_k|$, а $\varphi_k = -\arg c_k$ $(k \in \mathbb{N})$. Значит, один коэффициент c_k содержит всю спектральную информацию о частоте k. Ряд Фурье функции f можно интерпретировать как функцию, зависящую от *целочисленного* аргумента k, т. е. $FS(f) : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $FS(f)(k) := c_k$. Сейчас мы запишем для непериодической функции ее интеграл Фурье в комплексной форме и выделим в нем *непрерывный* аналог функции $FS(f)$.

Предварительно введем

Определение 9.4.1. Пусть функция φ определена на $\mathbb{R}$ и абсолютно интегрируема на любом отрезке $[a, b]$. **Интегралом в смысле главного значения** называется предел

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx := \lim_{l\to+\infty} \int_{-l}^{l} \varphi(x)dx. \boxtimes$$

Сокращение v.p. означает "Valeur principale" – главное значение (фр.). Если существует НИ $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx$, то интеграл в смысле главного значения тоже существует и совпадает I. В обратную сторону утверждение неверно.

Нас интересует случай, когда функция φ абсолютно интегрируема на любом отрезке и *нечетна.* Тогда для любого $l > 0$ верно $\int_{-l}^{l} \varphi(x)dx = 0$. Поэтому $v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 0$.

Лемма 9.4.1. *(комплексная форма интеграла Фурье) Пусть функция $f \in L_R(\mathbb{R})$. Тогда ее интеграл Фурье имеет представления в виде повторных интегралов:*

$$FI(f, x) = v.p. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \right) d\omega = \quad (9.5)$$

$$= v.p.\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \right) d\omega. \qquad (9.6)$$

Обсуждение 9.4.1. Формулы (9.5) и (9.6) имеют символьный характер (см. обсуждение 9.1.1 определения интеграла Фурье). Если же интеграл Фурье при некотором $x \in \mathbb{R}$ существует, то обе формулы определяют его. Причем, в этих формулах внешний несобственный интеграл понимается в смысле главного значения. ⊟

Доказательство. Чтобы перейти в формуле (9.1) в комплексной форме, предварительно симметризуем ее по частотам: наряду с положительными введем отрицательные частоты ω. В силу четности функции косинус,

$$FI(f,x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega (x-t) dt \right) d\omega. \qquad (9.7)$$

При фиксированном x, в силу леммы 9.2.1, существует НИ с параметром ω:

$$J(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega (x-t) dt$$

Из леммы 9.2.1 следует, что функция $J(\omega)$ АИ на любом отрезке. В силу нечетности функции синус, получаем

$$v.p.\ \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega (x-t) dt \right) d\omega = 0. \qquad (9.8)$$

Сложим формулы (9.7) и (9.8) – получаем формулу

$$FI(f,x) = v.p.\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega(x-t)} dt \right) d\omega. \qquad (9.9)$$

Поскольку $e^{i\omega(x-t)} = e^{i\omega x} \cdot e^{-i\omega t}$, из формулы (9.9) следует формула (9.5).

В равенстве (9.7), в силу четности функции косинус, можно аргумент $(x-t)$ заменить на $(t-x)$. В равенстве (9.8), в силу нечетности функции синус, аргумент $(x-t)$ также можно заменить на $(t-x)$, поскольку в правой части стоит ноль. В результате мы получаем формулу, которая аналогична (9.9), с единственным отличием: вместо аргумента $(x-t)$ стоит $(t-x)$. Откуда вытекает формула (9.6). ■

Сравнивая формулу (9.5) с рядом Фурье в комплексной форме, мы видим, что аналогом коэффициентов c_k является внутренний интеграл. Применение комплексной формы подсказывает перейти от вещественнозначной функции к *комплекснозначной* $f(x) = f_r(x) + i f_{im}(x)$.

При этом все доказанные выше утверждения остаются справедливыми, поскольку все преобразования с функцией f линейны и могут быть осуществлены отдельно для вещественной части f_r, отдельно для мнимой f_{im}. Теперь мы дадим основное

Определение 9.4.2. Пусть f – комплекснозначная функция, абсолютно интегрируемая на любом отрезке. Ее **преобразованием Фурье** называется комплекснозначная функция действительной переменной

$$F[f](\omega) = v.p.\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx, \quad \text{где } \omega \in \mathbb{R}. \tag{9.10}$$

Обратным преобразованием Фурье называется комплекснозначная функция действительной переменной

$$F^{-1}[f](x) = v.p.\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)e^{i\omega x}d\omega, \quad \text{где } x \in \mathbb{R}.\ \boxtimes \tag{9.11}$$

Обсуждение 9.4.2. Пусть f – физический сигнал, зависящий от времени. Интерпретируем его как **суперпозицию** (= сумму = наложение друг на друга) гармонических колебаний $e^{i\omega x}$, частота ω которых меняется непрерывно на $(-\infty, +\infty)$. Математически это означает интегрирование по переменной ω. Преобразование Фурье интерпретируется как спектральная характеристика сигнала в зависимости от *непрерывной частоты* ω. Именно: амплитуда гармонического колебания частоты ω равна абсолютной величине комплексной функции $F[f](\omega)$, а фазовый сдвиг колебания – это аргумент $(F[f](\omega))$: $A(\omega) = |F[f](\omega)|$, $\varphi(\omega) = \arg F[f](\omega)$. Естественно ожидать, что обратное преобразование Фурье восстанавливает сигнал по его спектру – при определенных условиях это так. Преобразование Фурье, очевидно, линейно по f и "алгебраически" реагирует на дифференцирование и сдвиг аргумента (см. ниже). Поэтому исследовать спектр порой проще, чем сам сигнал. Преобразование Фурье – мощнейший метод в уравнениях математической физики и в статистических исследованиях. $\boxminus$

9.5. Существование преобразования Фурье

Формулы (9.10) и (9.11), аналогично определениям ряда Фурье и интеграла Фурье, являются символьной записью. Абсолютная интегрируемость функции f на *любом отрезке* еще не гарантирует существования несобственных интегралов даже в смысле главного значения. Но для функции абсолютно интегрируемой на *всей оси* существование прямого и обратного преобразований гарантировано:

Теорема 9.5.1. *Пусть функция f абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$. Тогда:*

1) *ее фурье-образ $F[f](x)$ и обратный фурье-образ $F^{-1}[f](x)$ существуют в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ как абсолютно сходящиеся несобственные интегралы (9.10) и (9.11), а не только в смысле главных значений;*

