Дифференциальные уравнения

Бишаев А.М.

Лекция 24

ГЛАВА11. АВТОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ ДУ

§1. Основные понятия

Система $\dfrac{dx^i}{dt} = f^i(x^1,...,x^n); \dfrac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})(x' = f(x))$ (1.1)

Называется автономной системой ДУ, если $\vec{f} = \{f_i(x^1,...,x^n)\}, i = 1,...,n$ не зависит явно от аргумента (t) ($x^j = x^j(t), j = 1,...,n$ суть интегральные кривые (1.1). $\vec{x}(t) = \{x^j(t)\} \in R^{n+1} = t \times R^n$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\vec{x}(t)$ есть решение (1.1). Кривая γ в R^n - $\gamma := \begin{cases} x^1 = x^1(t) \\ x^2 = x^2(t) \\ \text{..............} \\ x^n = x^n(t) \end{cases}$ (1.2)

называется фазовой траекторией (фазовым портретом) (1.1). Само R^n называется фазовым пространством системы (1.1). Будем предполагать, что $\vec{f} = \{f_i(x^1,...,x^n)\} \in D \subseteq R^n, i = 1,...,n$ непрерывно дифференцируемые функции по всей совокупности своих переменных.

Теорема. Если $\varphi(t)$ есть решение (1.1), то $\varphi(t+\tau)$ $\forall \tau \in R$ и $\tau = const$ тоже решение (1.1). Положим $t + \tau = u$. Тогда $\dfrac{d\varphi(t+\tau)}{dt} = \dfrac{d\varphi(u)}{du}\dfrac{du}{dt} = f(\varphi(u)) = f(\varphi(t+\tau))$.

<u>Следствие.</u> Определим через $\varphi(t,t_0,x_0)$ решение (1.1) такое, что $\vec{\varphi}(t_0,t_0,\vec{x}_0) = \vec{x}_0$. В этих обозначениях $\vec{\varphi}(t+\tau,t_0+\tau,\vec{x}_0)$ тоже решение (1.1), причем $\vec{\varphi}(t_0+\tau,t_0+\tau,\vec{x}_0) = \vec{x}_0$. Тогда $\vec{\varphi}(t,t_0,x_0) =$ $\vec{\varphi}(t+\tau,t_0+\tau,\vec{x}_0)$ в силу основной теоремы. Положим $\tau = -t_0$. Получим $\vec{\varphi}(t,t_0,\vec{x}_0) = \vec{\varphi}(t-t_0,0,\vec{x}_0) = \vec{\varphi}(t-t_0,\vec{x}_0)$!. – **Положение движущейся по фазовой траектории точки определяется начальным положением $\vec{x}_0$ в момент времени t_0 и длительностью промежутка $t - t_0$, отсчитываемого от начального момента времени t_0, но не самим начальным моментом времени.**

Фазовые траектории либо не имеют общих точек, либо совпадают.

Пусть $x = \varphi(t)$ и $x = \psi(t)$ решения (1.1), причем $x_0 = \varphi(t_1) = \psi(t_2)$. Рассмотрим $\chi(t) = \psi(t + t_2 - t_1)$, согласно теореме это тоже решение (1.1), причем $\chi(t_1) =$ $= x_0 = \psi(t_2) = \varphi(t_1) \to \varphi(t) \equiv \chi(t) = \psi(t + t_2 - t_1)$ в силу основной теоремы. Согласно дока занному можно считать, что фазовое пространство (1.1) склеено из фазовых траекторий.

§2. Типы фазовых траекторий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точка $\vec{a} \in R^n$ называется положением равновесия (1.1), если $\vec{f}(\vec{a}) = \vec{0}$ ($f^i(a^1,...,a^n) = 0, i = 1,...,n$).

3^0 Если $\vec{a} \in R^n$ - положение равновесия (1.1), то $\vec{x}(t) = \vec{a}, -\infty < t < \infty$ является решением (1.1). В самом деле $\dfrac{d\vec{x}}{dt} = \dfrac{d\vec{a}}{dt} = 0 = \vec{f}(\vec{a})$. Отсюда следует, точка равновесия $\vec{a} \in R^n$ есть фазовая траектория.

<u>Следствие.</u> Решение (1.1) не может войти в положение равновесие за конечное время, ибо в этом случае в точке $\vec{a} \in R^n$ пересекались бы две фазовые траектории $\vec{x}(t) = \vec{a}$ и $\vec{x}(t) = \vec{\varphi}(t)$.

Теорема Фазовая траектория принадлежит одному из трех типов

1. Точка (равновесия)
2. Фазовая траектория, отличная от точки, есть гладкая кривая. Действительно, если $\vec{x}(t)=\vec{\varphi}(t)$ есть решение системы (1.1), то касательный вектор в точке $\vec{x}_0=\vec{\varphi}(t_0)$ равен $\dfrac{d\vec{\varphi}(t_0)}{dt}=\vec{f}(\vec{\varphi}(t_0))\neq\vec{0}$. Этот вектор называется фазовой скоростью (1.1). Ясно, что касательный вектор в точке равновесия не определен, ибо $\left|\vec{f}(\vec{a})\right|=0$
3. Замкнутая гладкая кривая (цикл).

Первый тип и второй типы уже рассмотрены. Рассмотрим третий тип. Пусть $\vec{\varphi}(t)$ есть решение исходной системы. Кривая замкнута, если существуют t_1 и t_2 такие, что

$$\varphi(t_1)=\varphi(t_2) \qquad (2.1).$$

Введем $d=t_2-t_1$. Тогда, так введенная величина является периодом $\vec{\varphi}(t)$. Действительно, $\varphi(t+d)$ есть также решение исходной системы и в силу (1.1)) $\varphi(t_1+t_2-t_1)=\varphi(t_2)=\varphi(t_1)$. Тогда основная теорема дает, что

$$\varphi(t+d)=\varphi(t)\ \forall t \qquad (2.2).$$

Если область определения $\varphi(t)$ - $t\in(-\infty,\infty)$, то из последнего соотношения следует периодичность $\varphi(t)$ с периодом $d=t_2-t_1$. В случае, когда область определения $\varphi(t)$ есть ограниченный отрезок $[a,b]$, то (2.2) есть формула периодического продолжения решения на отрезки $[a+d,b+d],[[a+2d,b+2d]$ и так далее. Аналогично показывается, что $\varphi(t-d)=\varphi(t)\ \forall t$ (эта формула может служить также продолжением решения на отрезки $[a-d,b-d],[[a-2d,b-2d]$ и. т. д.). Ясно, что могут быть и другие периоды. Покажем, что существует наименьший положительный период - $p>0$ (т.е. $\forall t\ \varphi(t+p)=\varphi(t)$). Пусть $T=\{p_i>0\}, i=1,2,...,n,...$ множество периодов $\varphi(t)$. Множество содержит бесконечное число элементов. Если p_1,p_2 суть периоды, то $\widehat{p}=p_1+p_2$ тоже период - $\varphi(t+\widehat{p})=\varphi(t+p_1+p_2)=\varphi((t+p_1)+p_2)=\varphi(t+p_1)=\varphi(t)$. Оно ограничено снизу. Пусть имеется замкнутая траектория решения $\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$ такого, что $\vec{\varphi}(0)=\vec{x}_0=\begin{pmatrix}x_0^1\\ ....\\ x_0^n\end{pmatrix}$. Пусть Γ есть длина всей этой замкнутой кривой, т.е. $\Gamma=\int\limits_0^p\left|\vec{\mathrm{v}}(\tau)\right|d\tau=\int\limits_0^p\left|\vec{f}(\tau)\right|d\tau$; p есть какой-либо период $\vec{\varphi}(t)$.

Очевидно. что функция - $\gamma(t)=\int\limits_0^t\left|\vec{f}(\tau)\right|d\tau$ монотонно возрастающая. Тогда длина части всей замкнутой кривой будет меньше длины всей кривой, т. е. $\gamma_1=\int\limits_0^{t_1}\left|\vec{f}(\tau)\right|d\tau<\Gamma$. Откуда $t_1<p$, т. е. множество периодов ограничено снизу и должно иметь точную нижнюю грань - $p=\inf T$. Существует последовательность $p_k, k=1,...,k,...$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty}p_k=p$. Действительно, из определения точной нижней грани имеем – для $\varepsilon_k=1/k, k=1,2,...,k,...$ $\exists p_k$ такое, что $p_k-\varepsilon_k<p$. Так как $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi(t+p_k)=\varphi(t)=\varphi(t+\lim\limits_{k\to\infty}p_k)=\varphi(t+p)$, то p есть период, причем наименьший. Отсюда следует, что $\varphi(t)$ есть замкнутая кривая без пересечения. Предположим, что это не так, и рассмотрим $\varphi(t)$ для $t\in[0,p]$. Ясно, что $\varphi(0)=\varphi(p)$. Если имеется самопересечение, то существуют t_1,t_2 такие, что $0<t_1<t_2<p$ и $\varphi(t_1)=\varphi(t_2)$. Тогда $d=t_2-t_1<p$ есть период, что противоречит минимальности p.