2) *в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ верно: $F^{-1}[f](x) = F[f](-x)$;*

3) *функции $F[f]$ и $F^{-1}[f]$ равномерно непрерывны на $\mathbb{R}$;*

4) $\lim_{x\to\pm\infty} F[f](x) = \lim_{x\to\pm\infty} F^{-1}[f](x) = 0$;

5) *справедливо равенство Планшереля (Мишель Планшерель, 1885–1967): если $f \in L^1_R(\mathbb{R}) \cap L^2_R(\mathbb{R})$, то прямое и обратное преобразования Фурье сохраняют L^2-норму:*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F[f](x)|^2 dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F^{-1}[f](x)|^2 dx.$$

Обсуждение 9.5.1. Из теоремы 9.5.1 следует, во-первых, равноправие прямого и обратного преобразований Фурье для абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$ функции f: ее можно интерпретировать и как исходный сигнал, и как спектральную характеристику сигнала $g = F^{-1}[f]$. Во-вторых, образ $F[f]$ (обратный образ $F^{-1}[f]$) АИ функции не имеет ни разрывов, ни "всплесков" в окрестностях $\pm\infty$ (что не исключено у исходной АИ функции f). Непрерывность фурье-образа уже гарантирует его абсолютную интегрируемость на любом отрезке. Однако это не означает, что фурье-образ (обратный образ) является абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$ функцией, т. е. преобразования Фурье (прямое и обратное) не действуют в пространстве функций, которые АИ на всей оси. Грубо говоря, преобразования Фурье улучшают локальные характеристики АИ функций, но могут ухудшить глобальную характеристику – абсолютную интегрируемость на $\mathbb{R}$. Поскольку интерес представляет композиция прямого и обратного преобразований Фурье (см. ниже), то в определении 9.4.2 от функции f требуется только интегрируемость на любом отрезке, а несобственный интеграл понимается в главном значении. Наконец, равенство из п. 5 есть непрерывный аналог равенства Парсеваля. Опираясь на п. 5, можно доказать, что преобразование Фурье действует в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R})$ и сохраняет его норму. $\boxminus$

Доказательство. Утверждение п. 1 следует из равенства $|f(t)e^{\pm i\omega t}| = |f(t)|$ для всех $\omega, t \in \mathbb{R}$ и абсолютной интегрируемости функции f на $\mathbb{R}$. Пункт два следует из определения 9.4.2.

Для доказательства п. 3, во-первых, заметим, что

$$F[f](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)dt - i\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\omega t)dt\right). \quad (9.12)$$

Поэтому достаточно доказать равномерную непрерывность каждого слагаемого. Докажем равномерную непрерывность функции $a(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)dt$. Для произвольных $\omega_1,\ \omega_2 \in \mathbb{R}$ верно

$$|a(\omega_2) - a(\omega_1)| = \Big|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos(\omega_2 t) - \cos(\omega_1 t))dt\Big| \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\Big|2\sin\frac{t(\omega_2-\omega_1)}{2}\sin\frac{t(\omega_2+\omega_1)}{2}\Big|dt \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{-A} |f(t)|dt + \int_{-A}^{+A} |tf(t)||\omega_2-\omega_1|dt + \int_{A}^{+\infty} |f(t)|dt,$$

где $A > 0$ – произвольное число. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Поскольку функция f абсолютно интегрируема на всей оси, существует такое $A = A(\varepsilon)$, для которого

$$\int_{-\infty}^{A} |f(t)|dt < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \int_{A}^{+\infty} |f(t)|dt < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Определим $M(\varepsilon) = M(A(\varepsilon)) := 1 + \int_{-A}^{+A} |tf(t)|dt \geq 1$. Возьмем $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/(3M)$. Тогда для произвольных ω_1, ω_2, для которых $|\omega_2 - \omega_1| < \delta$, выполняется: $|a(\omega_2) - a(\omega_1)| < 2\varepsilon/3 + M(\varepsilon)\delta(\varepsilon) \leq \varepsilon$. Для функции $b(\omega)$ доказательство такое же.

Утверждение п. 4 сразу вытекает из теоремы Римана об осцилляции.

Утверждение п. 5 примем без доказательства. ■

Симметрии функции f упрощают ее преобразование Фурье (сравните с леммой 9.3.1).

Лемма 9.5.1. *(о фурье-образе четных и нечетных функций) Пусть функция АИ на $\mathbb{R}$. Тогда:*

1) если функция четная, то

$$F[f](\omega) = F^{-1}[f](\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x)\cos(x\omega)dx;$$

2) если функция нечетная, то

$$F[f](\omega) = -F^{-1}[f](\omega) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x)\sin(x\omega)dx.$$

Задача 9.5.1. Опираясь на представление (9.12) преобразования Фурье, докажите лемму 9.5.1.

Теорема 9.5.2. ***(формулы обращения)*** *Пусть функция f абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$. Тогда:*

1) для тех $x \in \mathbb{R}$, для которых существует интеграл Фурье, суперпозиция прямого и обратного преобразований Фурье (в любом порядке) совпадает с интегралом Фурье:

$$F^{-1}[F[f]](x) = F[F^{-1}[f]](x) = FI(f, x);$$

2) если x – точка разрыва и скачка производной функции f, тогда

$$F^{-1}[F[f]](x) = F[F^{-1}[f]](x) = \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0));$$

3) если x – точка гладкости или скачка производной функции f, тогда

$$F^{-1}[F[f]](x) = F[F^{-1}[f]](x) = f(x). \tag{9.13}$$

Обсуждение 9.5.2. Формулы обращения (9.13) показывают, что при определенных дополнительных условиях прямое и обратное преобразования Фурье в самом деле являются взаимно обратными. ⊟

Доказательство. Пункт 1 следует из леммы 9.4.1. Пункт 2 следует из леммы 9.4.1 и теоремы 9.3.1, а п. 3 – из леммы 9.4.1 и следствия 9.3.1.

Следствие 9.5.1. *(о квадрате преобразования Фурье) Пусть функция f и ее фурье-образ $F[f]$ АИ на $\mathbb{R}$. Пусть функция f кусочно-гладкая на $\mathbb{R}$. Тогда $\forall x \in \mathbb{R}$ верно $F^2[f(x)] = f(-x)$.*

Доказательство. Из первого условия и п. 2 теоремы 9.5.1 следует, что $F[F[f]](x) = F^{-1}[F[f]](-x)$ на $\mathbb{R}$. Из второго условия и п. 3 теоремы 9.5.2 следует, что $F^{-1}[F[f]](-x) = f(-x)$ на $\mathbb{R}$. ■

9.6. Примеры преобразований Фурье

1. Найдем преобразование Фурье функции $f_1(x) = e^{-\gamma|x|}$ $(\gamma > 0)$, где $\gamma > 0$. В силу четности функции, получаем

$$F[f_1](\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-\gamma x} \cos(\omega x) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\gamma}{\omega^2 + \gamma^2}.$$

Функции $f_1,\ F[f_1] \in L_R(\mathbb{R})$.

Задача 9.6.1. Обоснуйте абсолютную интегрируемость функций $f_1,\ F[f_1]$ на всей оси, нарисуйте графики функций.

2. Пусть $f_2(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$ $(a > 0)$. Из примера 1 и следствия 9.5.1 получаем:

$$F[\frac{1}{x^2+a^2}] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{a} \cdot F[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{x^2+a^2}] = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a} F^2[e^{-a|x|}] =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{2a} e^{-a|-x|} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a} e^{-a|x|}.$$

3. Рассмотрим «прямоугольный импульс» в δ-окрестности нуля с амплитудой A: $f_3(x) := A$ при $|x| \le \delta$ и $f(x) \equiv 0$ при $|x| > \delta$. Тогда

$$F[f_3](\omega) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-i\omega x} dx = A\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\omega\delta)}{\omega}.$$

Функция $F[f_3]$ не является абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$.

Задача 9.6.2. Обоснуйте отсутствие абсолютной интегрируемости функции $F[f_3]$ на всей оси, нарисуйте графики функций $f_3,\ F[f_3]$.

4. Рассмотрим функцию **нормального распределения** $f(x) := = e^{-ax^2}$ $(a > 0)$. Тогда

$$F[f](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 - i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\omega^2/4a}.$$

Поскольку функция $f(x) = e^{-ax^2}$ четная, нужно воспользоваться п. 1 леммы 9.5.1 и сделать замену $y = \sqrt{a}x$ – возникает НИ с параметром Лапласа (см. таблицу в п. 8.4). При $a = 1/2$ фурье-образ $F[e^{-x^2/2}] = = e^{-\omega^2/2}$ совпадает с прообразом. То есть **стандартное нормальное распределение** есть неподвижная точка преобразования Фурье.

9.7. Алгебраические операции и дифференцирование

Теорема 9.7.1. *(алгебраические операции и преобразование Фурье) Пусть функции f и g абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$. Тогда имеют место свойства:*

1) ***линейности:*** *для любых комплексных α и β $\hookrightarrow$*

$$F[\alpha f+\beta g]=\alpha F[f]+\beta F[g], \quad F^{-1}[\alpha f+\beta g]=\alpha F^{-1}[f]+\beta F^{-1}[g];$$

2) ***растяжения аргумента:*** $\forall \alpha\in\mathbb{R},\ \alpha\neq 0 \ \hookrightarrow$

$$F[f(\alpha x)]=\frac{1}{|\alpha|}F[f]\left(\frac{\omega}{\alpha}\right), \quad F^{-1}[f(\alpha x)]=\frac{1}{|\alpha|}F^{-1}[f]\left(\frac{\omega}{\alpha}\right);$$

3) ***сдвига аргумента:***

$$F[f(x-x_0)]=e^{-i\omega x_0}F[f](\omega), \quad F^{-1}[f(x-x_0)]=e^{i\omega x_0}F^{-1}[f](\omega).$$

Доказательство. Первый и третий пункты очевидны из определения 9.4.2.

Пункт 2 следует из определения 9.4.2 после подстановки $t=\alpha x$. Пусть $\alpha>0$:

$$F[f(\alpha x)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\frac{\omega}{\alpha}t}d\left(\frac{t}{\alpha}\right)=\frac{1}{|\alpha|}F[f]\left(\frac{\omega}{\alpha}\right). \blacksquare$$

Задача 9.7.1. Докажите п. 2 при $\alpha<0$ и п. 3 теоремы 9.7.1.

Оказывается, операция дифференцирования функции и ее преобразование Фурье связаны через умножение на аргумент. Приведем все формулировки и обсудим их.

Теорема 9.7.2. *(преобразование Фурье производной) Пусть функция f кусочно-гладкая на любом конечном отрезке; пусть сама функция и ее производная $f'(x)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$. Тогда*

$$F[f'](\omega)=i\omega F[f](\omega),\ F^{-1}[f'](\omega)=-i\omega F^{-1}[f](\omega).$$

Следствие 9.7.1. *Пусть функция f такая, что для некоторого $n\in\mathbb{N}$ ее производная $f^{(n-1)}$ кусочно-гладкая на любом конечном отрезке; пусть сама функция f и ее производные $f',\dots,f^{(n)}$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$. Тогда:*

1) $F[f^{(k)}](\omega)=(i\omega)^kF[f](\omega),\ F^{-1}[f^{(k)}](\omega)=(-i\omega)^kF^{-1}[f](\omega),$

где $k = 0, \ldots, n$;

$$2)\ \ F[f](\omega) = o\left(\frac{1}{\omega^n}\right), \quad F^{-1}[f](\omega) = o\left(\frac{1}{\omega^n}\right) \text{ при } \omega \to \pm\infty.$$

Теорема 9.7.3. *(производная преобразования Фурье) Пусть функции $f(x)$ и $xf(x)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$. Тогда преобразования Фурье функции f являются непрерывно дифференцируемыми на $\mathbb{R}$ функциями и*

$$\frac{d}{d\omega}F[f](\omega) = -iF[xf(x)](\omega), \quad \frac{d}{d\omega}F^{-1}[f](\omega) = iF^{-1}[xf(x)](\omega).$$

Следствие 9.7.2. *Пусть функции $f(x)$, $xf(x)$, $\ldots$, $x^n f(x)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$. Тогда преобразования Фурье функции f являются n раз непрерывно дифференцируемыми на $\mathbb{R}$ функциями и для $k = 0, \ldots, n$ верно*

$$\frac{d^k}{d\omega^k}F[f](\omega) = (-i)^k F[x^k f(x)](\omega), \quad \frac{d^k}{d\omega^k}F^{-1}[f](\omega) = i^k F^{-1}[x^k f(x)](\omega).$$