Упражнение. ДУ $\ddot{x}+x^5=0$ описывает нелинейные колебания, период которых T зависит от начальных условий: $T(x(0),\dot{x}(0))$. Найти отношение $T(1,1)/T(2,2)$

§3. Теорема о выпрямлении

Пусть $\vec{x}_0$ не особая точка автономной системы $\frac{dx^i}{dt}=f^i(\vec{x}(t)), \mathrm{i}=1,...,n$, т. е. $\vec{f}(\vec{x}_0)\neq\vec{0}$, и $\vec{x}_0\in D\subset R^n$, где D есть область фазового пространства системы (1.1). Пусть $\varphi(t,x_0)$ есть решение (1.1). такое, что $\varphi(0)=x_0$. Имеем

$$\varphi^i(t,\vec{x}_0)=x_0^i+\int_0^t(f^i(\vec{x}_0)+o(\tau))d\tau=x_0^i+f^i(\vec{x}_0)t+o(t) \qquad (3.1).$$

Таким образом, доказана теорема - : если $\vec{x}_0$ не особая точка, то существует окрестность этой точки, в которой фазовая кривая с точностью до величин $o(t)$ является прямой линией с направляющим вектором $\vec{q}=\frac{\vec{f}(\vec{x}_0)}{\left|\vec{f}(\vec{x}_0)\right|}$. От первоначального базиса в R^n $\{\vec{e}_1,...,\vec{e}_n\}$ перейдем к базису, матрица перехода которого есть $S=\left\|\vec{\bar{e}}_1,...,\vec{\bar{e}}_{n-1},\vec{q}\right\|$, где $\{\vec{\bar{e}}_1,...,\vec{\bar{e}}_{n-1}\}$ есть базис в ортогональном дополнении к $\vec{q}$, т. е. $\forall i,j,=1,...,n-1\,(\vec{\bar{e}}_i\cdot\vec{\bar{e}}_j)=\delta_{ij},(\vec{\bar{e}}_i\cdot\vec{q})=0$. В этом случае матрица перехода ортогональна, поэтому $S^{-1}=S^T$. В новой системе координат прямая (3.1) будет иметь следующий вид

$$S^{-1}\vec{\varphi}(t,\vec{x}_0)=S^{-1}\vec{x}_0+S^{-1}\vec{f}(\vec{x}_0)t=\begin{Vmatrix}\bar{x}_0^1\\ ....\\ \bar{x}_0^{n-1}\\ \bar{x}_0^n+t\end{Vmatrix} \qquad (4.2)$$

В итоге получена теорема о <u>выпрямлении</u>: если $\vec{x}_0$ не является особой точкой автономной системы ДУ, то существует окрестность этой точки. такая. что фазовая траектория, проходящая через эту точку с точностью до $o(t)$ есть прямая линия, паралельная некоторой координатной оси.

Лекция 26

§5. Устойчивость решений систем ДУ.

Рассмотрим систему $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t,\vec{x})$ (5.1)

Пусть $\vec{\varphi}(t,\vec{x}_0)$ есть решение (5.1) такое, что $\vec{\varphi}(t_0,\vec{x}_0) = \vec{x}_0$, и $\vec{\psi}(t,\vec{\tilde{x}}_0)$ тоже решение (5.1), удовлетворяющее начальному условию $\vec{\psi}(t_0,\vec{\tilde{x}}_0) = \vec{\tilde{x}}_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. $\vec{\varphi}(t,\vec{x}_0)$ решение системы ДУ (5.1) $\vec{\varphi}(t,\vec{x}_0)$ называется устойчивым (по Ляпунову), если $\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0$ такое, что $\forall\vec{\tilde{x}}_0$, удовлетворяющего $\left|\vec{\tilde{x}}_0 - \vec{x}_0\right| < \delta$, выполнено $\left|\vec{\psi}(t,\tilde{x}_0) - \vec{\varphi}(t,x_0)\right| < \varepsilon\ \forall t \in [t_0,\infty)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Это называется асимптотически устойчивым по Ляпунову, если 1. оно устойчиво по Ляпунову и 2. $\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0$ такое, что $\forall\vec{\tilde{x}}_0$, удовлетворяющего $\left|\vec{\tilde{x}}_0 - \vec{x}_0\right| < \delta$, $\lim\limits_{t\to\infty}(\vec{\psi}(t,\tilde{x}_0) - \vec{\varphi}(t,x_0) = 0$. Требования 1. и 2. независимы, так как из одного не следует другое (см. Филиппова). Ясно, что исследование устойчивости связано с получением информации о поведении решения при больших значениях t **.**

Замечание. Пусть *B* есть нормированное конечномерное линейное пространство Элементами *B* являются векторы $\vec{x}$ и $\forall\vec{x}$ определена $\|\vec{x}\|$. Пусть *A* линейный оператор (матрица) на *B*. Норму матрицы $A = \left\|a^i_j(t)\right\|, i, j = 1,...,n$, если все $a^i_j(t)$ ограничены, можно задать как $\|A\| = \max\limits_{i,j\in[1,n]}\{\sup\limits_{t\in D}\left|a^i_j(t)\right|\}$. Ясно, что и в этом случае будет иметь место полученное ранее неравенство

$$\|A\vec{x}\| \le \|A\|\|\vec{x}\|\ \forall\vec{x} \in B \tag{5.2}$$

Дальнейшее рассмотрение будет связано с исследованием устойчивости линейной однородной системы $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$, матрица которой постоянна, а в качестве функции $\varphi(t,\vec{x}_0)$ рассматривается нулевое решение системы - $\vec{x} \equiv \vec{0}$, т. е. рассматривается устойчивость положения равновесия. Пусть $\lambda_1,...,\lambda_k$ суть собственные числа матрицы *A* кратности $l_1,...,l_k$ соответственно.

Теорема. 1. Если все $Re\lambda_i < 0, i = 1,...,k$, то нулевое решение (положение равновесия) асимптотически устойчиво.

2. Если $Re\lambda_i \le 0, i = 1,...,k$ и , если $Re\lambda_i = 0$ и базис в базис в соответствующем инвариантном подпространстве состоит из собственных векторов (жордановы клетки соответствующим этим λ_i имеют размер, равный 1), то положение равновесия устойчиво по Ляпунову.

3. Если имеется λ_i, у которого $Re\lambda_i > 0$, или $Re\lambda_i = 0$, а жорданова клетка имеет размер больший или равный двум (жорданов базис имеем помимо собственных присоединенные вектора), то решение неустойчиво.

Док-во

Решение линейной системы с постоянными коэффициентами такое, что $\vec{\tilde{x}}(0) = \vec{x}_0$ записывается в виде

$$\vec{\tilde{x}}(t) = e^{tA}\vec{x}_0, \tag{5.3}$$

где e^{tA} есть матричная экспонента, а *A* матрица системы.

Напомним, что $e^{tA} = S \begin{Vmatrix} e^{\lambda_1 t} J_1, 0..........,0 \\ 0, e^{\lambda_2 t} J_2, 0, ..., 0 \\ .... \\ 0...0, e^{\lambda_s t} J_s, 0..., 0 \\ .... \\ 0, ...0, e^{\lambda_{1k} t} J_k \end{Vmatrix} S^{-1}$, где S - матрица перехода к соответствующему жорданову базису - $\{\vec{h}^{l_1}\}, ..., \{\vec{h}^{l_s}\}, ..., \{\vec{h}^{l_k}\}$, а $\{\vec{h}^{l_s}\}$ есть базис в инвариантном подпространстве $Ker \|A - \lambda_s E\|^{l_s}$. Тогда $J_s = \begin{Vmatrix} 1 \frac{t}{1!} .... \frac{t^{l_s - 1}}{(l_s - 1)!} \\ 0\,1 ...... \quad \frac{t^{l_s - 2}}{(l_s - 2)!} \\ .... \\ 0 .... \frac{t}{1!} \\ 0 ....01 \end{Vmatrix}$. Пусть $\bar{A}$ матрица исследуемой системы в жордановом базисе. Тогда в этом базисе $e^{t\bar{A}} = \begin{Vmatrix} e^{\lambda_1 t} \|P_{ij}^1(t)\| \, 0.............0 \\ 0\, e^{\lambda_2 t} \|P_{ij}^2(t)\| \, 0...........0 \\ 0...0\, e^{\lambda_s t} \|P_{ij}^s(t)\| \, 0......0 \\ .... \\ 0 ....0\, e^{\lambda_k t} \|P_{ij}^k(t)\| \end{Vmatrix}$, где $\|P_{ij}^s(t)\|, i, j = 1, 2, ..., l_s; s = 1, 2, ..., k$ есть матрица, все члены которой будут многочлены степени не выше, чем $l_s - 1$. Отсюда следует, что любой элемент матрицы e^{tA} есть $P_{ij}(t) e^{(r_s + i\omega_s)t} = e^{r_s t} P_{ij}(t)(cos\omega_s t + isin\omega_s t), i, j = 1, 2, ..., n$. Причем степень P_{ij} не выше $m = \max\limits_{s=1,2,...,k} \{l_s - 1\}$.