Обсуждение 9.7.1. Теорема 9.7.2 и следствие 9.7.1 не только предлагают метод нахождения фурье-образа производной, но и оценивают убывание на бесконечности фурье-образа самой функции в зависимости от ее гладкости: чем глаже функция, тем быстрее убывает на бесконечности ее фурье-образ (сравните с теоремой об убывании коэффициентов Фурье). Теорема 9.7.3 и следствие 9.7.2 означают, что справедливо и двойственное утверждение: чем быстрее убывает функция, тем глаже ее фурье-образ. ⊟

Доказательство теоремы 9.7.2. Покажем, что в условиях теоремы функция f обладает предельным свойством $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Свойства функции f достаточны, чтобы представить ее в виде $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$. Из абсолютной интегрируемости следует существование конечного предела

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(f(0) + \int_0^x f'(t)dt\right) = f(0) + \int_0^\infty f'(t)dt = A \in \mathbb{R}.$$

Если допустить, что $A \neq 0$, то существует такое число x_0, что $|f(x)| > |A|/2$ для всех $x > x_0$. Что противоречит абсолютной сходимости. Аналогично рассматривается случай $x \to -\infty$.

Теперь, опираясь на п. 1 теоремы 9.5.1, применим преобразование Фурье к производной:

$$F[f'](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-ix\omega}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(f(x)e^{-ix\omega}\Big|_{x\to-\infty}^{x\to+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix\omega}(-i\omega)dx \right) = i\omega F[f](\omega). \quad \blacksquare$$

Доказательство п. 2 следствия 9.7.1. Из п. 1 следует, что $|F[f](\omega)| = |F[f^{(n)}](\omega)|/|\omega|^n$. Поскольку функция $f^{(n)}$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, для нее (в силу п. 4 теоремы 9.5.1) $\lim_{\omega\to\pm\infty} F[f^{(n)}](\omega) = 0$. $\blacksquare$

Доказательство теоремы 9.7.3. Применим лемму 9.2.1 к функциям $xf(x)$ и $g(x,\omega) = -ie^{-ix\omega}$ на полосе $(-\infty,+\infty)\times[0,t]$, где t – любое число. Получаем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^t f(x)(-ix)e^{-ix\omega} d\omega \right) dx =$$

$$= \int_0^t \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-ix)e^{-ix\omega} dx \right) d\omega. \tag{9.14}$$

В интеграле слева сомножитель $f(x)$ выносится из внутреннего интеграла, и

$$\int_0^t (-ix)e^{-ix\omega} d\omega = \int_0^t \left(e^{-ix\omega}\right)'_\omega d\omega = e^{-ixt} - 1.$$

Внутренний интеграл справа есть фурье-образ функции $(-ix)f(x)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-ix)e^{-ix\omega} dx = F[-ixf(x)](\omega).$$

Тождество (9.14) (по переменной t) приобрело вид:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(e^{-ixt} - 1)dx = \int_0^t F[-ixf(x)](\omega)d\omega.$$

Но интеграл слева есть фурье-образ функции f в точках t и $t_0 = 0$. Поэтому

$$F[f](t) - F[f](0) = \int_0^t F[-ixf(x)](\omega)d\omega.$$

По условию функция $(-ix)f(x)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, поэтому (п. 3 теоремы 9.5.1) ее фурье-образ непрерывен. Значит, функция справа непрерывно дифференцируема по t. Следовательно, функция слева – тоже непрерывно дифференцируема. Дифференцируя тождество в точке $t = \omega$, получаем утверждение теоремы. $\blacksquare$

Глава 10

Обобщенные функции

Понятие обобщенной функции появилось в первой четверти 20-го века. В исследованиях по квантовой механике Поль Дирак (1902–1984) ввел “некорректное” понятие дельта-функции – это был первый (и, как оказалось, важнейший) пример обобщенной функции. Сергей Львович Соболев (1908–1989), анализируя понятие решения уравнения в частных производных, создал систематическую теорию, в которой ввел ключевое понятие обобщенной производной. Позже Лоран Шварц (1915–2002) разработал универсальный формализм, которому мы будем следовать.

10.1. Предварительное обсуждение

В классическом понимании функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – это правило (=закон), которое каждому числу ставит в соответствие какое-то единственное число. Если интерпретировать функцию как сигнал, зависящий от времени, то восстановить его можно только по результатам измерений с помощью физического прибора. Математически исследуемая функция “измеряется” пробными функциями с помощью некоторой *линейной* операции. Линейность означает выполнение физического «принципа суперпозиции». Пробные функции должны быть, во-первых, “идеальными” (= бесконечно дифференцируемыми), чтобы с ними было удобно работать. Во-вторых, их должно быть достаточно много, чтобы различать разные сигналы f, но не было лишних, чтобы не повторять бесполезные измерения.

Реализация этой идеи такова.

1) "Измерение" классической функции f с помощью пробной функции:

   а) пробные функции φ бесконечно дифференцируемы и удовлетворяют некоторым дополнительным условиям на $\pm\infty$;

   б) результат измерения данной функции пробной – интегральное скалярное произведение $(f, \varphi) := \int_{\mathbb{R}} f\varphi \, dx$.

   Пространство D всех пробных функций должно быть настолько широким, чтобы для любых двух разных классических функций $f_1 \neq f_2$ нашлась пробная, которая позволит их различить: $(f_1, \varphi) \neq (f_2, \varphi)$.

2) Следующий – принципиальный – шаг состоит в том, чтобы трактовать классическую функцию f как линейный функционал f_d на D, т. е.

$$f_d : D \to \mathbb{R}, \quad f_d(\varphi) := (f, \varphi)$$

   ($d = distribution$ = **распределение** – распространенное название обобщенной функции).

3) Последний шаг: рассматривать не только те линейные функционалы, которые порождены интегральным скалярным произведением, а *всевозможные линейные непрерывные функционалы на* D – это и есть пространство D' обобщенных функций.

Пример 10.1.1. Дельта-функция Дирака – это линейный непрерывный функционал $\delta(\varphi) := \varphi(0)$, который не представим в виде интегрального скалярного произведения (доказательство ниже).

10.2. Пространство D основных (пробных) функций

Определение 10.2.1. Носителем функции $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется замыкание множества, на котором функция отлична от нуля:

$$supp\ \varphi := \overline{\{x \in \mathbb{R} : \ \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Функция $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется **финитной**, если ее носитель ограниченное множество. ⊠

Определение 10.2.2. Пространством основных функций называется линейное функциональное пространство D, элементами которого являются бесконечно дифференцируемые финитные функции. $\boxtimes$

Линейные операции в пространстве D осуществляются, как и в ранее введенных функциональных пространствах, поточечно:

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(x) := \varphi_1(x) + \varphi_2(x), \quad (\lambda \cdot \varphi)(x) := \lambda \cdot \varphi(x);$$

при этом они не выводят из пространства D. Положим $\forall \varphi \in D$ и $\forall \alpha \in \in C^\infty(\mathbb{R})$ по определению: $(\varphi \cdot \alpha)(x) := \varphi(x) \cdot \alpha(x)$. Введенное умножение функций не выводят из пространства D: $\varphi \cdot \alpha \in D$ (докажите).

Пример 10.2.1. Элементом пространства D является функция “шапочка” ширины $2a$ (см. рис. 10.1, аналогичная конструкция использовалась нами при изучении рядов Тейлора)

$$\eta(x; a) := \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2 - x^2}}, & |x| < a, \\ 0, & |x| \geq a, \end{cases} \qquad (10.1)$$

которая удобна для конструирования функций с нужными свойствами.

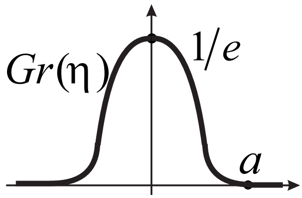

Рис. 10.1

Задача 10.2.1. Докажите, что функция η бесконечно дифференцируема (трудность представляют точки “стыковки” $x = \pm a$).

В отличие от других ранее рассмотренных нами функциональных пространств, в D мы не вводим норму, но даем

Определение 10.2.3. Последовательность $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty \subset D$ называется **сходящейся** к φ, если

1) $\exists [a, b] \subset \mathbb{R} : \ \forall k \in \mathbb{N} \ \hookrightarrow \ supp\, \varphi_k \subset [a, b]$;

2) $\forall n \in \{0\} \cup \mathbb{N} \ \hookrightarrow \ \varphi_k^{(n)}(x) \underset{x \in \mathbb{R}}{\rightrightarrows} \varphi^{(n)}(x)$ при $k \to \infty$. $\boxtimes$

Лемма 10.2.1. *(о согласованности операций и сходимости) Если последовательности $\varphi_k \to \varphi$ и $\psi_k \to \psi$ в D при $k \to \infty$, и $\alpha \in \in C^\infty(\mathbb{R})$, то при $k \to \infty$ имеют место предельные равенства:*

1) $\forall a, b \in \mathbb{R} \ \hookrightarrow \ a\varphi_k + b\psi_k \xrightarrow{D} a\varphi + b\psi$, *2)* $\alpha\cdot\varphi_k \xrightarrow{D} \alpha\cdot\varphi$,

3) $\varphi_k' \xrightarrow{D} \varphi'$.

Задача 10.2.2. Докажите лемму 10.2.1.

Примем к сведению основной *принцип рассуждений* в теории обобщенных функций: *все рассуждения осуществляются или* ***поэлементно*** *на D (т. е. проверяются для произвольного фиксированного $\varphi \in D$) или через произвольную сходящуюся последовательность в D.*

10.3. Пространство D' обобщенных функций

Напомним, что отображение $f : D \to \mathbb{R}$ называется **линейным функционалом**, если оно сохраняет линейные операции:

$$\forall\varphi,\psi \in D \ \wedge\ \forall a,b \in \mathbb{R} \ \hookrightarrow\ f(a\varphi + b\psi) = af(\varphi) + bf(\psi).$$

Обозначение. Значение линейного функционала f на элементе $\varphi \in D$ будем обозначать как скалярное произведение: $f(\varphi) = (f,\varphi)$.

Определение 10.3.1. Линейный функционал $f : D \to \mathbb{R}$ называется **непрерывным**, если для *любой* сходящейся в D последовательности $\varphi_k \to 0 \in D$ выполняется сходимость для числовой последовательности: $(f,\varphi_k) \to 0 \in \mathbb{R}$ при $k \to \infty$. ⊠

Обсуждение 10.3.1. Определение непрерывности дано по принципу Гейне. Заметим, что непрерывность функционала **на всем** D проверяется только **в единственной точке** $0 \in D$. Это объясняется линейностью отображения f. ⊟

Задача 10.3.1. Пусть выполнено определение 10.3.1. Пусть последовательность $\varphi_k \to \varphi$ в D при $k \to \infty$. Докажите, что числовая последовательность $(f,\varphi_k) \to (f,\varphi)$ при $k \to \infty$.

Дадим основное

Определение 10.3.2. Обобщенной функцией называется линейный непрерывный функционал $f : D \to \mathbb{R}$. **Пространством обобщенных функций** D' называется линейное пространство линейных непрерывных функционалов на D, в котором линейные операции и сходимость определяются поэлементно на D:

1) $\forall f_1, f_2 \in D' \ \wedge \ \forall a, b \in \mathbb{R} \ \wedge \ \forall \varphi \in D \ \hookrightarrow$
$(af_1 + bf_2, \varphi) = a(f_1, \varphi) + b(f_2, \varphi)$;

2) последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D'$ обобщенных функций называется **сходящейся** к обобщенной функции $f \in D'$, если

$$\forall \varphi \in D \ \hookrightarrow \ (f_k, \varphi) \to (f, \varphi) \text{ при } k \to \infty. \ \boxtimes$$

Обсуждение 10.3.2. Определить (=задать) обобщенную функцию $f \in D'$ означает: 1) определить ее *значения на каждой пробной функции* $\varphi \in D$; 2) убедиться, что зависимость *линейная*; 3) убедиться, что зависимость *непрерывная*. ⊟

Терминология. Поэлементная сходимость, введенная в определении 10.3.1, называется **слабой**. Пространство D' непрерывных линейных функционалов на D, в котором введена слабая сходимость, называется **сопряженным** к D (т. е. сохраняется терминология линейной алгебры).

10.4. Регулярные и сингулярные обобщенные функции

Сейчас обсудим вопрос, как классические функции представлены среди обобщенных.