Пусть $\lambda_s = r_s + i\omega_s$. Тогда $P_{ij} e^{\lambda_s t} = e^{r_s t} P_{ij}(cos\omega_s t + isin\omega_s t)$ и поэтому $\left|P_{ij} e^{\lambda_s t}\right| = e^{r_s t} \left|P_{ij}\right| \left|(cos\omega_s t + isin\omega_s t)\right| = e^{r_s t} \left|P_{ij}(t)\right|$.

Пусть все $r_s < 0, s = 1,..,k$. Обозначим через $\alpha = \inf\limits_{s=1,...,k} \left|r_s\right| > 0$. Положим $e^{tA} = e^{-\alpha t}(e^{tA} e^{\alpha t}) = e^{-\alpha t} \bar{\Phi}(t)$. Так как $\forall s \lim\limits_{t \to +\infty} e^{(r_s + \alpha)t} \left|P_{ij}\right| = 0 \; \forall i, j = 1, 2, ..., n$, то все элементы матрицы $\bar{\Phi}(t)$ стремятся к нулю и поэтому ограничены. Тогда можно положить, что $\forall t \quad 0 < t < \infty \; \|\bar{\Phi}(t)\| = m$. Пусть $\vec{x}_0$ из (5.3) выбрана так, что $\left|\vec{x}_0\right| < \delta = \varepsilon / m$. Тогда, учитывая (5.2), имеем $\left|\vec{\bar{x}}(t)\right| = \left|\Phi(t)\vec{x}_0\right| \le e^{-\alpha t} \|\bar{\Phi}(t)\| \left|\vec{x}_0\right| \le e^{-\alpha t} \varepsilon \to 0$.

Пусть выполнено второе условие, т.е. все $r_s < 0, s \ne l, s = 1,..,k,$, а $r_l = 0$. Тогда в (5.3) имеются слагаемые вида $P_{ij} e^{i\omega_l t}$. Так как жорданова клетка у этого корня имеет размер единицу, то все $P_{ij} = C_s$ - многочлен нулевой степени. Так как $\left|e^{i\omega_l t}\right| = 1$, то все элементы матрицы $\Phi(t)$

ограничены и $\exists t^*$такое, что $\forall t \geq t^* \exists m = \sup\limits_{i,j,\in[1,n]} \left|\Phi_i^j(t)\right| = \left\|\Phi(t)\right\|$.Тогда для $\left|\vec{x}_0\right| < \delta = \varepsilon / m$ $\left|\vec{x}(t)\right| = \left|\Phi(t)\vec{x}_0\right| \leq \left\|\Phi(t)\right\| \left|\vec{x}_0\right| \leq \varepsilon$ - решение устойчиво по Ляпунову.

Пусть $\exists \varepsilon_0 > 0$ такое, что $\forall \delta > 0 \, \exists \vec{\psi}(t)$ - решение такое, что $\left|\vec{\psi}(0)\right| < \delta$, но $\exists t = t^*$ такое, что $\left|\vec{\psi}(t^*)\right| \geq \varepsilon_0$, тогда нулевое решение неустойчиво. Будет говорить , что решение $\vec{\varphi}(t)$ не ограничено, если неограничен при $t \to \infty \left|\vec{\varphi}(t)\right|$. Ясно, что, если $\vec{\varphi}(t)$ есть решение однородной системы, и оно не ограничено, то $\forall c \neq 0$ $c\vec{\varphi}(t)$ тоже решение однородной системы и оно тоже не ограничено.

Если $r_s > 0$, то $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{r_s t} \left|P_{ij}\right| = \infty, \forall i, j, 1, 2, ..., n$ и $\vec{x}(t)$ не ограничено. Положим $c = \dfrac{\delta}{2\left|\vec{x}(0)\right|}, \delta > 0$. Рассмотрим $\vec{x}_1(t) = c\vec{x}(t)$ $\left|\vec{x}_1(0)\right| = \dfrac{\delta}{2} < \delta$. Так как $\vec{x}_1(t)$ не ограничено, т.е. $\forall \varepsilon_0 > 0 \, \exists t = t^*$ такое, что $\left|\vec{x}_1(t^*\right| \geq \varepsilon_0$, то нулевое решение неустойчиво.

Если $r_s = 0$, то P_{ij} в этом случае не нулевой степени, и поэтому $\vec{x}(t)$ не ограничено.

Устойчивость по линейному приближению

Пусть $\vec{a}$ положение равновесия автономной системы $\dfrac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$. Вектор-функция $\vec{f}(\vec{x})$ предполагается дважды непрерывно дифференцируемой некоторой окрестности U точки $\vec{a}$. Обозначим матрицу Якоби - $\left\|\dfrac{\partial f^i}{\partial x_j}(a)\right\| = \left\|a_j^i\right\| = A, i, j = 1, ..., n$. Отбрасывая в выражении для правой части исходной системы квадратичные по $(x^j - a^j)$ нелинейные члены и полагая $y^j = (x^j - a^j)$, получим линейную систему -

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y} \qquad (5.4).$$

Эта система называется линеаризацией исходной системы в окрестности U точки $\vec{a}$. Довольно часто по структуре положения равновесия линеаризованной системы удается судить об устойчивости положения равновесия исходной нелинейной системы.

Теорема Ляпунова об устойчивости по линейному приближению. Пусть вектор-функция $\vec{f}(\vec{x})$ дважды непрерывно дифференцируемой некоторой окрестности U точки $\vec{a}$. Если вещественные части всех собственных значений матрицы Якоби - $\left\|\dfrac{\partial f^i}{\partial x_j}(a)\right\| = A$ отрицательны, то положение равновесия $\vec{a}$ асимптотически устойчиво.

Если в условии сформулированной выше теоремы матрица Якоби имеет хотя бы одно собственное число с положительной реальной частью, то положение равновесия $\vec{a}$ неустойчиво. В случае наличия чисто мнимых собственных чисел результат зависит от нелинейных членов, которыми в этом случае нельзя пренебрегать.

Полученные результаты применим к исследованию поведения фазовых траекторий системы

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y) \\ \dot{y} = f_2(x, y) \end{cases} \quad (5.5) .$$

Пусть $\vec{a} = \{x_0, y_0\}$ положение равновесия этой системы. Линеаризовав (5.5) в окрестности этой точки, получим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y \\ \dot{y} = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y \end{cases} \qquad (5.6).$$

Из сформулированной выше теоремы имеем

Теорема Пусть положение равновесия (0,0) системы (5/6) есть узел, седло или фокус (грубые положения равновесия). Тогда фазовые траектории системы (5.5) имеют в малой окрестности точки $\vec{a}$ туже топологическую структуру, что фазовые траектории системы (5.6). Центр не грубое положение равновесия.

Рассмотрим уравнение $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f_2(x, y)}{f_1(x, y)}$ (5.7).

Точка (x_0, y_0) называется особой (5.7) , если $f_1(x_0, y_0) = 0,\ f_2(x_0, y_0) = 0$. Ясно. что фазовые траектории (5.5) ,кроме входящих в особую точку, есть решения (5.7) со всеми вытекающими отсюда последствиями.