В теории преобразований Фурье мы уже использовали такие функции:

Определение 10.4.1. Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется **локально интегрируемой**, если она абсолютно интегрируема на любом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$. $\boxtimes$

Пример 10.4.1. Абсолютно интегрируемые на $\mathbb{R}$ функции и кусочно-непрерывные на $\mathbb{R}$ функции являются локально интегрируемыми. Заметим, что все пробные функции $\varphi \in D$ очевидно локально интегрируемы.

Определение 10.4.2. Обобщенная функция f_d называется **регулярной**, если она имеет представление в виде интегрального скалярного произведения, порожденного локально интегрируемой функцией f; т. е.

$$\forall \varphi \in D \ \hookrightarrow \ (f_d, \varphi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\, dx. \ \boxtimes \qquad (10.2)$$

Обозначение. Классические и обобщенные функции мы будем обозначать единообразно – так принято в литературе и внутренне обосновано. Если же хотим подчеркнуть, что имеем дело с регулярной обобщенной функцией, то будем обозначать ее f_d.

Лемма 10.4.1. *(корректность определения 10.4.2) Справедливы утверждения:*

1) *Функционал, задаваемый формулой (10.2), является линейным и непрерывным, т. е. элементом пространства D'.*

2) *Формула (10.2) сохраняет линейные операции с функциями: для любых локально интегрируемых функций f и g и произвольных $a, b \in \mathbb{R}$ верно: $(af + bg)_d = af_d + bf_d$.*

Доказательство. Поскольку функция $\varphi \in D$ финитна, интегрирование в формуле (10.2) осуществляется на конечном отрезке $[a, b]$. Из абсолютной интегрируемости на $[a, b]$ функции f и непрерывности функции φ следует абсолютная интегрируемость на $[a, b]$ произведения $f\varphi$. Значит, формула (10.2) задает функционал на всем пространстве D. Его линейность следует из линейности интеграла.

Докажем непрерывность функционала. Пусть $\varphi_k \overset{D}{\to} 0$ при $k \to \to \infty$. Это означает (определение 10.2.3), что существует отрезок $[c, d]$, содержащий носители всех функций φ_k $(k \in \mathbb{N})$ и $\varphi_k(x) \underset{x\in\mathbb{R}}{\rightrightarrows} 0$ при $k \to \to \infty$. Поэтому

$$|(f, \varphi_k)| = \Big| \int_c^d f(x)\varphi_k(x)dx \Big| \leq$$

$$\leq \max_{x\in[c,d]} |\varphi_k(x)| \cdot \int_c^d |f(x)|dx \ \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Первый пункт доказан. ■

Задача 10.4.1. Докажите второй пункт леммы 10.4.1.

Следующее утверждение уточняет связь между классическими и регулярными обобщенными функциями.

Лемма 10.4.2. *(о биективности) Две регулярные обобщенные функции, порожденные двумя классическими* ***непрерывными*** *функциями, равны только тогда, когда равны их прообразы:*

$$f, g \in C^0(\mathbb{R}) : \ f = g \ \Leftrightarrow \ f_d = g_d.$$

Обсуждение 10.4.1. Лемма 10.4.2 показывает, что в пространстве D пробных функций достаточно много элементов, с помощью которых можно различать классические непрерывные функции. С другой стороны, каждую пробную функцию $\varphi \in D$ можно понимать как обобщенную $\varphi_d \in D'$. Вывод 1: пространство D' не у́же, чем пространство D пробных функций. Можно доказать, что утверждение леммы 10.4.2 справедливо не только для непрерывных функций f, но и для локально интегрируемых; однако формулировка и доказательство потребуют понятия меры Лебега (а не меры Жордана). Вывод 2: в пространстве D' присутствует по *одному* представителю f_d *каждой* локально интегрируемой функции f. Значит, пространство D' не у́же, чем пространство локально интегрируемых функций. ⊟

Доказательство демонстрирует возможности применения функции (10.1) "шапочка". Импликация $f = g \;\Rightarrow\; f_d = g_d$ очевидна. Допустим, что обратная импликация неверна. Тогда в некоторой точке x_0 классические функции различаются: $f(x_0) \neq g(x_0)$. В силу непрерывности функций, найдется ε-окрестность точки x_0, в которой функция $h(x) := f(x) - g(x)$ сохраняет знак. Возьмем в качестве пробной функции "шапочку", ширины ε, сдвинутую в точку x_0. Тогда:

$$(f_d, \eta(x - x_0, \varepsilon)) - (g_d, \eta(x - x_0, \varepsilon)) = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} h(x)\eta(x - x_0, \varepsilon)dx \neq 0. \blacksquare$$

Теперь нужно убедиться, что среди обобщенных функций есть отличные от регулярных, иначе вся конструкция окажется бесполезной. Сначала дадим им название:

Определение 10.4.3. Обобщенные функции, не являющиеся регулярными, называются **сингулярными**. ⊠

Лемма 10.4.3. *(о существовании сингулярных обобщенных функций) Дельта-функция Дирака $\delta(\varphi) = \varphi(0)$ является сингулярной функцией.*

Доказательство. Линейность функционала δ очевидна. Докажем его непрерывность. Если $\varphi_k \to 0$ в D при $k \to \infty$, то тем более числовая последовательность $\varphi_k(0) \to 0$ при $k \to \infty$. Значит, дельта-функция есть элемент пространства D'. Остается показать, что это именно сингулярный элемент. Допустим противное: существует такая локально интегрируемая функция $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что

$$\forall \varphi \in D \;\hookrightarrow\; \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\varphi(x)\; dx = \varphi(0).$$

Возьмем в качестве пробной функции “шапочку” ширины a. Заметим, что $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} \eta(x;a) = \eta(0;a) = e^{-1}$. Тогда *для любого* $a > 0$ верно:

$$\eta(0;a) = \int_{-a}^{a} h(x)\eta(x;a)\ dx \leq \eta(0;a) \int_{-a}^{a} |h(x)|\ dx\ \Rightarrow\ \int_{-a}^{a} |h(x)|\ dx \geq 1.$$

С другой стороны, в силу локальной интегрируемости функции h, справедливо предельное равенство: $\int_{-a}^{a} |h(x)|dx \to +0$ при $a \to +0$. Противоречие. ■

Хотя дельта-функция сингулярна, существуют последовательности регулярных функций, которые к ней сходятся в D' (см. определение 10.3.2).

Примеры 10.4.1. Приведем примеры последовательностей регулярных обобщенных функций, сходящихся к дельта-функции:

1) Пусть $(1/\pi)D_n(x)\quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$ – последовательность нормированных ядер Дирихле (см. определение 2.2, лемму 2.1.1 и рис. 2.1). Переопределим их нулем вне периода:

$$\hat{D}_n(x) := \begin{cases} (1/\pi)D_n(x), & |x| < \pi, \\ \quad 0, & |x| \geq \pi. \end{cases}$$

Последовательность $\hat{D}_n \overset{D'}{\to} \delta$ при $n \to \infty$. В самом деле, из формулы (2.3) (интегрального представления частичной суммы Фурье) и следствия 2.2.1 (о сходимости ряда Фурье к значению гладкой функции в точке) получаем, что для любой фиксированной пробной функции $\varphi \in D$ верно:

$$(\hat{D}_n, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\varphi(t)dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(0) = (\delta, \varphi).$$

2) Пусть $(1/\pi)\Phi_n(x)\quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$ – последовательность нормированных ядер Фейера (см. определение 4.1.1, лемму 4.1.2 и рис. 4.1). Поступим аналогично примеру 1:

$$\hat{\Phi}_n(x) := \begin{cases} (1/\pi)\Phi_n(x), & |x| < \pi, \\ \quad 0, & |x| \geq \pi. \end{cases}$$

Последовательность $\hat{\Phi}_n \overset{D'}{\to} \delta$ при $n \to \infty$.

3) Последовательность “растущих столбиков”:

$$h_n(x) := \begin{cases} n, & |x| < \frac{1}{2n}, \\ 0, & |x| \geq \frac{1}{2n}. \end{cases}$$

Последовательность $h_n \xrightarrow{D'} \delta$ при $n \to \infty$.

Замечание 10.4.1. Теперь, сопоставляя определение дельта-функции с доказательствами теорем 2.1.1 (принцип локализации) и 4.2.1 (Фейера об аппроксимации), понятно, что последние являются по сути обоснованием предельных переходов ядер $\hat{D}_n$ и $\hat{\Phi}_n$ к дельта-функции в пространстве D'. ⊟

Задача 10.4.2. Докажите, что $\hat{\Phi}_n \xrightarrow{D'} \delta$ и $h_n \xrightarrow{D'} \delta$ при $n \to \infty$.

Возникает естественный вопрос: можно ли произвольную сингулярную обобщенную функцию аппроксимировать в D' последовательностью регулярных? Ответ на этот вопрос положительный; более того, можно обойтись только пробными функциями. Без доказательства примем к сведению:

Теорема 10.4.1. *Каждая обобщенная функция $f \in D'$ есть слабый предел последовательности функций из D, трактуемых как регулярные обобщенные функции.*

Обсуждение 10.4.2. Утверждение теоремы 10.4.1, в частности, означает, что сопряженное пространство D' шире пространства D, которое его породило. Это явление, конечно, связано с неполнотой D как линейного подпространства $D_d \subset D'$ относительно слабой сходимости (определение 10.3.2 п. 2). Отметим, что пространство D в своей топологии (см. определение 10.2.3) является полным. ⊟

10.5. Умножение обобщенной функции на бесконечно гладкую

Определение 10.5.1. Для произвольной обобщенной функции $f \in D'$ и бесконечно дифференцируемой $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$ положим

$$\alpha f \in D' : \ \forall \varphi \in D \ \hookrightarrow \ (\alpha f, \varphi) := (f, \alpha\varphi). \ \boxtimes \tag{10.3}$$

Лемма 10.5.1. *(корректность определения) Введенное произведение:*

1) является обобщенной функцией;

2) обладает дистрибутивностью по каждому сомножителю:

$$(\alpha + \beta)(f + g) = \alpha f + \alpha g + \beta f + \beta g;$$

3) сохраняет преемственность: если f_d – регулярная обобщенная функция, то $\alpha f_d = (\alpha f)_d$.

Замечание 10.5.1. О коммутативности умножения говорить бессмысленно, поскольку сомножители в общем случае из разных пространств. ⊟

Доказательство. Функционал (10.3) линеен и непрерывен (докажите), что обосновывает п. 1.

Докажем п. 3, т. е. докажем, что

$$\forall \varphi \in D \hookrightarrow (\alpha f_d, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x) f(x) \varphi(x) dx.$$

Но, согласно определению (10.3) и определению (10.2) регулярной функции, имеем:

$$\forall \varphi \in D \hookrightarrow (\alpha f_d, \varphi) := (f_d, \alpha\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \alpha(x) \varphi(x) dx. \blacksquare$$

Задача 10.5.1. Докажите п. 2 леммы 10.5.1.

Поскольку дельта-функция является одним из основных инструментов конструирования обобщенных функций с нужными свойствами, полезна следующая

Лемма 10.5.2. *(об умножении на дельта-функцию) Пусть $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$. Тогда $\alpha(x)\delta(x) = \alpha(0)\delta(x)$.*

Доказательство. Для произвольной функции $\varphi \in D$ верно:

$$(\alpha\delta, \varphi) := (\delta, \alpha\varphi) = (\alpha\varphi)(0) := \alpha(0)\varphi(0) = \alpha(0)(\delta, \varphi). \blacksquare$$

10.6. Дифференцирование обобщенных функций

Кто мешает тебе выдумать порох непромокаемый?

Козьма Прутков

В начале двадцатого века были обнаружены "решения" уравнений математической физики, которые не имели производных в классическом понимании. Если же трактовать эти решения как обобщенные функции, то проблема их дифференцирования преодолевается.

Пусть сначала $f \in C^1(\mathbb{R})$. В этом случае существует непрерывная производная $f' \in C^1(\mathbb{R})$, которую мы уже умеем трактовать как обобщенную регулярную функцию. Применим определение (10.2) и *проинтегрируем по частям*, пользуясь *финитностью* пробных функций:

$$\forall \varphi \in D \;\hookrightarrow\; ((f')_d, \varphi) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -(f_d, \varphi').$$

Преимущество полученного выражения по сравнению с исходным в том, что в нем на функцию f дифференцирование не распространяется – оно *перенесено на пробную функцию.* (Заметим, что этот же прием "перенесения" на пробную функцию уже применялся в определении 10.5.1 умножения обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую.) Теперь мы можем предложить

Определение 10.6.1. Производной обобщенной функции $f \in D'$ называется такая обобщенная функция $f' \in D'$, что для произвольной пробной функции $\varphi \in D$ справедливо равенство

$$(f', \varphi) := -(f, \varphi'). \ \boxtimes \tag{10.4}$$

Лемма 10.6.1. *Определение 10.6.1 корректно:*

1) *функционал в правой части формулы (10.4) определен на D, линеен и непрерывен;*

2) *соблюден принцип преемственности: если $f \in C^1(\mathbb{R})$, то $(f_d)' = (f')_d$.*

Задача 10.6.1. Докажите лемму 10.6.1. Указание: воспользуйтесь финитностью и бесконечной дифференцируемостью функций $\varphi \in \in D$; см. мотивацию перед определением 10.6.1.