Пусть $x(t),\ y = y(t)$ суть решения (2) с начальными данными $x(0) = x_0, y(0) = y_0$. Пусть также эти решения определены при всех $-\infty < t < \infty$. γ - фазовая траектория (2) $x(t),\ y = y(t)$, $-\infty < t < \infty$. Часть траектории γ, заданная при $0 \le t < \infty\ (-\infty < t \le 0)$, называется положительной (отрицательной) полутраекторией. Точка $(\tilde{x}, \tilde{y})$ называется ω-предельной точкой траектории γ , если существует последовательность моментов времени $t_n \to +\infty$ такая, что $(x(t_n), y(t_n)) \to (\tilde{x}, \tilde{y})$. Точно также вводится понятие α -предельной точкой траектории γ (в этом случае $t_n \to -\infty$). Множество $\omega(\gamma)$ $(\alpha(\gamma))$ всех ω-предельных (α -предельных) точек называется ω-предельным (α -предельным) множеством траектории γ.

Пусть γ - замкнутая траектория, в некоторой окрестности которой нет других замкнутых траекторий. Тогда все траектории, которые начинаются достаточно близко от γ, спиралевидно приближаются к γ при, либо $t \to +\infty$ при $t \to -\infty$. Такая траектория называется предельным циклом. Он может быть устойчивым, неустойчивым или полуустойчивым.

Лекция 28

§6. Первые интегралы автономной системы ДУ.

Рассмотрим систему $\dfrac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(t,\vec{x})$

Система неавтономна. Пусть в некоторой области $G\subseteq R^{n+1}_{t,\vec{x}}$ выполнены условия основной теоремы. Пусть функция $u(t,\vec{x})$ непрерывно дифференцируема в G, а $\vec{x}=\vec{x}(t)$ - решение написанной выше системы. Тогда $u(t,\vec{x}(t))=\overline{u}(t)$. Дифференцируя это равенство по t и учитывая, что $\vec{x}=\vec{x}(t)$ есть решение рассматриваемой системы, получаем $\dfrac{d\overline{u}}{dt}=\dfrac{\partial u}{\partial t}+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial u}{\partial x^i}(t,\vec{x})\dfrac{dx^i}{dt}=\dfrac{\partial u}{\partial t}+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial u}{\partial x^i}(t,\vec{x}(t))\,f^i(t,\vec{x}(t))$ Полученное выражение называется производной функции $u(t,\vec{x})$ в силу системы $\dfrac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(t,\vec{x})$.

Рассмотрим автономную систему
$$\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(\vec{x}) \qquad (6.1)$$

и функцию $u(\vec{x})$, область определения которой есть $D\subseteq R^n$ - фазовое пространство системы (6.1). Так как D соткано из фазовых траекторий системы (6.1)), на D определена функция $\overline{u}(t)=u(\vec{x}(t))$, где $\vec{x}(t)$ какое-либо решение (6.1). Производная функции $\overline{u}(t)$ в силу системы (6.1) есть
$$\frac{du}{dt}=\dot{u}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x^i}(\vec{x})f^i(\vec{x}(t))=(\nabla u,\vec{f}) \qquad (6.2)$$
Производная в силу системы (6.1) называется также производной по направлению векторного поля или производной Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Первым интегралом системы (6.1) в области D (фазового пространство (6.1)) называется функция $u=u(\vec{x})=u(x^1,...,x^n)$, сохраняющее постоянное значение вдоль каждой траектории системы (6.1), проходящей в D, т. е.
$$u(x^1(t),...,x^n(t))=\mathrm{C} \qquad (6.3).$$
Геометрический смысл соотношения (6.3) очевиден. Пусть существует $k\in n$ такое, что $\dfrac{\partial u}{\partial x^k}\neq 0$ (функция $u(\vec{x})$ предполагается непрерывно дифференцируемой по каждой переменной). Тогда (6.3) определяет в области D гладкую $n-1$ мерную поверхность, целиком состоящую из фазовых траекторий системы (6.1). Пусть точка $M(\vec{x}_0)$ принадлежит поверхности (6.3). Тогда $u(M)=C$. На фазовой кривой, проходящей через эту точку функция $u(\vec{x})=\mathrm{C}$, поэтому вся эта траектория лежит на поверхности.

Теорема. Для того чтобы функция $u(\vec{x})$ была первым интегралом системы (6.1)), необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла соотношению $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial u}{\partial x^i}(\vec{x})f^i(\vec{x})=0$ (6.4)

Необходимость

Пусть $u(\vec{x})$ есть первый интеграл и $\vec{x}=\vec{x}(t)$ - решение (6.1). Тогда имеем $u(\vec{x}(t))=$ $=u(x^1(t),...,x^n(t))=\mathrm{C}$. Откуда в силу (6.2) следует (6.4).

Достаточность

Пусть выполнено (6.4) и $\vec{x}=\vec{x}(t)$ - решение (6.1). Имеем $\frac{d}{dt}u(\vec{x}(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x^i}(\vec{x})f^i(\vec{x})=0$. Откуда $u(x^1(t),...,x^n(t))=\mathrm{C}$ и $u(\vec{x})$ первый интеграл.

Лемма. Производная в силу системы инвариантна относительно гладкой обратимой замены координат.

Док-во

Пусть имеется гладкая замена координат - $x^i=g^i(y^1,...,y^n)=x^i(y^1,...,y^n)=x^i(\vec{y}),i=1,...,n$, и она обратима - $y^l=\varphi^i(x^1,...,x^n)=y^l(x^1,...,x^n)=y^l(\vec{x}),l=1,...,n$. Тогда имеются очевидные соотношения - $\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\frac{\partial y^k}{\partial x^j}=\delta_j^i=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial y^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial y^j}$. Система (6.1) перепишется в новых переменных следующим образом - $\dot{x}^i=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\dot{y}^k=f^i(x^1(\vec{y}),...,x^n(\vec{y}))=f^i(\vec{y})$. Откуда

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y^l}{\partial x^i}\dot{x}^i=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y^l}{\partial x^i}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\dot{y}^k=\sum_{i=1}^{n}\delta_k^l\dot{y}^k=\dot{y}^l=$$

$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y^l}{\partial x^i}f^i(x^1(\vec{y}))=\tilde{f}^l(\vec{y})$. Откуда уравнение (6.1) в новых переменны записывается в виде $\dot{y}^l=\tilde{f}^l(\vec{y}),l=1,...,n$ Обозначим через $\tilde{u}(y^1,...,y^n)=u(\vec{x}(\vec{y}))$ и рассмотрим производную от этой функции в силу полученной выше системы. Имеем $\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y^k}\tilde{f}^k=\sum_{k=1}^{n}(\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x^l}\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\tilde{f}^k)=\sum_{k=1}^{n}(\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x^l}\frac{\partial x^i}{\partial y^k})(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y^k}{\partial x^i}f^i)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x^l}\delta_l^i f^i=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x^i}f^i$.

Следствием этой леммы является тот факт, что если $u(\vec{x})$ есть первый интеграл, то в новых переменных эта функция тоже будет первым интегралом.

Для любой функции $g\in C^1$ (одной или нескольких переменных) сложная функция $g(u(\vec{x}))$ (соответственно $(g(u_1(\vec{x}),...,u_k(\vec{x}))$) тоже постоянна вдоль каждой траектории (6.1), а значит является первым интегралом. Поэтому первых интегралов бесконечно много.

Система первых интегралов $u_1(\vec{x}),...,u_k(\vec{x}),\ k<n$ называется независимой (или функционально независимой) в области D, если $rang\left\|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right\|=k,\ i=1,...,k;\ j=1,...,n$ в каждой точке этой области. Функциональная независимость отличается от линейной. Ясно, что из линейной зависимости следует функциональная зависимость. Обратное неверно - $u_1=1-x$ и $u_2=(1-x)^2$ функционально зависимы, но линейно независимы в любой области.

Если известны независимые первые интегралы системы $u_1(\vec{x}),...,u_k(\vec{x}),\ k<n$, то порядок этой системы можно понизить на κ. В самом деле, имеем $\begin{cases}u_1(x^1,....x^n)=C_1\\ ....\\ u_k(x^1,....x^n)=C_k\end{cases}$. По теореме о неявной функции в случае, если базисный минор матрицы Якоби этой системы расположен в первых столбцах, можно получить

$$\begin{cases}x^1=\varphi^1(x^{k+1},...,x^n)\\ ....\\ x^k=\varphi^k(x^{k+1},...,x^n)\end{cases} \qquad (6.\ 5).$$

Подставляя эти соотношения в уравнения системы (6.1), начиная с $k+1$ уравнения, получим систему дифференциальных уравнений для функций $x^{k+1}(t),...,x^n(t)$. Решив эту систему, найдем остальные функции с помощью формул (6.5).

Теорема. Пусть точка $M(\vec{x}_0) \in D$ не является положением равновесия системы (6.1). Тогда существует окрестность этой точки, в которой существует $n-1$ независимый интеграл автономной системы (6.1).

Док-во

Пусть $\vec{x}(t)$ есть решение (6.1) такое, что $\vec{x}(0)=\vec{x}_0$. Так как $M(\vec{x}_0) \in D$ не особая точка системы (6.1) через нее проходит одна фазовая траектория и имеется хотя одно какое-то $f^i(x_0^1,...,x_0^{n)}) \neq 0$. Будем считать, что $f^n(x_0^1,...,x_0^n) \neq 0$. Из-за непрерывности $f^n(\vec{x})$ существует окрестность - U точки $M(\vec{x}_0)$, где $f^n(\vec{x}) \neq 0$. Тогда в окрестности U правая часть системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx^1}{dx^n} = \dfrac{f^1}{f^n} = \tilde{f}^1 \\ .... \\ \dfrac{dx^{n-1}}{dx^n} = \dfrac{f^{n-1}}{f^n} = \tilde{f}^{n-1} \end{cases} \tag{6.6}$$

удовлетворяет основной теореме. Поэтому $\forall \vec{\xi} \in U$ существует и единственно решение (6.6) такое, что при $x^n = \xi^n$ $x^1(\xi^n) = \xi^1,...,x^{n-1}(\xi^n) = \xi^{n-1}$. Это решение запишем в виде

$$\begin{cases} x^1 = \varphi^1(x^n, \xi^1,...,\xi^{n-1}) \\ .... \\ x^{n-1} = \varphi^{n-1}(x^n, \xi^1,...,\xi^{n-1}) \end{cases} \tag{6.7}$$

На (6.7)) можно смотреть как на систему уравнений для определения неизвестных $\xi^1,...,\xi^{n-1}$.

$J(x^n) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi^1}{\partial\xi^1}, ..., \dfrac{\partial\varphi^1}{\partial\xi^{n-1}} \\ .... \\ \dfrac{\partial\varphi^{n-1}}{\partial\xi^1}, ..., \dfrac{\partial\varphi^{n-1}}{\partial\xi^{n-1}} \end{vmatrix}$ - якобиан системы (6.7). В силу непрерывности всех $\dfrac{\partial\varphi^i}{\partial x_0^k}(x^n, \xi^1,...,\xi^{n-1}), i,k = 1,...,n-1$ существует окрестность $\vec{\xi}$, в которой $J(x^n) \neq 0$. Действительно, $J(x_0^n) = \left|\delta_k^i\right| = 1$. В этой окрестности систему (6.7) можно разрешить и получить, что

$$\begin{cases} \xi^1 = \psi_1(x^1,...,x^{n-1},x^n) \\ .... \\ \xi^{n-1} = \psi_{n-1}(x^1,...,x^{n-1},x^n) \end{cases} \quad (6.8).$$

Проинтегрируем формально последнее уравнение системы (6.1) с условием, что при $t=\tau$ $x^n(\tau) = \xi^n$. Получим - $x^n = \xi^n + \int_\tau^t f^n(\vec{x}(\tau))d\tau$. Тогда имеем $\forall s \in [1, n-1]$ $\xi^s = const =$ $= \psi^s(x^n, x^1,...,x^{n-1}) = \psi^s(x^n, \varphi^1(x^n,\xi^1,...,\xi^{n-1}),...,\varphi^{n-1}(x^n,\xi^1,...,\xi^{n-1})) = \psi^s(\tilde{\varphi}^1(t+\tau,\xi^1,...,\xi^{n-1}),...,\tilde{\varphi}^{n-1}(t+\tau,\xi^1,...,\xi^{n-1}))$ Так как $\vec{\xi}$ произвольная точка из окрестности U, то функции

$\tilde{\varphi}^1(t+\tau,\xi^1,...,\xi^{n-1}),...,\tilde{\varphi}^{n-1}(t+\tau,\xi^1,...,\xi^{n-1})$ суть решения (6.1). Откуда следует, что (6.8) есть система первых интегралов (6.1). Их $n-1$ штук и они независимы. Так как $I=\begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial x^1}(\vec{x}),.......,\frac{\partial\psi_1}{\partial x^{n-1}}(\vec{x}) \\ .... \\ \frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x^1}(\vec{x}),...,\frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x^{n-1}}(\vec{x}) \end{vmatrix}=\frac{1}{J(x^n)}\neq 0$. Условие, что точка $M(\vec{x}_0)\in D$ не является положением равновесия системы существенно. Пусть имеется система второго порядка и точка $M(\vec{x}_0)\in D$ является устойчивым узлом, и пусть $u(x,y)$ есть первый интеграл. Для фазовой траектории, проходящей через точку $M_1(x_1,y_1)$ $u(x_1,y_1)=a=u(x_0,y_0)$, так фазовая траектория входит в узел. Для фазовой траектории, проходящей через точку $M_2(x_2,y_2)$, которая тоже входит в узел $u(x_2,y_2)=a$. Откуда

$u(x,y)=C\ \forall M(x,y)$ и не является независимым интегралом.

Лекция 29

Глава 12. Дифференциальные уравнения в частных производных.

§1. Основные определения

Рассмотрим уравнение $\sum_{i=1}^{n} f^i(\vec{x},u)\frac{\partial u}{\partial x^i} = F(\vec{x},u)$ (7.1)

Функция $u(\vec{x})$ называется решением (7.1), если $u(\vec{x}) \in C^1(R^n)$ и после подстановки ее в (7.1) получается тождество, $f^i(\vec{x},u) \in C^1(R \times R^n), i = 1,...,n,$ $F(\vec{x},u) \in C^1(R \times R^n)$ - заданные функции. (7.1) называется квазилинейным уравнением в частных производных первого порядка.

Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f^1(\vec{x},u) \\ .... \\ \dot{x}^n = f^n(\vec{x},u) \end{cases} \tag{7.2}$$

Система (7.2) называется характеристической системой (7.1), а $\vec{x}(t)$ - фазовые кривые (7.2) называются характеристиками (7.1). Основное свойство характеристик состоит в том, что уравнение для $u(\vec{x})$) в силу системы (7.2) есть $\frac{du}{dt} = F(\vec{x}(t),u)$, а это есть обыкновенное дифференциальное уравнение.

Предметом нашего исследования будет следующее уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} f^i(\vec{x},)\frac{\partial u}{\partial x^i} = 0 \tag{7.3}$$

Это соотнощение называется линейным однородным уравнением первого порядка в частных производных. Соответственно характеристической системой (7.3) будет система

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f^1(\vec{x}) \\ .... \\ \dot{x}^n = f^n(\vec{x}) \end{cases} \tag{7.4}$$

Теорема. Пусть $v_1(\vec{x}) = c_1,...,v_k(\vec{x}) = c_k$ суть независимые интегралы (7.4). Тогда $u(\vec{x}) = F(v_1(\vec{x}),...,v_k(\vec{x}))$ есть решение (7.3). Из теоремы, доказанной в предыдущей главе следует и обратное утверждение. Отметим, что $F(\vec{v}) \in C^1$ - произвольная функция.

§2.Задача Коши для уравнения в частных производных первого порядка.

Общим положением является тот факт, что решение уравнения в частных производных содержит произвол в функцию. Поэтому, как и в случае ОДУ, необходимо иметь процедуру, позволяющую выделить единственное решение. Рассмотрим такую процедуру.

Пусть $S : g(\vec{x}) = 0$ - гладкая поверхность в R^n и $\nabla g = \left\| \frac{\partial g}{\partial x^1}, \frac{\partial g}{\partial x^2},..., \frac{\partial g}{\partial x^n} \right\| \neq 0 \; \forall \vec{x} \in S$. Точка $\vec{a} \in S$ называется некритической точкой поверхности , если $\vec{f}(\vec{a}) \neq \vec{0}$ или $(\nabla g(\vec{a}) \cdot \vec{f}(\vec{a})) \neq 0$.

Пусть на S задана функция $U_0(\vec{x})$ и $U_0(\vec{x}) \in C^1(R^n)$. Задача Коши для (7.3) ставится так: найти $u(\vec{x})$ решение (7.3) такое. что $u(\vec{x}) = U_0(\vec{x}) \; \forall \vec{x} \in S$.

Теорема. Пусть на гладкой поверхности S задана непрерывно дифференцируемая функция $U_0(\vec{x})$. Тогда в достаточно малой окрестности ее любой некритической точки решение задачи Коши существует и единственно.