Замечательно, что остаются неизменными основные

Теорема 10.6.1. *Свойства дифференцирования:*

1) линейность:

$$\forall f_1, f_2 \in D' \quad \wedge \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \ \hookrightarrow \ (af_1 + bf_2)' = af_1' + bf_2';$$

2) непрерывность при слабой сходимости:

$$\textit{если} \ \ f_k \overset{D'}{\to} f \ \ \textit{при} \ \ k \to \infty \ \Rightarrow \ f_k' \overset{D'}{\to} f' \ \ \textit{при} \ \ k \to \infty.$$

3) правило Лейбница:

$$\forall \alpha \in C^\infty(\mathbb{R}) \ \ \forall f \in D' \ \hookrightarrow \ (\alpha f)' = \alpha' f + \alpha f'.$$

Доказательство п. 2: для произвольной функции $\varphi \in D$

$$(f_k', \varphi) = -(f_k, \varphi') \underset{k \to \infty}{\overset{D'}{\to}} -(f, \varphi') = (f', \varphi).$$

Доказательство п. 3: для произвольной функции $\varphi \in D$

$$((\alpha f)', \varphi) = -(\alpha f, \varphi') = (f, -\alpha\varphi') = (f, \alpha'\varphi - (\alpha\varphi)') =$$

$$= (\alpha' f, \varphi) + (f', \alpha\varphi) = (\alpha' f, \varphi) + (\alpha f', \varphi) = (\alpha' f + \alpha f', \varphi). \ \blacksquare$$

Задача 10.6.2. Докажите п. 1 теоремы 10.6.1.

Естественно следующее

Определение 10.6.2. Производная n-го порядка обобщенной функции $f \in D'$ называется такая обобщенная функция $f^{(n)} \in D'$, что для произвольной пробной функции $\varphi \in D$ справедливо равенство

$$(f^{(n)}, \varphi) := (-1)^n (f, \varphi^{(n)}). \ \boxtimes$$

Следствие 10.6.1. *Обобщенные функции имеют производные любого порядка.*

Замечательным свойством обобщенных функций является перестановочность операции дифференцирования и предельного перехода:

Лемма 10.6.2. *Если последовательность $f_k \to f$ в D' при $k \to \to \infty$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ при $k \to \infty$ имеет место предельное равенство:* $f_k^{(n)} \xrightarrow{D'} f^{(n)}$.

Задача 10.6.3. Докажите лемму 10.6.2.

Примеры 10.6.1. дифференцирования обобщенных функций.

1) Продифференцируем функцию "ступенька" – **функцию Хевисайда** (Оливер Хевисайд, 1850–1925):

$$\theta(x) := \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ 1, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

Для регулярной обобщенной функции $\theta \in D'$ и произвольной функции $\varphi \in D$ получаем:

$$(\theta', \varphi) = -(\theta, \varphi') - \int_0^{+\infty} 1 \cdot \varphi'(x)dx = \varphi(0) = (\delta, \varphi).$$

Значит, $\theta(x)' = \delta(x)$.

2) Пусть функция f непрерывно дифференцируема всюду, кроме x_0 – точки разрыва и скачка производной; причем сама функция испытывает скачок $h(x_0)$. Тогда ее обобщенная производная равна сумме $f'_d = f' + h(x_0)\delta(x - x_0)$, где слагаемое f' понимается как регулярная обобщенная функция. (Докажите!)

3) Продифференцируем регулярную обобщенную функцию $f(x) = x\theta(x)$, воспользовавшись правилом Лейбница, предыдущим примером и леммой 10.5.2:

$$(x\theta(x))' = 1 \cdot \theta(x) + x\delta(x) = \theta(x) + 0\delta(x) = \theta(x).$$

Этот результат выглядит ожидаемо, поскольку функция $f(x) = x\theta(x)$ кусочно-гладкая (нарисуйте ее график).

4) Найдем производную дельта-функции:

$$\forall \varphi \in D: \ (\delta', \varphi) = -(\delta, \varphi') = -\varphi'(0).$$

5) Рассмотрим 2π-периодическую, кусочно-непрерывную и кусочно-дифференцируемую функцию "пила", которая на отрезке $[-\pi, \pi]$ определяется так (см. рис. 10.2):

$$f(x) := \begin{cases} -\frac{\pi+x}{2}, & \text{если } -\pi \le x < 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ \frac{\pi-x}{2}, & \text{если } 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

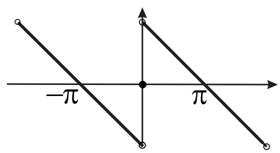

Рис. 10.2

Обобщенная производная этой функции равна

$$f_d'(x) = -\frac{1}{2} + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - 2\pi k).$$

Поскольку обобщенная функция $f_d'(x)$ действует только на финитные пробные функции, проблем с бесконечной суммой сдвинутых на $2\pi k$ дельта-функций не возникает. С другой стороны, данная функция раскладывается в ряд Фурье:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k},$$

который сходится к ней всюду поточечно и $\forall \varepsilon \in (0, \pi)$ равномерно на счетном объединении отрезков $\cup_{m \in \mathbb{Z}} [2\pi m + \varepsilon, 2\pi(m+1) - \varepsilon]$. Поэтому в пространстве обобщенных функций имеет место сходимость:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} \xrightarrow{D'} f \text{ при } n \to \infty$$

(обоснуйте). В силу леммы 10.6.2, почленное *обобщенное* дифференцирование приводит к сходимости

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) \xrightarrow{D'} f_d' \text{ при } n \to \infty.$$

Между тем, *формальное* дифференцирование в классическом понимании приводит к ряду

$$f'(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \cos(kx),$$

который расходится в каждой точке (в этом нетрудно убедиться, поскольку частичная сумма ряда выражается через ядро Дирихле $D_n(x)$ по формуле $FS_n(f', x) = D_n(x) - 1/2$).