Док-во

Так как $\vec{a} \in S$ некритическая точка, существует ее окрестность - U , где имеется $n-1$

независимых первых интегралов (7.4) - $v_1(\vec{x})=c_1,...,\text{v}_{n-1}(\vec{x})=c_{n-1}$. Общее решение (7.3) есть $u=u(v_1(\vec{x}),...,v_{n-1}(\vec{x}))$. Рассмотрим систему уравнений относительно неизвестных

$\vec{x}_s=\{x_s^1,...,x_s^n\}$ - $\begin{cases} v_1(\vec{x})=c_1 \\ \text{.............} \\ v_{n-1}(\vec{x})=c_{n-1} \\ g(\vec{x})=0 \end{cases}$. Если эту систему удастся разрешить, то можно получить, что

$x_s^1=x_s^1(c_1,...,c_{n-1}),...,x_s^n=x_s^n(c_1,...,c_{n-1})$, и $g(\vec{x}_s)=0$ и. Рассмотрим определить

$J(\vec{a})=\begin{vmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x^1}(\vec{a}),.......,\frac{\partial v_1}{\partial x^n}(\vec{a}) \\ \text{..............................} \\ \frac{\partial v_{n-1}}{\partial x^1}(\vec{a}),...,\frac{\partial v_{n-1}}{\partial x^n}(\vec{a}) \\ \frac{\partial g}{\partial x^1}(\vec{a}),.......,\frac{\partial g}{\partial x^n}(\vec{a}) \end{vmatrix}$. Так как $\vec{f}(\vec{a})\neq\vec{0}$, то умножим $i^{\text{ый}}$ столбец определителя на число, $r^i=f^i(\vec{a})$, и прибавим к первому столбцу все те столбцы, которые умножались непосредственно на $f^i(\vec{a})\neq 0$. Принимая во внимание, что $\forall i=1,...,n-1\ \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial v_i(\vec{a})}{\partial x^j}f^j(\vec{a})=0$, получим, что

$$r^1J(\vec{a})=\begin{vmatrix} 0,\frac{\partial v_1}{\partial x^2}r^2,............,\frac{\partial v_1}{\partial x^n}r^n \\ \text{....................................} \\ 0,\frac{\partial v_{n-1}}{\partial x^2}r^2,.........,\frac{\partial v_{n-1}}{\partial x^n}r^n \\ (\nabla g\cdot\vec{f}),\frac{\partial g}{\partial x^2}r^2,...,\frac{\partial g}{\partial x^n}r^n \end{vmatrix}=(-1)^{n+1}(\nabla g\cdot\vec{f})\cdot\begin{vmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x^2}r^2,............,\frac{\partial v_1}{\partial x^n}r^n \\ \text{....................................} \\ \frac{\partial v_{n-1}}{\partial x^2}r^2,.........,\frac{\partial v_{n-1}}{\partial x^n}r^n \end{vmatrix}\neq 0 \quad,$$

так как ранг матрицы $\left\| r^i\cdot\frac{\partial v_i}{\partial x^j}\right\|, i=1,...,n-1;\ j=1,...,n$ равен $n-1$. В силу непрерывности рассматриваемых функций существует окрестность точки $\vec{a}$, в которой определитель матрицы Якобы исходной системы отличен от нуля. Тогда, согласно теореме о неявных функциях система однозначно разрешима и существуют и единственны определенные выше функции $x_s^1=x_s^1(c_1,...,c_{n-1}),...,x_s^n=x_s^n(c_1,...,c_{n-1})$. Тогда $u=u(\vec{x}_s(c_1,...,c_{n-1}))$ есть решение (7.3) и $u(\vec{x}_s)=u_0(\vec{x})\ \forall\vec{x}\in S$. Единственность решения следует из метода его построения.

Мы же рассмотрим следующую задачу - решить уравнение

$$a(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}+c(x,y)z=f(x,y) \qquad (2)$$

(2) – линейное неоднородное уравнение в частных производных, где $z(x,y)$ - искомая функция, а $a(x,y),b(x,y),c(x,y)$ и $f(x,y)$ заданные непрерывно дифференцируемые функции в некоторой области D на плоскости (*x* ,*y*). Имеется кривая $\gamma:\begin{cases} x=\varphi(s) \\ y=\psi(s) \end{cases}, s\in I=[s_1,s_2]$ непрерывно дифференцируемая при $s\in I$ и $(\varphi'(s),\psi'(s))\neq(0,0)\ \forall s\in I$. На γ задано значение функции

$$z\Big|_{\gamma}=h(s)\,, \qquad (3),$$

т.е. $z(\varphi(s),\psi(s)) = h(s)$ и $h(s)$ непрерывно дифференцируемо при $s \in I$. Характеристическая система (2) –

$$\dot{x} = a(x, y), \dot{y} = b(x, y) \quad (4).$$

Пусть кривая γ в каждой своей точке не касается характеристик. Тогда задача Коши - (2)$\wedge$ (3) однозначно разрешима в некоторой окрестности кривой γ.

Док-во

Касательный вектор к фазовым траекториям (4) есть $\vec{\mathrm{v}} = \{a(x,y), b(x, y,)\}$, поэтому, если кривая γ в каждой своей точке не касается характеристик, то $\vec{\mathrm{v}} \neq \vec{\tau} = \{\varphi'(s), \psi'(s)\}$. Тогда

$$\begin{vmatrix} a(\varphi(s),\psi(s)), \varphi'(s) \\ b(\varphi(s),\psi(s)), \psi'(s) \end{vmatrix} \neq 0 \ \forall s \in I \quad (5)$$

Уравнение (2) в силу системы (4) имеет следующий вид

$$\frac{dz}{dt} + cz = f \quad (6).$$

(3) есть условие, которому должно удовлетворять $z(x, y)$ - решение (2) на характеристиках (4). Выпустим из каждой точки кривой γ характеристику, т. е. решим (4) с начальными условиями

$$x\big|_{t=0} = \varphi(s), \ y\big|_{t=0} = \psi(s) \quad (7).$$

Пусть $x = x(t,s), y = y(t,s)$ есть решение задачи (4)$\wedge$ (7), когда s пробегает промежуток I. Для (6) поставим следующую задачу Коши

$$z\big|_{t=0} = h(s) \quad (8).$$

Согласно основным теоремам о существовании решения задачи Коши и непрерывной зависимости решения от начальных данных, существует решение (6)$\wedge$ (8) - $z = w(t,s)$ непрерывно дифференцируемое в некоторой области $G \subset D$. На соотношения $x = x(t,s), y = y(t,s)$ можно смотреть как на систему уравнений относительно t и s. Выразим их через x и y. Это можно сделать. Так как

$J(t,s) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial t}, \dfrac{\partial x}{\partial s} \\ \dfrac{\partial y}{\partial t}, \dfrac{\partial y}{\partial s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a(x(t,s), y(t,s)), \dfrac{\partial x}{\partial s}(t,s) \\ b(x(t,s), y(t,s)), \dfrac{\partial y}{\partial s}(t,s) \end{vmatrix} \neq 0$, ибо $J(0,s) = \begin{vmatrix} a(\varphi(s),\psi(s)), \varphi'(s) \\ b(\varphi(s),\psi(s)), \psi'(s) \end{vmatrix} \neq 0 \ \forall s \in I$ непрерывная функция переменных t,s и $J(0,s) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s}, \dfrac{\partial y}{\partial s} \\ \dfrac{\partial x}{\partial t}, \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix}_{t=0} = \begin{vmatrix} \varphi'(s), \psi'(s) \\ a(x, y), b(x, y) \end{vmatrix}_{(x,y)\in\gamma} \neq 0$ в силу (3).

Поэтому существует окрестность кривой γ, где $J(t,s) \neq 0$. Тогда выразим $t = t(x, y)$ и $s = s(x, y)$ через x и y и
подставим их в выражение для функции z. Получим $z = w(t(x, y), s(x, y)) = \overline{w}(x, y)$ Тем самым доказано существование решения (2) в этой окрестности. Допустим, что имеется еще решение (2)$\wedge$ (3) $z = \tilde{w}(x, y)$. Положим $\tilde{z} = w - \tilde{w}$. В силу (6) для этой функции имеем $\dfrac{d\tilde{z}}{dt} + c\tilde{z} = 0$ и начальное условие $\tilde{z}\big|_{t=0} = 0$. Основная теорема дает - $\tilde{z} \equiv 0$. Откуда $w = \tilde{w}$.
Имеет место единственность.
Нетрудно видеть, что для решения однородного линейного уравнения в частных производных определяют только независимые первые интегралы характеристической системы. Тогда как при решении уравнений типа (9.2.2) используются выражения для характеристик, т. е. решения самих характеристических уравнений.

Рассмотрим примеры:

1. Решить уравнение $a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}=0$. Характеристическая система следующая - $\frac{dx}{dt}=a,\ \frac{dy}{dt}=b$. Первый интеграл определяется из решения уравнения $\frac{dx}{dy}=\frac{a}{b}$ и равен $ay-bx=C$ и $u=f(bx-ay)$ есть решение рассматриваемого уравнения.

2. Рассмотрим уравнение $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=-z$. В силу характеристической системы это уравнение имеет вид $\frac{dz}{dt}=-z$. Его еще называют соотношением на характеристиках, которому должна удовлетворять функция *z.* Ясно, что решение этого уравнения - $ln|z|=-t+C$, где C есть константа на характеристике, т.е. $C=g(bx-ay)$. Тогда получим, что $z=F(bx-ay)e^{-t}=F(bx-ay)e^{-\frac{(x-x_0)}{a}}=F(bx-ay)e^{-\frac{(y-y_0)}{b}}$, где x_0,y_0 суть произвольные постоянные. Рассмотрим следующие данные Коши $z(2,y)=\sin y$. Положим $x_0=2$ и преобразуем $F(bx-ay)=\tilde{F}(y-\frac{(x-2)b}{a})$. Тогда $z=\tilde{F}(y-\frac{(x-2)b}{a})e^{-\frac{(x-2)}{a}}$. Подставляя $x=2$, получим $\tilde{F}(y)=siny$ и решение уравнение, удовлетворяющее условию Коши есть $z=sin(y-\frac{(x-2)b}{a})e^{-\frac{(x-2)}{a}}$.

3. Для только, что рассмотренного уравнения поставим следующую задачу Коши – на прямой $bx-ay=2$ положим $z=e^{-\frac{(x-5)}{a}}$. Полагая $x_0=5$, получим $F(2)=1$. Отсюда любая функция, удовлетворяющая последнему равенству будет удовлетворять условию Коши. Решение задачи не единственно.

4. Если на прямой $bx-ay=2$ положить $z=sin(\frac{x-x_0}{a})$, то решение такой задачи Коши не существует, так $\frac{e^{-\frac{(x-x_0)}{a}}}{sin(\frac{x-x_0}{a})}\neq const$

5. Решить уравнение $\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0, u>0$ с теми же данными Коши $u(0,x)=\varphi(x)$.Это нелинейное уравнение называется уравнение Хопфа. Оно описывает нелинейное распространение волны. Уравнение характеристик в этом случае будет следующим

$\frac{dt}{d\tau}=1,\frac{dx}{d\tau}=u(x,t)$. В этом случае характеристики будут зависеть от решения – это принципиальное отличие от линейного случая. Чтобы получить решение уравнения Хопфа, сделаем замену – независимую переменную *x* будем считать искомой функцией от переменных t,u, т. е. $x=x(t,u)$. Известно, что $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial(u,x)}{\partial(t,x)},\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial(u,t)}{\partial(x,t)}$.Тогда исходное уравнение имеет вид $u=-\frac{u'_t}{u'_x}=-\frac{\partial(u,x)}{\partial(u,t)}\frac{\partial(x,t)}{\partial(t,x)}=\frac{\partial(u,x)}{\partial(u,t)}=(\frac{\partial x}{\partial t})_u$. Его решение записывается в виде $x-ut=c(u)$.

Откуда $u=F(x-ut)$ - решение уравнения Хопфа.

Лекция 30

Элементы группового анализа ДУ

Прослушав курс дисциплины “Дифференциальные уравнения” можно обратить внимание, что в курсе сравнительно мало времени было уделено проблеме нахождения решения самих ДУ.

Если вспомнить первые лекции, то общий вид ДУ первого порядка был

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \qquad (1)$$

(1) это уравнение в дифференциалах. Если $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=dF(x,y)$ есть дифференциал некоторой функции $z=F(x,y)$, то в этом случае (1) легко интегрируется, и интегральные кривые (1) есть $F(x,y)=C$ - линии уровня функции двух переменных $z=F(x,y)$.

Известно, что для того, чтобы (1) было уравнением в полных дифференциалах необходимо, чтобы выполнялось условие $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}, (x,y)\in\Omega$.

Если в (1) $\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}, (x,y)\in\Omega$, то (1) не является уравнением в полных дифференциалах, и тогда ищется интегрирующий множитель, т. е. функция $\mu(x,y)$ такая, чтобы уравнение $\mu Pdx+\mu Qdy=0$ было бы уравнением в полных дифференциалах. Не трудно получить, что если $\mu(x,y)$ интегрирующий множитель, то должно быть $\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$. Откуда имеем

$$P\frac{\partial\mu}{\partial y}-Q\frac{\partial\mu}{\partial x}=\mu\frac{\partial Q}{\partial x}-\mu\frac{\partial P}{\partial y} \qquad (2)$$

(2) есть уравнение для определения интегрирующего множителя. На этом исчерпываются аналитические методы нахождения решений ДУ.

Рассмотрим следующее ДУ

$$P(y)dx+\varphi(x)dy=0 \qquad (3)$$

В (3) $P(y),\varphi(x)$ непрерывны на $[x_1,x_2]$ и $[y_1,y_2]$ соответственно. Пусть $\varphi(x_0)=0$ или $P(y_0)=0$. Тогда $\begin{cases}x=x_0\\ y=t\end{cases}$ или $\begin{cases}x=t\\ y=y_0\end{cases}$ будут интегральные кривые (3) . Если $P(y)\neq0$ и $\varphi(x)\neq0$, то $\mu(x,y)=\frac{1}{P(y)\varphi(x)}$ есть интегрирующий множитель (3), и $\frac{dx}{\varphi(x)}+\frac{dy}{P(y)}=0$ есть полный дифференциал функции $F(x,y)$. Тогда $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{1}{\varphi(x)}$, и $F(x,y)=\int_{x_1}^{x}\frac{1}{\varphi(t)}dt+C(y)$, где $C(y)$ есть произвольная функция от *y*. Так как $\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{1}{P(y)}$, то $C'(y)=\frac{1}{P(y)}$, и $F(x,y)=\int_{x_1}^{x}\frac{1}{\varphi(t)}dt+\int_{y_1}^{y}\frac{1}{P(t)}dt+C$.

Откуда $\int_{x_1}^{x}\frac{1}{\varphi(t)}dt+\int_{y_1}^{y}\frac{1}{P(t)}dt=C$ есть решение уравнения (3). Если ДУ (1) может быть приведено к виду (3), то оно называется уравнением с разделяющимися переменными. В конечном итоге практически любое уравнение первого порядка так или иначе сводилось к уравнению с разделяющимися переменными. Нашей целью будет указать общие соображения к каким переменным надо переходить, чтобы уравнение $y'=\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ свелось бы к уравнению с разделяющимися переменными. Для этого рассмотрим более подробно такое понятие как однопараметрическая группа преобразований.

Пусть имеется множество взаимно однозначных преобразований R^n - $\tau(R^n)$. Это множество образует группу. Каждому числу $a \in R$ соответствием φ поставим преобразование $g_a = \varphi(a) \in \tau(R^n)$. Причем $\varphi(a+b) = \varphi(a)\cdot\varphi(b)$ и $\varphi(0) = E$ (φ осуществляет изоморфизм коммутативной группы R на группу $\tau(R^n)$). Образ $\varphi(R) \in \tau(R^n)$ называется однопараметрической группой преобразований. Как известно, однопараметрической группой будет фазовый поток автономной системы ДУ. В реальности эта группа $g_a = g_a(M(\vec{x})) = M(\vec{\bar{x}})$ задается в виде

$$\bar{x}^i = \varphi^i(x^1,...,x^n) = \varphi^i(\vec{x},a), i = 1,2,...,n \quad \text{или} \quad \vec{\bar{x}} = \vec{\varphi}(\vec{x},a). \tag{4}$$

Так как группа коммутативная, то $\vec{\varphi}(\vec{x},a+b,) = \vec{\varphi}(\vec{\varphi}(\vec{x},a),b) = \vec{\varphi}(\vec{\varphi}(\vec{x},b),a), \vec{\varphi}(\vec{x},0) = \vec{x}$.
Будем также предполагать, что вектор-функция $\vec{\varphi}(\vec{x},a)$ непрерывно дифференцируема по всем свим аргументам.

Рассмотрим однопараметрическую группу преобразований плоскости (x,y) (R^2) -

$$g_a = g_a(M(x,y)) = \begin{cases} \bar{x} = \varphi(x,y,a) \\ \bar{y} = \psi(x,y,a) \end{cases}, \quad \varphi(x,y,0) = x, \psi(x,y,0) = y \tag{5}$$

При фиксированных x, y (5) есть параметрическое представление кривой γ, проходящей через точку x, y. Эта кривая называется траекторией или орбитой группы.

Кривая γ при сделанных предположений есть гладкая кривая, поэтому с ней можно связать векторное поле, т. е. каждой точке $M(x,y)$ поставим в соответствие вектор $\vec{h}(\xi((x,y),\zeta(x,y))$, касательный к кривой γ, проходящей через эту точку.

Компоненты вектора $\vec{h}$, касательного к кривой γ в точке x, y равны $\xi(x,y) = \frac{\partial\varphi}{\partial a}|_{a=0}$, $\varsigma(x,y) = \frac{\partial\psi}{\partial a}|_{a=0}$, а само векторное поле определено как отображение

$$(x, y) \to \partial_0 g(M(x,y)) = \vec{h}(\xi(x,y),\varsigma(x,y)) = \frac{dg_a}{da}|_{a=0}, \tag{6}$$

Это векторное поле называется касательным векторным полем группы. Рассмотрим

$$\frac{dg_{a+b}(M))}{db}|_{b=0} = \frac{d(g_a \cdot g_b)}{db}|_{b=0} = \frac{d(g_b \cdot g_a)}{db}|_{b=0} = (\frac{dg_b}{db}|_{b=0})\cdot g_a = \partial g_0(g_a(M(x,y)) = \partial g_a(x,a) = \vec{h}(\xi(\bar{x},\bar{y}),\varsigma(\bar{x},\bar{y})).$$

Так как $\vec{h}(\xi(\bar{x},\bar{y}),\varsigma(\bar{x},\bar{y}))$ есть касательный вектор к кривой γ при фиксированном a, то кривая γ есть фазовая траектория автономной системы

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{x}}{da} = \xi(\bar{x},\bar{y}) = \varphi'_a(\bar{x},\bar{y}) \\ \dfrac{d\bar{y}}{da} = \psi(\bar{x},\bar{y}) = \psi'_a(\bar{x},\bar{y}) \end{cases} \tag{7}$$

Система (7) (она записывается в виде $\partial_a g(x,a) = \vec{h} \circ g_a(x,a)$) называется уравнением Ли.
Ранее было получено, что любая автономная система определяет однопараметрическую группу преобразований (фазовый поток).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 Оператор $X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \varsigma\frac{\partial}{\partial y}$ (8)

называется генератором группы g_a. Так как $X(u) = \xi\frac{\partial u}{\partial x} + \varsigma\frac{\partial u}{\partial y}$, то ясно. что генератор группы есть не что иное, как оператор дифференцирования в силу системы Ли группы или оператором дифференцирования по направлению векторного поля группы.

ПРЕДЕЛЕНИЕ 2 Функция $F(x,y)$ называется инвариантом группы (3), если $F(\bar{x},\bar{y}) = F(x,y)\ \forall a$, т.е. F постоянна на любой траектории (5). Ясно. что, если функция

$F(x,y)$ есть инвариант группы, то $X(F(x,y)) = \xi \frac{\partial F}{\partial x} + \varsigma \frac{\partial F}{\partial y} = 0$, и о инвариант группы (3) это просто первый интеграл (7).

Рассмотрим группу $\overline{x} = x + a,\ \overline{y} = y$. Эта группа называется группой смещений. Генератор этой группы есть $X = \frac{\partial}{\partial x}$, а инвариантом этой группы есть любая функция $F(x,y) = f(y)$

Теорема 1. Любая однопараметрическая группа с генератором (8) может быть с помощью подходящей замены

$$t = t(x,y),\ \ u = u(x,y) \tag{9}$$

может быть приведена к группе смещений

$$\overline{t} = t + a, \overline{u} = u \tag{10}$$

Ясно, что генератор в новых переменных имеет следующий вид - $X = \frac{\partial}{\partial t}$, и инвариант группы останется инвариантом и в новых переменных (это было доказано)

Док-во

Имеем $\xi \frac{\partial}{\partial x} + \varsigma \frac{\partial}{\partial y} = \xi(t'_x \frac{\partial}{\partial t} + u'_x \frac{\partial}{\partial u}) + \varsigma(t'_y \frac{\partial}{\partial t} + u'_y \frac{\partial}{\partial u}) = X(t)\frac{\partial}{\partial t} + X(u)\frac{\partial}{\partial u}$. Откуда получим, что функции (9), которые приводят группу к группе смещений, должны удовлетворять следующим уравнениям

$$X(t) = 1 \to \xi \frac{\partial t}{\partial x} + \varsigma \frac{\partial t}{\partial y} = 1,\ X(u) = 0 \to \xi \frac{\partial u}{\partial x} + \varsigma \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{11}$$

Так определенные переменные t и u называются каноническими переменными. Заметим, что переменная u является инвариантом исходной группы.

Рассмотрим ДУ $$y' = \frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{12}$$

Будем говорить, что группа g_a (3) является группой симметрии ДУ (12) или что уравнение (12) до

пускает группу g_a, если форма ДУ (12) остается неизменной после замены переменных при замене $\begin{cases} \overline{x} = \varphi(x,y,a) \\ \overline{y} = \psi(x,y,a) \end{cases} \forall a$, т. е. $\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}} = f(\overline{x},\overline{y})$, где функция f та же самая, что и в исходном уравнении (12). Если ДУ (12) допускает группу, то тогда $f(\overline{x},\overline{y}) = f(x,y)\ \forall a$, и правая часть (12) является инвариантом группы. Тогда, перейдя к каноническим переменным, получим, что уравнение в этих переменных уравнение примет вид

$$\frac{du}{dt} = g(u) \tag{13}$$

Нетрудно видеть , что (13) есть уравнение в с разделяющимися переменными.

Рассмотрим группу растяжений $\overline{x} = e^a x, \overline{y} = e^{\alpha a} x$ $\xi = x, \varsigma = \alpha y$. Найдем канонические перемен-ные. Имеем $x\frac{\partial t}{\partial x} + \alpha y \frac{\partial t}{\partial y} = 1$. Ищем решение этого уравнения в виде $t = t(x)$. Тогда $x\frac{\partial t}{\partial x} = 1 \to t = ln|x|$. Каноническая переменная u является инвариантом группы - $x\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha y \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \to \frac{dy}{y} = \alpha \frac{dx}{x}$, и $u = \frac{y}{|x|^{\alpha}}$.

Решить уравнение $2/3xyy' = \sqrt{x^6 - y^4} + y^2$. Проверим, существует ли α, при которой написанное уравнение допускает группу растяжений. Обозначим $e^{-a} = \lambda > 0 \to e^{-\alpha a} = \lambda^{\alpha}$. Тогда имеем $2/3\lambda^{2\alpha}\overline{x}\overline{y}\overline{y}' = \lambda^3\sqrt{\overline{x}^6 - \lambda^{4\alpha-6}\overline{y}^4} + \lambda^{2\alpha}\overline{y}^2 \to 2/3\overline{x}\overline{y}\overline{y}' = \lambda^{3-2\alpha}\sqrt{\overline{x}^6 - \lambda^{4\alpha-6}\overline{y}^4} + \overline{y}^2$. Ясно, что при $\alpha = \dfrac{3}{2}$ получим $2/3\overline{x}\overline{y}\overline{y}' = \sqrt{\overline{x}^6 - \overline{y}^4} + \overline{y}^2$, т. е. ДУ допускает группу $\begin{cases}\overline{x} = e^{a}x \\ \overline{y} = e^{3/2a}y\end{cases}$. Отсюда новая искомая функция есть $y/|x|^{3/2} = u(x)$ или $y = |x|^{3/2}u$. Тогда $2/3x|x|^3uu' + |x|^2 xsignxu^2 = |x|^3(\sqrt{1-u^4} + u^2)$. Так как $signx \times x = |x|$, то имеем $2/3xuu' + u^2 = \sqrt{1-u^4} + u^2 \to \dfrac{2udu}{3\sqrt{1-u^4}} = \dfrac{dx}{x}, u^2 \neq 1$.

Окончательно - $arc\sin y^2/|x|^3 = \ln|x|^3 + C,\ y^2 = |x|^3$.

Вопрос. Какой вид должна иметь функция $g(x,y)$ в ДУ уў= $g(x,y)$, чтобы оно допускало группу подобия?